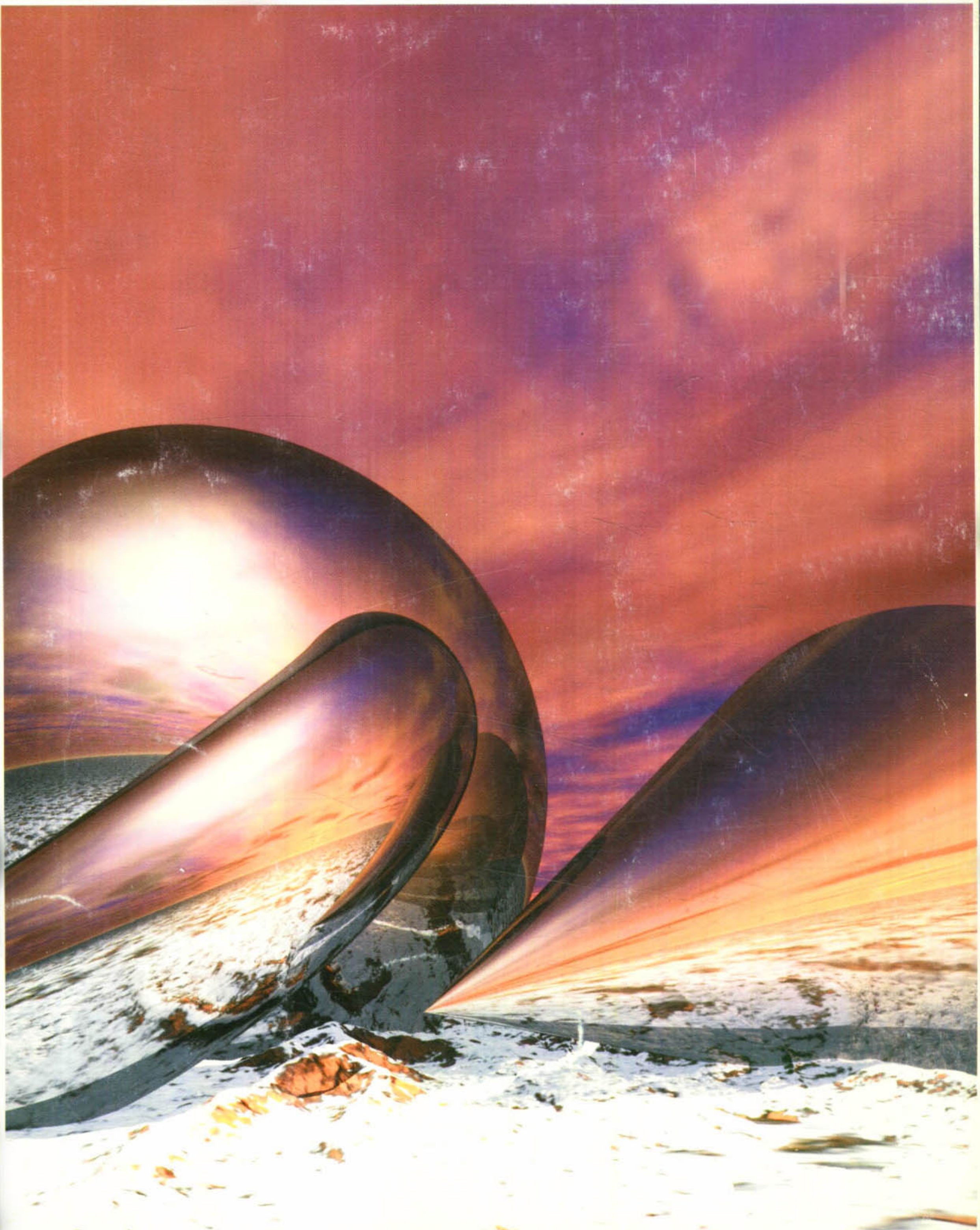
مجلّه ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۳۱

سال نهم، شماره سوّم، زمستان ۱۳۷۸، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

سال نهم ، زمستان ۱۳۷۸، شمارهٔ سوم.

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

مدیر مسؤول: عبد العظیم فریدون

سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی: میرشهرام صدر

اعضای هیأت تحریریه:

آقایان: حمیدرضا امیری محمدهاشم رستمی

احمد قندهاری میرشهرام صدر

هوشنگ شرقی سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

غلامرضا یاسی پور

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویزشهریاری)

مدیرفنی: هوشنگ آشتیانی

طراح گرافیک: امیر بابایی

چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

برهان

● حرف اول / سردبیر	۱
● از تاریخ بیاموزیم (۵) / پرویزشهریاری	۲
● مقاطع مخروطی (۱) / احمد قندهاری	۶
● گشت وگذاری در ریاضیات معاصر / غلامرضا یاسی پور	۱۳
● در حاشیهٔ مثلثات (۳) / حمیدرضا امیری	۱۷
● معماهایی با ماهیت ریاضی / هوشنگ شرقی	۲۳
● اتحادهای جبری / میر شهرام صدر	۲۸
● دفاعیهٔ یک ریاضیدان / غلامرضا یاسی پور	۳۶
● مکان هندسی(۲۰) / محمد هاشم رستمی	۴۰
● پارادوکسهای ریاضیات وعلوم / نصیرنیا	۴۷
● رادیکال (۲) / سیّد محمّد رضا هاشمی موسوی	۴۹
● معرفی کتاب	۵۶
● تعیین تعداد روابط ... / سیمین اکبری زاده	۵۷
● آموزش برنامه نویسی به زبان پاسکال (۵) / محمد رحیم	۶۴
● در آینه / علی فرخ مهر	۶۷
● مکان هندسی و ... (مسائل ترسیمی) / علیرضاعین اللهی	۶۹
● جزء صحیح (۴) / علی حسن زاده ماکویی	۷۳
● معرفی عدد ۱۴۲۸۵۷ / علی اکبر بناگر	۷۶
● آنچه از دوست رسد	۷۷
● پرسشهای چهار گزینه‌ای / هیأت تحریریه	۷۹
● پاسخ پرسشهای چهار گزینه‌ای / هیأت تحریریه	۸۳
● جوابهای تفریح اندیشه	۸۸

نشانی: خیابان سپهبد قرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸

تلفن: ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸، دورنویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹

تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

انتشارات مدرسه

وابسته به وزارت آموزش وپرورش

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

حرف اوّل

«به جوانان عزیز کشورمان، به این سرمایه ها و ذخیره های عظیم الهی و به این گلهای معطّر و نوشکفتهٔ جهان اسلام سفارش می کنم که قدر و قیمت لحظات شیرین زندگی خود را بدانید و خودتان را برای یک مبارزهٔ علمی و عملی بزرگ تا رسیدن به اهداف عالی انقلاب اسلامی آماده کنید و .....»

امام خمینی (ره)

عزیزان دانش‌آموز، ما در دنیایی زندگی می کنیم که سرعتِ پیشرفتهای علمی بسیار زیاد و تبادل اطلاعات، حتی در یک روز از حجم بالایی برخوردار است. کتابهای پرمحتوا و دقیق و نرم‌افزارهای رایانه ای بسرعت در حال انتشار و تکثیر هستند. راستی در این میان یک دانش‌آموز ایرانی چه وظیفه ای دارد؟ چگونه باید خودش را برای رسیدن به «اهداف عالی انقلاب اسلامی» آماده کند؟

در دنیای امروزی بدونِ برنامه ریزی دقیق بر اساس اهداف، امکانات و نیازها و رعایت نظم در همهٔ امور، حرکتِ صحیح، پویا و استوار امکان پذیر نمی باشد. آیا شما برای «لحظه های شیرین» عمر خود و گذرانِ زمان، برنامه ریزیِ دقیق کرده و به آن عمل می کنید؟ آیا می دانید که با برنامه ریزی دقیق براساس مطالبِ ذکر شده، وقت شما به صورت منطقی تقسیم شده و درس یا موضوع یا ... از قلم نمی افتد؟ البته عمل به برنامه ریزی نیاز به نظم و ترتیب دارد که همواره از طرف خداوند تعالی و رهبران دینی مان به آنها سفارش شده ایم و نیز توکّل به حضرت حق که لازمهٔ شروع هر فعالیت و برنامه ریزی است.

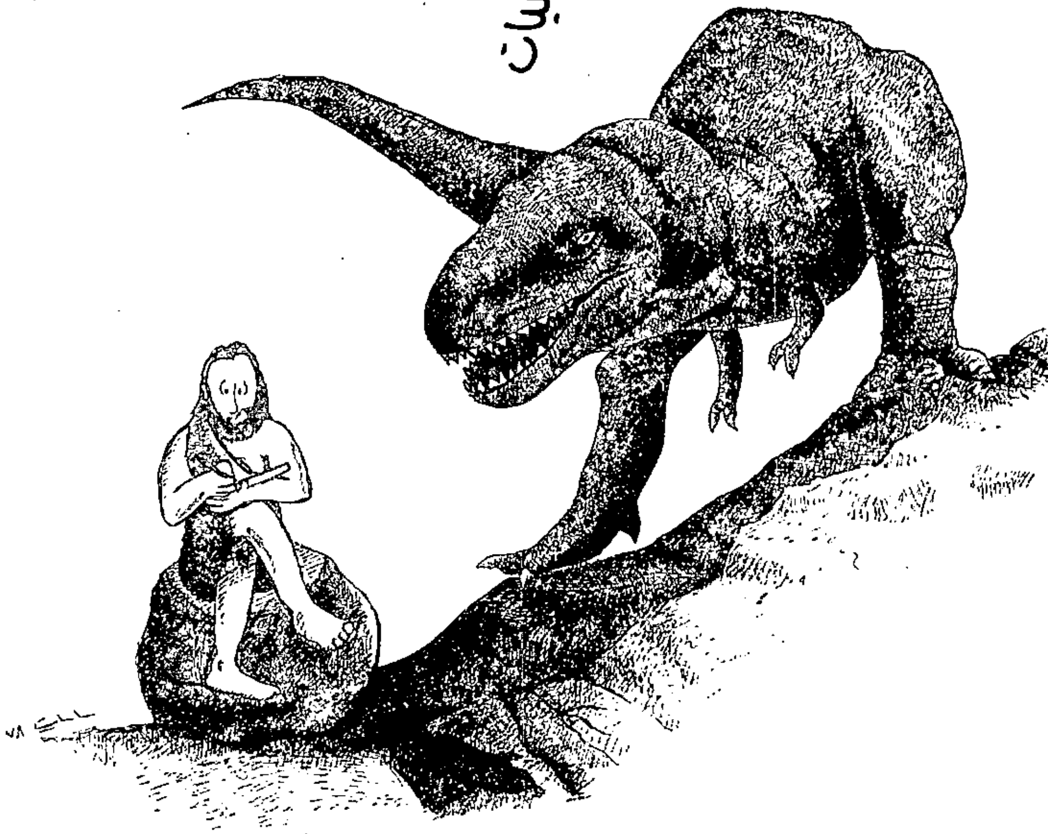
پس تا دیر نشده، دست به کار شویم و از لحظه لحظهٔ زندگی خود و امکانات موجود استفاده کنیم و همواره رضای خدا و خدمت به میهن اسلامی و مردم را در نظر داشته باشیم.

بدانیم که ما و شما وارث خون شهیدان انقلاب اسلامی هستیم و مدارس سنگرهایی است که باید با تعلیم و تربیت اسلامی نگهدار این سنگر مقدس باشیم. ان شاءا...

والسلام ـ سردبیر

از تاریخ بیاموزیم(۵)

• پرویز شهریاری



ریاضیات در سرزمین بابل (از بوریس بولگارسکی)

سرزمین بابل قدیم که به «میان دورود» (یا بین‌النهرین) شهرت دارد، در منطقه‌ای بین بستر دو رودخانهٔ دجله و فرات واقع است. بابل، شهر بزرگ دولتهای حاکم بر میان دورود، در ساحل فرات قرار داشت. دولت بابل در ۱۹ سدهٔ پیش از میلاد و با نظام برده‌داری دولتی ـ آیینی تشکیل شد. کشاورزی بیشتر بر اساس آبیاری مصنوعی انجام می‌گرفت، که به مجموعه‌ای از راه آبها و کانالهای پیچیده نیاز داشت. دهقانان اغلب به صورت جمعی روی زمینها کار می‌کردند؛ ولی شاه حق داشت بخشی از زمینهای کشاورزی را به نزدیکان خود ببخشد و به همین مناسبت بتدریج قشری از زمینداران پدید آمدند.

شکوفایی دولت بابل از نیمهٔ دوم سدهٔ هجدهم پیش از میلاد آغاز می‌شود. دراین دوران، دولت به عنوان بزرگترین زمیندار از تمامی تلاش خود برای اصلاح دستگاه آبیاری، استفاده کرد. آبراهها را پاک کردند و برای آبرسانی به سطح گسترده‌تری از زمینهای کشاورزی، اقدامهایی جدّی صورت گرفت. از تولید کشاورزی (غلّه، میوه و پنبه) برای بازرگانی با کشورهای همسایه استفاده می‌شد. بازرگانی رونق گرفت و درضمن، موجب پدید آمدن رباخواری و رباخواران شد. و البته، در هر حال، چه در زمینهای دولتی و چه در زمینهای شخصی، همهٔ کارها بر دوش برده‌ها بود.

پیشرفت بازرگانی، پیش از هرچیز، موجب فراوانی فراورده‌های کشاورزی شد. از زمینهای بارور، گندم و جو فراوانی به‌دست می‌آمد، درختان فراوان خرما، شراب، سرکه، آرد و پارچه را فراهم می‌آوردند. بجز این، بازرگانی به گسترش کشتیرانی هم کمک کرد. از بابل، به عنوان مرکز بازرگانی کشتیها از راه رودخانه، خود را به دریا می‌رساندند و کالاهای بازرگانی را به پاریس و مصر می‌بردند.

بابل در سال ۶۸۹ پیش از میلاد، به وسیلهٔ «سنا ضریب»(۷۰۵-۶۸۰ پیش از میلاد) شاه آشور (که بر خلاف پدرش سارگُن، جنگ طلب بود) تسخیر و ویران شد ؛ ولی جانشین او، «آسارخادون» در سال ۶۸۰ پیش از میلاد، آن را بازسازی کرد. شکفتگی دوبارهٔ شهر را باید مربوط به سالهای ۶۰۴ تا ۵۶۲ پیش از میلاد، دوران حکومت «نبوکد نسر» دانست. بابل در سال ۳۳۱ پیش از میلاد، به وسیلهٔ اسکندر مقدونی اشغال شد و جانشین او بخش عمدهٔ ساکنان شهر را از آن‌جا بیرون راند. از این زمان، بابل اهمیت خود را ازدست داد و در سدهٔ دوم پیش از میلاد، از صحنهٔ تاریخ حذف شد.

در بابل، در دوران شکفتگی خود، کارهای کارگاهی و هم بازرگانی بسرعت پیش می‌رفت. بجز محصولهای طبیعی، قالی، پارچه‌های ابریشمی و پشمی، پوست، گردن‌بند، دست‌بند، شمشیر، نیزه، عطر و وسیله‌های خانگی هم از آن‌جا صادر می‌شد.

پیشرفت بازرگانی، موجب پیشرفت دستگاه پولی شد. نخستین واحدهای پولی برای مبادله، با غلّه یا نقره محاسبه می‌شد. مالیاتهای دولتی، به وسیلهٔ غلّه یا نقره محاسبه می‌شد. بتدریج پولهای نقره‌ای، جای دیگران را گرفت و داد و ستدهای پایاپای (کالا در برابر کالا) راکنار زد و در نتیجه، دستگاه محاسبهٔ پولی تکمیل شد. بازرگانی گسترده ایجاب می‌کرد همهٔ دستگاه‌های اندازه‌گیری، تکمیل و دقیق شود و در بابل دستگاه اندازه‌گیریها شبیه آن‌چه امروز داریم، ساخته شد. تنها بابلیها به جای مبنای ۱۰ - که در دستگاه متری به‌کار می‌رود - از مبنای ۶۰ استفاده می‌کردند. نمونهٔ دستگاه اندازه‌گیری بابلیها را می‌توان در محاسبهٔ زمان یا محاسبهٔ اندازهٔ زاویهٔ دید که امروز هم به همان صورت پیشنهادی بابلی به‌کار می‌رود ؛ یک ساعت برابر ۶۰ دقیقه و یک دقیقه برابر ۶۰ ثانیه ؛ یک درجهٔ زاویه‌ای برابر ۶۰ دقیقهٔ زاویه‌ای و غیره. برای اندازه‌گیری وزن، اندکی از این قاعده منحرف شده بودند :

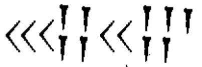
۱تالانت = ۶۰ مین ؛ ۱ مین= ۶۰ سیکل ؛ ۱ سیکل =۱۸۰ گندم

که این آخری با مقیاس امروزی، به تقریب برابر ۱۰ گرم می‌شد. از مقیاسهایی که بابلیها برای طول داشته‌اند، کمتر باقی مانده است.

بابلیها برای عددشماری و عددنویسی از هر دو مبنای ۱۰ و ۶۰ استفاده می‌کردند ؛ به‌ویژه انتخاب مبنای ۶۰ بسیار هوشمندانه است. عدد ۶۰ بخشیابهای زیادی دارد : ۲،۳،۴،۵،۶،۱۰،۱۲،۱۵،۲۰،۳۰،۶۰. و همین وضع، کار هرگونه محاسبه‌ای را ساده‌تر می‌کند ؛ بویژه که برای نوشتن عددهای بزرگ (که در اخترشناسی کاربرد دارد) رقمهای کمتری لازم است. برخی از پژوهشگران هم، انتخاب مبنای ۶۰ را تفسیر هندسی آن می‌دانند که دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

عددنویسی بابلی، در دورانی بسیار کهن پدید آمد. گمان می‌رود، بابلیها عددنویسی را از ملتهایی گرفته باشند که پیش از شکل گرفتن دولت بابلی، در آن جا می‌زیستند. آنها عددها را شبیه سایر نوشته‌های خود، روی صفحه‌های گلی و با خط میخی می‌نوشتند ؛ در ضمن برای نوشتن از میله‌ای با سه وجه جانبی استفاده می‌کردند. با این وسیله، می‌شد شکلهای میخ مانند را، سه‌گونه نوشت : عمودی با نوک تیز به طرف پایین، افقی با نوک تیز به سمت چپ وافقی با نوک تیز به سمت راست. در ضمن، نماد 𒁹 برای یکان، نماد › برای دهگان و نماد ‹ برای صدگان به‌کار می‌رفت. به‌یاری همین سه نماد و با استفاده از روش عددنویسی موضعی، عددهای چندرقمی را می‌نوشتند. برای نمونه، نماد 𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹 به معنای ۵، نماد𒁹𒁹𒁹››به معنای ۲۳ بود و غیره.

همین نمادها را برای نوشتن عدد در دستگاه به مبنای ۶۰ هم - بویژه وقتی که با اندازه‌ها سروکار داشتند - به‌کار می‌بردند. در این حالت هم، اصل موضعی بودن رقمها را رعایت می‌کردند. در ضمن، رقم با مرتبهٔ بالاتر را در سمت چپ رقم با مرتبهٔ پایین‌تر می‌نوشتند ؛ یعنی همان ردیفی را رعایت می‌کردند که برای عددنویسی در مبنای ۱۰ به‌کار می‌رفت. برای نمونه، عدد

 (۱)

به معنای عدد ۲۵+۶۰×۳۴ یعنی ۲۰۶۵ است ؛ ولی ازآن‌جا که بابلیها، بخش کسری را از بخش درست عدد با نشانه‌ای جدا نمی‌کردند (آن‌طور که ما امروز درعددنویسی دهدهی، بخش کسری را با ممیّز جدا می‌کنیم)، همین عدد (۱) می‌توانست به‌معنای $\frac{25}{60}+34$ و یا $\frac{25}{60^2}+\frac{34}{60}$ هم باشد. بنابراین، برای این که عدد را، آن‌گونه که منظور نویسنده بوده است،بخوانیم، باید به ماهیت مسأله و اندازه‌هایی که استفاده کرده است، با دقت توجه کنیم. به این ترتیب، بابلیها دستگاه عددنویسی بسیار پیشرفته‌ای داشتند [چیزی که یونانیها، سده‌ها بعد از بابلیها نتوانستند به آن دست یابند].

نیاز به گسترش بازرگانی، اقتصاد، کشاورزی و صنعت کارگاهی، تا اندازهٔ زیادی به بابلیها کمک کرد تا ضمن تجربه،

آگاهیهای زیادی در زمینهٔ ریاضیات به‌دست آورند. دررابطه با گسترش گردش کالا و پیچیده‌تر شدن کارهای کارگاهی، سازمانهایی پدید آمد که خیلی شبیه بانکهای امروزی بود. کار این مؤسسه‌ها پرداخت حواله‌ها، ثبت میزان روزهای کار و بسیاری چیزهای دیگر بود و روشن است چنین وظیفه‌هایی، نیاز به محاسبه داشت و بنابراین به پیشرفت ریاضیات محاسبه‌ای کمک می‌کرد. ازجمله می‌دانیم که بابلیها، عمل ضرب را تقریباً به همان صورتی که امروز عمل می‌کنیم، انجام می‌دادند؛ برای تقسیم بر یک عدد، از ضرب در عکس آن عدد، که برای عددهای درمبنای ۶۰ ساده بود، استفاده می‌کردند. این سادگی، ناشی از این ویژگی است که عدد ۶۰ بخشیابهای زیادی دارد.

کشت و برداشت محصول کشاورزی و همچنین دامداری، نیاز به شناخت فصلهای سال داشت؛ بجز این، کشتیرانی و حرکت کاروانها، بابلیها را واداشت تا به بررسی آسمان و شناسایی ستارگان بپردازند؛ زیرا در آن زمان، ماه و خورشید و برخی ستارگان، تنها معیاری بودند که به یاری آنها می‌شد سمت حرکت را تشخیص داد. به همین مناسبت، بابلیها با بررسی دقیق، ستارگانی را که با چشم دیده می‌شد و حرکت ظاهری آنها، آغاز کرده و توانستند نقشه‌های جالب و کم و بیش دقیقی از آسمان تهیه کنند. آنها متوجه شدند که برخی از ستارگان، از حرکت معمول دیگران ـ یعنی حرکت ظاهری به دور زمین ـ پیروی نمی‌کنند ومسیرهای حرکت دیگری را برای خود انتخاب کرده‌اند، و به این ترتیب بود که سیّاره‌ها را شناختند. طبیعی است که در آغاز، از بین سیّاره‌ها، که در بین ستارگان، مسیر مستقلی برای حرکت خود داشتند، به آنهایی پی ببرند که بزرگتر و به زمین نزدیکترند. نخست به خورشید، ماه و ناهید (زهره = ونوس) توجه کردند. بازهم طبیعی است وقتی بابلیها، اهمیت خورشید را برای انسان و زندگی روی زمین احساس می‌کردند، به آن، با دید احترام بنگرند و برای آن و دیگر جرمهای آسمانی که کشف کرده بودند، یعنی خورشید، ماه و ناهید، ویژگیهای خدایی قایل شوند. و وقتی سیّاره‌های تازه‌ای را کشف کردند، مانند برجیس (مشتری = ژوپیتر)، بهرام (مریخ = مارس)، تیر (عطارد = مرکوری) و کیوان (زُحل = ساتورن) آن وقت تعداد خدایان آنها به هفت رسید.

بابلیها، حرکت ماه را با دقت بررسی کردند و طول ماه قمری را ۳۰ روز تعیین کردند. همین محاسبه، اساس گاه‌شماری آنها قرار گرفت. دوازده ماه قمری، یک سال را تشکیل می‌داد. ولی از آن‌جا که ماه قمری اندکی کمتر از ماه خورشیدی بود و در نتیجه، سال بابلی کوتاهتر از سال خورشیدی می‌شد، بابلیها این اشتباه را با اضافه کردن یک ماه به برخی سالها، جبران می‌کردند. آنها به‌جز واحدهای ساعت و دقیقه که برای اندازه‌گیری زمان داشتند، از واحد هفته هم استفاده می‌کردند و هر روز آن را به نام یکی از هفت ستاره و سیّاره‌ای می‌شناختند، نامگذاری کرده بودند. بسیاری از ملتها، تا امروز، همین نامها را برای روزهای هفته با اندک تفاوتهایی نگه داشته‌اند. برای نمونه فرانسویها، برخی روزهای هفته را این طور می‌نامند:

vendredi روز ونوس، Jeudi روز ژوپیتر، mercredi روز مرکوری، mardi روز مارس، lundi روز ماه.

آلمانیها، نامهای sonntag (روز خورشید) و montag (روز ماه) و انگلیسیها نام saturday (روز ساتورن) را دارند و غیره.

با مشاهدهٔ صورتهای ماه، بابلیها جدولهایی تنظیم کرده بودند که تغییرهای صورتهای ماه را با دقت کامل در آنها روشن کرده‌اند. یکی از این جدولها را، با عددنویسی امروزی، ولی درمبنای ۶۰ (آن‌طور که در اصل وجود دارد) می‌آوریم:

۵:۱۰:۲۰:۴۰:۱/۲۰:۱/۲۰:۱/۳۶:۱/۵۲;

۲/۸:۲/۲۴:۲/۴۰:۲/۵۶;۳/۱۲:۳/۲۸;۳/۴۴

عددهای این جدول را باید این طور تفسیر کرد:

۱/۲۰=۶۰+۲۰=۸۰;۲/۸=۲×۶۰+۸=۱۲۸;

۳/۱۲=۳×۶۰+۱۲=۱۹۲;...

این جدول، صورتهای ماه را، با این فرض که قرص کامل ماه را برابر ۳/۴۴، یعنی ۲۲۴ واحد بگیریم، داده شده است. عددها نشان می‌دهند که تغییر صورت ماه از قرص کامل، اگر از جهت عکس (از آخر به اول) درنظر بگیریم، چگونه است.

تصور بابلیها از حرکت ظاهری خورشید به دور زمین، این بود که خورشید در هر شبانه‌روز، ۳۶۰ گام برمی‌دارد [آنها طول نیمدایرهٔ مسیر حرکت ظاهری خورشید را که در روز دیده می‌شود، ۱۸۰ برابر قطر خورشید می‌دانستند] و به همین جهت، برای محیط دایره ۳۶۰ بخش در نظر گرفتند؛ به احتمالی به حساب آوردن ۳۶۰ روز برای سال هم از همین جا سرچشمه گرفته باشد. برخی از پژوهشگران هم عقیده دارند، تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ بخش برابر، به دلیل وجود عددنویسی شصت‌شصتی آنها بوده است. هواداران این دیدگاه، بر این مطلب تکیه می‌کنند که بابلیها با تقسیم محیط دایره به ۶ بخش برابر آشنا بودند؛ برای نمونه، ارابه‌سازان همیشه چرخ را به ۶ بخش برابر تقسیم و آن را با ۶ پرّه محکم می‌کردند. اگر آنها می‌توانستند محیط دایره را به ۶ بخش

برابر تقسیم کنند، آن‌وقت طبیعی بود که، با توجه به دستگاه عددنویسی شصت‌شصتی، هر بخش را به ۶۰ بخش برابر تقسیم کنند.

بررسی روشهای محاسبه‌ای بابلیها، ما را به مفهومهای دقیق و پیچیده‌ای می‌رساند. آنها می‌توانستند ریشهٔ دوم عددها را با تقریب لازم محاسبه کنند؛ ولی روش جذر گرفتنِ آنها، بسیار بغرنج بود و به همین دلیل، ترجیح می‌دادند برای این منظور، از جدولهایی که آماده کرده بودند، استفاده کنند. به همین ترتیب، جدولهایی برای ریشهٔ سوم عددها و توانهای دوم و سوم عددها در اختیار داشتند. بابلیها، در برخی جاها، از مفهومهای جبر هم استفاده می‌کردند. برخی گونه‌های معادله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم، و حتی درجهٔ سوم را با موفقیّت حل می‌کردند. در ضمن برای معادله‌های درجهٔ دوم، از دستگاه شامل دومعادلهٔ دومجهولی استفاده می‌کردند؛ تعیین دو عدد، با معلوم بودن مقدار حاصلضرب و مقدار مجموع (یا تفاضل) آنها. با مطالعهٔ جدولهایی که برای تغییر صورتهای ماه تنظیم شده است، می‌توان متوجه شد که بابلیها با مفهوم تصاعدها آشنا بودند؛ در سطر اول، یک تصاعد هندسی قرار دارد و در سطر دوم، تصاعدی حسابی با قدر نسبت ۱۶.

آگاهی بابلیها در زمینهٔ هندسه، بسیار گسترده بود. گرچه در نوشته‌های بابلی، صحبتی از اصل، قضیه یا استدلال نشده است؛ ولی به اندازهٔ کافی می‌توان به مسأله‌هایی برخورد که برای حلّ آنها تسلّط بر بسیاری از ساختمانهای هندسی لازم است. اگر با خطهای راست موازی سروکار داشتند، از پاره‌خطهای راست متناسب استفاده می‌کردند، از رابطهٔ بین ضلعها در مثلث قائم‌الزاویه آگاه بودند، مساحت مثلث و ذوزنقه را محاسبه می‌کردند، رابطهٔ مربوط به محاسبهٔ حجم منشور و استوانه را می‌دانستند و غیره. ولی بابلیها محیط ومساحت دایره را با دقت لازم به‌دست نمی‌آوردند؛ آنها محیط دایره را سه برابر قطر آن به حساب می‌آوردند. به این ترتیب، نسبت محیط دایره به قطر آن را برابر ۳ می‌گرفتند. ریاضیدانان بابلی، حجم مخروط ناقص و هرم ناقص را هم محاسبه می‌کردند؛ ولی اغلب این محاسبه نادرست است؛ زیرا ارتفاع را در نصف مجموع سطحهای دو قاعده ضرب می‌کردند.

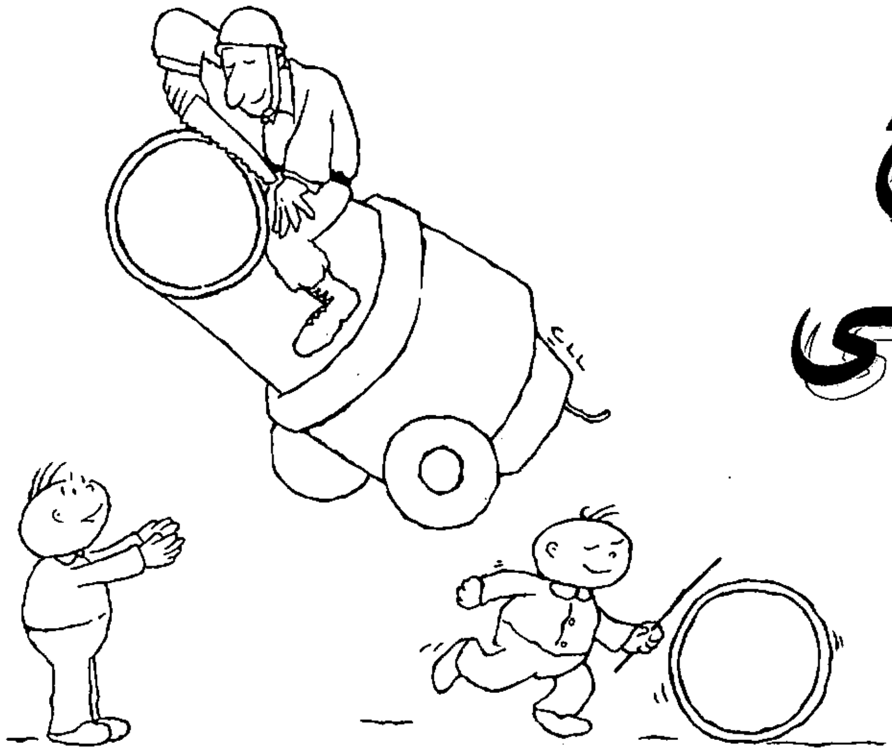
به این نکته هم باید توجه کرد که، مشاهده‌های اخترشناسی، بابلیها را به مفهومهایی راهنمایی کردکه بعدها پایه‌ای برای پدید آمدن مثلثات شد. در ضمن، آنها با مشاهدهٔ حرکتهای ستارگان، نتیجهٔ آگاهیهای خود را روی یک نیمکره رسم می‌کردند، نه روی صفحه. به همین دلیل پیش از مثلثات مسطّحه به مفهومهای مثلثات کروی پی برده بودند.

سخن کوتاه، در سرزمین باستانی بابل، در دورانی دور از ما، آگاهیهای با ارزشی به وسیلهٔ دانایانِ زمان ثبت شده است که بسیاری از آنها به ریاضیات مربوط می‌شود؛ ولی هنوز نمی‌توانیم بگوییم دارای دانش ریاضی پیشرفته‌ای بوده‌اند. جمع‌آوری آگاهی‌های پراکنده را نمی‌توان دانش نظری دانست؛ بلکه تنها نتیجه‌ای ازمشاهده و تجربه به حساب می‌آیند. تعمیم مسأله‌ها، نتیجه‌گیریهای کلی و استدلال منطقی در نوشته‌های بابلی دیده نمی‌شود.

در عوض، در بابل قدیم، شبه دانشهایی رشد کرد که می‌توانست برای تکامل دانش زیانمند باشد. از این‌گونه شبه دانشها می‌توان از اخترشماری و اعتقاد خرافی به نیروی عدد نام برد.

اخترشماری، شبه دانشی است که تأکید می‌کند، زندگی هر انسان به طور جداگانه و زندگی یک جامعه در مجموع، به رابطهٔ سیّاره‌ها و ستارگان نسبت به یکدیگر بستگی دارد. از آن‌جا که بویژه خورشید برای زندگی انسان و برای تعیین کشت و برداشت اهمیت جدّی داشت، بابلیها دچار این تصور شدند که سرنوشت انسان در اختیار ستارگان است و بنابراین، به نیایش آنها می‌پرداختند. آنها تا آن‌جا پیش رفتند که معتقد بودند موقعیت سیّاره‌ها در لحظهٔ تولد شخص، می‌تواند سرنوشت آیندهٔ او را مشخص کند. نتیجه‌گیریهای مشابهی هم در بارهٔ حکومت و تمامی مردم می‌کردند. این اعتقادهای بابلیها، تنها در سرزمین بابل باقی نماند، به سایر جاها هم نفوذ کرد و سرچشمه‌ای برای رواج اندیشه‌های خرافی شد که در مجموع، مانعی برای پیشرفت دانش است.

در زمینهٔ عددها هم، بابلیها معتقد بودند، هر عدد «رازی» ویژهٔ خود دارد. از آن زمان که بابلیها، خورشید و ماه و زهره را می‌شناختند و آنها را به عنوان سه خدای خود پذیرفتند، عدد ۳ برایشان «مقدس» شد و عدد «خوشبختی» به‌شمار می‌رفت. و وقتی هفت ستاره را شناختند، عدد ۷، جای عدد ۳ را گرفت و عدد «خوشبختی» شد. عجیب است که با پیشرفت ریاضیات و اخترشناسی، گمانهای دروغین و خرافی دربارهٔ ستارگان و عددها از بین نرفت؛ به نحوی، در بین برخی ملتها و در دورانهای خاصی، به عنوان سدّی در برابر دانش واقعی قرار گرفته است.



مقاطع مخروطی

قسمت اول

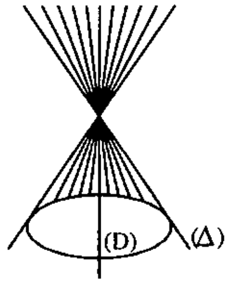
دایره

● احمد قندهاری

چهار نوع منحنی مسطّح با خاصیتهای مهم، از زمانهای دور، به مقاطع مخروطی معروف است. هر یک از این منحنیها، فصل مشترک یک صفحه با یک سطح مخروطی است.

سطح مخروطی

سطح مخروطی دوّار، از دوران یک خط مانند Δ حول خط دیگری مانند D که با آن متقاطع است، ایجاد می‌شود. خط ثابت D را محور سطح مخروطی و خط متحرّک Δ را مولّد سطح مخروطی و نقطهٔ تقاطع دو خط Δ و D را رأس سطح مخروطی گویند. هر یک از دو بخش سطح مخروطی که در دو طرف رأس قرار دارند، یک دامنهٔ سطح مخروطی نامیده می‌شود.



در این شکل، خط (Δ) حول خط D که با آن در نقطهٔ S متقاطع است، دوران کرده و سطح مخروطی ایجاد شده است. خط (Δ) را مولّد، خط D را محور و نقطهٔ S را رأس سطح مخروطی گویند.

۱ـ اگر صفحه‌ای عمود بر محور سطح مخروطی، آن را قطع کند، فصل مشترک یا مقطع ایجاد شدهٔ یک دایره است.

۲ـ اگر صفحه‌ای غیرعمود بر سطح مخروطی و غیرموازی با مولّد یک دامنه از سطح مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل (فصل مشترک) یک بیضی است.

۳ـ اگر صفحه‌ای با یک مولّد سطح مخروطی موازی باشد و فقط یک دامنه از سطح مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل (فصل مشترک) یک سهمی است.

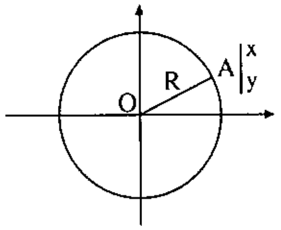
۴ـ هرگاه صفحه‌ای موازی محور سطح مخروطی هر دو دامنه سطح مخروطی را قطع کند، مقطع حاصل، یک هذلولی است.

دایره

مجموعهٔ نقاطی از صفحه که فاصلهٔ آنها تا نقطهٔ ثابتی، برابر مقدار ثابت باشد، منحنی بسته‌ای است به نام دایره، آن نقطهٔ ثابت

را مرکز دایره و آن مقدار ثابت را شعاع دایره گویند. شعاع دایره را با R نشان می‌دهند.

دایرهٔ نوع اوّل: فرض کنیم نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ در صفحهٔ محورهای مختصات باشد. به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادلهٔ این دایره، چنین به‌دست می‌آید :

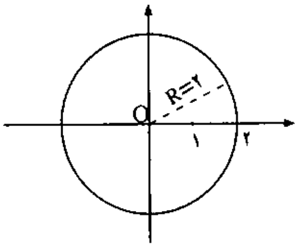


$$OA=\sqrt{x^۲+y^۲}\Rightarrow R=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

$$\Rightarrow \boxed{x^۲+y^۲=R^۲}$$

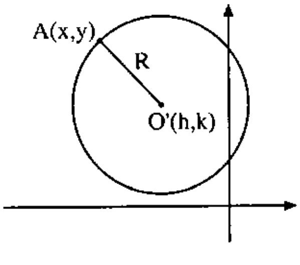
پس $x^۲+y^۲=R^۲$ ، معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش روی مبدأ مختصات و شعاع آن R است.

مثال: دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۴$ را رسم کنید.



حل: مرکز دایره روی مبدأ مختصات و $R=۲$.

دایرهٔ نوع دوم: اگر $O'(h,k)$ مرکز دایره و R شعاع دایره باشد (شکل مقابل)، معادلهٔ دایره، چنین به‌دست می‌آید :



$$O'A=R\Rightarrow\sqrt{(x-h)^۲+(y-k)^۲}=R$$

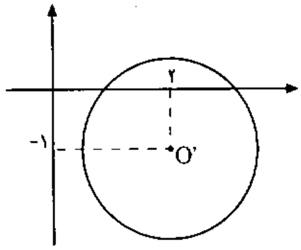
$$\Rightarrow (x-h)^۲+(y-k)^۲=R^۲$$

مثال: دایره به معادلهٔ $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$ را رسم کنید.

حل: با مقایسهٔ معادلهٔ این دایره با معادلهٔ کلّی دایرهٔ $(x-h)^۲+(y-k)^۲=R^۲$ ، نتیجه می‌گیریم :

$$O'\left|\begin{matrix}h=۲\\k=-۱\end{matrix}\right. \qquad R^۲=۴\Rightarrow R=۲$$

جای نقطهٔ O' را پیدا می‌کنیم، سپس به مرکز O' و شعاع ۲ دایره را رسم می‌کنیم.



مربع کامل

می‌خواهیم عبارت $x^۲\pm px$ یا $y^۲\pm ty$ را به مربع کامل تبدیل کنیم ؛ از دستور مقابل استفاده می‌کنیم :

$$۱)\quad \boxed{x^۲\pm px=(x\pm\frac{p}{۲})^۲-\frac{p^۲}{۴}}$$

مثال:

$$x^۲\pm ۱۰x=(x\pm ۵)^۲-۲۵$$

$$x^۲\pm ۶x=(x\pm ۳)^۲-۹$$

$$x^۲\pm ۳x=(x\pm\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}$$

همچنین :

$$۲)\quad \boxed{y^۲\pm ty=(y\pm\frac{t}{۲})^۲-\frac{t^۲}{۴}}$$

مثال:

$$y^۲\pm ۳y=(y\pm\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}$$

$$y^۲\pm ۲۰y=(y\pm ۱۰)^۲-۱۰۰$$

$$y^۲\pm ۴y=(y\pm ۲)^۲-۴$$

توجه کنید: ممکن است معادلهٔ دایره، به صورت $x^۲+y^۲-۲x+۴y=-۱$ باشد ؛ این نوع معادله را معادلهٔ گستردهٔ دایره گوییم. این معادله را باید به معادلهٔ کلّی دایره تبدیل کنیم تا بتوان آن را رسم کرد.

طرز تبدیل معادلهٔ گستردهٔ دایره به معادلهٔ دایره در حالت کلّی

۱ـ دو طرف معادله را بر ضریب $x^۲$ تقسیم می‌کنیم (اگر ضریب $x^۲$، ۱ باشد، این کار لزومی ندارد).

۲ـ جمله‌های x را پهلوی هم و جمله‌های y را هم پهلوی هم می‌نویسیم.

۳ـ جمله‌های x را به مربع کامل و جمله‌های y را هم به مربع کامل تبدیل می‌کنیم.

۴ـ اعداد را به سمت راست تساوی برده، جمع جبری می‌کنیم.

مثال: دایره به معادلهٔ $۴x^۲+۴y^۲-۴x-۸y-۱۱=۰$ را رسم کنید.

حل: دو طرف معادله را بر ضریب $x^۲$ یعنی ۴ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۲+y^۲-x-۲y=\frac{۱۱}{۴}$$

سپس جمله‌های x و جمله‌های y را پهلوی هم می‌نویسیم:

$$\underbrace{x^۲-x}+\underbrace{y^۲-۲y}=\frac{۱۱}{۴}$$

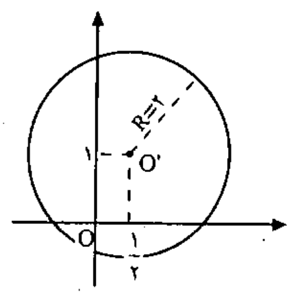
حال، جمله‌های x و جمله‌های y را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم:

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲-\frac{۱}{۴}+(y-۱)^۲-۱=\frac{۱۱}{۴}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{۱}{۲})^۲+(y-۱)^۲=\frac{۱۱}{۴}+۱+\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow (x-\frac{۱}{۲})^۲+(y-۱)^۲=۴$$

$$O'\left|\begin{array}{l}h=\frac{۱}{۲}\\k=۱\end{array}\right. \qquad R^۲=۴\Rightarrow R=۲$$



بررسی معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$

آیا این معادله، معادلهٔ یک دایره است؟ اگر نیست، تحت چه شرایطی این معادله می‌تواند معادلهٔ یک دایره باشد.

سعی می‌کنیم این معادله را به صورت کلّی معادلهٔ یک دایره تبدیل کنیم؛ بدین ترتیب:

$$\underbrace{x^۲+ax}+\underbrace{y^۲+by}=-c$$

$$(x+\frac{a}{۲})^۲-\frac{a^۲}{۴}+(y+\frac{b}{۲})^۲-\frac{b^۲}{۴}=-c$$

$$(x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}-c$$

$$(x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

اگر این معادله، معادلهٔ یک دایره باشد، باید:

$$R^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

چون $R^۲$ مثبت یا صفر است، پس باید: $a^۲+b^۲-۴c\geq۰$ یا $a^۲+b^۲\geq۴c$.

نتیجه: در معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ اگر $a^۲+b^۲\geq۴c$، آن‌گاه این معادله، معادلهٔ یک دایره است که مرکز آن $O'\left|\begin{array}{l}h=-\frac{a}{۲}\\k=-\frac{b}{۲}\end{array}\right.$ و $R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}$.

مسأله: به ازای چه مقادیر m معادلهٔ $x^۲+\sqrt{۲}x+y^۲+(m-۱)y+\frac{۳}{۲}=۰$، معادلهٔ یک دایره است؟

حل: $a=\sqrt{۲}$ $\qquad b=m-۱$ $\qquad c=\frac{۳}{۲}$

باید: $a^۲+b^۲\geq۴c$

$$۲+(m-۱)^۲\geq۶\Rightarrow(m-۱)^۲\geq۴\Rightarrow\begin{cases}m-۱\geq۲\\m-۱\leq-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m\geq۳\\m\leq-۱\end{cases}$$

نکته: اگر در معادلهٔ $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ ، عدد c منفی باشد، معادلهٔ فوق حتماً معادلهٔ یک دایره است.

مثال: به ازای چه مقادیر m، معادلهٔ $x^۲+y^۲+(۲m-۳)x+my-۱=۰$ معادلهٔ یک دایره است.

جواب: چون $c=-۱<۰$ ، پس به ازای همهٔ مقادیر m، این معادله، معادلهٔ یک دایره است.

طرز تعیین معادلهٔ یک دایره

برای تعیین معادلهٔ یک دایره، باید سه عامل h، k و R را داشته باشیم، سپس آنها را در معادلهٔ $(x-h)^۲+(y-k)^۲=R^۲$ قرار می‌دهیم.

مسألهٔ ۱. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O'\left|\begin{matrix}-۲\\۱\end{matrix}\right.$ مرکز آن باشد و از نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}۲\\-۲\end{matrix}\right.$ بگذرد.

حل: چون $O'\left|\begin{matrix}-۲\\۱\end{matrix}\right.$ مرکز دایره است، پس $h=-۲$ و $k=۱$ ،

حال باید R را محاسبه کنیم. چون دایره از نقطهٔ M می‌گذرد، داریم:

$$O'M=R \Rightarrow \sqrt{(۲+۲)^۲+(-۲-۱)^۲}=R$$

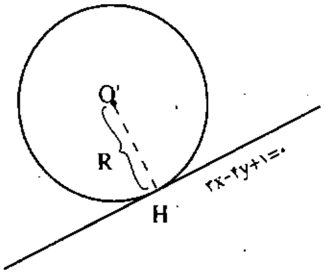
$$\Rightarrow \sqrt{۱۶+۹}=R \Rightarrow R=۵$$

حال مقادیر h، k و R را در معادلهٔ $(x-h)^۲+(y-k)^۲=R^۲$ قرار می‌دهیم.

معادلهٔ دایره $\Rightarrow (x+۲)^۲+(y-۱)^۲=۲۵$

مسألهٔ ۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O'\left|\begin{matrix}۲\\-۲\end{matrix}\right.$ باشد و بر خط $۳x-۴y+۱=۰$ مماس باشد.

حل: شکل مسأله چنین است: $O'\left|\begin{matrix}۲=x_۱\\-۲=y_۱\end{matrix}\right.$



فاصلهٔ O'H برابر شعاع دایره است: $\underset{a}{۳x}\ \underset{b}{-۴y}\ \underset{c}{+۱}=۰$

$$R=O'H=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۳(۲)-۴(-۲)+۱|}{\sqrt{۹+۱۶}}$$

$$=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

معادلهٔ دایره: $(x-h)^۲+(y-k)^۲=R^۲$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۲)^۲=۹$$

مسألهٔ ۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه رأس مثلث $O\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right.$ ، $A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$ بگذرد.

حل: معادلهٔ دایره را به صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ در نظر می‌گیریم:

$$O\left|\begin{matrix}۰\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} ۰+۰+۰+۰+c=۰ \Rightarrow c=۰$$

$$A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} ۱+۰+a+۰+c=۰$$

$$\Rightarrow ۱+a+۰=۰ \Rightarrow a=-۱$$

$$B\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دایره}} ۰+۴+۰+۲b+c=۰$$

$$\Rightarrow ۴+۲b=۰ \Rightarrow b=-۲$$

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

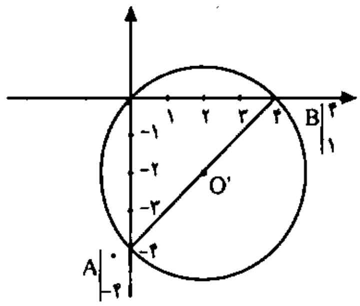
معادلهٔ دایره $\Rightarrow x^۲+y^۲-x-۲y=۰$

مسألهٔ ۴. خط به معادلهٔ $y=x-۴$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند، معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که AB قطری از آن دایره باشد.

حل:

$$x=۰ \Rightarrow y=-۴ \Rightarrow A\left|\begin{matrix}۰\\-۴\end{matrix}\right.$$

$$y=۰ \Rightarrow x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow B\left|\begin{matrix}۴\\۰\end{matrix}\right.$$



$$\begin{cases} x_{O'} = h = \dfrac{x_A + x_{A'}}{۲} = \dfrac{۰+۴}{۲} = ۲ \\ y_{O'} = k = \dfrac{y_A + y_{A'}}{۲} = \dfrac{-۴+۰}{۲} = -۲ \end{cases} \Rightarrow O'\begin{vmatrix} ۲ \\ -۲ \end{vmatrix}$$

نقطهٔ O' مرکز دایره $\Leftarrow$ وسط AB است

$$AO' = R = \sqrt{(x_A - x_{O'})^۲ + (y_A - y_{O'})^۲}$$

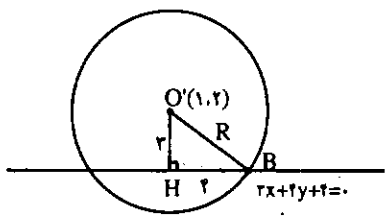
$$= \sqrt{(۰-۲)^۲ + (-۴+۲)^۲} = \sqrt{۸}$$

معادلهٔ دایره: $(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = R^۲$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۸$$

مسألهٔ ۵. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O'\begin{vmatrix} ۱ \\ ۲ \end{vmatrix}$ و از خط به معادلهٔ $۳x + ۴y + ۴ = ۰$ ، وتری به طول ۸ جدا کند.

$$O'\begin{vmatrix} ۱ = x_۱ \\ ۲ = y_۱ \end{vmatrix} \qquad \underbrace{۳}_{a}x + \underbrace{۴}_{b}y + \underbrace{۴}_{c} = ۰$$



حل: فاصلهٔ $O'H$ را به‌دست می‌آوریم.

$$O'H = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳+۸+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

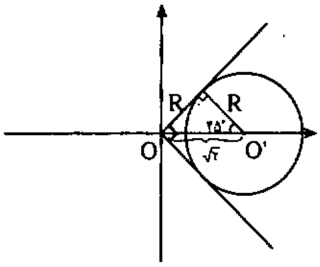
اندازهٔ HB برابر ۴ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل، داریم:

$$O'B^۲ = O'H^۲ + HB^۲ \Rightarrow R^۲ = ۹ + ۱۶ = ۲۵ \Rightarrow R = ۵$$

معادلهٔ دایره : $(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = R^۲$

$$\Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۲۵$$

مسألهٔ ۶. مرکز دایره به طول $\sqrt{۲}$ بر محور xها واقع است، این دایره بر نیمساز ناحیهٔ اوّل و چهارم محورها مماس است. معادلهٔ دایره را بیابید.



حل: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل، داریم :

$$R^۲ + R^۲ = (\sqrt{۲})^۲$$

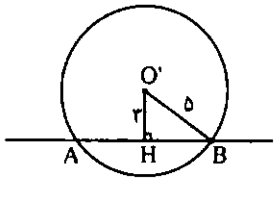
$$۲R^۲ = ۲ \Rightarrow R^۲ = ۱ \Rightarrow R = ۱$$

$$O'\begin{vmatrix} \sqrt{۲} = h \\ ۰ = k \end{vmatrix} \qquad R = ۱$$

معادلهٔ دایره : $(x-h)^۲ + (y-k)^۲ = R^۲$

$$\Rightarrow \quad (x - \sqrt{۲})^۲ + y^۲ = ۱$$

مسألهٔ ۷. خط به معادلهٔ $۳x + ۴y + ۴ = ۰$ دایره به معادلهٔ $(x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۲۵$ را در نقاط A و B قطع می‌کند. طول پاره‌خط AB را بیابید.



حل: مرکز دایره $O'\begin{vmatrix} ۱ = x_۱ \\ ۲ = y_۱ \end{vmatrix} \quad \underbrace{۳}_{a}x + \underbrace{۴}_{b}y + \underbrace{۴}_{c} = ۰$

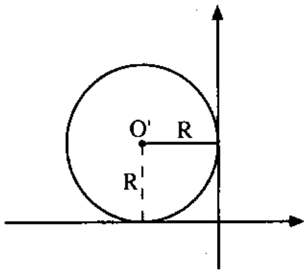
$$O'H = \frac{|ax_۱ + by_۱ + c|}{\sqrt{a^۲ + b^۲}} = \frac{|۳+۸+۴|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل :

$$HB^۲ = ۵^۲ - ۳^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \Rightarrow HB = ۴$$

$$\Rightarrow AB = ۸$$

مسألهٔ ۸. معادله‌های دایره‌هایی را بیابید که در ربع دوم محورها بر محورهای مختصات مماس باشند و از نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-۱\\ ۲\end{vmatrix}$ بگذرند.



حل: شکل کلّی مقابل را در نظر بگیرید؛ مرکز این دایره $O'\begin{vmatrix}-R\\ R\end{vmatrix}$ و شعاعش R است، پس معادلهٔ این دایره را به صورت $(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$ می‌باشد.

حال مختصات نقطهٔ $A\begin{vmatrix}-۱\\ ۲\end{vmatrix}$ را در معادلهٔ این دایره قرار می‌دهیم.

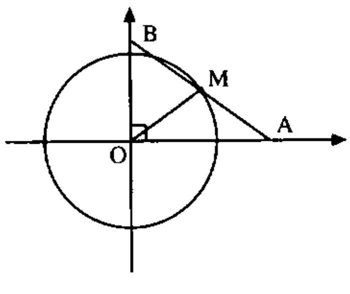
$$(-۱+R)^۲+(۲-R)^۲=R^۲$$
$$\Rightarrow ۱+R^۲-۲R+۴+R^۲-۴R=R^۲$$
$$\Rightarrow R^۲-۶R+۵=۰ \Rightarrow \begin{cases}R=۱\\ R=۵\end{cases}$$

در معادلهٔ $(x+R)^۲+(y-R)^۲=R^۲$، یک‌بار به‌جای R، ۱ و یک‌بار به‌جای R، ۵ را قرار می‌دهیم.

معادلهٔ دایرهٔ کوچکتر $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۱$

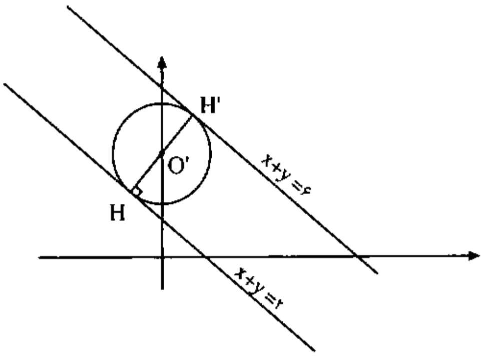
معادلهٔ دایرهٔ بزرگتر $(x+۵)^۲+(y-۵)^۲=۲۵$

مسألهٔ ۹. میلهٔ AB (مطابق شکل) به طول ۱۲ سانتیمتر، طوری جابه‌جا می‌شود که همیشه دو سرش روی محور xها و محور yها قرار دارد. معادلهٔ مکان هندسی نقطهٔ M وسط AB را بیابید.



حل: طول وتر مثلث قائم‌الزاویه شکل (۱۲) است و OM میانهٔ وارد بر وتر است که نصف وتر است. پس OM برابر ۶ است. میلهٔ AB هر جور روی محورها جابه‌جا شود، فاصلهٔ نقطهٔ M وسط AB تا مبدأ مختصات مقدار ثابت ۶ است، پس مکان نقطهٔ M، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع ۶؛ معادلهٔ آن به صورت $x^۲+y^۲=۳۶$ می‌باشد. پس مکان نقطهٔ M دایره‌ای است به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۳۶$.

مسألهٔ ۱۰. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی محور yها و بر دو خط به معادله‌های $x+y=۲$ و $x+y=۶$ مماس باشد.



حل: مرکز دایره $O'\begin{vmatrix}۰\\ k\end{vmatrix}$

فاصلهٔ دو خط موازی HH' است که مساوی $۲R$ می‌باشد.

$$HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|-۶+۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}=۲R$$

$$\Rightarrow R=\sqrt{۲}$$

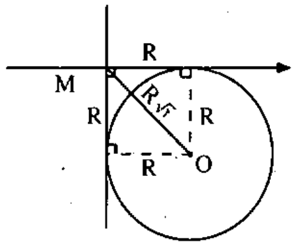
$$O'\begin{vmatrix}۰=x\\ k=y_۱\end{vmatrix} \qquad O'H=R=\frac{|ax_۱+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۰+k-۲|}{\sqrt{۱+۱}}$$
$$=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow |k-۲|=۲\Rightarrow k-۲=\pm ۲\Rightarrow k=۲\pm ۲\Rightarrow k=۴,۰$$

$k=۰$ غیرممکن است، پس $k=۴$.

در نتیجه $O'\begin{vmatrix}۰\\ ۴\end{vmatrix}$ و $R=\sqrt{۲}$، پس معادلهٔ دایره به صورت $x^۲+(y-۴)^۲=۲$ است.

دایرهٔ مونژ: مکان هندسی نقاطی از صفحه که بتوان از آن نقاط دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ مفروضی به شعاع R رسم نمود، دایره‌ای است هم مرکز با دایرهٔ اصلی و شعاع $R\sqrt{۲}$.



$$OM = \sqrt{R^{۲} + R^{۲}} = R\sqrt{۲}$$

نقطهٔ M یک نقطه از دایرهٔ مونژ است.

مسألهٔ ۱۱. دایره به معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} - ۲x + ۴y = ۳$ مفروض است. معادلهٔ دایرهٔ مونژ این دایره را بنویسید.

حل: $x^{۲} - ۲x + y^{۲} + ۴y = ۳$

$(x-۱)^{۲} - ۱ + (y+۲)^{۲} - ۴ = ۳$

$(x-۱)^{۲} + (y+۲)^{۲} = ۸ \quad R^{۲} = ۸ \Rightarrow R = ۲\sqrt{۲}$

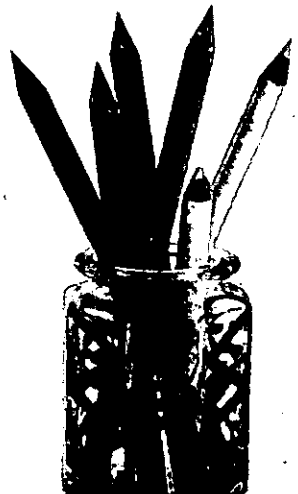
شعاع دایرهٔ مونژ $R' = R\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}(\sqrt{۲}) = ۴$ مرکز دایرهٔ مونژ $O' \left| \begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix} \right.$

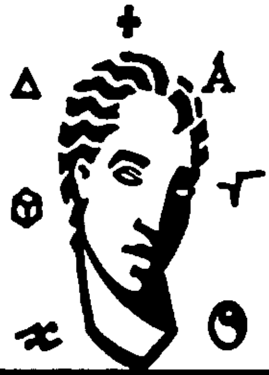
معادلهٔ دایرهٔ مونژ : $(x-۱)^{۲} + (y+۲)^{۲} = ۱۶$

نتیجهٔ دایرهٔ مونژ:

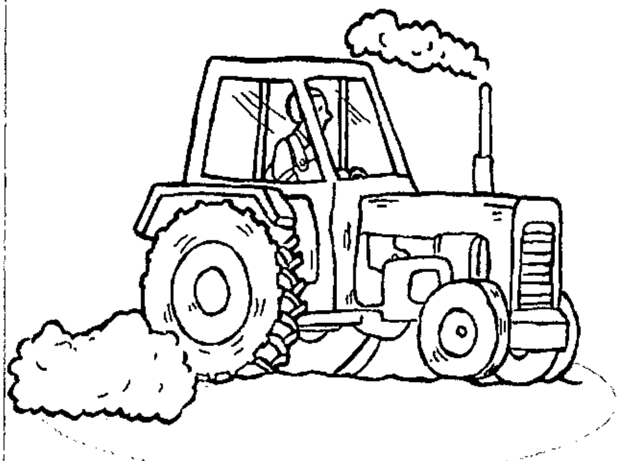
الف ـ اگر از نقطه‌ای دو مماس بر دایره به شعاع R رسم کنیم، چنانچه طول هر مماس برابر R باشد، زاویهٔ بین دو مماس ۹۰° است.

ب ـ اگر از نقطه‌ای، دو مماس بر دایره به شعاع R رسم کنیم، به طوری که فاصلهٔ نقطه تا مرکز دایره، برابر $R\sqrt{۲}$ باشد، زاویهٔ بین دو مماس ۹۰° است.





تفریح اندیشه ۱

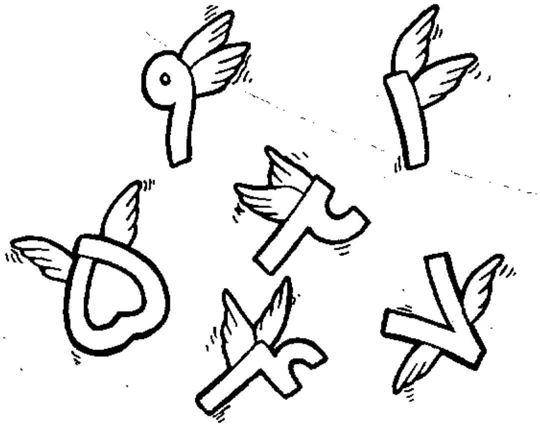


شعاع چرخ جلوِ تراکتور کشاورزی ۲۵ سانتیمتر است و هر ثانیه، دو و نیم دور می‌زند. قطر چرخ عقب تراکتور ۱۲۵ سانتیمتر است. این چرخ در هر ثانیه چند دور می‌زند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

گشت و گذاری در ریاضیات معاصر

نظریهٔ اعداد





● غلامرضا یاسی پور

کار اولیهٔ «نظریهٔ اعداد» "number theory" بررسی ویژگیهای اعداد صحیح بوده است. گسترش سیستماتیک این نظریه به عنوان شاخه‌ای از ریاضیات، نسبتاً دیر انجام گرفت. در دوران باستان، نتایج خاصی از این نظریه ـ به عنوان مثال، برای **اقلیدس** "EUCLID" (حدود ۳۰۰ ق.م.) و **دیوفانت** "DIOPHANTOS" (در حدود ۲۵۰ ب.م.) ـ معلوم بود.

در قرن هفدهم کشفیات علمی مهمی و بیشتر از همه، در زمینهٔ تحقیقات **پی‌یر فرما** "PIERRE FERMAT" (۱۶۰۱ـ۱۶۶۶) رخ داد. در آثار بسیار **لئونهارد اویلر** "LEONHARD EULER" (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳) قدمهای بزرگی به طرف جلو برداشته شد، که پر از اندیشه‌های وسیع و دامنه‌دار بود.

سرانجام، **کارل فردریش گاوس** "CARL FRIEDRICH GAUSS" (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵) نظریه‌ای یکدست تنظیم کرد. وی در سال ۱۸۰۱ *حساب تجسسات* "*Disquisitiones arithmetic*" خود را منتشر کرد؛ اثری به‌جا ماندنی، که اساس حساب عالی "*higher arithmetic*" در مفهوم دقیق آن شد.

امروزه، نظریهٔ اعداد، نظریه‌ای با شاخه‌های وسیعی است، که هم از جبر مجرّد "*abstract algebra*" (بخصوص در *نظریهٔ اعداد جبری* "*algebraic number theory*") و هم از روشهای بنیادی آنالیز (در *نظریهٔ اعداد تحلیلی* "*analytic number theory*") استفادهٔ بسیاری می‌برد. این کار به مسائل و نظریه‌های جدیدی می‌انجامد که تنها ارتباطهایی غیرمستقیم با اعداد صحیح دارد.

در برابر سایر بخشهای ریاضیات، بسیاری از مسائل و نتایج نظریهٔ اعداد، برای افراد غیرمتخصص در ریاضیات نیز قابل درک است. اما آشکار است که اثبات قضایا، اغلب به تجهیزات ریاضی وسیعی نیازمند است.

گاوس ریاضیات را ملکهٔ علوم "*queen of the sciences*" نامیده و در سال ۱۸۰۸ (در نامه‌ای به دوستش بولیایی "*BO´LYAI*") چنین گفته است: «جالب توجه است که تمام کسانی که به مطالعهٔ این علم می‌پردازند، به طور جدّی، نوعی دلبستگی به آن پیدا می‌کنند.»

حلقه‌ها و میدانها (هیئتها)

موارد اساسی *نظریهٔ اعداد مقدماتی* "*elementary number theory*" را در فصل اوّل بررسی کرده‌ایم. از نظریهٔ بخشپذیری "*theory of divisibility*" مشخص است که خارج قسمت دوعدد صحیح، ممکن است؛ اما نیاز نیست که عددی صحیح باشد؛ به‌عنوان مثال $\frac{۱۵}{۳}=۵$، اما $\frac{۱۵}{۷}$ عددی صحیح نیست.

در این صورت، می‌گوییم: تقسیم، عمل وارون ضرب، را نمی‌توان همیشه در حوزهٔ اعداد صحیح انجام داد. دستگاه‌هایی عددی که بتوان عملهای جمع، تفریق و ضرب را در آنها، بدون محدودیت انجام داد، حلقه "*ring*" نامیده می‌شوند.

در صورتی که تقسیم (غیراز بر ۰) را نیز بتوان در یک دستگاه عددی انجام داد، از *میدان (هیئت)* "*field*" صحبت می‌کنیم؛ به‌عنوان مثال، اعداد گویا یک میدان تشکیل می‌دهند.

در موارد بعدی، حلقهٔ اعداد صحیح ۰، ±۱، ±۲، ... را با Z و میدان اعداد گویا را با Q نمایش می‌دهیم.

اگر a و b دو عدد در Z باشند و b ≠ ۰، خارج قسمت a/b در Q، اما نه لزوماً درZ واقع می‌شود. در صورتی که مورد اخیر رخ دهد، آن‌گاه گفته می‌شود a بخشپذیر "*divisible*" بر b یا مضرب "*multiple*" b است.

ایده‌آلها

بجز Z به حلقه‌های Rی نیاز داریم که عنصرهای آنها می‌توانند اعداد حقیقی یا مختلط باشند. از این دست هستند زیرمجموعه‌های I از حلقهٔ Rی که دارای ویژگیهای زیر می‌باشند:

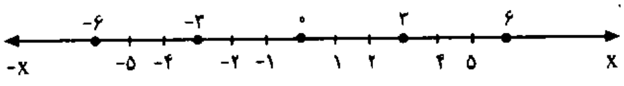
(i) اگر a و b اعدادی در I باشند، آن‌گاه a − b نیز چنین است؛

(ii) به ازای هر عدد r واقع در R و هر عدد a واقع در I، حاصلضرب ra نیز در I قرار دارد. این زیرمجموعه‌های I از R را *ایده‌آلهای* "*ideals*" واقع در R می‌نامیم.

برای مثال، اگر m عددی طبیعی باشد، کل اعداد

۰، ±m، ±۲m، ±۳m، ...

ایده‌آلی در Z است (شکل ۳۰ـ۱ ایده‌آل (۳) بر خط عددی).



شکل ۳۰-۱

واضح است که، تفاضل دو مضرب صحیح m بازهم مضربی از m است (ویژگی (i))، و هر مضرب مضربی از m خود مضربی از m است (ویژگی (ii)). در چنین حالتی، ایده‌آل مورد بحث را با M = (m) نمایش می‌دهیم تا مشخص شود که شامل جمیع مضربهای عدد m است.

ایده‌آلهای شامل جمیع مضربهای عنصر منفردی از حلقهٔ R، در حالت مورد بحث m، به *ایده‌آلهای اصلی* "*principal ideals*" موسوم هستند.

بسادگی می‌توان به اثبات رساند که در Z هر ایده‌آل اصلی است، بنابراین جمیع ایده‌آلهای (m) واقع در Z را با به‌نوبت قراردادن m = ۰،۱،۲،... ، به‌دست می‌آوریم.

مفهوم بخشپذیری را نیز می‌توان برای ایده‌آلها تعریف کرد. دراین مورد می‌گوییم ایده‌آل A بر ایده‌آل B بخشپذیر است. اگر هر عنصر A عنصری از B نیز باشد، به عبارت دیگر، A ⊆ B .

در ظاهر، مفهوم اصلی کلمهٔ بخشپذیر در این مورد، به مفهوم مقابل آن تبدیل می‌شود؛ اما ارتباط با نظریهٔ بخشپذیری، بلافاصله دلیل این نام‌گذاری را روشن می‌کند.

کاربردی ازاین تعریف در مورد دو ایده‌آل A = (a) و B = (b) در Z، نشان می‌دهد که A بر B بخشپذیر است؛ اگر و تنها اگر a بر b بخشپذیر باشد.

برای مثال، ایده‌آل (۲) شامل اعداد

۰، ±۲، ±۴، ±۶، ±۸، ...

و ایده‌آل (۴) شامل اعداد

۰، ±۴، ±۸، ±۱۲، ...

است. درنتیجه، از لحاظ مجموعه ـ نظریه‌ای (۲) ⊆ (۴)؛ اما این بدان معناست که ایده‌آل (۴) بر ایده‌آل (۲) بخشپذیر است؛ زیرا ۴ بر ۲ بخشپذیر است.

سپس، AB، حاصلضرب دو ایده‌آل A و B را تعریف می‌کنیم؛ یعنی، به صورت ایده‌آل شامل جمیع مجموعهای حاصلضربهای به تعداد متناهی ab، که a و bی آن، بترتیب، عنصرهای *دلخواه* A و Bاند. در Z نتیجه می‌گیریم که به ازای A = (a) و B = (b)، حاصلضرب AB = (ab)، به عنوان مثال، (۲)·(۴) = (۸).

مفهوم ایده‌آل در توسعهٔ نظریهٔ اعداد جبری به‌وجود آمد. *نظریهٔ ایده‌آلها* "*ideal theory*" ساختار حلقه‌ها و ایده‌آلهای آنها را بررسی می‌کند. به خاطر ساده کردن گزارهٔ نتایج، بهتر است که از سبک گفتار زیر استفاده کنیم: فرض می‌کنیم a و b اعدادی از حلقهٔ R و I ایده‌آلی در R باشند؛ دراین صورت می‌گوییم:

$$a \equiv b \pmod{I}$$

(و می‌خوانیم : a هم‌نهشت با b به پیمانهٔ I است) اگر a − b عددی در I باشند.

رابطهٔ هم‌نهشتی "*congruence*" فوق با توجه به ترایا، متقارن و بازتابی بودن، رابطه‌ای هم‌ارزی است.

بر مبنای ویژگیهای فوق، جمیع اعداد R را می‌توان به رده‌های مانده‌های مجزّایی "*disjoint resedue classes*" به پیمانهٔ I، چنان تقسیم کرد که جمیع اعداد هم‌نهشت به پیمانهٔ I متعلق به یک رده باشند.

اهمیت طریق نوشتن صوری مزبور، دراین واقعیت قرار دارد که اغلب قاعدهٔ محاسبهٔ معادله‌ها، درمورد هم‌نهشتیهای به پیمانه‌ای ثابت نیز برقرارند.

از لحاظ تاریخی، مفهوم هم‌نهشتی ابتدا توسط گاوس برای حلقهٔ Z ایجاد شد. دراین مورد $a \equiv b(\text{mod } m)$، بدین معناست که تفاضل دو عدد صحیح a و b در ایده‌آل $M=(m)$ قرار دارد ؛ بنابراین، $a-b$ بر m بخشپذیر است، یا a و b در تقسیم بر m باقیمانده‌های یکسان دارند.

مثالها: $۸۸ \equiv -۱۰ (\text{mod} ۱۴)$ ؛ زیرا $۹۸ = (-۱۰) - ۸۸$ بر ۱۴ بخشپذیر است ؛

$۲^{۳۲} \equiv -۱ (\text{mod} ۶۴۱)$ $\quad$ $۳^{۷} \equiv ۱ (\text{mod} ۱۰۹۳)$

اعداد صحیح

ویژگیهای معینی از رده‌های مانده‌های واقع در حلقهٔ اعداد صحیح Z را می‌توان در رابطه با بخشپذیری اعداد بررسی کرد. دراین مورد فرض می‌کنیم (a,b) بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد a، b و p عددی اوّل را نمایش دهد.

حلقهٔ ردهٔ مانده‌ها

رده‌های مانده‌های به پیمانهٔ m را می‌توان با تعریف جمع و ضرب رده‌های مانده‌ها در حلقه به‌کار برد. این مطلب را با مثالی توضیح می‌دهیم.

فرض می‌کنیم r_1 ردهٔ مانده‌های $\bar{۲}$ به پیمانهٔ ۶ شامل اعداد

$..., -۱۰, -۴, ۲, ۸, ۱۴, ...$

و r_2 ردهٔ مانده‌های $\bar{۵}$ به پیمانهٔ ۶ شامل اعداد

$..., -۷, -۱, ۵, ۱۱, ...$

باشد. در این صورت، $r_1 + r_2$ را به عنوان ردهٔ مانده‌هایی تعریف می‌کنیم که شامل $۷ = ۵ + ۲$ باشد، و در واقع شامل جمیع اعدادی که در تقسیم بر ۶ باقیماندهٔ «۱» را به‌جا می‌گذارند.

در این مورد می‌نویسیم $\bar{۱} = \bar{۵} + \bar{۲}$ ؛ مثالهای دیگر عبارتند از $\bar{۵} = \bar{۰} + \bar{۵}$ ، $\bar{۰} = \bar{۳} + \bar{۳}$ ، حاصلضرب مورد بحث توسط $\bar{۴} = \overline{۱۰} = \bar{۲} \cdot \bar{۵}$ تعریف می‌شود ؛ مثالهای دیگر به پیمانهٔ ۶ عبارت است از : $\bar{۰} = \bar{۳} \cdot \bar{۲}$ ، $\bar{۳} = \bar{۳} \cdot \bar{۳}$ ، $\bar{۰} = \bar{۰} \cdot \bar{۵}$

تحت جمع و ضرب تعریف شدهٔ پیشین، رده‌های مانده‌های به پیمانهٔ m، حلقهٔ *ردهٔ مانده‌های "residue class ring"* به پیمانهٔ m را تشکیل می‌دهند. ساختار این حلقه را می‌توان در گزاره‌هایی دقیق توصیف کرد. این حلقه، اگر و تنها اگر m عددی اوّل باشد، میدان است.

گروه رده‌های مانده‌های اوّل

با انتخاب جمیع آنهایی که اعدادشان با m اوّلند، از میان m ردهٔ مانده‌های متمایز

$\bar{۰}, \bar{۱}, \bar{۲}, ..., \overline{m-۱} \mod m$

رده‌های مانده‌های اوّل به پیمانهٔ m را به‌دست می‌آوریم. به‌ازای $m = ۶$ دو ردهٔ مانده‌های اوّل $\bar{۱}$ و $\bar{۵}$ موجود است ؛ به ازای $m = p$ همواره $P-۱$ حالت وجود دارد ؛ یعنی :

$\bar{۱}, \bar{۲}, ..., \overline{p-۱}$

تعداد رده‌های مانده‌های اوّل به پیمانهٔ m را با $\varphi(m)$ (*تابع اویلر "Euler's function"*) نمایش می‌دهیم. برای مثال :

$\varphi(۶) = ۲ \ , \ \varphi(p) = p - ۱$

$\varphi(m)$ یک تابع عدد ـ نظریه‌ای "number-theoretical function" است ؛ یعنی، تابعی تعریف شده به ازای آرگومانهای صحیح. تابع مزبور، تابعی ضربی است ؛ یعنی $\varphi(a,b) = \varphi(a)\varphi(b)$ ؛ البته به شرطی که $(a,b) = ۱$. بسادگی می‌توان محاسبه کرد که :

$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-۱} = p^{k-۱}(p-۱)$

قاعده‌ای که هم‌اکنون به آن اشاره کردیم، محاسبهٔ $\varphi(m)$ را به‌ازای هر m ممکن می‌کند ؛ به عنوان مثال :

$\varphi(۳۲۴۰) = \varphi(۲^۳)\varphi(۳^۴)\varphi(۵) = ۴ \cdot ۵۴ \cdot ۴ = ۸۶۴$

رده‌های مانده‌های اوّل به پیمانهٔ m، تحت عمل ضرب، گروه G_mای از مرتبهٔ $\varphi(m)$ می‌سازند. ساختار G_m در مورد جمیع mها دارای اهمیت است ؛ اما در این‌جا تنها به بررسی حالت $m = p$ پرداخته می‌شود.

G_p دوری است، که بدین معناست که هر ردهٔ مانده‌های اوّل به پیمانهٔ p را می‌توان به عنوان توانی از ردهٔ مانده‌های ثابت $\bar{g}$ ای نوشت؛ چنین gای را ریشهٔ اوّلیهٔ "*primitive root*"به پیمانهٔ p می‌نامیم.

برای مثال، به ازای ۱۱ = p ، گروه ردهٔ مانده‌های G_{11} که می‌تواند با $\bar{g}=\bar{۲}$ (یا $\bar{۶}$، $\bar{۷}$، $\bar{۸}$) برای توانهای:

$$۲^۰\equiv۱, ۲^۱\equiv۲, ۲^۲\equiv۴, ۲^۳\equiv۸, ۲^۴\equiv۵, ۲^۵\equiv۱۰, ۲^۶\equiv۹,$$
$$۲^۷\equiv۷, ۲^۸\equiv۳, ۲^۹\equiv۶ (\bmod ۱۱)$$

تولید شود. جمیع ۱۰ = ۱ − p ردهٔ مانده‌های اوّل $\bar{۱}$، $\bar{۲}$، ...، $\overline{۱۰}$ را به‌دست می‌دهد.

از آن‌جا که هر عنصر a از G، گروه متناهی‌ای از مرتبهٔ n، در برابری $a^n=e$ (e عنصر واحد) صدق می‌کند، به ازای $G=G_m$، قضیهٔ اویلر "*Euler's theorem*" را داریم:

> **قضیهٔ اویلر:** $a^{\varphi(m)}\equiv۱(\bmod m)$ هنگامی که $(a,m)=۱$.
> *این قضیه در حالت خاص می‌شود.*
> **قضیهٔ فرما:** $a^{p-۱}\equiv۱(\bmod p)$ *هنگامی که بر p بخشپذیر نیست.*

هم‌نهشتیها با مجهولات

در حلقهٔ ردهٔ مانده‌ها و گروه ردهٔ مانده‌ها مسائل جبری خاصی را می‌توان حل کرد. برای مثال، می‌توان این پرسش را مطرح کرد که کدام یک از رده‌های مانده‌های $\bar{x}$ پیمانهٔ m و درمعادله‌های مفروضی، مثلاً $\overline{ax}=\bar{b}$ ، صدق می‌کنند. معادله‌هایی چنین به هم‌نهشتیهای به پیمانهٔ mی با مجهولات می‌انجامند.

هم‌نهشتی خطی "Linear Congruence"

$ax\equiv b(\bmod m)$ را نمی‌توان همواره حل کرد. برای مثال، $۳x\equiv۲(\bmod ۱۲)$ حل‌ناپذیر است؛ زیرا هیچ مضرب صحیح ۳ای در تقسیم بر ۱۲، باقیماندهٔ ۲ به‌جا نمی‌گذارد.

درواقع، $ax\equiv b(\bmod m)$ حل‌پذیر است؛ اگر و تنها اگر، b بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (a,m) بخش‌پذیر باشد.

هم‌نهشتی از درجهٔ n

$$x^n+a_1x^{n-۱}+\ldots+a_n\equiv۰(\bmod m)$$

می‌تواند جوابهای ناهم‌نهشتی "incongruent solutions" بیش از آنچه درجهٔ nاش مقرّر می‌کند، داشته باشد. برای مثال، $x^۲=۱(\bmod ۸)$ دارای جوابهای $x\equiv۱,۳,۵,۷$ است.

این معادله، در صورتی که پیمانهٔ m عدد اوّل p باشد، اصلاً نیاز به داشتن جواب ندارد و نمی‌تواند بیش از n ردهٔ مانده‌ها به عنوان جواب داشته باشد.

مانده‌های توانی

در *هم‌نهشتی دوجمله‌ای "binomial congruence"*

$$x^n\equiv a(\bmod p)$$

a بر p بخش‌پذیر نیست. رده‌های مانده‌های $a(\bmod p)$ی که در مورد آنها این هم‌نهشتی حل‌پذیر است، به مانده‌های توانی "power residues" به پیمانهٔ p موسوم است. در این مورد، دو پرسش اساسی مطرح می‌شود:

۱. مانده‌های توانی nام مربوط به اوّلی، مفروض کدام اعدادند؟

۲. به ازای کدام یک از اوّلهای p عدد مفروض a ماندهٔ توانی nام است؟

به پرسش اوّل توسط *معیار اویلر "euler's criterion"*، یعنی، $a^{(p-۱)/d}\equiv۱(\bmod p)$ که در آن $d=(p-۱,n)$ ، پاسخ داده شد. رده‌های مانده‌های aای که در این شرط صدق می‌کنند و فقط همین رده‌ها مانده‌های توانی nام‌اند.

پاسخ پرسش دوم به *قوانین تقابل "reciprocity laws"* منجر می‌شود، که از جمله دستاوردهای زیبا و بنیادی نظریهٔ اعداد می‌باشند.

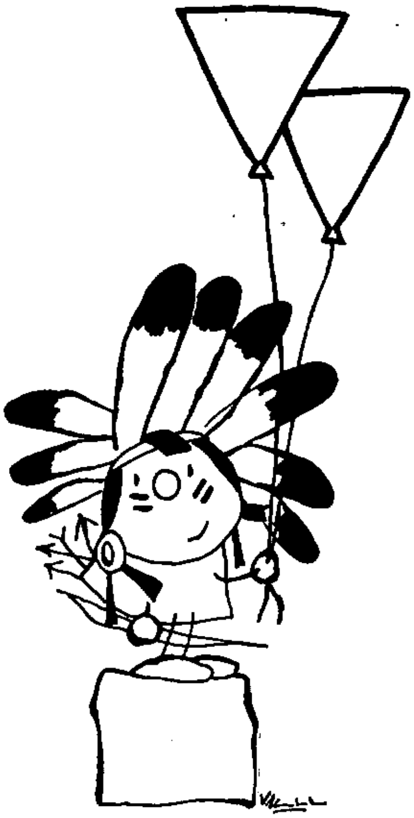
به ازای ۲ = n ، رده‌های مانده‌های $a(\bmod p)$ با $(a,p)=۱$ ، که به ازای آنها هم‌نهشتی $x^۲\equiv a(\bmod p)$ حل‌پذیر است، به *مانده‌ها(ی درجهٔ دوم) "(quadratic)residues"* موسومند و مواردی که به ازای آنها هم‌نهشتی مزبور حل‌ناپذیر است، *نامانده‌ها(ی درجهٔ دوم) "(quadratic) non-residues"* نامیده می‌شوند.

به ازای pهای فرد، تعداد مانده‌ها با تعداد نامانده‌های به پیمانهٔ p برابر است و به عبارت دیگر تعداد هریک $(p-۱)/۲$ است.

برای مثال، به پیمانهٔ ۱۷داریم:

$$۱^۲\equiv۱, ۲^۲\equiv۴, ۳^۲\equiv۹, ۴^۲\equiv۱۶, ۵^۲\equiv۸, ۶^۲\equiv۲, ۷^۲\equiv۱۵,$$
$$۸^۲\equiv۱۳$$

در نتیجه، ۱۶،۱۵،۱۳،۹،۸،۴،۲،۱ هشت مانده و ۱۴،۱۲،۱۱،۱۰،۷،۶،۵،۳ هشت نامانده‌اند.



در حاشیهٔ مثلثات

(قسمت سوم)

اتحادهای مثلثاتی، نامساویهای مثلثاتی

● حمید رضا امیری

۱ـ ساده کردن عبارتهای مثلثاتی

یادآوری و اثبات چند فرمول مهم مثلثاتی، برای استفاده در ساده کردن و اثبات اتحادهای مثلثاتی

الف) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

ب) $\boxed{1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha}$

ج) $\boxed{1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha}$

د) $\boxed{\tan^n\alpha.\cot^n\alpha=1}$

$\Leftrightarrow \tan^n\alpha=\frac{1}{\cot^n\alpha} \Leftrightarrow \cot^n\alpha=\frac{1}{\tan^n\alpha} (n\in IN)$

هـ) $(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$

$\pm 2\sin\alpha\cos\alpha=1\pm 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow \boxed{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha}$ و

$\boxed{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha}$

و) $\boxed{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

اثبات

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=1^2 \Rightarrow$

$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$

$\Rightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

ز) $\boxed{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$

اثبات

$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3=1^3 \Rightarrow$

$\sin^6\alpha+3\sin^4\alpha\cos^2\alpha+3\cos^4\alpha\sin^2\alpha$

$+\cos^6\alpha=1$

$\Rightarrow \sin^6\alpha+\cos^6\alpha+3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$\overbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}^{1}=1$

$\Rightarrow \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

ح) $\boxed{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

اثبات

$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=$

$(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)\underbrace{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}_{1}=\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$\boxed{\cos^{4}\alpha-\sin^{4}\alpha=\cos^{2}\alpha-\sin^{2}\alpha}$$

ط) $$\boxed{\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}}$$

اثبات

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$\frac{\sin^{2}\alpha+\cos^{2}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

ساده کردن عبارتهای مثلثاتی و مسائل حل شده

برای ساده کردن عبارتهای مثلثاتی، با استفاده از فرمولها و برابریهای مهم که اهمّ آنها به اثبات رسید، عبارت مثلثاتی را به ساده‌ترین صورت درآورده، به‌طوری که ساده‌تر نشود. (در حقیقت، هرگاه طرف دوم یک اتحاد مثلثاتی را که مفصّل دربارهٔ آن مطلب خواهیم گفت، حذف کنیم، عبارتی مثلثاتی به‌دست می‌آید که اگر ساده شود، همان طرف دوم حاصل می‌شود.)

مسألهٔ ۱ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید :

$$A=(\cos x+\sin x-1)(\cos x+\sin x+1)$$

اتحاد مزدوج $\Rightarrow A=(\cos x+\sin x)^{2}-1=$

$$(1+2\sin x\cos x)-1=2\sin x\cos x$$

مسألهٔ ۲ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید :

$$B=(\sin\alpha+\cos\alpha)(\tan\alpha+\cot\alpha)$$

$$B=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\Rightarrow B=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}$$

تذکر: در حقیقت، از تجزیه کسرها استفاده شده است و به‌طور کلی داریم :

$$\frac{A+B-C+D-E}{F}=\frac{A}{F}+\frac{B}{F}-\frac{C}{F}+\frac{D}{F}-\frac{E}{F}$$

مسألهٔ ۳ـ عبارت مثلثاتی زیر را ساده کنید :

$$C=(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha}\right)=$$

$$(\sin\alpha+\cos\alpha)\left(\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)$$

اتحاد مزدوج $\Rightarrow C=\dfrac{\cos^{2}\alpha-\sin^{2}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$

$$\frac{\cos^{2}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\sin^{2}\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\cot\alpha-\tan\alpha$$

۲ـ اتحادهای مثلثاتی

تعریف و روشهای اثبات اتحادهای مثلثاتی و مسائل حل‌شده

تعریف: هر تساوی مثلثاتی بین چند نسبت مثلثاتی که به ازای جمیع مقادیر متغیر یا متغیرهای آن همواره برقرار باشد را یک اتحاد مثلثاتی می‌نامیم.

برای اثبات یک اتحاد مثلثاتی به سه طریق می‌توان عمل نمود که هرکدام از این روشها را پس از توضیح، با ذکر مثالی و حل از همان روش، در زیر آورده‌ایم.

روش اول: در این روش، از یک طرف تساوی استفاده کرده و با کمک‌گیری از فرمولهای مثلثاتی و برابریهای اثبات شده که قبلاً آمده است، به طرف دیگر تساوی می‌رسیم. لازم به ذکر است که اگر از طرف چپ اتحاد، به طرف راست یا از سمت راست اتحاد، به سمت چپ برسیم، فرقی ندارد و بستگی به سلیقه و تشخیص خودمان دارد.

مسألهٔ ۴ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\cos^{4}x-\sin^{4}x}{\cos^{2}x}=(1-\tan x)(1+\tan x)$$

$$\frac{\cos^{4}x-\sin^{4}x}{\cos^{2}x}=\frac{\cos^{2}x-\sin^{2}x}{\cos^{2}x}=$$

$$\frac{\cos^{2}x}{\cos^{2}x}-\frac{\sin^{2}x}{\cos^{2}x}=1-\tan^{2}x=(1-\tan x)(1+\tan x)$$

تذکر: قبلاً ثابت کردیم :

$$\cos^{4}x-\sin^{4}x=\cos^{2}x-\cos^{2}x$$

روش دوم: در این روش، از هر دو طرف تساوی استفاده می‌شود و با کمک گرفتن از فرمولها و برابریهای اثبات شده، دو طرف تساوی را ساده کرده تا به یک مقدار مشترک برسیم.

مسألهٔ ۵ـ اتحاد مثلثاتی صفحهٔ بعد را اثبات کنید (x در ناحیهٔ اوّل دایرهٔ مثلثاتی) :

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\frac{1}{\cos x}-\tan x$$

سمت راست $=\frac{1}{\cos x}-\tan x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}$

$$=\boxed{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$$

سمت چپ $=\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}=$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{(1-\sin x)(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}}}_{\text{اتحاد مزدوج}}=\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}}=$$

$$\sqrt{\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}}=\boxed{\frac{1-\sin x}{\cos x}}$$

هر دو طرف به عبارت $\frac{1-\sin x}{\cos x}$ رسید، بنابراین، دو طرف با هم برابرند، لذا اتحاد برقرار است.

روش سوم (روش اثبات بازگشتی) : در این روش، ما تساوی را برقرار فرض می‌کنیم و دو طرف تساوی را ساده کرده یا مثلاً یک طرف را به طرف دیگر منتقل می‌کنیم تا به یک تساوی منطقی و همیشه درست برسیم (در این راه از همهٔ خواص تساویها علاوه بر فرمولهای مثلثاتی، می‌توان استفاده کرد). به محض این که به تساوی منطقی رسیدیم، همهٔ عملیات را از تساوی منطقی که همیشه برقرار است، به سمت عقب بازمی‌گردیم تا به اتحاد مثلثاتی موردنظر دست یابیم. در این‌جا نه تنها اتحاد مثلثاتی ثابت شده است ؛ بلکه به‌دست آمده است. در حقیقت، این روش (مرحلهٔ برگشت از تساوی منطقی به طرف خود اتحاد) می‌تواند روشی برای ساختن اتحادهای مثلثاتی باشد.

مسألهٔ ۶ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\sin z\tan z}{\tan z-\sin z}=\frac{\tan z+\sin z}{\sin z\tan z}$$

فرض کنیم اتحاد برقرار باشد با طرفین وسطین و استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$\sin^2 z\tan^2 z=\tan^2 z-\sin^2 z\Leftrightarrow\sin^2 z\tan^2 z=$$

$$\frac{\sin^2 z}{\cos^2 z}-\sin^2 z=\frac{\sin^2 z-\sin^2 z\cos^2 z}{\cos^2 z}$$

$$\Leftrightarrow\sin^2 z\tan^2 z=\frac{\sin^2 z(1-\cos^2 z)}{\cos^2 z}=$$

$$\frac{\sin^2 z\sin^2 z}{\cos^2 z}=\tan^2 z.\sin^2 z$$

$\Leftrightarrow\sin^2 z\tan^2 z=\sin^2 z\tan^2 z\leftarrow$ تساوی منطقی

مسألهٔ ۷ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\sin^2 y-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos^2 y$$

فرض کنیم اتحاد برقرار باشد $\Rightarrow\sin^2 y+\cos^2 y=$

$\cos^2 x+\sin^2 x\Rightarrow 1=1\leftarrow$ تساوی منطقی

حال داریم $1=1\Rightarrow$

$$\sin^2 y+\cos^2 y=\sin^2 x+\cos^2 x\Rightarrow$$

$$\sin^2 y-\sin^2 x=\cos^2 x-\cos^2 y$$

مسألهٔ ۸ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\sin^3 x+\cos^3 x=$$

$$\sin x+\cos x-\sin^2 x\cos x-\cos^2 x\sin x$$

$$\sin^3 x+\cos^3 x=$$

$$(\sin x+\cos x)(\overbrace{\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x}^{1})$$

$$=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$$

$$=\sin x-\sin^2 x\cos x+\cos x-\sin x\cos^2 x$$

مسألهٔ ۹ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\cos^2 x=\cot^2 x-\cot^2 x.\cos^2 x$$

سمت راست $=\cot^2 x-\cot^2 x.\cos^2 x$

$$=\cot^2 x(1-\cos^2 x)=\cot^2 x.\sin^2 x$$

$=\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}.\sin^2 x=\cos^2 x=$ سمت چپ

مسألهٔ ۱۰ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\cos^4 x.\cot^2 x}{1+\cot^2 x}+\frac{\sin^4 x.\tan^2 x}{1+\tan^2 x}=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

داریم : $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}\Rightarrow\frac{1}{1+\cot^2 x}=\sin^2 x$

و نیز داریم : $\frac{1}{1+\tan^2 x}=\cos^2 x$

$$\Rightarrow \text{سمت چپ اتحاد} = \frac{1}{1+\cot^2 x}.\cos^4 x.\cot^2 x + \frac{1}{1+\tan^2 x}.\sin^4 x.\tan^2 x$$

$$=\sin^2 x.\cos^4 x.\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+\cos^2 x.\sin^4 x\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\underbrace{\cos^6 x+\sin^6 x = 1-3\sin^2 x\cos^2 x}_{\text{قبلاً ثابت شده است}} = \text{سمت راست}$$

مسألهٔ ۱۱ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\sin^8 x+\cos^8 x = 1-2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$$

داریم : $(\sin^4 x-\cos^4 x)^2=(\sin^2 x-\cos^2 x)^2$

$$\Rightarrow \sin^8 x+\cos^8 x-2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$=\sin^4 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x$$

و نیز داریم : $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$\Rightarrow \sin^8 x+\cos^8 x-2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$=1-2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x$$
$$\Rightarrow \sin^8 x+\cos^8 x=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x$$
$$\Rightarrow \sin^8 x+\cos^8 x=$$
$$1-2\sin^2 x\cos^2 x(2-\sin^2 x\cos^2 x)$$

و اتحاد به‌دست آمد.

مسألهٔ ۱۲ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\sec^2 x-\text{cosec}^2 x=\tan^2 x-\cot^2 x$$

قبلاً ثابت کردیم : $(\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^2 x-\cos^2 x)$

$$\text{سمت چپ} = \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}-\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$$

$$=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\Rightarrow \tan^2 x-\cot^2 x=\text{سمت راست}$$

مسألهٔ ۱۳ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{1}{\sin^4 x}-\frac{2}{\sin^2 x}+1=\cot^4 x$$

از اتحاد $1+\cot^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}$ استفاده می‌کنیم :

$$\text{سمت چپ} = \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2-2\times\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)+1$$
$$=(1+\cot^2 x)^2-2\times(1+\cot^2 x)+1$$
$$=1+\cot^4 x+2\cot^2 x-2-2\cot^2 x+1=\cot^4 x$$

و اتحاد ثابت شد.

مسألهٔ ۱۴ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$\frac{\sin^6 x-\cos^6 x}{2\sin^2 x-1}=1-\sin^2 x+\sin^4 x$$

از اتحاد $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ استفاده می‌شود :

$$\text{سمت چپ} = \frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(\sin^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)}{2\sin^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}$$

قبلاً ثابت کردیم : $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$\Rightarrow \text{سمت چپ} = \frac{(\sin^2 x-\cos^2 x)(1-\sin^2 x\cos^2 x)}{(\sin^2 x-\cos^2 x)}$$
$$=1-\sin^2 x\cos^2 x=1-\sin^2 x(1-\sin^2 x)$$
$$=1-\sin^2 x+\sin^4 x=\text{سمت راست تساوی}$$

مسألهٔ ۱۵ـ اتحاد مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

$$(\tan\alpha+\cot\alpha-\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}+\sqrt{2}\right)=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$$

قبلاً ثابت کردیم $\rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$

$$\Rightarrow \text{سمت چپ}=(\tan\alpha+\cot\alpha-\sqrt{2})(\tan\alpha+\cot\alpha+\sqrt{2})$$
$$\overset{\text{اتحاد مزدوج}}{=\!=}(\tan\alpha+\cot\alpha)^2-(\sqrt{2})^2$$
$$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha-2$$
$$=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2-2=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$$

۳ـ نامساویهای مثلثاتی

روشهای اثبات نامساویهای مثلثاتی ـ مسائل حل شده

برای اثبات برقراری نامساویهای مثلثاتی، روشهای مختلفی

برحسب نامساوی مورد نظر موجود است. مثلاً بعضی از نامساویهای مثلثاتی را از روشهای ابتکاری و بعضی با استفاده از نامساویهای جبری اثبات می‌شوند ؛ اما می‌توان یک روش کلی برای اثبات نامساویهای مثلثاتی به‌کار برد ؛ به این صورت که ابتدا نامساوی را اثبات شده و برقرار فرض کرده، سپس با استفاده از خواص نامساویها آن را ساده می‌کنیم تا به یک نامساوی منطقی برسیم ؛ یعنی به یک نامساوی همیشه برقرار، مثلاً، $\sin^2 x \geq 0$ و بلافاصله به محض رسیدن به چنین نامساوی منطقی، از همان نامساوی شروع و روابط را به عقب برمی‌گردیم تا به نامساوی مزبور برسیم و این‌جاست که نه تنها نامساوی اثبات شده، بلکه به‌دست آمده است. در حقیقت، این روش که تقریباً در همهٔ موارد، براحتی نتیجه می‌دهد، نه تنها روشی است برای اثبات نامساویها ؛ بلکه روشی است برای ساختن و طرح مسائل نامساویهای مثلثاتی. حال، به حلّ چند نمونه از نامساویهای مثلثاتی می‌پردازیم :

مسألهٔ ۱۶ـ درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید(α زاویهٔ حاده).

$$\sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha \leq 1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{1-2\sin\alpha\cos\alpha}_{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2} \geq 0$$

$\Rightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \geq 0 \leftarrow$ نامساوی همیشه برقرار

حال داریم : $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$1-2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha \leq 1$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha \leq \frac{1}{2}$$

مسألهٔ ۱۷ـ درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویهٔ حاده).

$$\sin\alpha+\cos\alpha \leq \sqrt{2}$$

$$\sin\alpha+\cos\alpha \leq \sqrt{2} \Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha \leq 2 \Rightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0$$

$\Rightarrow (\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \geq 0 \leftarrow$ نامساوی منطقی

حال داریم :

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \geq 0 \Rightarrow 1-2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0$$

$$\Rightarrow 2-1-2\sin\alpha\cos\alpha \geq 0$$

$$\Rightarrow 1+2\sin\alpha\cos\alpha \leq 2 \Rightarrow (\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \leq 2$$

$$\Rightarrow \sin\alpha+\cos\alpha \leq \sqrt{2}$$

مسألهٔ ۱۸ـ درستی نامساوی زیر را تحقیق کنید (α زاویهٔ حاده).

$$\tan\alpha+\cot\alpha \geq 2$$

برای اثبات این نامساوی از یک نامساوی جبری می‌توان استفاده کرد که ابتدا آن نامساوی را ثابت می‌کنیم :

فرض کنیم $a \geq 0 \Rightarrow (1-a)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$1-2a+a^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{دو طرف بر a تقسیم}} \frac{1}{a}-2+a \geq 0$$

$$\Rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2$$

حال با توجه به این که حدود تغییرات تانژانت و کتانژانت از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد، پس هر عدد حقیقی، می‌تواند تانژانت یا کتانژانت زاویه‌ای باشد و بعکس. اگر فرض کنیم $a = \tan\alpha$، داریم :

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha \Rightarrow \tan\alpha+\cot\alpha \geq 2$$

و حکم ثابت است.

تمرین:

☐ عبارتهای مثلثاتی زیر را ساده کنید :

۱) $A = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$

۲) $B = (\frac{1}{\sin x} - \sin x)(\frac{1}{\cos x} - \cos x)$

۳) $C = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x}$

۴) $D = \frac{\sec^2 x}{\sec^2 x - 1}$

۵) $E = \frac{\sec\alpha.\sin\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}$

۶) $F = (1-\sin^2\alpha)(1+\tan^2\alpha)$

۷) $G=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$

۸) $H=(\sec x-\tan x)(\text{cosec}x+1)$

۹) $I=\frac{\text{cosec}x}{1+\text{cosec}x}-\frac{\text{cosec}x}{1-\text{cosec}x}$

☐ اتحادهای مثلثاتی زیر را ثابت کنید :

۱) $(\frac{1+\tan^2\alpha}{\tan\alpha})^2=\frac{1+\tan^4\alpha}{\tan^2\alpha}+2$

۲) $(\tan\alpha+\cot\alpha)(\tan\alpha-2\cot\alpha)$

$=\frac{\tan^4\alpha+\tan^2\alpha-1}{1+\tan^2\alpha}-\frac{2\cot^4\alpha+2\cot^2\alpha+1}{1+\cot^2\alpha}$

۳) $(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sqrt{5})(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha-\sqrt{5})$

$=-4(1+\sin^2\alpha\cos^2\alpha)$

۴) $\cos\alpha-\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}+\tan\alpha.\sin\alpha=0$

۵) $\frac{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-1}{\sin^2\alpha}=\cot\alpha-1$

۶) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(\tan\alpha+\cot\alpha)=\sec\alpha+\text{cosec}\alpha$

۷) $\sec^4\alpha-\tan^4\alpha=\sec^2\alpha+\tan^2\alpha$

۸) $\frac{1+\cot\alpha}{\text{cosec}\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{\sec\alpha}$

۹) $\frac{\tan\alpha}{1+\sec\alpha}+\frac{1+\sec\alpha}{\tan\alpha}=2\text{cosec}\alpha$

۱۰) $(\frac{\sin^2\alpha}{\tan^4\alpha})^3(\frac{\text{cosec}^3\alpha}{\cot^6\alpha})^2=1$

۱۱) $\frac{\tan\alpha}{1-\cot\alpha}+\frac{\cot\alpha}{1-\tan\alpha}=1+\sec\alpha.\text{cosec}\alpha$

۱۲) $\frac{1+\sec\alpha}{\sin\alpha+\tan\alpha}=\text{cosec}\alpha$

۱۳) $\frac{\cos\alpha}{1-\tan\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\cot\alpha}=\cos\alpha+\sin\alpha$

۱۴) $\frac{\tan\alpha-\sin\alpha}{\sec\alpha}=\frac{\sin^3\alpha}{1+\cos\alpha}$

۱۵) $\cot\alpha.\sec\alpha=\frac{1}{2}(\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha})$

۱۶) $\frac{\sec x-1}{\sec x+1}+\frac{\cos x-1}{\cos x+1}=0$

۱۷) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}=2\sec\alpha$

۱۸) $\sec^4\alpha-\sec^2\alpha=\frac{1}{\cot^4\alpha}+\frac{1}{\cot^2\alpha}$

۱۹) $\frac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\tan\alpha-\cot\alpha$

۲۰) $\frac{1}{\sec^2\alpha}+\sec^2\alpha+\frac{1}{\text{cosec}^2\alpha}-\frac{\sec^2\alpha}{\text{cosec}^2\alpha}=2$

☐ عبارتهای زیر را با تغییر متغیر مناسب به عبارتهای مثلثاتی تبدیل کرده و ساده کنید :

۱) $A=\sqrt{a^2+x^2}$

۲) $B=\frac{1}{x^2+a^2}$

(راهنمایی : قرار دهید $x=a\tan\alpha$)

۳) $C=\frac{\sqrt[3]{(a^2+x^2)^2}}{x}$

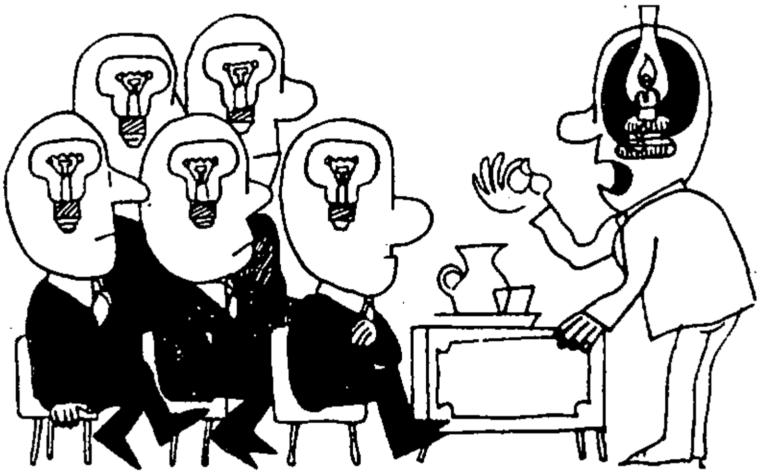
۴) $D=\sqrt{x^2-a^2}$

۵) $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$

(راهنمایی : قرار دهید $x=a\sec\alpha$)

۶) $\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}$

معمّاهایی با ماهیت ریاضی



قسمت سوّم: معادله های سیاله

• هوشنگ شرقی

همهٔ دانش‌آموزان علاقه‌مند رشتهٔ ریاضی، احتمالاً با مفهوم معادلهٔ سیاله آشنایی دارند و می‌دانند معادلهٔ سیاله، معادله‌ای است که جوابهای آن در مجموعهٔ عددهای صحیح بررسی می‌شود. به عبارت دیگر، هدف از حلّ یک معادلهٔ سیاله، یافتن مجموعهٔ عددهای صحیحی می‌باشد که درمعادله صدق می‌کنند. معادله‌های سیاله، انواع بسیاری دارند و زیبایی مباحث آنها در این است که در بیشتر موارد، با یک معادله با بیش از یک مجهول سروکار داریم که ممکن است مجموعهٔ جوابهای صحیح آن، کاملاً محدود باشد. به عنوان مثال، معادلهٔ سیالهٔ $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ را درنظر بگیرید، می‌توان ثابت نمود که تنها جوابهای صحیح این معادله، زوجهای (۲،۱) و (۳،۰) می‌باشند و این ازنظر هندسی، معادل با آن است که روی منحنی تابع، با ضابطهٔ $y = \frac{2x - 3}{x - 1}$ تنها دو نقطهٔ $A(2,1)$ و $B(0,3)$ با مختصات صحیح وجود دارند. همچنین می‌توان ثابت کرد که تنها و تنها یک سه‌تایی از عددهای صحیح در رابطهٔ $x^3 = 2y^3 + 4z^3$ صدق می‌کند، که روشن است، سه تایی $x = 0$ و $y = 0$ و $z = 0$ می‌باشد. البته در بسیاری از موارد نیز معادلهٔ سیاله می‌تواند دارای جوابهای بی‌شماری باشد. به عنوان مثال، معادلهٔ $x + y = 5$ را درنظر بگیرید. با کمی دقت، واضح است که بی‌شمار زوج عددهای صحیح در این رابطه صدق می‌کنند. (آیا می‌توانید بگویید چند زوج عدد طبیعی در این رابطه، صادق هستند؟)

در این مقاله، بنای ما بر ارائهٔ راه‌حلهای ، حلّ معادله‌های سیاله نمی‌باشد وخوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند برای اطلاع از روشهای مختلف حلّ معادله‌های سیاله، به کتابهای مربوط مراجعه نماید. (معادله‌های سیاله بخشی از مباحث نظریهٔ اعداد می‌باشد و یکی از انواع سادهٔ آن، یعنی معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّل $ax + by = c$ در کتاب ریاضی گسسته دورهٔ پیش‌دانشگاهی بحث شده است.) اما در ضمن حلّ مسائل، سعی می‌شود اشاره‌ای نیز به شیوهٔ حلّ مسائل بشود ؛ ولی وارد جزئیات مباحث مربوط به حلّ معادله نمی‌شویم. هدف اصلی این مقاله، اشاره به معمّاهایی است که به کمک معادله‌های سیاله حل می‌شوند. در شماره‌های قبل، معمّاهایی که ریشه در بحث استقرای ریاضی و نظریهٔ گرافها داشت، بررسی کردیم، و دراین شماره، به معمّاهایی می‌پردازیم که پاسخ آنها با حلّ معادله‌ای سیاله به‌دست می‌آید. در بسیاری از معمّاها، جوابها باید درمجموعهٔ عددهای طبیعی به‌دست آید و این کار را آسان‌تر می‌کند.

الف ـ معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّل $(ax + by = c)$

معادلهٔ سیالهٔ درجهٔ اوّل، در حالت کلی، جوابهای بی‌شماری

دارد ؛ به شرطی که $(a,b)|c$ ، یعنی بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b ، عدد c را بشمارد ؛ ولی در مجموعهٔ عددهای طبیعی، این معادله، تعداد محدودی جواب دارد. بگذارید با یک مثال آغاز کنیم.

مثال: قیمت یک خودکار ۱۵ تومان و قیمت یک مداد، ۱۸ تومان می‌باشد. علی با ۳۰۰ تومان پول خود، چند مداد و چند خودکار می‌تواند بخرد؟

روشن است که اگر مسأله را با نمادهای ریاضی نمایش دهیم، با فرض این‌که او x خودکار و y مداد بخرد، به معادلهٔ دو مجهولی زیر می‌رسیم :

$$۱۵x + ۱۸y = ۳۰۰$$

یا این‌که :

$$۵x + ۶y = ۱۰۰$$

بدیهی است که این معادله درمجموعه عددهای حقیقی، جوابهای بی‌شماری دارد ؛ اما در مجموعهٔ عددهای صحیح نیز مسأله در حالت کلی، جوابهای بی‌شماری دارد ؛ زیرا $(۵,۶) = ۱$ و $۱|۱۰۰$ ؛ یعنی ۱۰۰ بر ۱ بخش‌پذیر است. اکنون دقت کنید که چگونه مجموعه جوابهای صحیح این معادله را به‌دست می‌آوریم. یکی از دو متغیر (مثلاً y) را بر حسب متغیر دیگر به‌دست می‌آوریم :

$$۵x + ۶y = ۱۰۰ \Rightarrow y = \frac{۱۰۰ - ۵x}{۶}$$

اکنون سعی می کنیم عدد ۱۰۰ و متغیر $-۵x$ را به دو قسمت، طوری بنویسیم که هر دو بر مخرج کسر (یعنی ۶) بخش‌پذیر باشند ؛

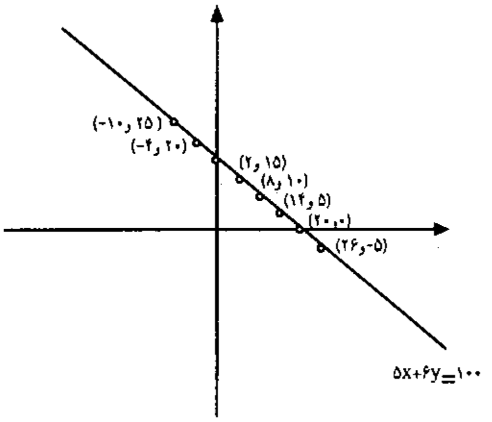
یعنی می‌نویسیم :

$$y = \frac{۹۶ - ۶x + ۴ + x}{۶}$$

و پس از تفکیک کسر، خواهیم داشت :

$$y = ۱۶ - x + \frac{x + ۴}{۶}$$

روشن است که اگر y بخواهد عددی صحیح باشد، باید $x + ۴$ بر ۶ بخش‌پذیر باشد ؛ یعنی $x + ۴ = ۶k$ و از آن‌جا $x = ۶k - ۴$ و به دست می‌آید : $y = ۲۰ - ۵k$ ؛ به عبارت دیگر، همهٔ زوج عددهای صحیح، به صورت $(x = ۶k - ۴, y = ۲۰ - ۵k)$ در معادله صدق می کنند و با امتحان نیز می‌توان به همین نتیجه رسید و باز روشن است که به ازای مقادیر مختلف k، زوجهای مختلفی برای (x,y) به‌دست می‌آید. به عنوان مثال، اگر $k = ۱$ باشد، به‌دست می‌آید : $(x,y) = (۲,۱۵)$ و به ازای $k = ۵$ ، $(x,y) = (۲۶,-۵)$. تعبیر هندسی موضوع فوق، این است که روی خط $۵x + ۶y = ۱۰۰$ نقطه‌های بی‌شماری با مختصات صحیح وجود دارد، که همگی آنها به صورت $(۶k - ۴, ۲۰ - ۵k)$ می‌باشند :



بعضی از این نقاط که به ازای مقادیر مختلف k به‌دست آمده‌اند، در شکل مشخص شده‌اند. اما همان‌طور که از مسأله برمی‌آید، در این‌جا هدف ما تنها تعیین مجموعه جوابهای طبیعی یا صفر می‌باشد، که فقط چهار زوج $(۲,۱۵)$ ، $(۸,۱۰)$ ، $(۱۴,۵)$ و $(۲۰,۰)$ را شامل می‌شود. برای به‌دست آوردن این چهار جواب، دقت می کنیم که x و y، چون تعداد خودکار و مداد می‌باشند، نمی‌توانند عددهای منفی باشند ؛ یعنی لازم است که $۲۰ - ۵k \geq ۰$ و $۶k - ۴ \geq ۰$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید $\frac{۲}{۳} \leq k \leq ۴$ ، و چون $k \in z$ می‌باشد، پس $k = ۱,۲,۳,۴$ که به ازای این چهار مقدار، همان چهار زوج به‌دست می‌آید ؛ یعنی او می‌تواند ۲ خودکار و ۱۵ مداد یا ۸ خودکار و ۱۰ مداد یا ۱۴ خودکار و ۵ مداد بخرد یا این که تنها ۲۰ خودکار بخرد. اکنون اگر شرط دیگری نیز به مسأله اضافه شود، می‌توان جواب مسأله را دقیق‌تر به‌دست آورد. مثلاً فرض کنید قید زیر به مسأله اضافه شود :

« او چند مداد و چند خودکار خریده است ؛ اگر به حداکثر ۶ مداد نیاز داشته باشد و بخواهد حتماً مداد نیز بخرد.»

واضح است که با این شرط، تنها جواب مسأله $x = ۱۴$ و $y = ۵$ است ؛ یعنی او ۱۴ خودکار و ۵ مداد خریده است. اکنون با روشنتر شدن موضوع، می‌توان معمّاهایی را مطرح و حل نمود. به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۱: سه ماهیگیر از یک صبح تا شب، ماهیگیری نموده و شب را به استراحت می‌پردازند. صبح، اوّلین ماهیگیر از خواب

بیدار و ماهیها را به سه قسمت مساوی تقسیم نموده و سهم خود را برمی‌دارد و یک ماهی اضافه را به دریا می‌اندازد و می‌رود. سپس نفر دوم از خواب برخاسته و به تصور آن‌که ماهیگیر دوم چیزی برنداشته است و درهمان اطراف می‌باشد، ماهیهای باقی‌مانده را به سه قسمت مساوی تقسیم و سهم خود را برداشته و باز یک ماهی را که اضافه مانده به دریا انداخته و می‌رود. نفر سوّم نیز پس از بیدار شدن، با همان تصور، ماهیها را به سه قسمت مساوی تقسیم و سهم خود را برداشته و یک ماهی اضافه را به دریا می‌اندازد و می‌رود. حدّاقل تعداد ماهیهای گرفته شده، چه‌قدر بوده است؟

حل: فرض می‌کنیم تعداد ماهیهای اوّلیه، x بوده باشد. از فرض مسأله، بلافاصله برمی‌آید که $x = ۳t + ۱$ ماهیگیر اوّل یک ماهی را دور انداخته و t ماهی را برمی‌دارد، لذا $۲t$ ماهی می‌ماند. چون ماهیگیر دوم نیز با همین وضع روبه رو شده است، پس $۲t = ۳m + ۱$ (زیرا ماهیهای باقی‌مانده نیز پس از تقسیم به ۳، یک ماهی اضافه داشتند)، ماهیگیر دوم نیز یک ماهی اضافه را دور انداخته و m ماهی را برمی‌دارد، پس $۲m$ ماهی باقی می‌ماند و چون ماهیگیر سوّم نیز با وضعی مشابه دو ماهیگیر قبل، روبه رو شده است، پس می‌توان نوشت: $۲m = ۳n + ۱$ و از این معادله ها به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} ۲m = ۳n + ۱ \\ ۲t = ۳m + ۱ \\ x = ۳t + ۱ \end{cases}$$

m را از معادلهٔ اوّل بر حسب n به‌دست آورده، در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم:

$$m = \frac{۳n + ۱}{۲} \Rightarrow ۲t = \frac{۳(۳n + ۱)}{۲} + ۱ = \frac{۹n + ۳}{۲} + ۱$$

$$\Rightarrow ۲t = \frac{۹n + ۵}{۲} \Rightarrow t = \frac{۹n + ۵}{۴}$$

و t را در معادلهٔ سوّم قرار می‌دهیم:

$$x = ۳\left(\frac{۹n + ۵}{۴}\right) + ۱ = \frac{۲۷n + ۱۵}{۴} + ۱ = \frac{۲۷n + ۱۹}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴x = ۲۷n + ۱۹ \Rightarrow ۴x - ۲۷n = ۱۹$$

و این یک معادلهٔ سیاله است که با همان روش گفته شده، حل می‌شود:

$$x = \frac{۲۷n + ۱۹}{۴} = \frac{۲۸n + ۲۰ - n - ۱}{۴} = ۷n + ۵ - \frac{n + ۱}{۴}$$

برای این‌که x عددی صحیح باشد، لازم است که $n + ۱ = ۴k$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید: $n = ۴k - ۱$ و لذا داریم:

$$x = ۲۸k - ۷ + ۵ - k \Rightarrow x = ۲۷k - ۲$$

اکنون برای آن‌که x عددی طبیعی باشد، کافی است $k \geq ۱$ باشد که کمترین مقدار x به ازای $k = ۱$ به‌دست می‌آید که مساوی ۲۵ می‌باشد؛ یعنی حدّاقل تعداد ماهیهای صیدشده، ۲۵ عدد بوده است. درستی پاسخ را با پیدا کردن سهم سه ماهیگیر تحقیق کنید. اگر بدانیم تعداد ماهیها بین ۷۰ تا ۱۰۰ ماهی بوده است، چند ماهی صید شده است؟

مثال ۲: یک اسکناس ۱۰۰۰ تومانی را به چند طریق می‌توان به اسکناسهای ۱۰۰ تومانی و ۵۰ تومانی خرد کرد؟

حل: فرض کنیم x اسکناس ۱۰۰ تومانی و y اسکناس ۵۰ تومانی، حاصل خرد شدن اسکناس ۱۰۰۰ تومانی باشد؛ بنابراین، به زبان ریاضی می‌توان نوشت:

$$۱۰۰x + ۵۰y = ۱۰۰۰ \Rightarrow ۲x + y = ۲۰$$

برای حلّ این معادلهٔ سیاله، براحتی می‌نویسیم:

$$y = ۲۰ - ۲x$$

اکنون به ازای هر عدد صحیح $n = k$، یک عدد صحیح $y = ۲۰ - ۲k$ به‌دست می‌آید. برای آن‌که جوابهای معادله را در مجموعهٔ عددهای صحیح مثبت یا صفر بیابیم، می‌نویسیم: $x \geq ۰$ و $y \geq ۰ \Leftarrow ۲۰ - ۲k \geq ۰$ و $k \geq ۰$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید: $۰ \leq k \leq ۱۰$؛ یعنی برای k یازده امکان وجود داشته و از آن‌جا مسأله، یازده جواب دارد که عبارت‌است از:

(۰,۲۰) و (۱,۱۸) و (۲,۱۶) و (۳,۱۴) و (۴,۱۲) و (۵,۱۰) و (۶,۸) و (۷,۶) و (۸,۴) و (۹,۲) و (۱۰,۰)

که مؤلّفهٔ اوّل، هر زوج تعداد اسکناسهای ۱۰۰ تومانی و مؤلّفهٔ دوم، تعداد اسکناسهای ۵۰ تومانی را مشخص می‌کند.

مثال ۳: اکنون مسأله را قدری تعمیم می‌دهیم. فرض می‌کنیم بخواهیم اسکناس ۱۰۰۰ تومانی را به اسکناسهای ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ تومانی خرد کنیم، چند امکان مختلف وجود دارد؟

حل: فرض کنیم x اسکناس ۵۰ تومانی، y اسکناس ۱۰۰ تومانی و z اسکناس ۲۰۰ تومانی، حاصل خرد شدن اسکناس ۱۰۰۰ تومانی باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$۵۰x + ۱۰۰y + ۲۰۰z = ۱۰۰۰$$

و یا این‌که: $x + ۲y + ۴z = ۲۰$، اکنون بسادگی به‌دست می‌آید:

$x=۲۰-(۲y+۴z)$

و چون $x\ge ۰$ می‌باشد، داریم:

$۲۰-(۲y+۴z)\ge ۰ \Rightarrow ۲y+۴z\le ۲۰ \Rightarrow y+۲z\le ۱۰$

حال اگر $y+۲z=m$ فرض شود، داریم:

$y=m-۲z$

و چون $y\ge ۰$ می‌باشد، پس داریم: $m-۲z\ge ۰\Rightarrow z\le \frac{m}{۲}$

واز آن‌جایی که $m\le ۱۰$ می‌باشد، بنابراین: $z\le ۵$

حال به ازای مقادیر مختلف z ($z=۰،۱،۲،۳،۴،۵$) مقادیر مختلفی برای y بر حسب m به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\begin{cases}z=۳\\y=m-۶\end{cases}$ و $\begin{cases}z=۴\\y=m-۸\end{cases}$ و $\begin{cases}z=۵\\y=m-۱۰\end{cases}$

$\begin{cases}z=۰\\y=m\end{cases}$ و $\begin{cases}z=۱\\y=m-۲\end{cases}$ و $\begin{cases}z=۲\\y=m-۴\end{cases}$

و برای m نیز ۱۱ امکان مختلف ($m=۰،۱،۲،...،۱۰$) وجود دارد که البته همهٔ آنها با توجه به مثبت یا صفر بودن y در هر مورد قابل قبول نخواهند بود. در حالت $z=۵$، فقط $m=۱۰$ مورد قبول بوده و از آن‌جا $y=۰$ و $x=۰$ و در حالت $z=۴$، $m=۸،۹،۱۰$ قابل قبول بوده و از آن‌جا زوجهای (۴،۰)، (۲،۱) و (۰،۲) برای x و y حاصل می‌شود و با همین روش، همهٔ سه‌تایی‌های قابل قبول برای x، y و z را که تعداد آنها ۳۶ تا می‌باشد، به صورت زیر می‌توان مشخص نمود:

(۰،۰،۵) و (۴،۰،۴) و (۲،۱،۴) و (۰،۲،۴) و (۰،۴،۳) و (۲،۳،۳) و
(۴،۲،۳) و (۶،۱،۳) و (۸،۰،۳) و (۰،۶،۲) و (۲،۵،۲) و (۴،۴،۲) و
(۲،۷،۱) و (۸،۲،۲) و (۱۰،۱،۲) و (۱۲،۰،۲) و (۰،۸،۱) و (۶،۳،۲)
و (۴،۶،۱) و (۶،۵،۱) و (۸،۴،۱) و (۱۰،۳،۱) و (۱۲،۲،۱) و (۱۴،۱،۱)
(۱۶،۰،۱) و (۰،۱۰،۰) و (۲،۹،۰) و (۴،۸،۰) و (۶،۷،۰) و (۸،۶،۰)
و (۱۰،۵،۰) و (۱۲،۴،۰) و (۱۴،۳،۰) و (۱۶،۲،۰) و (۱۸،۱،۰) و (۲۰،۰،۰)

یعنی ۳۶ روش مختلف برای خرد کردن یک اسکناس هزارتومانی به اسکناسهای ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ تومانی وجود دارد. البته اگر هدف، تنها شمارش تعداد روشها بود، مسأله به مباحث آنالیز ترکیبی مربوط می‌شد و روشهایی برای شمارش تعداد جوابهای مثبت و صفر معادله‌های سیالهٔ درجهٔ اوّل (بدون به‌دست آوردن خود جوابها) وجود دارد که خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به تفصیل، آنها را در کتاب «ریاضیات انتخاب» یا «چگونه بدون شمارش بشماریم»، از نشر دانشگاهی، تألیف ایوان نیون و ترجمهٔ بتول جذبی و علی عمیدی، فصلهای پنجم تا هفتم کتاب را مطالعه نماید.

مثال۴: در طی مسابقه‌های فوتبال، تیم A پس از پنج بازی، ۱۰ امتیاز و تیم B پس از ۱۰ بازی، ۲۰ امتیاز به‌دست آورده‌اند. تعداد باختهای کدام یک از دو تیم بیشتر بوده است؟ (هر برد ۳ امتیاز، هرمساوی ۱ امتیاز و باخت صفر امتیاز دارد.)

حل: اگر تعداد بردهای تیم A، $x_۱$ و تعداد مساویهای آن، $y_۱$ و تعداد باختهای آن، $z_۱$ باشد، مطابق مفروضهای مسأله داریم:

$$\begin{cases}x_۱+y_۱+z_۱=۵\\ ۳x_۱+y_۱=۱۰\end{cases}$$

مشخص است که $x_۱\le ۳$ (زیرا اگر $x_۱>۳$ آن‌گاه، $۳x_۱+y>۱۰$).

اگر از معادلهٔ اوّل، $y_۱$ را به‌دست آورده و در معادلهٔ دوم قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$x_۱+۱۰-۳x_۱+z_۱=۵\Rightarrow ۲x_۱-z_۱=۵\Rightarrow z_۱=۲x_۱-۵$$

و چون $z_۱\ge ۰$، بنابراین $۲x_۱-۵\ge ۰$ و لذا $x_۱\ge \frac{۵}{۲}$ و بنابراین داریم $\frac{۵}{۲}\le x_۱\le ۳$ و چون $x_۱$ عددی صحیح می‌باشد، پس تنها جواب قابل قبول، $x_۱=۳$ می‌باشد و از آن‌جا $z_۱=۱$ و $y_۱=۱$.

اما اگر تعداد بردهای تیم B را $x_۲$ و تعداد تساویهای آن را $y_۲$ و تعداد باختهای آن را $z_۲$ بنامیم، با توجه به شرایط مسأله داریم:

$$\begin{cases}x_۲+y_۲+z_۲=۱۰\\ ۳x_۲+y_۲=۲۰\end{cases}$$

و با همان روش، واضح است که $x_۲\le ۶$ و با قرار دادن $y_۲$ ازمعادلهٔ دوم در معادلهٔ اوّل، نتیجه می‌شود:

$$y_۲=۲۰-۳x_۲\Rightarrow x_۲+۲۰-۳x_۲+z_۲=۱۰\Rightarrow z_۲=۲x_۲-۱۰\ge ۰\Rightarrow x_۲\ge ۵$$

یعنی داریم: $۵\le x_۲\le ۶$ بنابراین، برای $x_۲$، دو جواب ۵ و ۶ قابل قبول است و از آن‌جا دو سری جواب زیر به‌دست می‌آید:

$\begin{cases}x_۲=۶\\y_۲=۲\\z_۲=۲\end{cases}$ $\begin{cases}x_۲=۵\\y_۲=۵\\z_۲=۰\end{cases}$

بنابراین z_1 می‌تواند از z_2 بزرگتر یا کوچکتر باشد؛ یعنی نمی‌توان گفت که تعداد باختهای کدام تیم بیشتر بوده است؛ ولی می‌توان گفت تعداد بردهای تیم B و تعداد مساویهای آن، بیشتر بوده است.

مثال ۵: اینک به مسأله‌ای از المپیاد ریاضی شوروی سابق در سال ۱۹۸۷ توجه کنید:

عمودریا هر عصر از بین ۳۳ پهلوانی که برای نگهبانی نامزد شده‌اند، ۹ یا ۱۰ نفر را به صلاحدید خود انتخاب می‌کند. حداقل پس از چند روز، همهٔ پهلوانان به تعداد برابر نگهبانی داده‌اند؟

حل: ظاهر مسأله به هیچ عنوان ارتباط آن را با بحث ما نشان نمی‌دهد؛ ولی اگر کمی دقت کنیم، درمی‌یابیم که درواقع، با حلّ یک مسألهٔ معادلهٔ سیّاله مواجه هستیم. اگر فرض کنیم پس از این مدت، همهٔ پهلوانان به تعداد برابر، m روز نگهبانی داده باشند، بنابراین، تعداد کل روزهای نگهبانی آنها $33m$ می‌باشد؛ اما از آن‌جایی که هر عصر ۹ یا ۱۰ پهلوان نگهبانی می‌دهند، پس اگر x عصر، ۹ پهلوان و y عصر، ۱۰ پهلوان نگهبانی داده باشند، می‌توان نوشت: $9x + 10y = 33m$

و این معادله‌ای سیّاله، از درجهٔ اوّل می‌باشد. برای حلّ و بحث این معادله، به m، مقادیر مختلف می‌دهیم:

$$m = 1 \Rightarrow 9x + 10y = 33 \Rightarrow y = \frac{33 - 9x}{10}$$

$$= \frac{30 - 10x + 3 + x}{10} \Rightarrow y = 3 - x + \frac{3 + x}{10}$$

و لذا $x + 3 = 10k$ و $x = 10k - 3$ و $y = 6 - 9k$ و با توجه به این‌که $x \geq 0$ و y به‌دست می‌آید $\frac{3}{10} \leq k \leq \frac{2}{3}$ و چون $k \in z$ بنابراین، برای k هیچ مقداری به دست نمی‌آید و مسأله جواب ندارد. به ازای $m = 2$ خواهیم داشت:

$$9x + 10y = 66 \Rightarrow y = \frac{66 - 9x}{10} = \frac{70 - 10x + x - 4}{10}$$

$$\Rightarrow y = 7 - x + \frac{x - 4}{10} \Rightarrow x - 4 = 10k \Rightarrow x = 10k + 4$$

و $y = 3 - 9k$ که با توجه به مثبت بودن x و y، به‌دست می‌آید $-\frac{4}{10} \leq k \leq \frac{1}{3}$ و لذا $k = 0$ و از آن‌جا $x = 4$ و $y = 3$؛ یعنی پهلوانان در مجموع، ۷ عصر نگهبانی داده‌اند که ۴ عصر آن، ۹ نفره و ۳ عصر آن، ۱۰نفره بوده‌اند و هر پهلوان، ۲ عصر نگهبان بوده است. اینک معمّاهای زیر که همگی به حلّ معادله‌ای سیاله از درجهٔ اوّل ختم می‌گردند، برای تمرین اضافی ارائه می‌شوند. تلاش کنید با حلّ آنها مباحث طرح شده را برای خود تکرار کنید.

۱ـ عدد ۲۰۰۰ را به دو عدد چنان تقسیم کنید، که یکی مضرب ۱۳ و دیگری مضرب ۱۵ باشد؛ مسأله چند جواب دارد؟

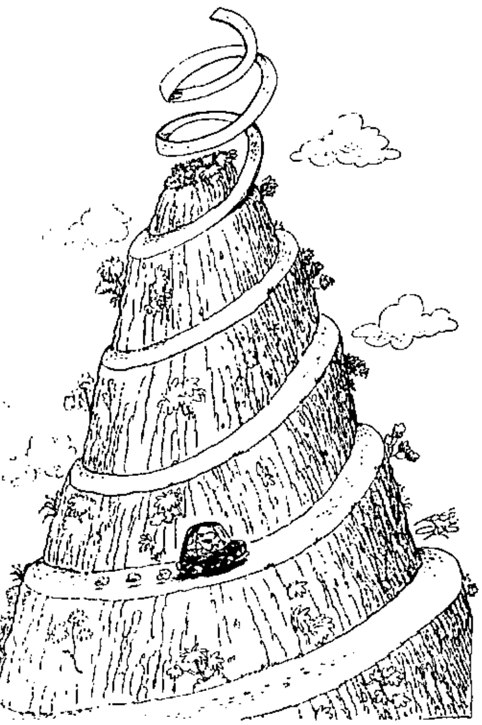
۲ـ علی با ۵۰۰ تومان پول خود روی هم ۶۰ تمبر خرید که شامل تمبرهای ۳، ۵ و ۱۰ تومانی بودند. او از هر یک از این تمبرها چند عدد خریده است. اگر از هریک حداقل ۶ عدد خریده باشد.

۳ـ عدد ۱۰۰ را به صورت مجموع سه عدد بنویسید که یکی مضرب ۵، دیگری مضرب ۷ و دیگری مضرب ۱۱ باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۴ـ یک اسکناس صدتومانی را به چند طریق می‌توان به اسکناسهای ۱۰، ۲۰ و ۵۰ تومانی خرد کرد؟

۵ـ علی و رضا هریک مقداری پول دارند و پول احمد، مساوی مجموع $\frac{3}{4}$ پول علی و $\frac{7}{5}$ پول رضا می‌باشد. احمد حدّاقل چه‌قدر پول دارد؟

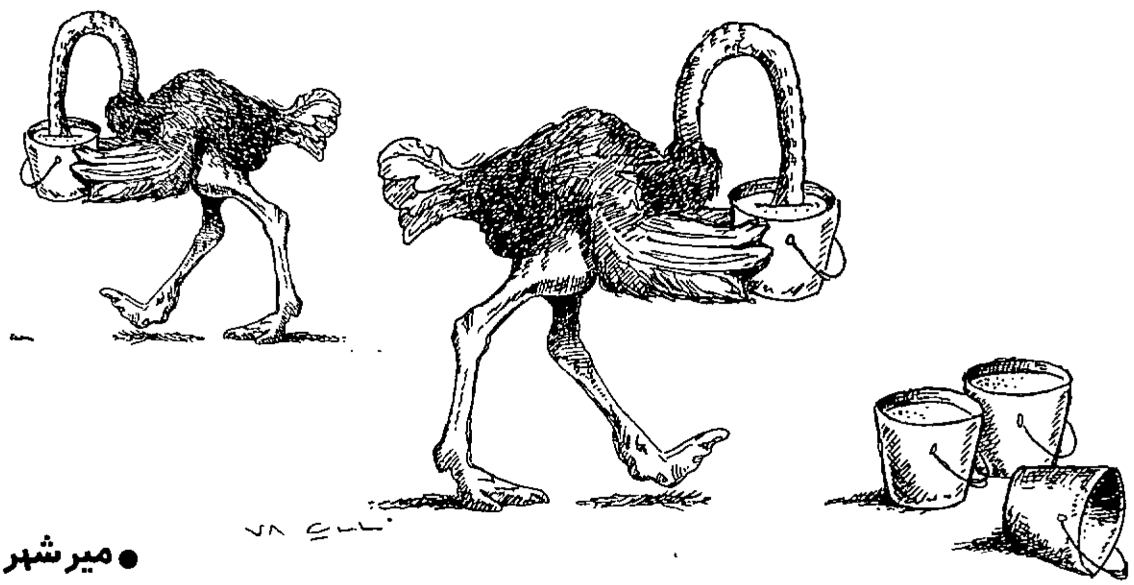
۶ـ ۱۳۷۷ و ۱۳۷۸ دو عدد متوالی هستند که اولّی مضرب ۱۷ و دومی مضرب ۱۳ می‌باشد. چند سال دیگر دوباره برای عدد دو سال شمسی متوالی، همین وضعیت رخ می‌دهد؟



اتحادهای جبری

برای دانش‌آموزان سال اوّل





● میرشهرام صدر

مفهوم اتحاد (برابری همیشه برقرار)

اتحاد بین دو عبارت جبری[1] یعنی «هم‌عددی یا برابری» دو عبارت جبری به ازای همهٔ مقادیر حقیقی که جانشین متغیرهای عبارتهای جبری می‌شوند.

برای مثال، عبارتهای $(a+b)^2$ و $a^2+2ab+b^2$ را درنظر می‌گیریم، اگر $a=2$ و $b=1$ را جایگزین متغیرهای عبارتهای فوق کنیم، خواهیم داشت:

$$(a+b)^2=(2+1)^2=(3)^2=9$$

$$a^2+2ab+b^2=(2)^2+2(2)(1)+(1)^2=4+4+1=9$$

اکنون اگر $a=\frac{1}{2}$ و $b=0/1$ را اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$(a+b)^2=(\frac{1}{2}+0/1)^2=(0/5+0/1)^2=(0/6)^2=0/36$$

$$a^2+2ab+b^2=(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})(0/1)+(0/1)^2$$

$$=\frac{1}{4}+0/1+0/01=0/25+0/1+0/01=0/36$$

به همین ترتیب، اگر به جای a و b اعداد حقیقی دلخواه دیگری را جایگزین کنیم، حاصل دو عبارت برابر خواهد شد. در این حالت، برابری دو عبارت جبری $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ را یک اتحاد گوییم.

برابریهای زیر اتحاد هستند:

$$3x-x=2x\ ,\ x(x-1)=x^2-x\ ,\ 3x+1=x+1+2x$$

آشنایی با اتحادهای جبری و به‌خاطر سپردن آنها، در محاسبه‌های ریاضی، سرعت بیشتری به ما می‌دهد. در زیر، اتحادهای مهم را بیان و اثبات می‌کنیم.

◁ اتحادهای مهم جبری

۱) مربع دوجمله‌ای

الف) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (a,b\in\mathbb{R})$

^{2}(اوّلی+دومی) = ^{2}(اوّلی) + ۲(اوّلی)(دومی) + ^{2}(دومی)

ب) $(a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲ \quad (a,b \in \mathbb{R})$

۲(دومی)+(دومی)(اوّلی)۲ − ۲(اوّلی) = ۲(دومی − اوّلی)

تذکر: به خاطر سپردن صورت فارسی اتحادها، می‌تواند در حلّ مسائل بهتر استفاده شود.

اثبات اتحاد مربع دوجمله‌ای

اثبات اتحاد «الف»

$$(a+b)^۲ = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)$$
$$= a^۲ + ab + ab + b^۲$$
$$= a^۲ + ۲ab + b^۲$$

اثبات اتحاد «ب»

$$(a-b)^۲ = (a-b)(a-b) = a(a-b) - b(a-b)$$
$$= a^۲ - ab - ab + b^۲$$
$$= a^۲ - ۲ab + b^۲$$

مثال: حاصل هریک از عبارتهای زیر را بیابید:

۱) $(x^۲ + \frac{۱}{x^۲})^۲$ ۲) $(۲xy - \frac{۱}{۲}x^۳)$

۳) $(\frac{۲}{۳}x^۲ + \frac{۳}{۲}y^۳)^۲$ ۴) $(۲x + ۵y^۳z^۲)^۲$

۵) $(-۲xy - x^۳)^۲$ ۶) $(-\frac{x^۲}{۳} + \frac{۳}{x^۲})^۲$

حل:

۲(دومی)+(دومی)(اوّلی)۲+۲(اوّلی) = ۲(دومی+اوّلی)

۱) $(x^۲ + \frac{۱}{x^۲})^۲ = (x^۲)^۲ + ۲(x^۲)(\frac{۱}{x^۲}) + (\frac{۱}{x^۲})^۲ \quad (x \neq ۰)$

$$= x^۴ + \frac{۲x^۲}{x^۲} + \frac{۱}{x^۴} = x^۴ + ۲ + \frac{۱}{x^۴}$$

۲) $(۲xy - \frac{۱}{۲}x^۳)^۲ = (۲xy)^۲ - ۲(۲xy)(\frac{۱}{۲}x^۳) + (\frac{۱}{۲}x^۳)^۲$

$$= ۴x^۲y^۲ - \frac{۴x^۴y}{۲} + \frac{۱}{۴}x^۶$$
$$= ۴x^۲y^۲ - ۲x^۴y + \frac{۱}{۴}x^۶$$

۳) $(\frac{۲}{۳}x^۲ + \frac{۳}{۲}y^۳)^۲ = (\frac{۲}{۳}x^۲)^۲ + ۲(\frac{۲}{۳}x^۲)(\frac{۳}{۲}y^۳) + (\frac{۳}{۲}y^۳)^۲$

$$= \frac{۴}{۹}x^۴ + \frac{۱۲x^۲y^۳}{۶} + \frac{۹}{۴}y^۶$$
$$= \frac{۴}{۹}x^۴ + ۲x^۲y^۳ + \frac{۹}{۴}y^۶$$

۴) $(۲x + ۵y^۳z^۲)^۲ = (۲x)^۲ + ۲(۲x)(۵y^۳z^۲) + (۵y^۳z^۲)^۲$

$$= ۴x^۲ + ۲۰xy^۳z^۲ + ۲۵y^۶z^۴$$

۵) $(-۲xy - x^۳)^۲ = (-۲xy + (-x^۳))^۲$

$$= (-۲xy)^۲ + ۲(-۲xy)(-x^۳) + (-x^۳)^۲$$
$$= ۴x^۲y^۲ + ۴x^۴y + x^۶$$

۶) $(-\frac{x^۲}{۳} + \frac{۳}{x^۲})^۲ = (\frac{۳}{x^۲} - \frac{x^۲}{۳})^۲$

$$= (\frac{۳}{x^۲})^۲ - ۲(\frac{۳}{x^۲})(\frac{x^۲}{۳}) + (\frac{x^۲}{۳})^۲ \quad (x \neq ۰)$$
$$= \frac{۹}{x^۴} - ۲ + \frac{x^۴}{۹}$$

۲) مربع سه جمله‌ای

$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc \quad (a,b,c \in \mathbb{R})$

۲(سوّمی)+۲(دومی)+۲(اوّلی) = ۲(سوّمی+دومی+اوّلی)

(سوّمی)(دومی)۲ + (سوّمی)(اوّلی)۲ + (دومی)(اوّلی)۲+

اثبات اتحاد مربع سه‌جمله‌ای

$$(a+b+c)^۲ = (a+b+c)(a+b+c)$$
$$= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$$
$$= a^۲ + ab + ac + ba + b^۲ + bc + ca + cb + c^۲$$
$$= a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

۱) $(۲ - x^۲ - ۳x)^۲$ ۲) $(a^۲ + ۲b - ۵)^۲$

حل:

۱) $(۲ - x^۲ - ۳x)^۲ = (۲)^۲ + (-x^۲)^۲ + (-۳x)^۲$

$+2(2)(-x^2)+2(2)(-3x)+2(-x^2)(-3x)$

$=4+x^4+9x^2-4x^2-12x+6x^3$

$=4+x^4+5x^2-12x+6x^3$

۲) $(a^2+2b-5)^2=(a^2)^2+(2b)^2+(-5)^2$

$+2(a^2)(2b)+2(a^2)(-5)+2(2b)(-5)$

$=a^4+4b^2+25+4a^2b-10a^2-20b$

۳) مکعب[۲] دوجمله‌ای

الف) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \quad (a,b\in\mathbb{R})$

(دومی)^۲(اولی) ۳+ ^{۳}(اولی)= ^{۳}(دومی+اولی)
^{۳}(دومی)+ ^{۲}(دومی)(اولی)۳ +

ب) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \quad (a,b\in\mathbb{R})$

(دومی)^۲(اولی) ۳− ^{۳}(اولی)= ^{۳}(دومی−اولی)
^{۳}(دومی)− ^{۲}(دومی)(اولی)۳ +

اثبات اتحاد مکعب دوجمله‌ای

در این‌جا کافی است یکی از این‌دو اتحاد را اثبات کنیم:

$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=a(a-b)^2-b(a-b)^2$

$=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$

$=a^3-2a^2b+ab^2-ba^2+2ab^2-b^3$

$=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید. $(x\neq 0)$

۱) $(x^y-y^x)^3$ ۲) $(x-\frac{1}{x})^3$

حل:

۱) $(x^y-y^x)^3=(x^y)^3-3(x^y)^2(y^x)$

$+3(x^y)(y^x)^2-(y^x)^3$

$=x^{3y}-3x^{2y}y^x+3x^yy^{2x}-y^{3x}$

۲) $(x-\frac{1}{x})^3=(x)^3-3(x)^2(\frac{1}{x})+3(x)(\frac{1}{x})^2-(\frac{1}{x})^3$

$=x^3-\frac{3x^2}{x}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^3}=x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3} \quad (x\neq 0)$

۴) اتحاد مزدوج

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \quad (a,b\in\mathbb{R})$

^{۲}(دومی) − ^{۲}(اولی) = (دومی − اولی)(دومی+اولی)

اثبات اتحاد مزدوج

$(a+b)(a-b)=a(a-b)+b(a-b)$

$=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2$

تذکر: برای پیدا کردن حاصل یک عبارت به کمک اتحاد مزدوج، معمولاً حاصلضرب دو پرانتز از عبارتهای جبری را داریم، به‌طوری که بدون درنظرگرفتن علامتهای جملات داخل پرانتزها، جملات دو پرانتز یکسان می‌باشند. جمع جبری جمله‌هایی که علامتهای آنها در دو پرانتز یکسان می‌باشند، «اولی» و جمع جبری جمله‌هایی که در دو پرانتز علامتهای قرینه دارند، «دومی» درنظر می‌گیریم.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید:

۱) $(5t^2-a)(a+5t^2)$

۲) $(2a-3c+b)(2a-b+3c)$

۳) $(a-b-c)(a+b-c)$

۴) $(x^2-x+1-x^3)(x^2-x-1+x^3)$

حل:

۱) $(5t^2-a)(a+5t^2)=(5t^2)^2-(a)^2=25t^4-a^2$

۲) $(2a-3c+b)(2a-b+3c)=(2a)^2-(-3c+b)^2$

$=4a^2-(b-3c)^2$

$=4a^2-(b^2-6bc+9c^2)$

$=4a^2-b^2+6bc-9c^2$

۳) $(a-b-c)(a+b-c)=(a-c)^2-(b)^2$

$=a^2-2ac+c^2-b^2$

۴) $(x^2-x+1-x^3)(x^2-x-1+x^3)$

$=(x^2-x+1-x^3)(x^2-x-(1-x^3))$

$=(x^2-x)^2-(1-x^3)^2$

$=(x^2)^2-2x^2\times x+x^2-(1-2x^3+(x^3)^2)$

$=x^4-2x^3+x^2-1+2x^3-x^6$

$$= x^4 + x^2 - 1 - x^6$$

۵) اتحاد یک جملهٔ مشترک

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

اثبات اتحاد یک جملهٔ مشترک

$$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$$

$$= x^2 + bx + ax + ab$$

$$= x^2 + (a+b)x + ab$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را به دست آورید :

۱) $(x+5)(x-2)$ ‏ ۳) $(5a-3b^4)(5a+3b^3)$

۲) $(x^2y+2ay)(2ay-b)$ ‏ ۴) $(a+b-2c)(a+b+c)$

حل:

۱) $(x+5)(x-2) = x^2 + (5-2)x + 5\times(-2)$

$$= x^2 + 3x - 10$$

۲) $(2ay + x^2y)(2ay-b)$

$$= (2ay)^2 + (x^2y - b)2ay + x^2y(-b)$$

$$= 4a^2y^2 + 2ax^2y^2 - 2aby - bx^2y$$

۳) $(5a-3b^4)(5a+3b^3)$

$$= (5a)^2 + (-3b^4 + 3b^3)5a + (-3b^4)(3b^3)$$

$$= 25a^2 - 15ab^4 + 15ab^3 - 9b^7$$

۴) $(a+b-2c)(a+b+c)$

$$= (a+b)^2 + (-2c+c)(a+b) + (-2c)(c)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - c(a+b) - 2c^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc - 2c^2$$

۶) مجموع و تفاضل مکعبات دوجمله‌ای

الف) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3 \quad (a,b \in \mathbb{R})$

(اولی + دومی)((اولی)^2 − (اولی)(دومی) + (دومی)^2)

= (اولی)^3 + (دومی)^3

ب) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3 \quad (a,b \in \mathbb{R})$

(اولی − دومی)((اولی)^2 + (اولی)(دومی) + (دومی)^2)

= (اولی)^3 − (دومی)^3

اثبات اتحاد مجموع و تفاضل مکعبات دوجمله‌ای

کافی است یکی از این دو اتحاد را ثابت کنیم :

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$= a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بیابید :

۱) $(x+2)(x^2-2x+4)$

۲) $(x^2+5y)(x^4-5x^2y+25y^2)$

۳) $(2x-3y)(2x+3y)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$

حل:

۱) $(x+2)(x^2-2x+4) = (x)^3 + (2)^3 = x^3 + 8$

۲) $(x^2+5y)(x^4-5x^2y+25y^2)$

$$= (x^2)^3 + (5y)^3 = x^6 + 125y^3$$

۳) $(2x-3y)(2x+3y)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$

$$= (4x^2-9y^2)(16x^4+36x^2y^2+81y^4)$$

$$= (4x^2)^3 - (9y^2)^3$$

$$= 64x^6 - 729y^6$$

نتایج اتحادها (اتحادهای دیگر)

در زیر، چند نتیجهٔ مهم از اتحادها ارائه شده است که به کمک آنها می‌توان سرعت بیشتری به عملیات جبری بخشید :

۱) $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

۲) $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

۳) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

۴) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3)$

$$= 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

$$5)\ (a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$$

$$6)\ a^2+\frac{1}{a^2}=(a+\frac{1}{a})^2-2 \qquad (a\neq 0)$$

$$7)\ a^3+\frac{1}{a^3}=(a+\frac{1}{a})^3-3(a+\frac{1}{a}) \qquad (a\neq 0)$$

$$8)\ a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

۹) اگر $\begin{cases} a+b+c=0 \\ \text{یا} \\ a=b=c \end{cases} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

بعضی از اتحادهای بالا را ثابت می‌کنیم و اثبات بقیه را به‌عنوان تمرین، برعهدهٔ دانش‌آموزان عزیز واگذار می‌کنیم.

اثبات اتحاد ۳ :

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$
$$(a+b)^2-(a-b)^2=a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$$
$$=a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2$$
$$=4ab$$

اثبات اتحاد ۴:

$$(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$$
$$=3(a+b)(a+c)(b+c)$$

طرف اوّل $=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

$$=[(a+b)+c]^3-a^3-b^3-c^3$$
$$=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2$$
$$+c^3-a^3-b^3-c^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3c(a^2+2ab+b^2)$$
$$+3ac^2+3bc^2+c^3-a^3-b^3-c^3$$
$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+3a^2c+6abc+3b^2c$$
$$+3ac^2+3bc^2+c^3-a^3-b^3-c^3$$
$$=3a^2b+3ab^2+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2$$

طرف دوم $=3(a+b)(a+c)(b+c)$

$$=[(3a+3b)(a+c)](b+c)$$
$$=[3a(a+c)+3b(a+c)](b+c)$$
$$=(3a^2+3ac+3ab+3bc)(b+c)$$
$$=3a^2b+3a^2c+3abc+3ac^2+3ab^2$$
$$+3abc+3b^2c+3bc^2$$
$$=3a^2b+3a^2c+6abc+3ac^2+3ab^2+3b^2c+3bc^2$$

اثبات اتحاد ۵:

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$$

طرف اوّل $=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$$=a^2(x^2+y^2)+b^2(x^2+y^2)$$
$$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$$

طرف دوم $=(ax-by)^2+(bx+ay)^2$

$$=a^2x^2-2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2$$
$$=a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2+a^2y^2$$

کاربرد اتحادها

از اتحادها برای حاصلضرب عددها و به توان رساندن آنها می‌توان استفاده کرد. برای نمونه :

نمونهٔ ۱:

$$101^3=(100+1)^3=100^3+3\times 100^2\times 1$$
$$+3\times 100\times 1^2+1^3$$
$$=1000000+30000+300+1$$
$$=1030301$$

نمونهٔ ۲:

$$250^2-150^2=(250-150)(250+150)$$
$$=100\times 400=40000$$

نمونهٔ ۳:

$$87\times 93=(90-3)(90+3)$$

$$=90^2-3^2=8100-9=8091$$

نمونهٔ ۴:

$$1021^2=(1000+20+1)^2$$
$$=1000^2+20^2+1^2+2\times1000\times20$$
$$+2\times1000\times1+2\times20\times1$$
$$=1000000+400+1+40000+2000+40$$
$$=1042441$$

نمونهٔ ۵:

$$259^3-250^3-9^3=(250+9)^3-250^3-9^3$$
$$=250^3+3\times250^2\times9+3\times250\times9^2+9^3-250^3-9^3$$
$$=3\times250^2\times9+3\times250\times9^2$$
$$=3\times250\times9(250+9)$$
$$=1748250$$

تفاوت بین اتحاد و معادله

همان‌طور که می‌دانید، هدف از حلّ معادله‌ای مانند: $x+2=0$، به دست آوردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند. با کمی دقّت، درمی‌یابیم که جواب معادلهٔ فوق ۲- است (۲- ریشهٔ معادله است).

برای این‌که رابطهٔ بالا برقرار باشد، فقط به جای x می‌توانیم عدد ۲- را قرار دهیم، پس:

$$-2+2=0$$

بنابراین معادله، یک رابطهٔ جبری است که فقط به ازای ریشه‌هایش (جوابهایش) به یک برابری عددی درست تبدیل می‌شود. اگر در معادلهٔ بالا به جای x عدد ۲ یا ۳ یا هر عدد دیگری به غیر از ۲- را قرار دهیم، در معادله صدق نخواهد کرد و به یک برابری درست عددی نخواهیم رسید.

اکنون اتحاد $(x+1)^2=x^2+2x+1$ را درنظر می‌گیریم. اگر به جای x هر عدد دلخواهی را قرار دهیم، در اتحاد صدق می‌کند؛ به‌طور مثال اگر به جای x عدد ۲ یا ۵ را قرار دهیم:

$$x=2:\ (2+1)^2=2^2+2\times2+1^2$$
$$3^2=4+4+1 \quad , \quad 9=9$$

$$x=5:\ (5+1)^2=5^2+2\times5+1^2$$
$$6^2=25+10+1$$
$$36=36$$

با توجه به مطالب اخیر، درمی‌یابیم که معادله فقط به ازای بعضی از مقادیری که جایگزین مجهول می‌شود، به یک برابری درست تبدیل می‌شود؛ اما در اتحادها هر مقداری را که جایگزین متغیرهایش کنیم، به یک برابری درست تبدیل می‌شود.

تذکر بسیار مهم: عبارتهایی مانند: $a^2-2ab+b^2$ یا a^2-b^2 یا $(a+b)^2$ اتحاد نیستند؛ بلکه عبارتهای جبری هستند.

برابریهای جبری به صورتهای زیر را یک اتحاد گوییم:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$
$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$
$$x(x+1)=x^2+x$$

در زیر، چند مسأله برای تکمیل شدن بحث می‌آوریم.

مسألهٔ ۱. به جای نقطه‌چین جمله‌هایی قرار دهید تا برابریهای زیر برقرار باشند:

۱) $(\ldots+3b^2)^2=4a^2+\ldots+9b^4$

۲) $(x^2-2y)(x^4+\ldots+4y^2)=\ldots-8y^3$

۳) $(\ldots-\ldots)^2=36x^2y^2-12xy+\ldots$

حل: ۱) چون در پرانتز $(\ldots+3b^2)^2$ دو جمله قرار می‌گیرد و توان پرانتز عدد ۲ است، بنابراین به کمک اتحاد اوّل می‌توان در جاهای خالی عبارت مناسب قرار داد:

$$(\ldots+3b^2)^2=4a^2+\ldots+9b^4$$
$$(2a+3b^2)^2=(2a)^2+2(2a)(3b^2)+9b^4$$
$$(2a+3b^2)^2=4a^2+12ab^2+9b^4$$

۲) به کمک اتحاد تفاضل مکعبات:

$$(x^2-2y)((x^2)^2+\ldots+(2y)^2)=\ldots-(2y)^3$$
$$(x^2-2y)((x^2)^2+(x^2)(2y)+(2y)^2)=(x^2)^3-(2y)^3$$
$$(x^2-2y)(x^4+2x^2y+4y^2)=x^6-8y^3$$

۳) چون در پرانتز $(\ldots-\ldots)^2$ دو جمله قرار می‌گیرد و توان

پرانتز عدد ۲ است، بنابراین به کمک اتحاد اوّل می‌توان در جاهای خالی عبارت مناسب قرار داد :

$(6xy - ...)^2 = (6xy)^2 - 12xy + ...$

می‌دانیم که جملهٔ دوم عبارت سمت راست برابری، بنابر اتحاد اوّل به صورت زیر است :

$2 \times$ (اوّلی) (دومی) $= 12xy$

$2 \times (6xy) \times$ (دومی) $= 12xy \Rightarrow$ دومی $= 1$

در نتیجه : $(6xy - 1)^2 = (6xy)^2 - 12xy + 1^2$

مسألهٔ ۲. اگر $x + y = \sqrt{5}$ و $xy = 1$ حاصل عبارت $x^2 + y^2$ و $x^3 + y^3$ را بیابید.

حل: با توجه به نتایج اتحادها خواهیم داشت :

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 - 2(1) = 5 - 2 = 3$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$x^3 + y^3 = (\sqrt{5})^3 - 3(1)(\sqrt{5})$$

$$= 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

مسألهٔ ۳. اگر $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ ، آن‌گاه حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$P = \frac{\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a}}{\sqrt[3]{abc}}$$

حل: ابتدا دو طرف فرض را در عدد ۲ ضرب می‌کنیم، سپس از اتحاد اوّل استفاده می‌کنیم :

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

$$a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) = 0$$

$$(a - b)^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 = 0$$

حاصل جمع چند مقدار نامنفی، وقتی برابر با صفر است که داشته باشیم :

$$\left.\begin{array}{l}(a - b)^2 = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b \\ (a - c)^2 = 0 \Rightarrow a - c = 0 \Rightarrow a = c \\ (b - c)^2 = 0 \Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c\end{array}\right\} \Rightarrow a = b = c \quad (1)$$

حال برای به دست آوردن حاصل عبارت، با توجه به نتیجهٔ (۱) خواهیم داشت :

$$P = \frac{\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{b^2c} + \sqrt[3]{c^2a}}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^2a} + \sqrt[3]{a^2a} + \sqrt[3]{a^2a}}{\sqrt[3]{a.a.a}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^3}}{\sqrt[3]{a^3}} = \frac{3a}{a} = 3 \quad (a \neq 0)$$

مسألهٔ ۴. هرگاه $a^2 + b^2 = 4ab$ ، حاصل عبارت $(\frac{a - b}{a + b})^4$ را محاسبه کنید.

حل: اگر به دوطرف برابری $a^2 + b^2 = 4ab$ ، عبارت $2ab$ را اضافه کنیم ؛ خواهیم داشت :

$$a^2 + b^2 + 2ab = 2ab + 4ab$$

$(a + b)^2 = 6ab$ (با توجه به اتحاد اوّل)

دوطرف رابطهٔ بالا را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$(a + b)^4 = (6ab)^2 \quad (1)$$

اگر به دوطرف برابری $a^2 + b^2 = 4ab$ عبارت $-2ab$ را اضافه کنیم :

$$a^2 + b^2 - 2ab = -2ab + 4ab$$

$$(a - b)^2 = 2ab$$

دوطرف رابطهٔ بالا را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$(a - b)^4 = (2ab)^2 \quad (2)$$

با جایگزین کردن (۱) و (۲) در عبارت زیر خواهیم داشت :

$$(\frac{a - b}{a + b})^4 = \frac{(a - b)^4}{(a + b)^4}$$

$$= \frac{(2ab)^2}{(6ab)^2} = (\frac{2ab}{6ab})^2 = \frac{1}{9} \quad (ab \neq 0)$$

مسأله ۵. اگر $x + \frac{1}{x} = -1$ ، عبارتهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ب) $x^3 + \frac{1}{x^3}$

حل:

الف) $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=(-1)^2-2=-1$$

ب)
$$x^3+\frac{1}{x^3}=(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=(-1)^3-3(-1)=2$$

مسألهٔ ۶. اگر $c^2-d^2=30$ و $c-d=-5$ ، عبارت $(c+d)-11$ را محاسبه کنید.

حل: به کمک اتحاد مزدوج :

$$c^2-d^2=(c+d)(c-d)=30$$

$$(c+d)\times(-5)=30 \Rightarrow c+d=-6$$

پس :
$$(c+d)-11=-6-11=-17$$

مسألهٔ ۷. اگر $a+b+c=0$ ، ثابت کنید :

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

حل:
$$a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c \qquad (1)$$

دوطرف رابطهٔ (۱) را به توان ۳ می‌رسانیم :

$$(a+b)^3=(-c)^3$$

$$a^3+b^3+3a^2b+3ab^2=-c^3$$

$$a^3+b^3+c^3=-3a^2b-3ab^2$$

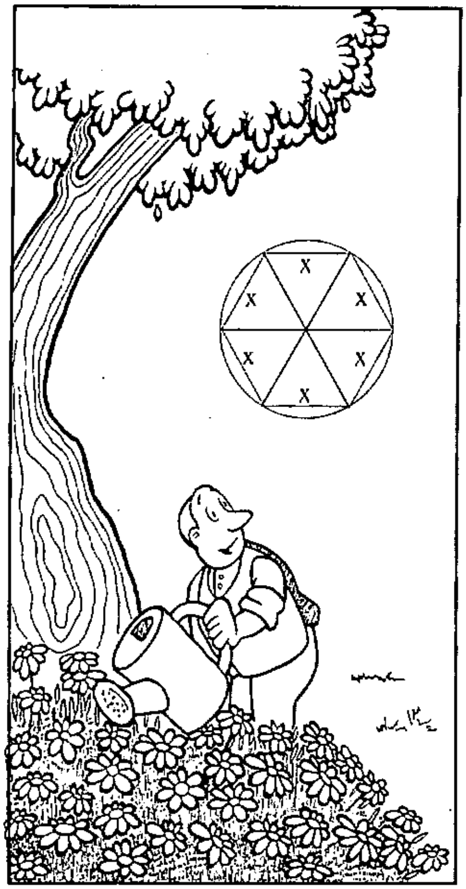
$$a^3+b^3+c^3=-3ab\underbrace{(a+b)}_{-c}=3abc$$

یادداشتها :

۱ـ اگر روی اعداد و متغیرها، چهار عمل اصلی و عمل جذرگیری و توان را اعمال کنیم، یک عبارت جبری به‌دست می‌آید.

۲ـ a^3 را مکعب عدد حقیقی $a \neq 0$ می‌گوییم.





باغبانی باغچهٔ دایره شکلی با چمن شش‌ضلعی منتظم محاط درآن دارد. چمن موردبحث از $\sqrt{108}$ متر مربع سبزه تشکیل شده است. قطر باغچه چه‌قدر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸



نقد و تحلیل و بررسی کتاب

دفاعیهٔ یک ریاضیدان

اثر: گاوفری هَرولد هاردی

ترجمه: سیامک کاظمی

● غلامرضا یاسی پور

کتاب **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** یکی از کتابهای خوبی است که در سالهای اخیر (۱۳۷۳) توسط شرکت سهامی انتشارات و آموزش انقلاب اسلامی به چاپ رسیده است. تیراژ کتاب ۵۰۰۰ نسخه، قطع آن رقعی، و تعداد صفحات آن ۱۱۲ صفحه است.

فهرست مطالب کتاب چنین است :

توضیح ناشر

دیباچه، به قلم چارلز پرسی اسنو

پیشگفتار نویسنده

متن کتاب ۲۹ بخش

یادداشت:

و به این ترتیب، ملاحظه می‌شود که با این که کتاب یادداشت ناشر دارد، و این بسیار خوب است، یادداشت مترجم ندارد، و این ظاهراً یکی از نقایص هر کتاب ترجمه شده به شمار می‌رود.

اصولاً مقدمهٔ کتاب، برای درد دل کردن است و در مقدمه، نویسنده یا مترجم به گفت‌وگویی صمیمانه با خواننده می‌نشیند و سفرهٔ دلش را پیش او باز می‌کند. خواننده با کتابی که نویسنده یا مترجم آن، مقدمه‌ای هم بر آن نوشته باشد، بهتر رابطه برقرار می‌کند و هنگام مطالعهٔ آن در فضای راحت‌تری حرکت می‌کند.

از این مرحله که بگذریم به توضیح ناشر کتاب می‌رسیم که در آن، بر این اعتقاد کتاب را به دست نشر سپرده است که علوم ریاضی را دریچه‌ای برای ورود به دنیای امروز و نگریستن به آن می‌داند، و می‌نویسد : در واقع ریاضیات، با سه هدف مطرح می‌شود. اوّل به عنوان یکی از مبانی تمدن بشر، دیگر به‌عنوان یکی از ابزارهای تربیت فکر، و بالاخره به خاطر اهمیت آن در کاربردهای آن.

از این مرحله هم می‌گذریم و می‌رسیم به دیباچهٔ کتاب که به قلم چارلز پرسی اسنو[1]، فیزیکدان و نویسنده‌ای مشهور است. اسنو دربارهٔ هاردی چنین می‌نویسد :

«در سالن غذاخوری کالج کریست[2] دور میز شام استادان نشسته بودیم. شبی کاملاً عادی بود ؛ اما با شبهای دیگر یک فرق داشت :

هاردی[3] مهمان جمع ما بود. حرفهای زیادی دربارهٔ او از ریاضیدانان جوانِ کمبریج شنیده بودم. آنها از بازگشت او خوشحال بودند. می گفتند یک ریاضیدان *واقعی* است. او از قماش دیراک[4] و بور[5]، که فیزیکدانها خیلی دربارهٔ آنها صحبت می کردند، نبود؛ بلکه محض‌ترین محض‌گرایان بود. وی شخصی بود نامتعارف، استثنایی، رادیکال و آماده برای صحبت کردن دربارهٔ هر موضوعی. سال ۱۹۳۱ بود.»

و به این ترتیب، مقدمهٔ اسنو بی‌مقدمه به سراغ ویژگی اصلی ریاضیدان مورد بحث خود می‌رود و او را به عنوان یک ریاضیدان محض‌گرا، که تنها به ریاضیات محض می‌پردازد، معرفی می کند، و به عبارت دیگر از صفت معنوی «بَراعتِ استهلال» استفاده می کند.

اسنو، دربارهٔ هاردی می‌نویسد:

«تعیین دقیق مرتبهٔ هاردی به عهدهٔ مورخان ریاضی است؛ اما از جنبهٔ دیگری هاردی به وضوح برتر از اینشتین یا رادر فورد یا هر نابغهٔ بزرگ دیگر است، و آن این است که وی هر کار فکری را، خواه مهم باشد یا غیرمهم و یا سرگرمی محض، به یک کار هنری تبدیل می کرد.»

اسنو می گوید: «برخلاف اینشتین، بیشتر دوران کودکی هاردی، همانند دوران کودکی کسی بود که در آینده ریاضیدان می‌شود. وی دَر سن دو سالگی می توانست هر عددی را تا چندین میلیون بنویسد.»

هاردی در بزرگسالی با دوتن همکاری داشت. اولّی «لیتل وود» بود که همکاری‌اش با او سی و پنج سال طول کشید و دومی «راما نوجان» ریاضیدان هندی بود، که خود هاردی استعداد ریاضی او را کشف کرده بود.

او به آسانی با افراد فقیر، تیره بخت، کمرو و کسانی که به خاطر نژادشان مورد تبعیض بودند دَمخور می‌شد. هاردی این قبیل افراد را به شکم گنده‌*ها* ترجیح می‌داد.

اسنو دربارهٔ مرگ هاردی می‌نویسد:

«هاردی دو سه هفته قبل از مرگ، وقتی شنید که قرار است انجمن سلطنتی انگلستان، عالیترین نشان افتخار خود را به او اعطا کند، لبخندی شیطنت‌آمیز بر لبانش نقش بست و گفت: حالا می‌دانم که پایان کارم نزدیک است، وقتی مردم برای اعطای افتخارات عجله می‌کنند، باید استنباط کرد که فرجام کار رسیده است.»

مقدمهٔ اسنو به کتاب کوچک **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** نسبتاً مفصل است، گویی به این خاطر، به تفصیل نوشته شده است که جبران کوتاهی کتاب اصلی را بنماید. باری، خوانندهٔ مقدمهٔ کتاب، با خواندن آن، کم و بیش با هاردی و روحیاتش آشنایی پیدا می کند و آمادهٔ ورود به متن اصلی می‌شود.

هاردی در پیشگفتار نویسنده، از پیشنهادهای دو تن از کسانی که دست نوشتهٔ کتابش را خوانده و انتقادهای ارزشمند بسیاری را عنوان کرده‌اند، تشکر می کند و پس از آن که می گوید بسیاری از ابهامها و ناپختگیهای متن را با استفاده از آن پیشنهادها زدوده است، دست خواننده را می گیرد و به کتابش می‌برد.

اما، این کتابِ هاردی، که نامش، همان طور که اشاره کردیم، **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** است، همان گونه که پیش از این هم متذکر شدیم ۲۹ بخش دارد، که بعضی از آنها در حد یک بندند و برخی در حدود سه چهار صفحه. طولانی ترین بخش کتاب، بخش آخر آن است، که در انتهای آن از قول هاردی چنین آمده است:

«واقعیت زندگی من و زندگی هر ریاضیدان دیگر این است که: من چیزی به دانش افزوده‌ام، و به دیگران هم کمک کرده‌ام که چیزی به آن بیفزایند، و این چیزها، ارزشی دارند که تفاوتش با ارزش ابداعات ریاضیدانان بزرگ و هنرمندان کوچک و بزرگ دیگری که یادگاری از خود به جا گذاشته‌اند، فقط از لحاظ درجه است، نه از لحاظ نوع.»

هاردی، همان‌طور که مشخص است، در این فراز، اشاره به معلم بودن خود می کند و آن را در شمار یکی از دو کار مهم دوران حیات خود می‌آورد. کار مهمّ اوّل هاردی ابداعات او در ریاضیات است. در این مرحله می‌پردازیم به نقد و تحلیل و بررسی خود کتاب: آیا آن گونه که هاردی در دفاعیهٔ یک ریاضیدان می گوید: برای ریاضیدان حرفه‌ای صحبت دربارهٔ ریاضیات ملال‌آور است؟

وی معتقد است که کار ریاضیدان، اثبات قضایای جدید است، نه سخن گفتن دربارهٔ آنچه ریاضیدانها کرده‌اند.

* هاردی می گوید: «نقد و تفسیر کار ذهنهای درجه دوم است، و نقاشان را در خوار داشتنِ منتقدان هنری، محقّ می‌داند.»

آن گاه می‌پرسد: پس چرا خودَ به چنین کاری پرداخته‌ام؟ و پاسخ می‌دهد: به این علت که از مرز شصت سالگی گذشته‌ام و دیگر آن که، طراوت و انرژی و شکیبایی لازم برای انجام دادن کار اصلی خود یعنی، پرداختن به خود ریاضیات را ندارم.

عطار نیشابوری در «منطق الطیر» خود همین کار را انجام

داده و می‌گوید: «من عارف نیستم؛ اما دربارهٔ عارفان سخن می‌گویم»؛ وی این کار را حقیر نمی‌داند و از آن احساس خوشدلی می‌کند و می‌فرماید:

گر نیم زیشان از ایشان گفته‌ام

خوشدلم کاین نکته از جان گفته‌ام

گفتهٔ بی محبت هاردی را با این سخن «آندره ژید» تعدیل کنیم که می‌گوید: «بر هر نویسندهٔ درجه اوّلی واجب است که یکی از آثار مهم ادبی جهان را به زبان مادری خود ترجمه کند.»

بسیاری از رشته‌های ریاضیات، کاربردهایی عملی پیدا کرده‌اند؛ اما بعضی از قسمتهای این علم، در عمل به کار نمی‌روند و به‌عبارت دیگر، در مقابل **ریاضیات محض**، ریاضیاتی عملی یا **کاربردی** داریم.

* بعضی از اندیشمندان، سودمندی ریاضیات را در عملی بودنِ آن می‌دانند و برخی برعکس، از بی‌فایدگی آن، اظهار رضایت می‌کنند و مفتخر از این‌اند که کارشان بدون فایدهٔ عملی است.

* هاردی، در دفاعیهٔ یک ریاضیدان، بر این است که هیچ ریاضیدانی آن قدر نادان نیست که از کاربرد علمش برای مثال در زیست‌شناسی یا شیمی، ناراضی باشد و آن را تقبیح کند. در این صورت، در دفاع از این خشنودی، چنین اظهار سخن می‌کند که: «علم گاهی به برآورده شدنِ نیّتهای شیطانی نیز کمک می‌رساند و اظهارِ رضایت بعضی ریاضیدانان از غیرعملی بودنِ کارشان به این علت است که علمی وجود دارد که دور از اعمالِ عادی بشر، همچنان پاک و منزه باقی مانده است.»

بعضی از ریاضیدانها کاملاً مشهورند؛ اما آیا شهرت ریاضیدانها پایدار است، یا دست کم به اندازهٔ شهرتِ دانشمندان دیگر می‌پاید؟

* هاردی، در دفاعیهٔ یک ریاضیدان، پس از این که ریاضیات شرقی را مبحثی جالب و شگفتی‌انگیز می‌خواند، می‌گوید: «ریاضیاتِ یونانی، حتی از ادبیاتِ یونانی ماندگارتر است، ممکن است آشیل فراموش شود، اما **ارشمیدس** همچنان به یاد ماندنی است، و واژهٔ فناناپذیر هر معنایی داشته باشد، ریاضیدان بیشترین بخت برخورداری از آن را داراست.»

* هاردی در ادامهٔ بحث می‌افزاید: «تقریباً تمام افرادی که نامشان در تاریخ ریاضیات آمده، شایستگی آن را داشته‌اند و سرمایه‌گذاری در شهرتِ ریاضی، در صورتی که کسی توان آن را داشته باشد، یکی از سودمندترین سرمایه‌گذاریهاست.»

به این ترتیب، برای پرسشی که مطرح کردیم به این پاسخ می‌رسیم که شهرت ریاضیدان نه تنها میرا نیست که به پایندگی شهرتِ مشاهیرِ دیگر است، و ایدهٔ ریاضی نه تنها از بین نمی‌رود که دست کم به اندازهٔ ایده‌های دیگر می‌زید.

در چه دورانی از عمر می‌توان ریاضی ورزید، و به عبارت دیگر تا چه سنّ و سالی می‌شود به تحقیقات ریاضی پرداخت؟

به نظر می‌رسد این دوران، بیشتر ایام جوانی ریاضیدانها را دربر می‌گیرد. در این باره هاردی می‌نویسد: «اوجِ خلاقیت نیوتن، تا چهل سالگی بود، وی در ایام سالخوردگی مدیرِ ضرابخانه بود، مرگِ گالوا در ۲۱ سالگی اتفاق افتاد، و آبل در ۲۷ سالگی مرد، و ریمان در ۴۰ سالگی.»

گاوس، مقالهٔ مهم خود در هندسهٔ دیفرانسیل را در ۵۰ سالگی انتشار داد، اما ایدهٔ آن را در ۴۰ سالگی مطرح کرده بود.

هاردی پس از این اشارات، می‌گوید: «هیچ دست‌آوردِ ریاضی مهمی را نمی‌شناسد که ایدهٔ آن پس از ۵۰ سالگی به خاطرِ ریاضیدانی خطور کرده باشد.» آن گاه می‌افزاید: «اگر کسی در سنینِ پیری، علاقهٔ خود را به ریاضیات از کف بدهد، زیانِ قابل توجهی به ریاضیات نخواهد رسید.»

قضایای ریاضی، معمولاً عمومی‌اند، یعنی، از کلیت و تعمیم برخوردارند. در این صورت، این سؤال مطرح می‌شود که این تعمیم و کلیت تا چه حد باید باشد و بر آن تا چه مقدار باید تأکید کرد؟

هاردی، در دفاعیهٔ یک ریاضیدان، بر این است که بر این کلیت، نباید تأکید بیش از اندازه داشت، و در این باره می‌گوید:

«دستاوردِ مهمِ ریاضیاتِ جدید، توجهِ بیش از اندازه به تعمیم و تعمیمهای پی در پی نیست. البته، هر قضیهٔ ریاضیِ تراز اوّلی باید تا حدودی کلی باشد؛ اما کلیت و تعمیم بیش از اندازه هم خوشایند نیست. ما دوستان خود را به این علت انتخاب نمی‌کنیم که تمام ویژگیهای یک انسانِ برتر را دارند، بلکه علتِ انتخابشان تشخص و فردیتشان است، قضایای ریاضی نیز چنین‌اند.»

هاردی در این جا قول «وایتهد» را می‌آورد که: تعمیمِ سودمند، تعمیمی است که در عین حال، با تخصیصی مناسب همراه باشد.

چه اتفاقی در زندگی کودک یا نوجوانی رخ می‌دهد که به ریاضیات علاقه‌مند و سرانجام، ریاضیدان می‌شود؟ انگیزهٔ تحقیق ریاضی چگونه در نوجوان یا جوانی که ریاضیدان آینده است، ایجاد می‌شود؟

هاردی در این باره، در دفاعیهٔ یک ریاضیدان، می‌گوید:

«به خاطر ندارم که خواسته باشم، کاری جز ریاضیات انجام دهم. همیشه می‌دانستم استعدادهایم در این رشته از علم قرار دارد و در این مورد، هیچ گاه نظرِ بزرگترهایم را هم نپرسیده‌ام.

دور از صداقت است که بگویم از همان دوران کودکی به ریاضیات علاقه داشته‌ام. برای من ریاضیات در امتحانها و بورسهای تحصیلی متجلّی بود. دلم می‌خواست جلوتر از بقیه باشم و به نظرم می‌رسید از طریقِ ریاضیات سریعتر به این مقصود می‌رسم.»

مسلم است که هاردی در سنین پایین با چنین انگیزه‌ای به ریاضیات روی آورده است و چه بسا که بعدها نظرش در این باره عوض شده باشد.

آیا ریاضیدان همان گونه است که اغلب مردم کوچه و بازار می‌پندارند یا به نوعی با این برداشت عامیانه، متفاوت است؟

از همه مهمتر، این برداشت با برداشتِ خود ریاضیدان از خودش تا چه اندازه متفاوت است؟ و وظیفهٔ معلمان و استادان در این باره چیست؟

هاردیِ بر این است که : یکی از اوّلین وظایف استاد، در هر رشته، بخصوص ریاضیات، این است که اهمیت آن رشته، نیز محققان آن رشته را بنمایاند.

آن که هنوز برایش مشخص نشده که کاری که انجام می‌دهد به زحمتش می‌ارزد یا نه و هنوز به این سؤال جواب نداده که خودش شخص مناسبی برای این کار هست یا خیر هم خودش پیشرفت نمی‌کند، هم موجب دلسردی دیگران می‌شود.

به عبارت دیگر، هاردی به ریاضیدان می‌آموزد که به خود و رشته‌اش ایمان و اعتقاد داشته باشد ؛ اما این را هم می‌افزاید که این اعتقاد، نباید چندان باشد که به تعصب بینجامد.

اهمیت ریاضی در چیست؟ آیا در زیبایی آن است؟ پس این سؤال مطرح می‌شود که زیبایی ریاضی در چیست؟

هاردی در این باره، از **مسألهٔ شطرنج**، مثال می‌آورد و می گوید : «مسألهٔ شطرنج یکی از مسائل ریاضیات اصیل است. اما ریاضیاتی نازل، چه این مسأله، این کمبودِ اساسی را دارد که **بی‌اهمیت** است، یعنی، برخلافِ مسائل عالیِ ریاضیات، **جدی** نیست.»

اما جدی بودن یک مسألهٔ ریاضی در کاربردی بودن آن نیست، بلکه در **پرمضمون** بودن آن است. در پیامدهایش هم نیست، چه پیامدهای یک قضیه تنها *گواهِ* جدی بودن آن قضیه‌اند.

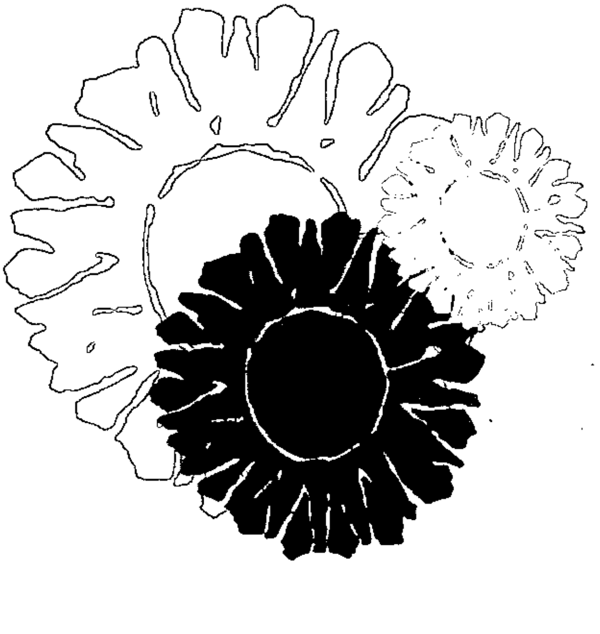
پس اهمیت ریاضی، به قول هاردی، در جدی بودن آن است که در محتوایِ قضایای آن سرچشمه می‌گیرد و به کاربرد و پیامدهای آن مرتبط نمی‌شود. وی در این مورد، دو قضیهٔ قدیمیِ اثباتِ بی‌نهایت بودنِ اعداد اوّل و گنگ بودنِ $\sqrt{۲}$ را مثال می‌آورد.

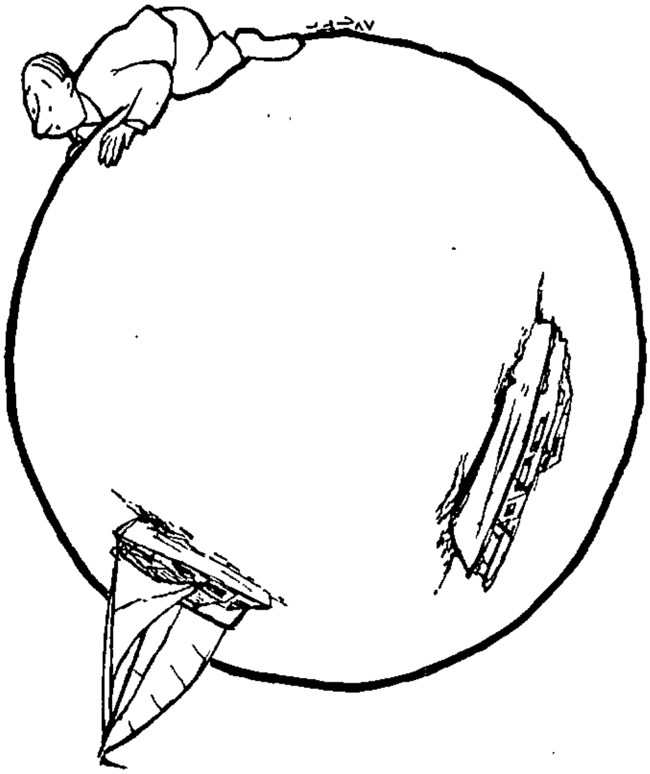
همان‌طور که ملاحظه می‌شود هاردیِ در کتاب **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** صمیمانه با خوانندهٔ خود به درد دل پرداخته و دربارهٔ ریاضیات هر چه در دل داشته بیرون انداخته است، و از خود به جای **تصویر** یک ریاضیدان، که معمولاً موجودی تخیّلی و موهومی است، **تصور** یک انسان متعارف را در ذهن خواننده ایجاد کرده است.

همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم کتاب **دفاعیهٔ یک ریاضیدان** یکی از نوشته‌های مهم ریاضیدانهای معاصر است. خوب نوشته شده و خوب به زبان فارسی درآمده است. مترجم کتاب از مترجمان خوب ریاضیات است و از عهدهٔ ترجمهٔ این کتاب نیز بخوبی برآمده است. نویسندهٔ مقاله، خواندن کتاب را برای هر دانش‌آموز و هر معلم علم ریاضی لازم می‌داند و اکیداً توصیه می‌کند.

یادداشتها :

۱. C.P.Snow
۲. Christ
۳. Hardy
۴. Dirac
۵. Bohr





مکان هندسی

(قسمت بیستم)

معادلهٔ هذلولی

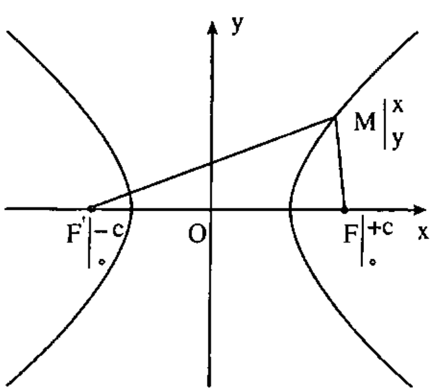
● محمدهاشم رستمی

معادلهٔ هذلولی. هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a$ را در نظر می‌گیریم. محور طولها را منطبق بر FF' و محور yها را عمود منصف پاره خط FF' اختیار می‌کنیم.

در این صورت $F(c,0)$ و $F'(-c,0)$ خواهد بود. اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای دلخواه از این هذلولی باشد، داریم:

$$MF' - MF = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \qquad (1)$$



$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \pm 2a$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2 =$$

$$(x-c)^2+y^2+4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow 4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{cx}{a} - a = \pm\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{c^2x^2}{a^2} + a^2 - 2cx = x^2 + c^2 - 2cx + y^2$$

$$\Rightarrow \frac{(c^2-a^2)x^2}{a^2} - y^2 = c^2 - a^2$$

با فرض $c^2 - a^2 = b^2$، داریم:

$$\frac{b^2x^2}{a^2} - y^2 = b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3)$$

بعکس، می‌توان ثابت کرد نقطه‌هایی از صفحه، که مختصات آنها

در معادلهٔ (۳) صدق کند، روی هذلولی به کانونهای F و 'F و عدد ثابت 2a قرار دارند ؛ یعنی از رابطهٔ (۳) می‌توان به رابطهٔ (۱) رسید. معادلهٔ (۳) رامعادلهٔ کانونیک هذلولی می‌نامند.

نکته . در هذلولی $c^2 = b^2 + a^2$ است.

شعاع حاملهای نقطهٔ M. رابطهٔ (۲) یک شعاع حامل نقطهٔ M است ؛ یعنی $MF = \left|\frac{cx}{a} - a\right|$. به روش مشابه از رابطهٔ (۱) شعاع حامل دیگر نقطهٔ M، یعنی 'MF برابر است با $MF' = \left|\frac{cx}{a} + a\right|$.

تبصره. اگر از معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ، y را بر حسب x به دست آوریم، داریم :

$$y^2 = \frac{\pm b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

دامنهٔ این تابع $x^2 > a^2$ یا $x > +a$ و $x < -a$ است و این خود نشان می‌دهد که اولاً هذلولی، شاخهٔ بی‌نهایت دور دارد و ثانیاً از دو شاخهٔ متمایز تشکیل می‌شود.

محورهای تقارن و مرکز تقارن هذلولی. هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ را در نظر می‌گیریم :

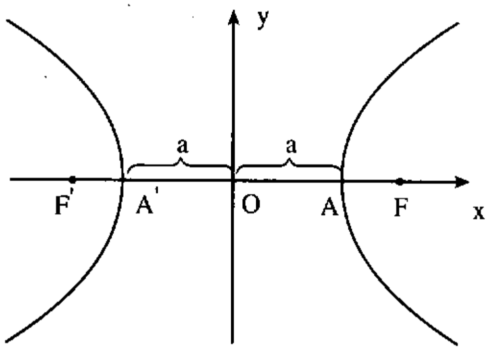
۱. با تبدیل y به y− ، معادلهٔ هذلولی تغییر نمی‌کند ؛ بنابراین محور xها و در حقیقت 'FF محور تقارن هذلولی است، که آن را محور تقارن کانونی یا به طور خلاصه، محور کانونی هذلولی می‌نامند.

۲. با تبدیل x به x− ، معادلهٔ هذلولی تغییر نمی‌کند ؛ پس محور yها یعنی عمود منصف پاره‌خط 'FF محور تقارن هذلولی است که آن را محور تقارن ناکانونی یا به طور خلاصه، محور ناکانونی هذلولی می‌نامند.

۳. با تبدیل x به x− و y به y− ، معادله تغییر نمی‌کند ؛ بنابراین مبدأ مختصات مرکز تقارن هذلولی است که به طور خلاصه آن را مرکز هذلولی می‌نامند.

رأسهای هذلولی. ۱. نقطهٔ برخورد هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ با محور xها، یعنی محور کانونی آن را به دست می‌آوریم، داریم :

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a \Rightarrow A\left|\begin{matrix}+a\\0\end{matrix}\right. ,\ A'\left|\begin{matrix}-a\\0\end{matrix}\right.$$



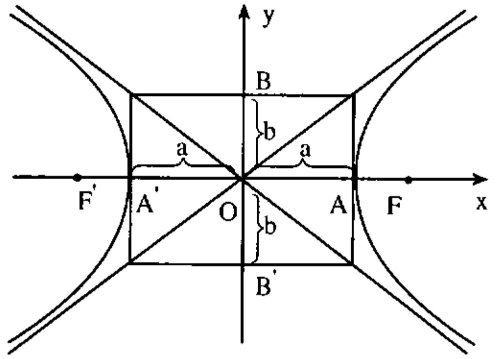
بنابراین، محور کانونی هذلولی، آن را در دو نقطهٔ A و 'A قطع می‌کند ؛ به قسمی که AA' = 2a است. دو نقطهٔ A و 'A را رأسهای حقیقی هذلولی و پاره‌خط 'AA را قطر قاطع هذلولی می‌نامند.

۲. هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ محور yها ، یعنی محور ناکانونی آن را قطع نمی‌کند ؛ زیرا :

$$x = 0 \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = -b^2 < 0$$

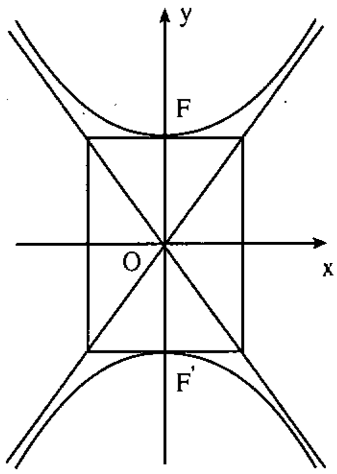
به همین دلیل، محور ناکانونی هذلولی را محور غیر قاطع هذلولی می‌نامند. اما به دلیل اهمیت پارامتر b در هذلولی، دو نقطهٔ B و 'B را در دو طرف مرکز روی محور ناکانونی اختیار می‌کنند و این دو نقطه را رأسهای غیرحقیقی و پاره‌خط 'BB را قطر غیرقاطع یا قطر غیرحقیقی هذلولی می‌نامند.

مجانبهای هذلولی. هر هذلولی، دو مجانب دارد که از مرکز آن می‌گذرند. این مجانبها قطرهای مستطیلی هستند که مرکزش منطبق بر مرکز هذلولی است و ضلعهایش برابر 2a و 2b و موازی محورهای تقارن هذلولی است. ثابت می‌شود که مجانبهای هذلولی به معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ به معادلهٔ $y = +\frac{b}{a}x$ و $y = \frac{-b}{a}x$ می‌باشند.



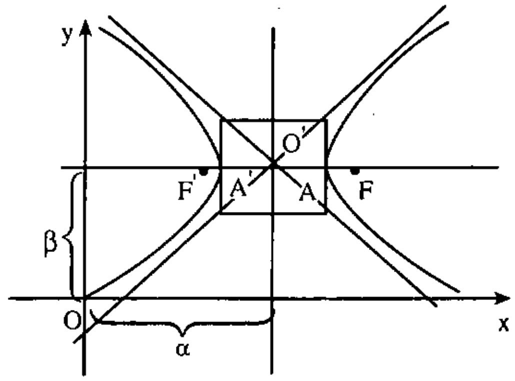
صورتهای دیگر معادلهٔ هذلولی

۱. اگر محور کانونی هذلولی منطبق بر محور yها و محور ناکانونی آن منطبق بر محور طولها باشد، معادلهٔ هذلولی به صورت $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ است.



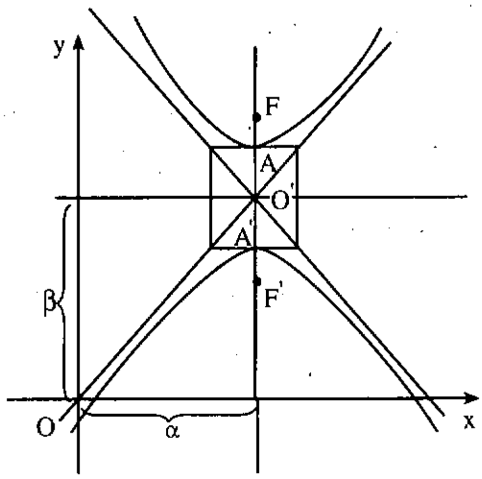
۲. اگر مرکز هذلولی نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و محور کانونی آن موازی محور طولها باشد، معادلهٔ هذلولی به صورت زیر است:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$$



۳. اگر مرکز هذلولی نقطهٔ $O'(\alpha,\beta)$ و محور کانونی آن، موازی محور عرضها باشد، معادلهٔ آن به صورت زیر است:

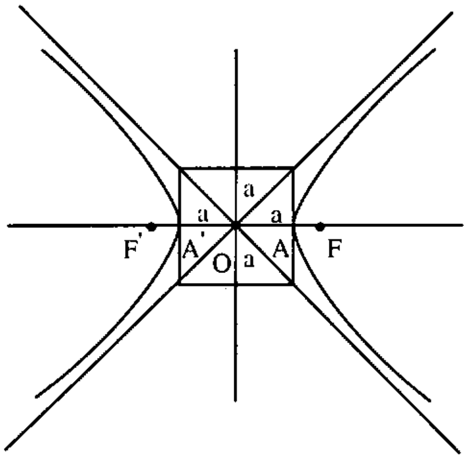
$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$$



۴. اگر محورهای هذلولی غیرموازی با محورهای مختصات باشند، معادلهٔ آن به صورت کلی:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey=0$$

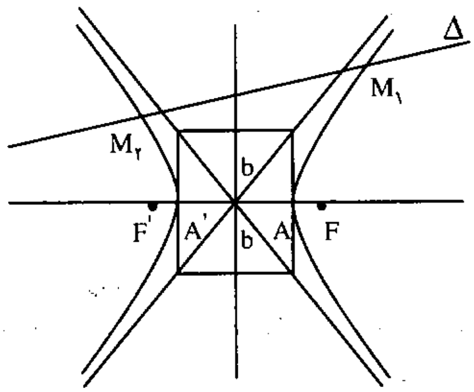
است که در آن $A.C<0$ است. این معادله را با انتقال مبدأ مختصات به مرکز تقارن هذلولی و دوران محورهای مختصات می‌توان به صورت کانونیک $AX^2+BY^2+CX+DY+E=0$ تبدیل نمود.



هذلولی متساوی‌الساقین. اگر در هذلولی، $a=b$ باشد، هذلولی متساوی‌الساقین یا متساوی‌المحورین یا متساوی‌القطرین نامیده می‌شود. در این هذلولی، $c^2=2a^2$ یا $c=a\sqrt{2}$ و معادلهٔ آن، در حالتی که محور کانونی منطبق بر محور xها و محور yها، عمودمنصف FF' است، به صورت $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$ و یا $x^2-y^2=a^2$ و یا $x^2-y^2=\frac{c^2}{2}$ است.

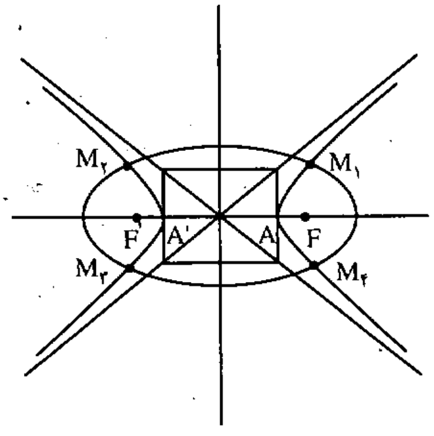
مثال ۱. خط Δ و دو نقطهٔ F و F' در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط Δ تعیین کنید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ F و F'، برابر ۸ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F'، برابر ۸ است، یک هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $2a = 8$ است. این هذلولی را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این هذلولی با خط Δ (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.



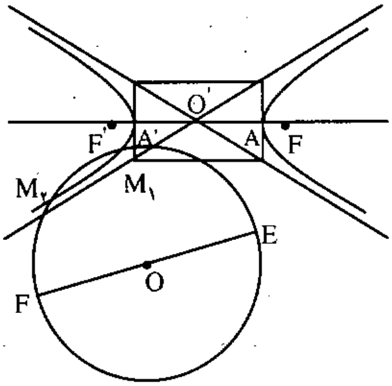
مثال ۲. دو نقطهٔ F و F' در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را مشخص کنید که مجموع فاصله‌اش از این دو نقطه، برابر ۱۲ و تفاضل فاصله‌اش از این دو نقطه، مساوی ۸ باشد.

حل. نقطه‌های تقاطع بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۱۲، و هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۸، جوابهای مسأله‌اند و مسأله همواره داری چهار جواب است.



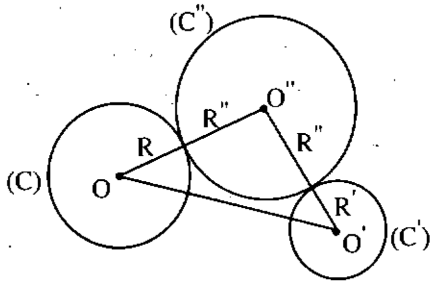
مثال ۳. چهار نقطهٔ A، B، C و D در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B، برابر K^2 و تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ C و D، برابر $2a$ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B، مقدار ثابت K^2 است، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - AB^2}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت C و D برابر $2a$ است، یک هذلولی به کانونهای C و D و عدد ثابت $2a$ می‌باشد. این مکان هندسی را نیز رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.



مثال ۴. مکان هندسی مرکز دایره‌های مماس برون بر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را تعیین کنید.

حل. فرض می‌کنیم دایرهٔ $C''(O'',R'')$ یکی از دایره‌های مماس برون بر دو دایرهٔ داده شده باشد. از O'' به O و O' وصل می‌کنیم. در این صورت داریم:



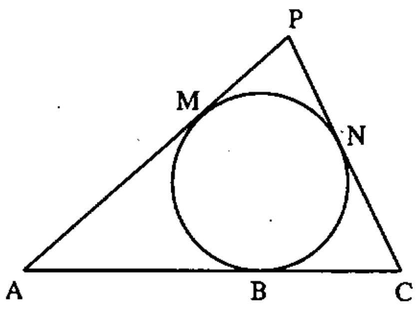
$$O''O = R + R'' \qquad (1)$$

$$O''O' = R' + R'' \qquad (2)$$

$$(۱)-(۲) \Rightarrow O''O - O''O' = (R+R'') - (R'+R'')$$
$$= R - R' = \text{مقدار ثابت}$$

چون دو نقطهٔ O و ′O ثابت و تفاضل فاصلهٔ نقطهٔ ″O از این دو نقطه، مقدار ثابتی است، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ ″O، یعنی مکان هندسی مرکز دایره‌های مماس برون بر دو دایرهٔ (C) و (′C) یک هذلولی به کانونهای O و ′O و عدد ثابت $|R-R'|$ است.

مثال ۵. سه نقطهٔ A، B و C پشت سر هم بر خط مستقیمی قرار دارند. دایرهٔ متغیری همواره در B بر این خط مماس است. از A و C مماسهایی بر این دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کنند. مکان هندسی نقطهٔ P را بیابید.



حل. نقطه‌های تماس مماسهای رسم شده از A و C بر دایرهٔ متغیر را به ترتیب M و N می‌نامیم. با توجه به برابریهای $PM = PN$، $MA = AB$ و $NC = CB$، داریم:

$$|PA-PB| = |(PM+MA)-(PN+NC)|$$
$$= |MA-NC| = |AB-BC|$$

با توجه به این که AB و BC ثابت می‌باشند، مقدار ثابت $= |PA-PB|$ و در نتیجه مکان هندسی نقطهٔ P، یک هذلولی به کانونهای A و B و عدد ثابت $|AB-BC|$ است.

نکته. اگر نقطهٔ B وسط پاره خط AC باشد، مکان هندسی نقطهٔ P عمودمنصف پاره‌خط AC است.

مثال ۶. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(۳,۰)$ و $F'(-۳,۰)$ برابر ۴ است.

حل. این مکان هندسی، یک هذلولی به کانونهای F و ′F و عدد ثابت ۴ است. برای تعیین معادلهٔ آن، به یکی از دو راه زیر عمل می‌کنیم.

راه اول. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از این هذلولی باشد. در این صورت داریم:

$$MF = \sqrt{(x-۳)^{۲}+y^{۲}}\ ,\ MF' = \sqrt{(x+۳)^{۲}+y^{۲}}$$
$$MF - MF' = \pm ۲a$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^{۲}+y^{۲}} - \sqrt{(x+۳)^{۲}+y^{۲}} = \pm ۴$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^{۲}+y^{۲}} = \sqrt{(x+۳)^{۲}+y^{۲}} \pm ۴ \Rightarrow$$
$$(x-۳)^{۲}+y^{۲} = (x+۳)^{۲}+y^{۲}+۱۶\pm ۸\sqrt{(x+۳)^{۲}+y^{۲}}$$
$$-۱۲x-۱۶ = \pm ۸\sqrt{(x+۳)^{۲}+y^{۲}}$$
$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲}x - ۲ = \pm\sqrt{(x+۳)^{۲}+y^{۲}}$$
$$\Rightarrow \frac{۹}{۴}x^{۲}+۴+۶x = x^{۲}+۹+۶x+y^{۲}$$
$$\Rightarrow \frac{۵}{۴}x^{۲}-y^{۲} = ۵ \Rightarrow \frac{x^{۲}}{۴}-\frac{y^{۲}}{۵} = ۱$$

معادلهٔ هذلولی موردنظر

راه دوم. با توجه به این که ′FF روی محور xها و مرکز بیضی منطبق بر مبدأ مختصات است، معادلهٔ هذلولی به صورت $\frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{y^{۲}}{b^{۲}}=۱$ است. بنابراین داریم:

$$۲a = ۴ \Rightarrow a = ۲$$
$$FF' = ۲c = |x_F - x_{F'}| = |۳+۳| = ۶$$
$$\Rightarrow c = ۳\ ,\ b = \sqrt{c^{۲}-a^{۲}} = \sqrt{۹-۴} = \sqrt{۵}$$
$$\Rightarrow \frac{x^{۲}}{۴}-\frac{y^{۲}}{۵} = ۱ \qquad \text{معادلهٔ هذلولی موردنظر}$$

مثال ۷. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ $F(۳,۵)$ و $F'(-۲,۳)$، برابر ۴ است.

حل. این مکان هندسی، یک هذلولی به کانونهای F و ′F و عدد ثابت ۴ است که چون ′FF موازی محورهای مختصات نیست، برای تعیین معادلهٔ آن، بهتر است به روش زیر عمل کنیم:

فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطهٔ اختیاری از این هذلولی باشد. در این صورت داریم:

$$MF = \sqrt{(x-۳)^{۲}+(y-۵)^{۲}}\ ,$$
$$MF' = \sqrt{(x+۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}}$$
$$MF - MF' = \pm ۲a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+(y-۵)^۲}-\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}=\pm ۴$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-۳)^۲+(y-۵)^۲}=\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}\pm ۴$$

$$\Rightarrow (x-۳)^۲+(y-۵)^۲=$$

$$(x+۲)^۲+(y-۳)^۲+۱۶\pm ۸\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}$$

$$\Rightarrow -۱۰x-۴y+۵=\pm ۸\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۳)^۲}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰x^۲+۱۶y^۲+۲۵+۸۰xy-۱۰۰x-۴۰y=$$

$$۶۴(x^۲+۴x+۴)+۶۴(y^۲-۶y+۹)$$

$$\Rightarrow ۳۶x^۲-۴۸y^۲+۸۰xy-۳۵۶x+۳۴۴y-۸۰۷=۰$$

مثال ۸. خط $\Delta: y+x+۲=۰$ و دو نقطهٔ $M(۲,۶)$ و $N(۲,-۲)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط Δ تعیین کنید که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ M و N، برابر ۶ باشد.

حل. نقطهٔ برخورد هذلولی به کانونهای M و N و عدد ثابت ۶ با خط Δ ، جواب مسأله است. اما محور کانونی این هذلولی، موازی محور عرضهاست. بنابراین، معادلهٔ آن به صورت $\frac{(y-\beta)^۲}{a^۲}-\frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲}=۱$ است. اما داریم :

$$O' \text{ مرکز هذلولی } \begin{cases} \alpha=\frac{x_M+x_N}{۲}=\frac{۲+۲}{۲}=۲ \\ \beta=\frac{y_M+y_N}{۲}=\frac{۶-۲}{۲}=۲ \end{cases}$$

$$O'F=c=|y_F-y_{O'}|=|۶-۲|=۴\ ,$$

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

$$c^۲=b^۲+a^۲\Rightarrow ۱۶=b^۲+۹\Rightarrow b^۲=۷\Rightarrow b=\sqrt{۷}$$

از آن جا معادلهٔ هذلولی به صورت $\frac{(y-۲)^۲}{۹}-\frac{(x-۲)^۲}{۷}=۱$

و نقطه‌های جواب مسأله، جوابهای دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر است :

$$\begin{cases} \frac{(y-۲)^۲}{۹}-\frac{(x-۲)^۲}{۷}=۱ \\ y+x+۲=۰\Rightarrow y=-x-۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۷(-x-۲-۲)^۲-۹(x-۲)^۲=۶۳\Rightarrow$$

$$۷(x+۴)^۲-۹(x-۲)^۲-۶۳=۰$$

$$\Rightarrow -۲x^۲+۹۲x+۱۳=۰\Rightarrow ۲x^۲-۹۲x-۱۳=۰$$

$$\Rightarrow x=\frac{۴۶\pm\sqrt{۲۱۱۶+۲۶}}{۲}=\frac{۴۶\pm ۳\sqrt{۲۳۸}}{۲}$$

$$\Rightarrow M_۱\begin{cases} x=\frac{۴۶+۳\sqrt{۲۳۸}}{۲} \\ y=\frac{-۵۰-۳\sqrt{۲۳۸}}{۲} \end{cases},$$

$$M_۲\begin{cases} x=\frac{۴۶-۳\sqrt{۲۳۸}}{۲} \\ y=\frac{-۵۰+۳\sqrt{۲۳۸}}{۲} \end{cases}$$

مثال ۹. دو نقطهٔ $F(۴,۰)$ و $F'(-۴,۰)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. نقطهٔ M از این صفحهٔ مختصات را چنان بیابید که $|MF-MF'|=۶$ و $MF^۲-MF'^۲=۹۶$ باشد.

حل. نقطهٔ برخورد هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت $۲a=۶$ ، و خط راست Δ عمود بر FF′ در نقطهٔ H به قسمی که اگر I وسط FF′ باشد، $\overline{IH}=\frac{۹۶}{۲\overline{FF'}}$ جواب مسأله است.

بنابراین :

$$۲a=۶\Rightarrow a=۳$$

$$۲c=|x_F-x_{F'}|=|۴+۴|=۸\Rightarrow c=۴$$

$$c^۲=b^۲+a^۲\ ,\ ۱۶=b^۲+۹\Rightarrow b^۲=۷\ ,\ \frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۷}=۱$$ معادلهٔ هذلولی

$$MF^۲-MF'^۲=۹۶$$

$$\Rightarrow (x-۴)^۲+y^۲-(x+۴)^۲-y^۲=۹۶$$

$$\Rightarrow -۱۶x=۹۶\Rightarrow x=-۶$$ معادلهٔ خط Δ

$$\begin{cases} \frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۷}=۱ \\ x=-۶ \end{cases}\Rightarrow \frac{۳۶}{۹}-\frac{y^۲}{۷}=۱\Rightarrow \frac{y^۲}{۷}=۳$$

$\Rightarrow y^۲ = ۲۱ \Rightarrow y = \pm\sqrt{۲۱}$

$\Rightarrow M_۱\begin{vmatrix}-۶\\ \sqrt{۲۱}\end{vmatrix} \quad , \quad M_۲\begin{vmatrix}-۶\\ -\sqrt{۲۱}\end{vmatrix}$

مثال ۱۰. مختصات مرکز، نیمهٔ قطرها، مختصات کانونها و رأسهای هذلولی به معادلهٔ $۴x^۲ - ۹y^۲ - ۸x - ۳۶y + ۴ = ۰$ را تعیین و هذلولی را رسم کنید.

حل. معادلهٔ داده شده را به صورت کانونیک در می‌آوریم:

$$۴(x^۲ - ۲x) - ۹(y^۲ + ۴y) + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\left[(x-۱)^۲ - ۱\right] - ۹\left[(y+۲)^۲ - ۴\right] + ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴(x-۱)^۲ - ۹(y+۲)^۲ = -۳۶$$

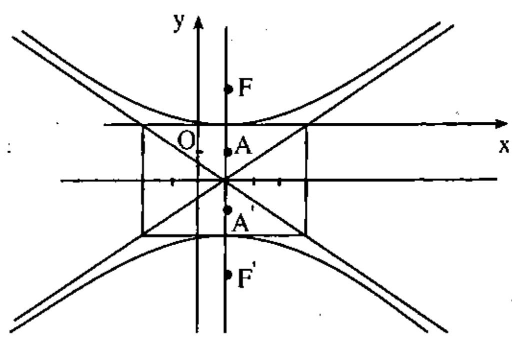
$$\Rightarrow \frac{(y+۲)^۲}{۴} - \frac{(x-۱)^۲}{۹} = ۱ \Rightarrow O'(۱,-۲)$$

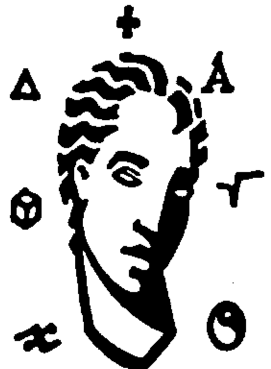
$$a^۲ = ۴ \Rightarrow a = ۲ \ , \ b^۲ = ۹ \Rightarrow b = ۳ \ ,$$

$$c = \sqrt{a^۲ + b^۲} = \sqrt{۹+۴} = \sqrt{۱۳}$$

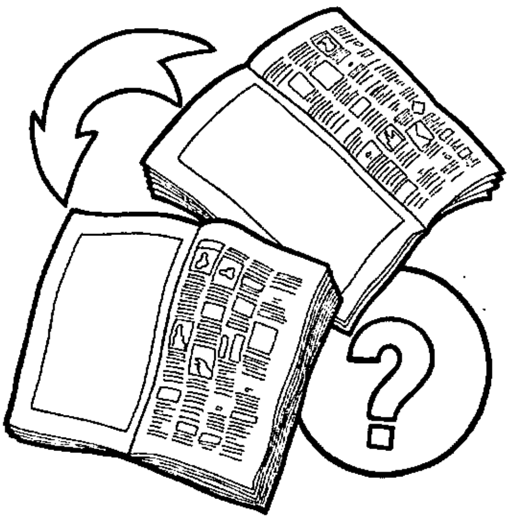
$$F\begin{vmatrix}\alpha = ۱\\ \beta + c = -۲ + \sqrt{۱۳}\end{vmatrix} \quad , \quad F'\begin{vmatrix}\alpha = ۱\\ \beta - c = -۲ - \sqrt{۱۳}\end{vmatrix}$$

$$A\begin{vmatrix}\alpha = ۱\\ \beta + a = -۲ + ۲ = ۰\end{vmatrix} \quad , \quad A'\begin{vmatrix}\alpha = ۱\\ \beta - a = -۲ - ۲ = -۴\end{vmatrix}$$





تفریح اندیشه ۳



صفحهٔ ۷ یکی از ورقهای یک روزنامهٔ ۶۰ صفحه‌ای، که تنها یک دوخت دارد، سفید است؛ یعنی چاپ نخورده است. صفحه‌های سفید دیگر روزنامه کدامند؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

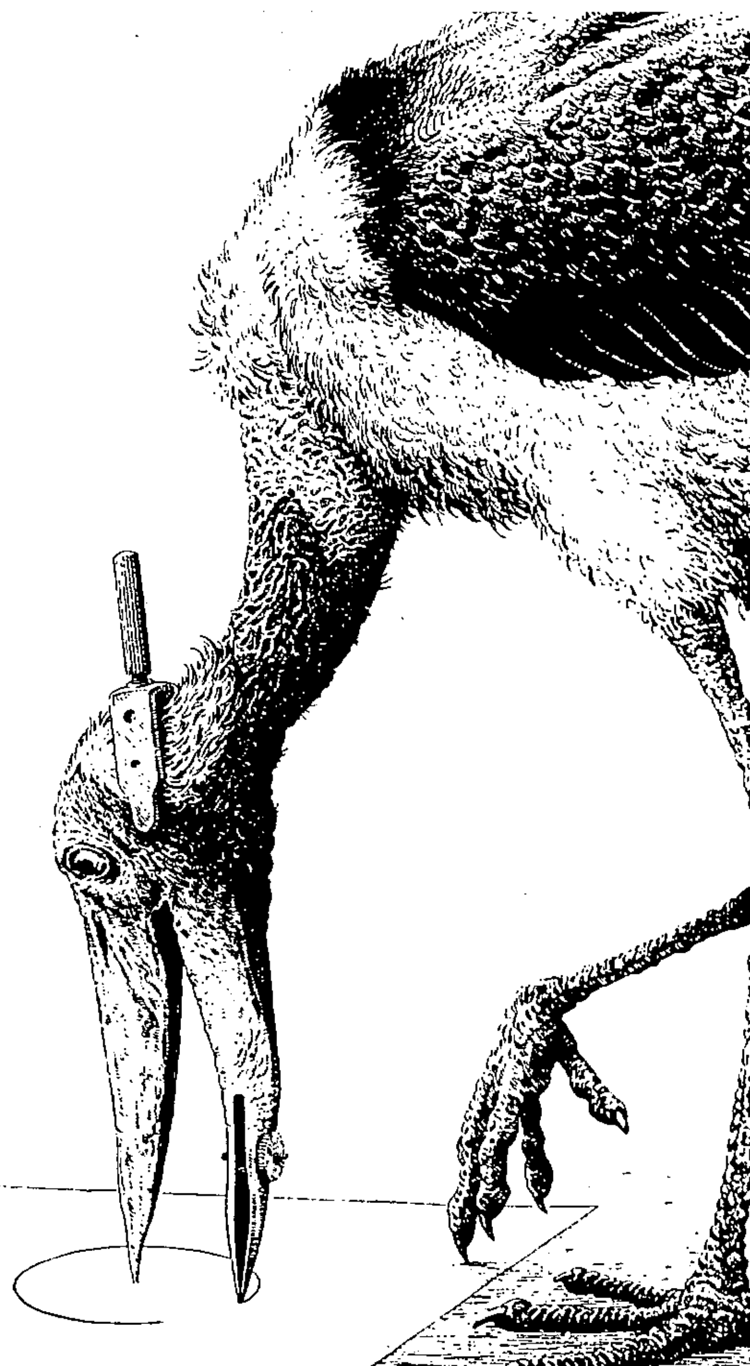
پارادوکسهای ریاضیات و علوم

(سرگرمی برای اندیشه‌ورزی)

اثرِ دکتر مارتین گاردنر
●ترجمهٔ حسنِ نصیرنیا

اشاره: پارادوکس (Paradox) یا شگفت‌نما، واژه‌ای یونانی است که از دو جزء Para به معنای «فراتر» و dox به معنای «اعتقاد» تشکیل شده است. بنا به تعریفی عام، منظور از آن، احکامی است که با عقل سلیم مغایرند و با اصول مقدماتی منطق، تضاد دارند. در رشتهٔ مقاله‌های «پارادوکسهای ریاضیات و علوم»، پارادوکس به مفهوم وسیعی گرفته شده است که دربرگیرندهٔ هر نتیجه‌ای است که با عقل سلیم و شهود، مغایرت دارد و بی‌درنگ احساس شگفتی آدمی را برمی‌انگیزد.

پارادوکسهای ریاضیات، مانند پارادوکسهای علوم، ممکن است فراتر از لطیفه باشند و به پیدایش بینشهای ژرف منجر شوند. برای اندیشمندان متقدّم یونانی، یک پارادوکس مزاحم، آن بود که قطر مربعی به ضلع واحد را نمی‌توان حتی با خط‌کشِ دارای درجه‌های بسیار ظریف، بدرستی اندازه گرفت. این حقیقتِ دردسر آفرین، موجب گشوده شدن حوزهٔ پهناور نظریهٔ عددهای گنگ شد. درنظر ریاضیدانان سدهٔ نوزدهم، آنچه بسیار متناقض می‌نمود، این بود که همهٔ عضوهای یک مجموعهٔ نامتناهی، ممکن است با عضوهای یکی از زیرمجموعه‌های خود، در تناظر یک به یک قرار گیرند و دو مجموعهٔ نامتناهی، ممکن است وجود داشته باشند که عضوهای آنها را نتوان در وضعیت تناظر یک به یک نهاد. این پارادوکسها به پیدایش نظریهٔ جدید مجموعه‌ها منجر شد و این نظریه نیز تأثیر زیادی بر فلسفهٔ علوم گذاشت. پارادوکسها می‌توانند بسیار آموزنده باشند. پارادوکسها مانند حقّه‌های ماهرانهٔ شعبده‌بازی، آن‌چنان شگفت‌آورند که آدمی بی‌درنگ می‌خواهد به چگونگی پدید آمدن آنها پی ببرد. شعبده‌بازان هرگز چگونگی انجام کار خود را آشکار



نمی‌کنند : امّا ریاضیدانان هیچ نیازی به پنهان نگهداشتن کارهای خود ندارند.

در این سلسله مطالب، سعی بر آن است که سبب تناقض هر پارادوکس و تا آن‌جا که ممکن است به زبانی غیرفنی و در نهایت اختصار، تشریح شود. ـ م.

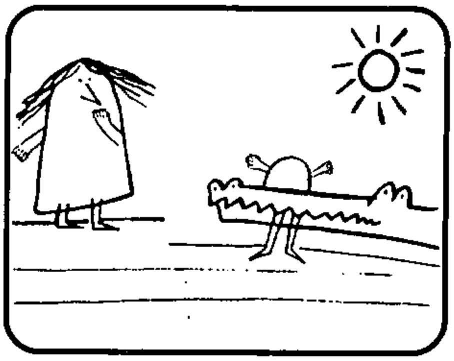
* * *

تمساح و کودک

فیلسوفان یونانی دوست داشتند دربارهٔ تمساحی سخن بگویند که کودکی را از مادرش می‌رباید.

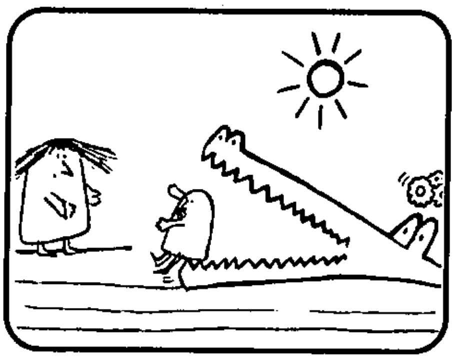
تمساح: می‌توانم کودکت را بخورم؟ پاسخ درست بده تا کودک را سالم به تو برگردانم.

مادر: اِی وای! می‌خواهی کودکم را بخوری.



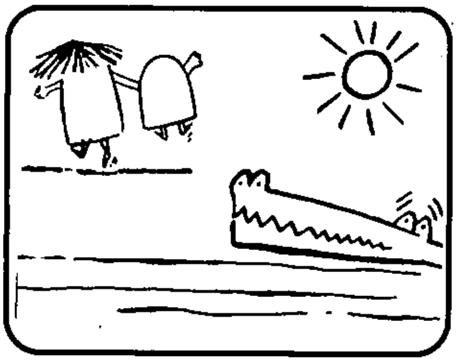
تمساح: چه باید بکنم؟ اگر کودک را به تو برگردانم، تو سخنِ نادرست گفته‌ای. من باید او را خورده باشم... که این‌طور ؛ پس او را برنخواهم گرداند.

مادر: تو باید این‌کار را بکنی. اگر کودکم را بخوری، من سخن درست گفته‌ام و تو باید او را پس بدهی.



تمساح بیچاره، آن‌قدر دو دل بود که کودک را رها کرد. مادر کودک را قاپید و در رفت.

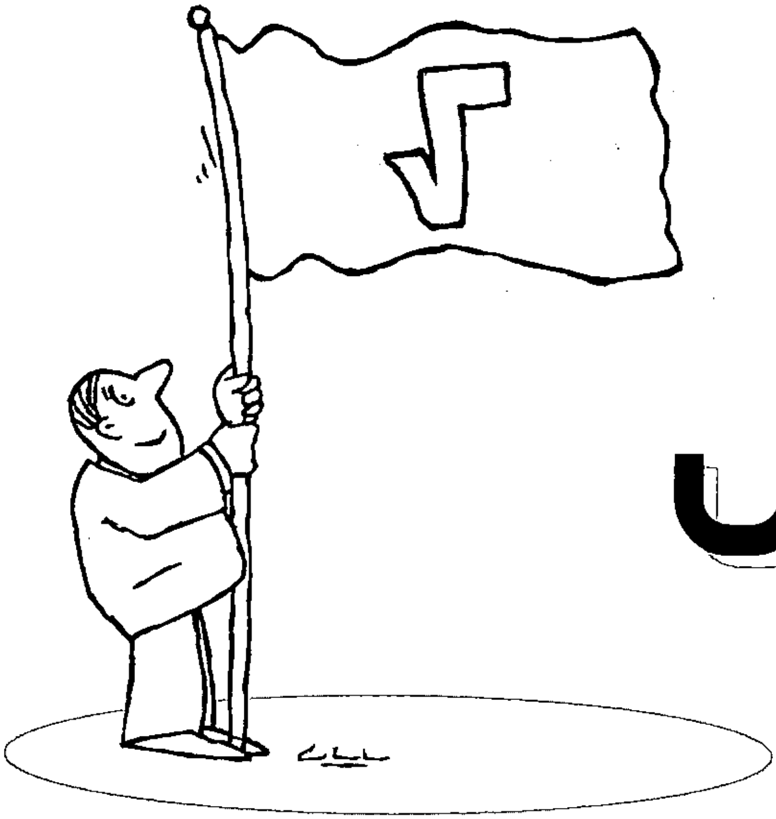
تمساح: لعنت بر این بخت و اقبال! ای کاش گفته بود من باید کودک را پس می‌دادم. (در آن‌صورت) غذای لذیذی خورده بودم.





لابد، میل دارید که بدانید **اراتوستن** چگونه برای اندازه‌گیری زمین اقدام کرد. استدلال او از این قبیل بود : می‌دانیم که محیط دایره به ۳۶۰ درجه تقسیم می‌شود، پس اگر من بتوانم طول یک درجهٔ آن را بر حسب استاد "Stade" معین کنم (هر استاد تقریباً ۱۵۷/۵ متر است) برای تعیین محیط کرهٔ زمین کافی است عدد حاصل را در ۳۶۰ ضرب کنم، بنابراین مطلب رجوع شده بود به این‌که طول کمان یک درجه را معین کنند.

تاریخ علوم ـ پی‌یر روسو



رادیکال

قسمت دوم

● سیّد محمّدرضا هاشمی موسوی

اعمال روی عددها و عبارتهای رادیکالی

۱) ضرب عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $۲۰ = ۴\times ۵ = \sqrt{۱۶}\times\sqrt{۲۵}$ و $\sqrt{۴۰۰} = ۲۰$، بنابراین:

$$\sqrt{۱۶}\times\sqrt{۲۵}=\sqrt{۱۶\times ۲۵}=\sqrt{۴۰۰}=۲۰$$

و همچنین:

$-۴ = (-۲)\times ۲ = \sqrt[۳]{-۸}\times\sqrt[۳]{۸}$ و $\sqrt[۳]{-۶۴} = -۴$، بنابراین:

$$\sqrt[۳]{-۸}\times\sqrt[۳]{۸}=\sqrt[۳]{(-۸)\times ۸}=\sqrt[۳]{-۶۴}=-۴$$

> به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ ($n \geq ۲$)، اگر n عددی فرد باشد:
>
> $$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad (۱)$$
>
> و اگر n زوج باشد، a و b باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند:
>
> $$\sqrt[n]{|a|}\times\sqrt[n]{|b|}=\sqrt[n]{|ab|}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (از شماره‌های ۷ تا ۱۲ به عنوان تمرین است).

۱) $\sqrt{۲}\times\sqrt{۱۸}$

۲) $\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۷}\times\sqrt{۲}$

۳) $\sqrt[۳]{۹-\sqrt{۱۷}}\times\sqrt[۳]{۹+\sqrt{۱۷}}$

۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}\times\sqrt{۶}\times\sqrt{\frac{۵}{۷}}\times\sqrt{۱۴}\times\sqrt{۱۰}$

۵) $\sqrt[۵]{۳}\times\sqrt[۵]{۹}\times\sqrt[۵]{\frac{۳}{۵}}\times\sqrt[۵]{\frac{۵}{۹}}\times\sqrt[۵]{۲۷}$

۶) $\sqrt[۴]{۱۰-\sqrt{۱۹}}\times\sqrt[۴]{۱۰+\sqrt{۱۹}}$

۷) $\sqrt[۳]{a^۲+b^۲}\times\sqrt[۳]{a^۴+۲a^۲b^۲+b^۴}$

۸) $\sqrt[۵]{x}\times\sqrt[۵]{x^۲}\times\sqrt[۵]{x^۲}$

۹) $\sqrt[۳]{a^۲bc}\times\sqrt[۳]{ab^۲c}\times\sqrt[۳]{c}$

۱۰) $\sqrt[۵]{a^۲b^۳}\times\sqrt[۵]{a^۳b^۲}$

۱۱) $\sqrt[7]{a^2b^3c}\times\sqrt[7]{a^3b^2c^4}\times\sqrt[7]{a^2b^2c^2}$

۱۲) $\sqrt[3]{a-b}\times\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}\times\sqrt[3]{(a^3-b^3)^2}$

حل:

۱) $\sqrt{2}\times\sqrt{18}=\sqrt{2\times18}=\sqrt{36}=6$

۲) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}=\sqrt{14\times7\times2}=\sqrt{14\times14}$

$=\sqrt{14^2}=14$

۳) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\times\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}=\sqrt[3]{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}$

$=\sqrt[3]{9^2-17}=\sqrt[3]{81-17}=\sqrt[3]{64}=4$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{7}}\times\sqrt{14}\times\sqrt{10}=\sqrt{\frac{2}{3}\times6\times\frac{5}{7}\times14\times10}$

$=\sqrt{2\times2\times5\times2\times10}=\sqrt{20^2}=20$

۵) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{\frac{3}{5}}\times\sqrt[5]{\frac{5}{9}}\times\sqrt[5]{27}$

$=\sqrt[5]{3\times9\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}\times27}=\sqrt[5]{3\times3^2\times3\times3}=\sqrt[5]{3^5}=3$

۶) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}=\sqrt[4]{(10-\sqrt{19})(10+\sqrt{19})}$

$=\sqrt[4]{100-19}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

۷) جواب: a^2+b^2

۸) جواب: x

۹) جواب: abc

۱۰) جواب: ab

۱۱) جواب: abc

۱۲) جواب: a^3-b^3

نکته: برای بردن عددی به داخل رادیکال که ضریب رادیکال است باید آن‌را به توان فرجهٔ رادیکال برسانیم و سپس آن‌را در عدد زیر رادیکال ضرب کنیم ؛ بنابراین، اگر فرجه زوج باشد، باید عدد مورد نظر مثبت باشد ؛ مانند : $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\times3}=\sqrt{12}$.

مثال: در عبارتهای زیر، ضریب رادیکال را به داخل رادیکال برده‌ایم.

۱) $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\times3}=\sqrt[3]{8\times3}=\sqrt[3]{24}$

۲) $-5\sqrt{2}=-\sqrt{5^2\times2}=-\sqrt{50}$

۳) $3\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^4\times3}=\sqrt[4]{81\times3}=\sqrt[4]{243}$

۴) $-2\sqrt[4]{3}=-\sqrt[4]{2^4\times3}=-\sqrt[4]{48}$

۵) $x\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{x^5.x^3}=\sqrt[5]{x^8}$

۶) $xy^2\sqrt[7]{x^3y^4}=\sqrt[7]{(xy^2)^7x^3y^4}=\sqrt[7]{x^7y^{14}x^3y^4}$

$=\sqrt[7]{x^{10}y^{18}}$

۷) $-a^2\sqrt[4]{2a^2}=-\sqrt[4]{(a^2)^4(2a^2)}=-\sqrt[4]{a^8(2a^2)}=-\sqrt[4]{2a^{10}}$

توجه کنید که در عبارتهای $-5\sqrt{2}$ ، $-2\sqrt[4]{3}$ و $-a^2\sqrt[4]{2a^2}$ نمی‌توانیم (-5) ، (-2) و $(-a^2)$ را به زیر رادیکال ببریم ؛ زیرا فرجهٔ رادیکالها زوج است و می‌دانیم از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید :

$-5\sqrt{2}\neq\sqrt{(-5)^2(2)}\quad,\quad -2\sqrt[4]{3}\neq\sqrt[4]{(-2)^4(3)}$

همچنین اگر a عدد حقیقی مخالف صفر باشد، داریم :

$-a^2\sqrt[4]{2a^2}\neq\sqrt[4]{(-a^2)^4(2a^2)}\quad(a\in\mathbb{R}-\{0\})$

> به‌طورکلی : برای عددهای حقیقی a، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ $(n\geq2)$ ، اگر n عددی فرد باشد :
>
> $a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}$ (۲)
>
> و اگر n عددی زوج و $b\geq0$:
>
> $\sqrt[n]{a^nb}=|a|\sqrt[n]{b}$

۲) تقسیم عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$ و $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ ؛ بنابراین :

$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

و همچنین $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{3}{4}$ و $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$ ؛ بنابراین :

$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$

به‌طور کلی :
برای عددهای حقیقی a، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲($n \geq ۲$) و $b \neq ۰$، اگر n عددی فرد باشد :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (۳)$$

و اگر n عددی زوج و $\frac{a}{b} \geq ۰$:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}} \qquad (۴)$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (۳ تا ۷ به‌عنوان تمرین است).

۱) $\frac{\sqrt{۲۰}}{\sqrt{۵}}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳} \times \sqrt{۶}}{\sqrt{۲}}$ ۳) $\frac{\sqrt{۱۵} \times \sqrt{۵۰} \times \sqrt{۳}}{\sqrt{۶} \times \sqrt{۳۰} \times \sqrt{۲}}$

۴) $\frac{\sqrt[۳]{۱۰۸}}{\sqrt[۳]{۴}}$ ۵) $\sqrt[۵]{\frac{۳۲}{۲۴۳}}$ ۶) $\frac{\sqrt[۹]{x^۲y^۳} \times \sqrt[۹]{xy^{۱۲}}}{\sqrt[۹]{xy^{۲۱}} \times \sqrt[۹]{x^{۲۰}y^۳}}$

۷) $\frac{x^۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}$

حل:

۱) $\frac{\sqrt{۲۰}}{\sqrt{۵}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۵}} = \sqrt{۴} = ۲$

۲) $\frac{\sqrt{۳} \times \sqrt{۶}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۱۸}{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$

۳) جواب: $\frac{۵}{۲}$ ۴) جواب: ۳

۵) جواب: $\frac{۲}{۳}$ ۶) جواب: $\frac{۱}{x^۲y}$ ۷) جواب: $\frac{۱}{x}$

در این‌جا، روش محاسبهٔ دو عبارت ۶ و ۷ را می‌آوریم :

۶) $\frac{\sqrt[۹]{x^۲y^۳} \times \sqrt[۹]{x\,y^{۱۲}}}{\sqrt[۹]{xy^{۲۱}} \times \sqrt[۹]{x^{۲۰}y^۳}} = \frac{\sqrt[۹]{x^۲y^۳.xy^{۱۲}}}{\sqrt[۹]{xy^{۲۱}.x^{۲۰}y^۳}} = \sqrt[۹]{\frac{x^۳y^{۱۵}}{x^{۲۱}y^{۲۴}}}$

$$= \sqrt[۹]{\frac{۱}{x^{۱۸}y^۹}} = \sqrt[۹]{\left(\frac{۱}{x^۲y}\right)^۹} = \frac{۱}{x^۲y}$$

۷) $\frac{x^۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}} = \frac{\sqrt[۳]{(x^۲)^۳.x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}} = \frac{\sqrt[۳]{x^۶.x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}} = \sqrt[۳]{\frac{x^۷}{x^{۱۰}}}$

$$= \sqrt[۳]{\frac{۱}{x^۳}} = \sqrt[۳]{(\frac{۱}{x})^۳} = \frac{۱}{x}$$

۳) جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی

با مقایسهٔ تساویهای $۷x + ۴x = (۷+۴)x = ۱۱x$ و

$$۷\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} = (۷+۴)\sqrt{۲} = ۱۱\sqrt{۲}$$

و تساویهای

$$۷y - ۴y = (۷-۴)y = ۳y$$

و

$$۷\sqrt[۷]{a} - ۴\sqrt[۷]{a} = (۷-۴)\sqrt[۷]{a} = ۳\sqrt[۷]{a}$$

ملاحظه می‌شود جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی، شبیه جمع جبری یک‌جمله‌ایهاست ؛ یعنی جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی را وقتی می‌توان به‌صورت ساده نوشت که عدد فرجهٔ رادیکال و عبارت زیر رادیکال با هم مساوی (یا عددها و عبارتهای رادیکالی با هم معادل) باشند.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} - \sqrt{۲}$

۲) $۷\sqrt[۴]{۴} - ۵\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} - ۴\sqrt[۴]{۴}$

۳) $۲\sqrt[۱۵]{۸} - ۳\sqrt[۵]{۲} - ۴\sqrt[۱۵]{۸} + ۵\sqrt[۵]{۲}$

۴) $۵\sqrt[۳]{۵} + ۲\sqrt[۳]{۵} - ۱۴\sqrt[۹]{۱۲۵} + ۴\sqrt[۳]{۵} + \sqrt[۹]{۱۲۵}$

حل:

۱) $۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} - \sqrt{۲}$

$$= (۵+۳-۴+۲-۱)\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

۲) $۷\sqrt[۴]{۴} - ۵\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} - ۴\sqrt[۴]{۴}$

$$= (۷-۴)\sqrt[۴]{۴} + (-۵+۴)\sqrt{۲} = ۳\sqrt[۴]{۴} - \sqrt{۲}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[۴]{۴}$ با $\sqrt{۲}$، یعنی :

$$\sqrt[۴]{۴} = \sqrt[۴]{۲^۲} = \sqrt{۲}$$

داریم :

$$۳\sqrt[۴]{۴} - \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲} = (۳-۱)\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

۳) $۲\sqrt[۱۵]{۸} - ۳\sqrt[۵]{۲} - ۴\sqrt[۱۵]{۸} + ۵\sqrt[۵]{۲}$

$$= (۲-۴)\sqrt[۱۵]{۸} + (-۳+۵)\sqrt[۵]{۲} = -۲\sqrt[۱۵]{۸} + ۲\sqrt[۵]{۲}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[۱۵]{۸}$ با $\sqrt[۵]{۲}$، یعنی :

$$\sqrt[15]{8}=\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[5]{2}$$

داریم :

$$-2\sqrt[15]{8}+2\sqrt[5]{2}=-2\sqrt[5]{2}+2\sqrt[5]{2}$$
$$=(-2+2)\sqrt[5]{2}=(0)\sqrt[5]{2}=0$$

۴) $5\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-14\sqrt[9]{125}+4\sqrt[3]{5}+\sqrt[9]{125}$
$$=(5+2+4)\sqrt[3]{5}+(-14+1)\sqrt[9]{125}$$
$$=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[9]{125}$ با $\sqrt[3]{5}$ ، یعنی :

$$\sqrt[9]{125}=\sqrt[9]{5^3}=\sqrt[3]{5}$$

داریم :

$$11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[3]{5}$$
$$=(11-13)\sqrt[3]{5}=-2\sqrt[3]{5}$$

توجه داشته باشید که در جمع جبری، عبارتهای رادیکالی ابتدا باید عواملی را که توان کامل فرجهٔ رادیکال هستند از زیر رادیکال بیرون آورد و سپس عبارت را ساده کرد.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (۳، ۴ و ۵ به‌عنوان تمرین است).

۱) $\sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$

۲) $2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$

۳) $3\sqrt[4]{405}+5\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{80}+4\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{80}$

۴) $\sqrt[3]{a^7}-2\sqrt[3]{a^4}+5\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^{10}}+3\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^{10}}-\sqrt[3]{a^7}$

۵) $\sqrt[5]{a^6b^6}-2b\sqrt[5]{a^6b}-5\sqrt[5]{a^6b^6}+3a\sqrt[5]{ab^6}+3ab\sqrt[5]{ab}$

حل:

۱) $\sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$
$$=\sqrt{9\times6}+(3+4)\sqrt{6}+(-5-1)\sqrt{4\times6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=3\sqrt{6}+7\sqrt{6}-6\times2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=(3+7-12)\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$
$$=-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[4]{36}$ با $\sqrt{6}$ ، یعنی :

$$\sqrt[4]{36}=\sqrt[4]{6^2}=\sqrt{6}$$

داریم :

$$-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}=-2\sqrt{6}+\sqrt{6}=(-2+1)\sqrt{6}=-\sqrt{6}$$

۲) $2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$
$$=(2+5-1)\sqrt[3]{16}+(-7+4)\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\sqrt[3]{2^3\times2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3^3\times2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\times2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=(12-3-3)\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$
$$=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[6]{4}$ با $\sqrt[3]{2}$ ، یعنی :

$$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

داریم :

$$6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=(6+1)\sqrt[3]{2}=7\sqrt[3]{2}$$

۳) جواب : $13\sqrt[4]{5}$ ۴) جواب : $6a\sqrt[3]{a}$ ۵) جواب : ۰

نکته: جمع دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ به‌صورت $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ نوشته می‌شود. همچنین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{2}$ به‌صورت $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ جمع بسته می‌شوند.

توان رساندن عددها و عبارتهای رادیکالی

بنا به تعریف توان، می‌توان نوشت :

۱) $(\sqrt[5]{3})^4=\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{3\times3\times3\times3}$
$$=\sqrt[5]{3^4}$$

و به‌طورکلی می‌توان نوشت :

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (اگر n زوج باشد، باید $a\ge 0$)

مثال: $(\sqrt[3]{-4})^5=-8\sqrt[3]{2}$

حالت خاص: به مثالهای زیر توجه کنید :

۱) $(\sqrt{2})^2=\sqrt{2^2}=2$ ۲) $(\sqrt[5]{7})^5=\sqrt[5]{7^5}=7$

۳) $(\sqrt[3]{4})^3=\sqrt[3]{4^3}=4$ ۴) $(\sqrt[4]{3})^4=\sqrt[4]{3^4}=3$

به‌طورکلی : برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ $(n \geq ۲)$، اگر n عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a^n}=a \qquad (۵)$$

و اگر n عددی زوج باشد :

$$\sqrt[n]{a^n}=|a| \quad , \quad (\sqrt[n]{|a|})^n=|a|$$

ریشهٔ مثبت یک عدد و یا عبارت رادیکالی

به مثالهای زیر توجه کنید :

۱) $\sqrt[۲]{\sqrt[۲]{۸۱}}=\sqrt[۲]{۹}=۳$

و $\sqrt[۴]{۸۱}=\sqrt[۴]{۳^۴}=۳$

بنابراین :

$$\sqrt[۲]{\sqrt[۲]{۸۱}}=\sqrt[۴]{۸۱}$$

همچنین ۲) $\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۶۴}}=\sqrt[۳]{۸}=۲$

و $\sqrt[۶]{۶۴}=\sqrt[۶]{۲^۶}=۲$

بنابراین :

$$\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۶۴}}=\sqrt[۶]{۶۴}$$

در مثال ۱، ملاحظه می‌شود که ریشهٔ دوم $\sqrt[۲]{۸۱}$ برابر با ریشهٔ چهارم ۸۱ است.

در مثال ۲، مشاهده می‌کنید که ریشهٔ سوم $\sqrt{۶۴}$ برابر با ریشهٔ ششم ۶۴ است.

به‌طورکلی :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a} \qquad (۶)$$

ریشهٔ mام $\sqrt[n]{a}$، برابر با ریشهٔ mnام a است.

m و n عددهای طبیعی و $m \geq ۲$ و $n \geq ۲$ می‌باشند و $a \in \mathbb{R}$ است.

اگر m یا n و یا هر دو زوج باشند، a نمی‌تواند منفی باشد.

نکته: در حالت کلی، اگر $a \geq ۰$ و تعداد رادیکالها n باشد :

$$\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a...\sqrt{a}}}}}_{n \text{ مرتبه}} = \sqrt[۲^n]{a^{۲^n-۱}} \qquad (a \geq ۰)$$

مثال:

۱) $\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}=\sqrt[۲^۴]{۲^{۲^۴-۱}}=\sqrt[۱۶]{۲^{۱۶-۱}}=\sqrt[۱۶]{۲^{۱۵}}$

۲) $\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳}}}}}}=\sqrt[۲^۶]{۳^{۲^۶-۱}}=\sqrt[۶۴]{۳^{۶۳}}$

با توجه به مثالهای اخیر، در حالت کلی خواهیم داشت :

$$\sqrt[k]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}}}=\sqrt[kpqmn]{a}$$

n،m، p، q و k عددهای طبیعی بزرگتر یا برابر ۲ می‌باشند ؛ که اگر لااقل یکی از آنها زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد. برای مثال داریم :

$$\sqrt[۵]{\sqrt[۳]{\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{۷۵}}}}}}=\sqrt[۱۸۰۰]{۷۵} \quad , \quad \sqrt[۳]{\sqrt{\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{\sqrt{۲}}}}}=\sqrt[۱۲۰]{۲}$$

توجه: می‌دانیم :

$$\sqrt[۲\times۲]{۴^{۱\times۲}}=\sqrt[۴]{۴^۲}=\sqrt[۴]{۲^۴}=۲ \ , \ \sqrt{۴^۱}=۲$$

بنابراین :

$$\sqrt{۴}=\sqrt[۲\times۲]{۴^{۱\times۲}}$$

همچنین $\sqrt[۵]{a^۵}=a$ و $\sqrt[۵\times۳]{(a^۵)^۳}=\sqrt[۱۵]{a^{۱۵}}=a$، بنابراین :

$$\sqrt[۵]{a^۵}=\sqrt[۵\times۳]{a^{۵\times۳}}$$

به‌طورکلی :برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ $(n \geq ۲)$، اگر p عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}} \qquad (۷)$$

اگر n زوج باشد، a^m نمی‌تواند منفی باشد.

و اگر p عددی زوج باشد : $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{|a|^m}$

یعنی: عدد فرجهٔ رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توانیم در یک عدد طبیعی ضرب یا بر یک عدد طبیعی تقسیم کنیم.

مثال:

۱) $\sqrt[۳]{۴}=\sqrt[۳]{۲^{۲}}=\sqrt[۷\times۳]{۲^{۷\times۲}}=\sqrt[۲۱]{۲^{۱۴}}$

۲) $\sqrt[۴]{۲x^{۲}}=\sqrt[۲\times۴]{(۲x^{۲})^{۲}}=\sqrt[۸]{۴x^{۴}}$

۳) $\sqrt[۱۲]{۳^{۴}}=\sqrt[۳\times۴]{۳^{۴}}=\sqrt[۳]{۳}$

۴) $\sqrt[۱۵]{\sqrt[۳]{a^{۹}}}=\sqrt[۴۵]{a^{۹}}=\sqrt[۹\times۵]{a^{۹}}=\sqrt[۵]{a}$

نکتهٔ مهم

در مورد تقسیم فرجهٔ رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال بر یک عدد زوج یا ضرب فرجهٔ رادیکال و توان عدد زیر رادیکال در یک عدد زوج، توجه به علامت عدد زیر رادیکال بسیار ضروری است.

مثال:

۱) $\sqrt[۴]{(-۹)^{۲}}=\sqrt[۴]{۸۱}=۳$ یا $\sqrt[۴]{(-۹)^{۲}}=\sqrt{|-۹|}=\sqrt{۹}=۳$

یعنی: $\sqrt[۴]{(-۹)^{۲}}\neq\sqrt{-۹}$

۲) $\sqrt[۳]{-۲۷}=-۳$

همچنین: $\sqrt[۳]{-۲۷}\neq\sqrt[۳\times۲]{(-۲۷)^{۲}}$

از خاصیتهای اخیر، برای ضرب یا تقسیم عبارتهای رادیکالی با فرجه‌های نابرابر استفاده می‌کنند؛ بدین ترتیب که ابتدا فرجه‌های رادیکالها را به فرجهٔ مشترک تبدیل کرده و سپس عمل ضرب یا تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال:

۱) $\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt{۲}=\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۲\times۲]{۲^{۲}}=\sqrt[۴]{۲}\times\sqrt[۴]{۴}$
$=\sqrt[۴]{۲\times۴}=\sqrt[۴]{۸}$

۲) $۲\sqrt[۳]{-۴}\times۳\sqrt{۲}=-۲\sqrt[۳]{۴}\times۳\sqrt{۲}$
$=-۲\sqrt[۳\times۲]{۴^{۲}}\times۳\sqrt[۲\times۳]{۲^{۳}}$
$=-۲\sqrt[۶]{۴^{۲}}\times۳\sqrt[۶]{۲^{۳}}=-۶\sqrt[۶]{۴^{۲}\times۲^{۳}}$
$=-۶\sqrt[۶]{۲^{۴}\times۲^{۳}}=-۶\sqrt[۶]{۲^{۷}}$
$=-۶\sqrt[۶]{۲^{۶}\times۲}=-۶\times۲\sqrt[۶]{۲}=-۱۲\sqrt[۶]{۲}$

۳) $\sqrt[۳]{۴}\div\sqrt[۵]{۸}=\sqrt[۳\times۵]{۴^{۵}}\div\sqrt[۵\times۳]{۸^{۳}}=\sqrt[۱۵]{۴^{۵}}\div\sqrt[۱۵]{۸^{۳}}$
$=\sqrt[۱۵]{۴^{۵}\div۸^{۳}}=\sqrt[۱۵]{۲^{۱۰}\div۲^{۹}}$
$=\sqrt[۱۵]{۲^{۱۰-۹}}=\sqrt[۱۵]{۲}$

۴) $\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt{۳}=\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt[۲\times۲]{۳^{۲}}=\sqrt[۴]{۳۶}\div\sqrt[۴]{۹}$
$=\sqrt[۴]{۳۶\div۹}=\sqrt[۴]{۴}=\sqrt{۲}$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}$ ۲) $۵\sqrt{۲}\times۲\sqrt[۳]{-۲}$

۳) $\sqrt[۵]{۸}\times\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}$ ۴) $۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۳\sqrt{۴}}$

۵) $\sqrt{۱۵}\div\sqrt[۳]{۵}$ ۶) $\sqrt[۴]{۲۲۵}\div\sqrt{۲۵}$

۷) $\sqrt[۳]{a\sqrt[۳]{a}}\times\sqrt[۳]{a^{۲}\sqrt[۵]{a}}$ ۸) $\dfrac{\sqrt[۳]{a^{۲}}\div\sqrt[۷]{a^{۳}}}{\sqrt[۲۱]{a^{۱۲}}}$

حل:

۱) $\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}=\sqrt[۳\times۲]{۴^{۲}}\times\sqrt[۲\times۳]{۲^{۳}}=\sqrt[۶]{۴^{۲}}\times\sqrt[۶]{۲^{۳}}$
$=\sqrt[۶]{۴^{۲}\times۲^{۳}}=\sqrt[۶]{۲^{۴}\times۲^{۳}}$
$=\sqrt[۶]{۲^{۷}}=\sqrt[۶]{۲^{۶}\times۲}=۲\sqrt[۶]{۲}$

۲) $۵\sqrt{۲}\times۲\sqrt[۳]{-۲}=-۵\sqrt{۲}\times۲\sqrt[۳]{۲}=-۵\sqrt[۶]{۲^{۳}}\times۲\sqrt[۶]{۲^{۲}}$
$=-۱۰\sqrt[۶]{۲^{۳}\times۲^{۲}}$
$=-۱۰\sqrt[۶]{۲^{۵}}=-۱۰\sqrt[۶]{۳۲}$

۳) $\sqrt[۵]{۸}\times\sqrt[۳]{۴}\times\sqrt{۲}=\sqrt[۳۰]{۸^{۶}}\times\sqrt[۳۰]{۴^{۱۰}}\times\sqrt[۳۰]{۲^{۱۵}}$
$=\sqrt[۳۰]{۸^{۶}\times۴^{۱۰}\times۲^{۱۵}}$
$=\sqrt[۳۰]{۲^{۱۸}\times۲^{۲۰}\times۲^{۱۵}}=\sqrt[۳۰]{۲^{۵۳}}$
$=\sqrt[۳۰]{۲^{۳۰}\times۲^{۲۳}}=۲\sqrt[۳۰]{۲^{۲۳}}$

۴) $۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۳\sqrt{۴}}=۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۳\times۲}$
$=۵\sqrt[۳]{۲۵}\times۲\sqrt{۶}$
$=۵\sqrt[۶]{۲۵^{۲}}\times۲\sqrt[۶]{۶^{۳}}=۱۰\sqrt[۶]{۲۵^{۲}\times۶^{۳}}$
$=۱۰\sqrt[۶]{۱۳۵۰۰۰}$

۵) $\sqrt{۱۵}\div\sqrt[۳]{۵}=\sqrt[۶]{۱۵^{۳}}\div\sqrt[۶]{۵^{۲}}=\sqrt[۶]{۱۵^{۳}\div۵^{۲}}$
$=\sqrt[۶]{\dfrac{۵^{۳}\times۳^{۳}}{۵^{۲}}}=\sqrt[۶]{۵\times۳^{۳}}=\sqrt[۶]{۵\times۲۷}$
$=\sqrt[۶]{۱۳۵}$

۶) $\sqrt[۴]{۲۲۵}\div\sqrt{۲۵}=\sqrt[۴]{۲۲۵}\div\sqrt[۴]{۲۵^{۲}}=\sqrt[۴]{۲۲۵\div۲۵^{۲}}$

$$=\sqrt[4]{\frac{5^2\times 3^2}{5^4}}=\sqrt[4]{\frac{3^2}{5^2}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{0/6}$$

$$7)\quad \sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}=\sqrt[3]{a^3\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}}$$

$$=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5}\times\sqrt[15]{a^3}}$$

$$=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5.a^3}}=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^8}}$$

$$=a\sqrt[45]{a^8}$$

$$8)\quad \frac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}=\frac{\sqrt[21]{(a^2)^7}\div\sqrt[21]{(a^3)^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}$$

$$=\sqrt[21]{\frac{a^{14}\div a^9}{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{a^5}{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{1}{a^7}}$$

$$=\sqrt[21]{\left(\frac{1}{a}\right)^7}=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

مسألهٔ مسابقه‌ای

(ابن هیثم قرن یازدهم، فیبوناتچی اوایل قرن سیزدهم).
از سبدی هر بار ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ عدد تخم مرغ بیرون می‌آوریم. اما در هر بار، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ عدد تخم مرغ در سبد می‌ماند. اگر هر بار، ۷ تخم مرغ را بیرون بیاوریم، تخم مرغی در سبد نمی‌ماند. حداقل، چند تخم مرغ ممکن است در سبد باشد.

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۹

مسأله: باقیماندهٔ تقسیم عدد زیر را بر ۵ حساب کنید:

$$S=1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n$$

حل: می‌دانیم اگر n فرد باشد x^n+y^n بر $x+y$ بخش‌پذیر است. پس 2^n+8^n ، 3^n+7^n و 6^n+4^n بترتیب به $2+8$ ، $3+7$ و $6+4$، یعنی ۱۰ بخش‌پذیرند. پس ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با 1^n، یعنی ۱.

اگر n زوج باشد فرض می‌کنیم $n=2k$، آن‌گاه داریم:

$$S=1+4^k+9^k+16^k+25^k+36^k+49^k+64^k$$

اولاً اگر k زوج باشد هریک از جمله‌ها به صورت $(5m+1)$ هستند بجز 25^k؛ پس ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با ماندهٔ تقسیم: $1+1+1+1+1+1+1=7$ بر ۵، یعنی ۲.

ثانیاً اگر k فرد باشد عددهای 4^k ، 9^k، 49^k و 64^k به صورت $(5m-1)$ و عددهای 16^k و 36^k به صورت $(5m+1)$ می‌باشند در نتیجه ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با:

$$1-1-1+1+0+1-1-1=-1$$

و یا: $5+(-1)=4$



جزء صحیح

مؤلف: مظفّر غربی

انتشارات یکان

با توجه به کاربرد گستردهٔ «توابع جزء صحیح» در شاخه‌های مختلف علوم پایه و خلأ کتاب مدوّن در زمینه‌های، حل و بحث معادلات شامل جزء صحیح، رسم نمودار توابع شامل جزء صحیح، رسم نمودار دنباله‌های شامل جزء صحیح، رسم نمودار توابع هذلولی و توابع معکوس آنها و آرکهای شامل جزء صحیح، این کتاب تألیف شده است.

مؤلف محترم ،کتاب را از طرف استان کردستان به کمیتهٔ سال جهانی ریاضیات اهدا کرده است. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش‌آموزان و علاقه‌مندان ریاضی توصیه می‌کنیم.



گنجینه ای از تئوری اعداد

مؤلف: بهزاد صالحیان

انتشارات مهاجر

نظریهٔ اعداد یکی از شاخه‌های بسیار پربار ریاضیات است که ریشه در اعماق تاریخ بشر دارد. از زمانی که انسان شمارش را آغاز کرد، نظریهٔ اعداد را نیز بنیاد نهاد. پیشینهٔ این نظریه به حدود چهارهزار سال پیش ـ یعنی به تمدن بابلی و سومری ـ می‌رسد.

اکنون در آستانهٔ قرن بیست و یکم، نظریهٔ اعداد ـ بخصوص با حل قضیهٔ آخر فرما، توسط اندرو وایلز ـ یکی از شکوفاترین و پیشروترین شاخه‌های ریاضیات محسوب می‌شود.

در این کتاب سعی شده است تا قضایا و مفاهیمی آورده شود که هم برنامهٔ درسی دبیرستانی را پوشش دهد و هم برای دانش‌آموزانی که مایل به داشتن دانش بیشتری در این زمینه از ریاضیات هستند، مفید باشد.

همچنین، در این کتاب صدها مسألهٔ نمونه به طور کامل حل شده است، تا خواننده با نمونه‌های بیشتری از مسائل حل شده و روشهای حل آنها آشنا گردد. در پایان هر فصل، تعداد زیادی تمرین گنجانده شده تا خواننده بتواند با استفاده از آنها هم مطالب فراگرفته شده را دوباره مرور و تمرین کند و هم مأخذی از سؤالات متنوع در دسترس داشته باشد.



تعیین تعداد روابط روی یک مجموعهٔ متناهی، تحت شرایطی خاص

از جمله منعکس بودن، متقارن بودن و ....،
هم ارز بودن رابطه
قابل استفادهٔ دانش آموزان دورهٔ
پیش دانشگاهی (ریاضیات گسسته)

● *ترجمه و جمع آوری: سیمین اکبری زاده*
دبیر ریاضی ـ اراک
● *منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی (رالف ـ پ ـ گریمالدی)*

برای یادآوری ابتدا تعریف خاصیت مورد نظر، مطرح می‌شود و سپس به بررسی تعیین تعداد روابطی که دارای آن خاصیت می باشند، می پردازیم.

تعریف رابطه: هرگاه A و B دو مجموعه دلخواه باشند، هر زیرمجموعهٔ $A \times B$ را یک رابطه از A در B می‌نامیم.

قرارداد: هرگاه R از A در A تعریف شود، یعنی $R \subset A \times A$ می گوییم رابطهٔ R روی A تعریف شده است.

مسألهٔ ۱: برای رابطهٔ R روی مجموعه A، فرض کنید $R^\circ = \{(a,a)|a \in A\}$. اگر $|A| = n$، ثابت کنید $s, t \in w$ وجود دارد که $\circ \leq s < t \leq 2^{n^2}$، به طوری که $R^s = R^t$ (راهنمایی : از اصل لانهٔ کبوتری استفاده کنید).

(مجموعه اعداد حسابی = $W = N \cup \{\circ\}$)

حل: می‌دانیم تعداد روابط تعریف شده روی مجموعهٔ A برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $A \times A$. با توجه به این که $|A \times A| = n^2$ لذا تعداد روابط تعریف شده روی مجموعهٔ A، برابر است با 2^{n^2} . از طرفی، تعداد اعداد حسابی از ∘ تا 2^{n^2}، برابر $2^{n^2}+1$ می‌باشد. لذا طبق اصل لانهٔ کبوتری، چون $2^{n^2}+1 > 2^{n^2}$، هرگاه روابط تعریف شده روی مجموعهٔ A را لانهٔ کبوترها و اعداد طبیعی از ∘ تا 2^{n^2} را کبوترها درنظر بگیریم، نتیجه خواهیم گرفت، دوعدد حسابی مانند s و t وجود دارد که $\circ \leq s < t \leq 2^{n^2}$، به طوری که $R^s = R^t$.

تعریف. خاصیت بازتابی (انعکاسی): هرگاه $A \neq \varnothing$ و رابطهٔ R روی A تعریف شده باشد گوییم R خاصیت بازتابی یا انعکاسی دارد ؛ هرگاه برای هر عضو مجموعهٔ A مانند a، (a,a) در R موجود باشد.

تعیین تعداد روابط منعکس روی مجموعهٔ متناهی A

فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای متناهی با n عضو باشد. قرار می‌دهیم :

$$A=\{a_1,a_2,...a,a_n\}$$

می‌دانیم هر رابطه،زیر مجموعه‌ای‌از حاصل‌ضرب‌دکارتی $A\times A$ است و

$$A\times A=\{(a_1,a_1),...,(a_n,a_n),(a_1,a_2),...,(a_{n-1},a_n)\}$$

$|A\times A|=|A|\times|A|=n^2$. برای پیدا کردن تعداد روابط منعکس روی A، باید ببینیم، برای هر عضو $A\times A$ چند انتخاب وجود دارد.

$A\times A$ را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ جداازهم A_1 و A_2 درنظر می‌گیریم :

$$A_1=\{(a_i,a_i)|1\le i\le n\}\Rightarrow|A_1|=n$$

$$A_2=\{(a_i,a_j)|1\le i,j\le n,i\ne j\}$$

$$\Rightarrow|A_2|=|A\times A|-|A_1|=n^2-n$$

با توجه به این که هدف، پیدا کردن تعداد روابط منعکس مثل R روی A است، طبق تعریف، رابطهٔ منعکس هریک ازاعضای A_1 (زوجهای مرتّب با دو مؤلّفهٔ یکسان) حتماً باید عضو Rباشند. پس برای هر عضو A_1 یک انتخاب وجود دارد.

برای هریک از اعضای A_2 (زوجهای مرتّب با دو مؤلّفه متفاوت) دو انتخاب وجود دارد (می‌تواند عضو رابطهٔ R باشد یا نباشد).

بنابراین طبق اصل ضرب $\underbrace{1\times1\times...\times1}_{n\text{ بار}}\times\underbrace{2\times2\times...\times2}_{n^2-n}=2^{n^2-n}$ رابطهٔ منعکس روی مجموعهٔ n عضوی A می‌توان نوشت.

تعریف: *خاصیت تقارنی* : گوییم رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A خاصیت تقارنی دارد ؛ هرگاه برای هر زوج مرتّب مانند (x,y) که در R موجود است، (y,x) نیز در R موجود باشد.

تعیین تعداد روابط متقارن روی مجموعهٔ nعضوی A

برای شمردن تعداد روابط متقارن روی $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$، $A\times A$ را به صورت اجتماع دو مجموعهٔ جدا از هم A_1 و A_2 می‌نویسیم، که :

$$A_1=\{(a_i\,,a_i)|1\le i\le n\}\Rightarrow|A_1|=n$$

و

$$A_2=\{(a_i\,,a_j)|1\le i\ne j\le n\}\Rightarrow|A_2|=n^2-n$$

بنابراین هر زوج مرتّب $A\times A$ دقیقاً دریکی از دو مجموعهٔ A_1 و A_2 وجود دارد. مجموعهٔ A_2 شامل $\frac{n^2-n}{2}$ زیرمجموعهٔ ۲ عضوی به شکل $S_{ij}=\{(a_i,a_j),(a_j,a_i)|1\le i<j\le n\}$ می‌باشد. با توجه به این که هدف ساختن رابطهٔ متقارن R روی A می‌باشد، هریک از n عضو A_1 می‌تواند عضو R باشد یا نباشد، لذا برای هر عضو A_1 دو انتخاب وجود دارد.

و نیز برای هریک از $\frac{n^2-n}{2}$ زیر مجموعهٔ A_2 (S_{ij}،$1\le i<j\le n$) دو انتخاب وجود دارد (می‌توانند هر دو زوج مرتّب، اعضای رابطهٔ Rباشند یا هیچ کدام از دو زوج، عضو R نباشند). بنابراین، طبق اصل ضرب $2^n\times2^{\frac{n^2-n}{2}}=2^{\frac{n^2+n}{2}}$ رابطهٔ متقارن روی مجموعهٔ n عضوی A موجود است.

تعیین تعداد روابط منعکس و متقارن روی مجموعهٔ nعضوی A

با روشی مشابه، تعیین تعداد روابط متقارن روی A عمل می‌کنیم ؛ با این تفاوت که چون رابطه، علاوه بر متقارن بودن، باید منعکس نیز باشد، لذا برای هر زوج مرتّب در A_1 فقط یک انتخاب وجود دارد (چون حتماً باید عضو رابطه باشد). بنابراین، تعداد

روابط منعکس و متقارن برابر است با: $۱^n \times ۲^{\frac{n^۲-n}{۲}} = ۲^{\frac{n^۲-n}{۲}}$.

تعریف: *خاصیت پادمتقارن*: فرض کنید، R رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد ($R \subseteq A \times A$). رابطهٔ R پاد متقارن نامیده می‌شود؛ هرگاه برای هر $a,b \in A$، اگر $(a,b) \in R$ و نیز $(b,a) \in R$، آن‌گاه $a = b$.

مثال ۱: هرگاه $A = \{۱,۲\}$، رابطهٔ $R = \{(۱,۲),(۲,۱)\}$ یک رابطهٔ پاد متقارن روی A نیست؛ چون $R \ni (۲و۱)$ و نیز $R \ni (۱و۲)$ ولی $۲ \neq ۱$.

مثال ۲: برای مجموعهٔ مفروض U، رابطهٔ R را روی P(U) (مجموعهٔ تمام زیر مجموعه‌های U) به‌صورت زیر درنظر بگیرید:

برای هر $A,B \subseteq U$ و $ARB \Leftrightarrow A \subseteq B$. این رابطه، یک رابطه پاد متقارن است؛ زیرا اگر ARB و BRA، آن‌گاه $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$. لذا طبق تعریف تساوی مجموعه‌ها، خواهیم داشت: $A = B$.

توجه: «متقارن نیست» با «پاد متقارن است» هم معنا نیست (این موضوع در مثال زیر بررسی می‌شود).

مثال ۳: برای $A = \{۱,۲,۳\}$، رابطهٔ R را روی A چنین تعریف کنید: $R = \{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳)\}$. این رابطه پادمتقارن نیست؛ چون $(۲,۱) \in R$ و $(۱,۲) \in R$ ولی $۲ \neq ۱$. R متقارن هم نیست؛ چون $(۲,۳) \in R$ ولی $(۳,۲) \notin R$. یا رابطهٔ $R_۱ = \{(۱,۱),(۲,۲)\}$ روی A، هم متقارن است و هم پادمتقارن.

مسألهٔ ۲: آیا رابطهٔ عاد کردن روی مجموعه اعداد صحیح، پادمتقارن است؟

حل: خیر، چون برای هر $a \in Z$، $a|-a$ و $-a|a$ ولی $a \neq -a$ $(a \neq ۰)$.

تعیین تعداد روابط پاد متقارن روی مجموعهٔ n عضوی A

با روشی مشابه تعیین تعداد روابط متقارن روی A عمل می‌کنیم. ولی با توجه به این که هدف، نوشتن رابطهٔ پادمتقارن است، برای هر یک از $\frac{n^۲-n}{۲}$ زیرمجموعهٔ $S_{ij} = \{(a_i,a_j),(a_j,a_i) | ۱ \leq i < j \leq n\}$ در $A_۲$ سه انتخاب وجود دارد (۱ـ ممکن است فقط $(a_i,a_j) \in R$ ۲ـ ممکن است فقط $(a_j,a_i) \in R$ ۳ـ ممکن است هیچ‌کدام عضو رابطه R نباشند).

و برای هریک از n عضو مجموعهٔ $A_۱$، ۲ انتخاب وجود دارد (یا عضو رابطهٔ R هست و یا نیست).

لذا طبق اصل ضرب $۲^n \times ۳^{\frac{n^۲-n}{۲}}$ رابطهٔ پاد متقارن، روی مجموعهٔ n عضوی A موجود است.

تعیین تعداد روابط متقارن و پاد متقارن روی مجموعهٔ nعضوی A

اگر R هم خاصیت تقارنی و هم پاد تقارنی داشته باشد، باید زیرمجموعه‌ای از رابطهٔ همانی باشد و هرگاه R روی یک مجموعهٔ n عضوی تعریف شده باشد، رابطهٔ همانی (رابطه‌ای متشکّل از تمام زوجهای مرتّب $A \times A$ که هردو مؤلّفه با هم برابر باشند) ۲^n زیرمجموعه دارد. لذا تعداد چنین روابطی ۲^n می‌باشد.

تعریف: *خاصیت تعدی* (ترایایی، تراگذری): فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد، اگر برای هر $x,y,z \in A$ که $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$، بتوانیم ثابت کنیم $(x,z) \in A$. گوییم R خاصیت تعدی دارد. مثل رابطهٔ $\leq$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی.

تعریف: *رابطهٔ هم‌ارزی*: رابطهٔ هم‌ارزی R روی A، رابطه‌ای است که هم انعکاسی، هم تقارنی و هم تعدی باشد.

تعداد روابط هم ارزی روی مجموعهٔ mعضوی A

در کتاب جبر و احتمال (نظام جدید) نشان داده شد که اگر $P = \{A_۱, A_۲, \dots, A_m\}$ یک افراز برای مجموعهٔ A باشد،

برای پیدا کردن تعداد روابط هم ارزی روی مجموعهٔ m عضوی A، کافی است تعداد افرازهای مجموعه A را به دست آوریم.

تعیین تعداد راه‌های افراز یک مجموعهٔ m عضوی به n زیر مجموعه ناتهی (تعداد راه‌های توزیع m شئ مختلف داخل n ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند).

> هرگاه A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند که $|A| = m \geq n = |B|$، آن‌گاه تعداد توابع پوشای موجود از A به B، برابر است با :
>
> $$\binom{n}{n}n^m - \binom{n}{n-1}(n-1)^m + \binom{n}{n-2}(n-2)^m - \ldots$$
>
> $$+(-1)^{n-1}\binom{n}{1}1^m = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$
>
> $$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$$

(حالت خاص این موضوع، با انتخاب $n = 3$ و $m = 4$ در کتاب ریاضیات گسستهٔ پیش‌دانشگاهی، با استفاده از اصل طرد و شمول اثبات شده است.)

مثال: هرگاه $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$، تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B، با درنظر گرفتن $|A| = m = 4$ و $|B| = n = 3$ برابر است با :

$$\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{3-k}(3-k)^4 = \binom{3}{3}3^4 - \binom{3}{2}2^4 + \binom{3}{1}1^4$$

$$+0 = 36$$

به طور مشابه، برای توزیع ۴ شیء متمایز در ۳ ظرف متفاوت، به‌طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، ۳۶ راه وجود دارد. در بین این ۳۶ توزیع مجموعه‌های ۶ تایی می‌یابیم. به عنوان مثال، یکی از این مجموعه‌های ۶ تایی عبارت است از :

۱) $\{a, b\}_1, \{c\}_2, \{d\}_3$

۲) $\{a, b\}_1, \{d\}_2, \{c\}_3$

۳) $\{c\}_1, \{a, b\}_2, \{d\}_3$

۴) $\{c\}_1, \{d\}_2, \{a, b\}_3$

۵) $\{d\}_1, \{a, b\}_2, \{c\}_3$

۶) $\{d\}_1, \{c\}_2, \{a, b\}_3$

(منظور از $\{c\}_2$ آن است که c در ظرف دوم قرار گرفته است).

حال اگر بین ظرفها تمایز قائل نشویم، این $3! = 6$ توزیع یکسان خواهند بود. بنابراین $\frac{36}{3!} = 6$ راه برای توزیع ۴ شئ متمایز بین ۳ ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، وجود دارد.

> به طور کلی برای $m \geq n$، $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$ روش برای توزیع m شئ مختلف در n ظرف شماره‌دار (که هیچ ۲ شماره‌ای همانند نیست)، بدون آن که ظرفی خالی بماند، وجود دارد.
>
> اگر اعداد را از روی ظروف برداریم، ظروف به ظاهر مشابه خواهند بود و متوجه خواهیم شد هر توزیع داخل ظروف مشابه (غیرخالی)، با !n از چنین توزیعهایی، داخل ظروف شماره‌دار متناظر است. لذا تعداد راه‌های ممکن برای توزیع m شئ متفاوت داخل n ظرف مشابه، به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، عبارت است از $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(n-k)^m$
>
> که با $S(m, n)$ نشان داده می‌شود و عدد استرلینگ از نوع دوم نامیده می‌شود.*

مسألهٔ ۱: به چند روش می‌توان ۴ شئ متمایز d و c و b و a در ۲ ظرف مشابه قرار داد ؛ به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند؟ (به عبارت دیگر، تعداد افرازهای مجموعهٔ ۴ عضوی $\{a, b, c, d\}$ به ۲ زیرمجموعهٔ ناتهی را تعیین کنید).

حل: روش اوّل : استفاده از فرمول عدد استرلینگ، با قراردادن $m = 4$ و $n = 2$.

$$S(4,2) = \frac{1}{2!}\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{2}{2-k}(2-k)^4 = \frac{1}{2!}$$

$$\left[\binom{۲}{۲}۲^۴-\binom{۲}{۱}۱^۴+۰\right]=۷$$

روش دوم: درنظر گرفتن حالتهای مختلف:

الف) یک عضو در یک مجموعه و سه عضو باقیمانده در مجموعهٔ دیگر که این توزیع به $۴=\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۳}$ روش انجام می گیرد و عبارت است از :

۱) $\{a\}, \{b,c,d\}$

۲) $\{b\}, \{a,c,d\}$

۳) $\{c\}, \{a,b,d\}$

۴) $\{d\}, \{a,b,c\}$

ب) دو عضو در یک مجموعه و دو عضو باقیمانده در مجموعهٔ دیگر که این توزیع به $۳=\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}}{۲!}$ روش انجام می گیرد. (به این ترتیب که ابتدا از بین ۴ عضو، ۲ عضو انتخاب کرده و سپس از ۲ عضو باقیمانده، ۲ عضو انتخاب می کنیم. طبق اصل ضرب $\binom{۴}{۲}\binom{۲}{۲}$ راه برای توزیع موجود است. منتهی با توجه به این که به عنوان مثال، افرازهای ۱) $\{a,c\},\{b,d\}$ ۲) $\{b,d\},\{a,c\}$ هر دو یک افراز محسوب می‌شوند، حاصل را بر !۲ (تعداد جایگشتهای ۲ مجموعهٔ دوعضوی تقسیم می کنیم). این سه افراز متمایز، عبارتند از :

۱) $\{a,b\},\{c,d\}$

۲) $\{a,c\},\{b,d\}$

۳) $\{b,c\},\{a,d\}$

با توجه به قسمتهای الف و ب، و اصل جمع، خواهیم داشت :

$$S(۴,۲)=۴+۳=۷$$

نکتهٔ ۱: به طور کلی برای $m \geq n$ ، $\sum_{i=۱}^{n} S(m,i)$ روش برای توزیع m شئ متمایز داخل n ظرف مشابه، به طوری که مجاز به خالی ماندن ظروف باشیم، وجود دارد. به عبارت دیگر، تعداد افرازهای مجموعهٔ m عضوی به n زیرمجموعه نامرتّب (بدون محدودیت) برابر است با $S(m,۱)+S(m,۲)+...+S(m,n)$

مسألهٔ ۲: به چند روش می توان ۴ شئ متمایز d و c و b و a را در ۳ ظرف مشابه قرار داد، به طوری که مجاز به خالی ماندن ظروف باشیم.

حل: ممکن است ۴ شئ در یک ظرف یا در دو ظرف و یا در هر ۳ ظرف قرار بگیرند، لذا طبق اصل جمع :

= تعداد توزیعهای ۴ شئ متمایز در ۳ ظرف مشابه یا کمتر

$$S(۴,۱)+S(۴,۲)+S(۴,۳)\overset{*}{=}۱+۷+۶=۱۴$$

$$\left(S(۴,۳)=\frac{۱}{۳!}\sum_{k=۰}^{۳}(-۱)^k\binom{۳}{۳-k}(۳-k)^۴=\frac{۱}{۳!}\left[\binom{۳}{۳}۳^۴-\binom{۳}{۲}۲^۴+\binom{۳}{۱}۱^۴+\binom{۳}{۰}۰^۴\right]=\frac{۱}{۶}(۸۱-۴۸+۳)=\underset{*}{۶}\right)$$

> **نکتهٔ ۲:** تعداد کل راه‌های افراز یک مجموعهٔ m عضوی و نیز تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعهٔ m عضوی، برابر است با : $S(m,۱)+S(m,۲)+...+S(m,m)=\sum_{i=۱}^{m}S(m,i)$

مسألهٔ ۳: تعداد کل افرازهای مجموعهٔ ۴ عضوی $\{a,b,c,d\}$ را بیابید :

حل :

=تعداد افرازهای مجموعهٔ ۴ عضوی

$$\sum_{i=۱}^{۴}S(۴,i)=S(۴,۱)+S(۴,۲)+S(۴,۳)+S(۴,۴)$$

$$=۱+۷+۶+۱=۱۵$$

و بالاخره مسألهٔ ۴: تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ را بیابید.

حل: تعداد روابط هم‌ارزی روی مجموعهٔ A، برابر است با تعداد افرازهای مختلف مجموعهٔ A، لذا طبق مسألهٔ ۳، جواب مسأله، ۱۵ می‌باشد.

مسألهٔ ۵: هرگاه $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ ، مشخص کنید تعداد

روابط روی A را که :

الف) منعکس هستند. ب) متقارن هستند.

پ) منعکس و متقارن هستند. ت) منعکس و شامل(۲و۱)هستند.

ث)متقارن و شامل(۲و۱)هستند. ج) پادمتقارن هستند.

چ) متقارن و پادمتقارن هستند.

ح) منعکس،متقارن و پادمتقارن هستند.

خ) منعکس، متقارن و متعدی (هم ارزی) هستند.

د) منعکس و متقارن، ولی غیر متعدی هستند.

ذ) هم ارزی هستند و دقیقاً ۲ کلاس هم‌ارزی را مشخص می کنند.

ر) هم‌ارزی هستند و $1 \in [2]$. ز) هم‌ارزی هستند و 1 و $2 \in [4]$.

حل:

الف) $2^{6^2-6} = 2^{30}$

ب) $2^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^6 \times 2^{15} = 2^{21}$

پ) $1^n \times 2^{\frac{n^2-n}{2}} = 2^{15}$

ت) $A \times A = \Big\{\underbrace{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)}_{\text{(تعداد: ۶) } 1\times1\times\dots\times1 \text{ انتخاب}},\underbrace{(1,2)}_{\text{۱ انتخاب}},\underbrace{(2,1),(1,3),(3,1),\dots,(5,6),(6,5)}_{\text{(تعداد: } 29 = 1 - 6 - 6^2\text{) } 2\times2\times2\times\dots\times2\times2 \text{ انتخاب}}\Big\}$

تعداد کل اعضای $A \times A$ — زوجهای مرتّب با دو مؤلفهٔ مساوی — (۲و۱)

جواب : $1^6 \times 1 \times 2^{29} = 2^{29}$

ث) $A \times A = \Big\{\underbrace{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)}_{\text{(تعداد: ۶) } 2\times2\times\dots\times2 \text{ انتخاب}},\underbrace{((1,2),(2,1))}_{\text{۱ انتخاب}},\underbrace{((1,3),(3,1)),\dots,((5,6),(6,5))}_{\text{(تعداد: } 14 = 1 - \frac{6^2-6}{2}\text{) } 2\times\dots\times2 \text{ انتخاب}}\Big\}$

تعداد زوجهای مرتّبی که هر مؤلفهٔ آنها نیز یک زوج مرتّب با مؤلفه‌های متفاوت است — $((1,2),(2,1))$

جواب : $2^6 \times 1 \times 2^{14} = 2^{20}$

ج) $A \times A = \Big\{\underbrace{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)}_{\text{(تعداد: ۶) } 2\times2\times\dots\times2 \text{ انتخاب}},$

$\underbrace{((1,2),(2,1)),((1,3),(3,1)),\dots,((5,6),(6,5))}_{\text{(تعداد: } 15 = \frac{6^2-6}{2}\text{) } \to 3\times3\times\dots\times3\times3 \text{ انتخاب}}\Big\}$

جواب: $2^6 \times 3^{15}$

چ) جواب : 2^6

ح) جواب: ۱ عبارت است از: $\{(1,1),(2,2),\dots,(6,6)\}$

خ) $\text{تعداد} = \sum_{i=1}^{6} S(6,i) = S(6,1)+S(6,2)+S(6,3)$

$+S(6,4)+S(6,5)+S(6,6)$

$= 1+31+90+65+15+1 = 203$ رابطهٔ هم‌ارزی

روشهای محاسبهٔ $S(6,i)$، $1 \le i \le 6$:روش اوّل (با استفاده از فرمول عدد استرلینگ) :

به عنوان مثال، روش محاسبهٔ $S(6,3)$ با استفاده از فرمول عدد استرلینگ نوشته می‌شود :

$S(6,3) = \frac{1}{3!}\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{3-k}(3-k)^6$ یعنی تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۳ زیرمجموعهٔ ناتهی ۹۰ می‌باشد

$$= \frac{1}{3!}\left(3^6 - \binom{3}{2}2^6 + \binom{3}{1}1^6 + 0\right) = \frac{729-192+3}{6} = 90$$

روش دوم (بدون استفاده ازفرمول عدد استرلینگ) :

$S(6,1): \{\square\ \square\ \square\ \square\ \square\ \square\} \Rightarrow S(6,1) = 1$

$S(6,2)$:

الف) $\{\square\ \square\ \square\ \square\ \square\}\{\square\} \Rightarrow 6 = \binom{6}{5}\binom{1}{1}$ = تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۲ زیر مجموعهٔ ۵ عضوی و یک عضوی

ب) $\{\square\ \square\ \square\ \square\}\{\square\ \square\} \Rightarrow 15 = \binom{6}{4}\binom{2}{2}$ = تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۲ زیر مجموعهٔ ۴ عضوی و دو عضوی

ج) $\{\square\ \square\ \square\}\{\square\ \square\ \square\} \Rightarrow 10 = \frac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!}$ = تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۲ زیر مجموعهٔ ۳ عضوی

یعنی تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۲ زیرمجموعهٔ ناتهی، ۳۱ می‌باشد. $S(6,2) = 6+15+10 = 31 \xRightarrow{\text{طبق اصل جمع}}$ الف و ب و ج

$S(6,3)$:

- $\{\square\ \square\ \square\ \square\}\{\square\}\{\square\} \Rightarrow$ تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۱ زیرمجموعهٔ ۴ عضوی و ۲ زیرمجموعهٔ یک عضوی $= \dfrac{\binom{6}{4}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!} = 15$

- $\{\square\ \square\ \square\}\{\square\ \square\}\{\square\} \Rightarrow$ تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۱ زیر مجموعهٔ ۳ عضوی و ۱ زیر مجموعهٔ ۲عضوی و ۱ زیرمجموعهٔ یک عضوی $= \binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 60$

- $\{\square\ \square\}\{\square\ \square\}\{\square\ \square\} \Rightarrow$ تعداد افرازهای مجموعهٔ ۶ عضوی، به ۳ زیر مجموعهٔ ۲ عضوی $= \dfrac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} = 15$

د) می‌دانیم: $n(A\cap B\cap C') = n(A\cap B) - n(A\cap B\cap C)$

$\xrightarrow{\text{طبق تستهای [illegible]}}$ جواب: $2^{15} - 203 = 32565$

ذ) جواب $= S(6,2) = 31$

ر) برای تعیین تعداد افرازهای A، به طوری که اعداد ۱ و ۲ در یک کلاس هم‌ارزی (زیرمجموعهٔ A) موجود باشند، اعداد ۱ و ۲ را با هم یکی درنظر می‌گیریم و تعداد افرازهای متمایز یک مجموعهٔ ۵ عضوی را می‌یابیم که عبارت است از :

$$\sum_{i=1}^{5} S(5,i) = S(5,1)+S(5,2)+S(5,3)+S(5,4)+S(5,5) = 1+15+25+10+1 = 52$$

ز) کافی است اعداد ۱، ۲ و ۴ را یک عضو در نظر گرفته و تعداد افرازهای متمایز یک مجموعهٔ ۴عضوی را بیابیم که برابر است با :

$$\sum_{i=1}^{4} S(4,i) = S(4,1)+S(4,2)+S(4,3)+S(4,4) =$$

$$1 + 7 + 6 + 1 = 15$$

این۱۵ افراز را می‌توان با روش زیر نیز به‌دست آورد.

۱) افرازهایی از A به صورت $\{\overset{?}{\square},\overset{?}{\square},\overset{?}{\square}\}$ و $\{1,2,4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $1 = \binom{3}{3}$.

۲) افرازهایی از A به صورت $\{\overset{?}{\square},\overset{?}{\square}\}$ و $\{\overset{?}{\square}\}$ و $\{1,2,4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $3 = \binom{3}{1}\binom{2}{2}$.

۳) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{1,2,4\}$.

تعداد چنین افرازهایی برابر است با $1 = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{3!}$.

۴) افرازهایی از A به صورت $\{\square,\square\}$ و $\{1,2,4,\square\}$. تعداد چنین افرازهایی برابر است با $3 = \binom{3}{1}\binom{2}{1}$.

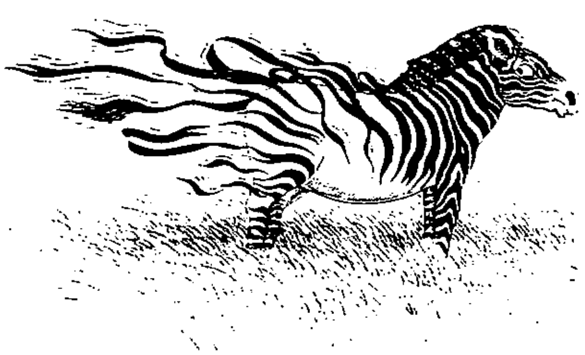
۵) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{\square\}$ و $\{1,2,4,\square\}$.

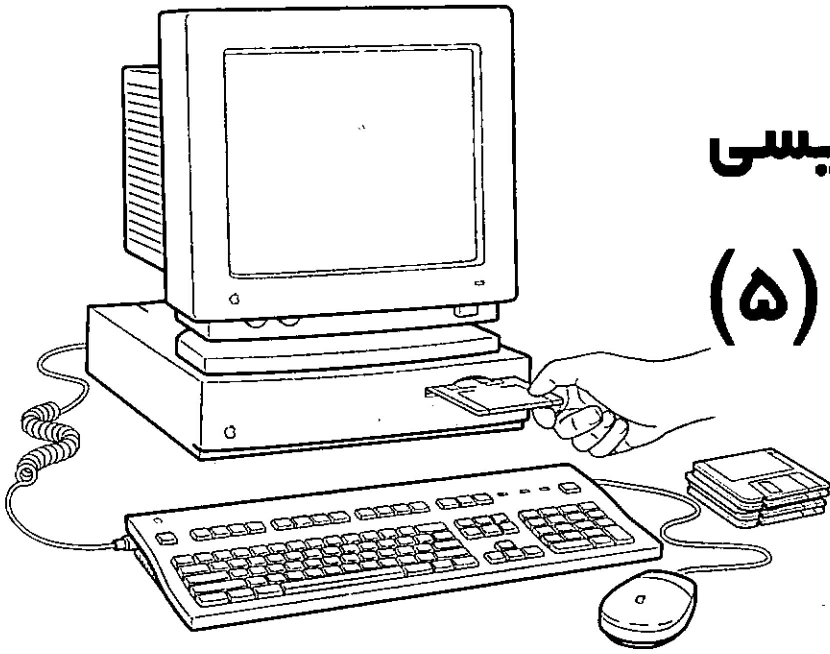
تعداد آنها برابر است با $3 = \dfrac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{2!}$.

۶) افرازهایی از A به صورت $\{\square\}$ و $\{1,2,4,\square,\square\}$، تعداد آنها برابر است با $3 = \binom{3}{2}\binom{1}{1}$.

۷) افرازهایی از A به صورت $\{1,2,4,\square,\square,\square\}$. تعداد آنها $1 = \binom{3}{3}$ می‌باشد که همان مجموعهٔ A است.

جواب مسأله: $1+3+1+3+3+3+1 = 15$





آموزش برنامه نویسی به زبان پاسکال (۵)

● محمد رحیم

شکل‌دهی خروجی[1] در دستور چاپ

در شمارهٔ ۲۶ مجلهٔ برهان، به دستورهای write و writeln اشاره کردیم. در رابطه با این دو دستور، نکاتی وجود دارد. مترجم[2] زبان پاسکال به‌طور پیش‌فرض، اعداد صحیح و اعشاری و نیز کارکترها و رشته‌ها[3] را از جایی که مکان‌نما قرار دارد، از سمت چپ به راست می‌نویسد و به‌طور خاص، اعداد اعشاری را به‌طور پیش‌فرض، به صورت توانی از ۱۰ (به‌طور مثال، 5000000E+02) نمایش می‌دهد، که معمولاً کاربر نمی‌پسندد. از طرفی، در بعضی از برنامه‌ها کاربران نیاز دارند تا نتایج حاصل از برنامهٔ آنها در قالب سطر و ستون و زیر هم چاپ شوند. در مترجم زبان پاسکال، تسهیلاتی در این زمینه وجود دارد که با استفاده از آنها می‌توان خروجی را مطابق با خواست خود شکل‌دهی کنیم. به‌این منظور، می‌بایست تعداد فضای لازم برای نمایش خروجی، روی صفحهٔ نمایش مشخص شود. این عمل بدین‌صورت انجام می‌شود که پس از نام متغیر موردنظر، علامت : را می‌آوریم و سپس تعداد فضای لازم را مشخص می‌کنیم ؛ یعنی :

تعداد فضای لازم : متغیر یا عبارت رشته‌ای و کارکتری

تعداد فضای لازم : متغیر یا عبارت عددی صحیح

تعداد فضای اعشاری : تعداد فضای لازم : متغیر یا عبارت عددی اعشاری

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌شود، در مورد اعداد اعشاری، ابتدا باید تعداد فضای لازم برای کلّ عدد اعشاری (شامل بخش صحیح، علامت اعشار و بخش اعشاری) را مشخص کرد و بعد از آن باید تعداد فضای لازم برای بخش اعشاری مشخص شود.

به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۱:

```
var
   A,B,C: Integer;
   Name : string;
begin
   A:=1;
   B:=2;
   C:=3;
   Name:= 'Borhan';
   writeln (A,B,C);
   writeln (A:2,B:2,C:2);
   writeln ('This is', Name);
   writeln ('This is', Name: 7);
end.
```

خروجی برنامه چنین است :

```
123
1 2 3
This is Borhan
This is Borhan
```

مثال ۲:

```
var
   A,B,C: Integer;
begin
   A: = 10;
   B: = 2;
   C: = 100;
   writeln (' =⇒',A,B,C);
   writeln (' =⇒',A:2 ,B:2,C:2);
   writeln (' =⇒',A:3,B:3,C:3);
   writeln (' =⇒',A,B:2,C:4);
end.
```

خروجی برنامه چنین است:

```
=⇒102100
=⇒10 2100
=⇒10  2100
=⇒10 2100
```

مثال ۳:

```
var
   x: Real;
begin
   x: = 421.53;
   writeln (x);
   writeln (x:8);
end.
```

خروجی برنامه چنین است :

```
4.2153000000E+02
4.2E+02
```

مثال۴:

```
var
   x:real;
begin
   x:=421.53;
   writeln (x:6:2);
   writeln (x:8:2);
   writeln (x:8:4);
end.
```

خروجی برنامه چنین است :

```
421.53
  421.53
421.5300
```

به نکات زیر توجه شود :

۱ـ اگر فضای تخصیص داده شده، از تعداد فضای عبارت یا متغیر کمتر باشد، مترجم پاسکال، فضای تخصیص داده شده را درنظر نمی‌گیرد و هنگام چاپ و نمایش، تعداد فضای عبارت یا متغیر را ملاک عمل خود قرار می‌دهد.

۲ـ همان‌طور که در مثالهای فوق مشخص است، مترجم پاسکال به‌طور پیش فرض، به صورت «تنظیم از چپ»[4] عمل می کند ؛ یعنی عبارت مورد نظر را در فضای مربوطه از سمت چپ می‌نویسد. با قرار دادن علامت منفی، جلو تعداد فضای لازم، مترجم پاسکال به صورت «تنظیم از راست»[5] عمل خواهد کرد.

نکات فوق در مثال زیر گنجانیده شده است :

مثال ۵:

```
begin
   writeln ('=⇒' ,12:5);
   writeln ('=⇒' ,1234567:5);
   writeln ('=⇒' ,12: –5);
   writeln ('=⇒' ,'Rahim':7);
   writeln ('=⇒' ,'Rahim': –7);
   writeln ('=⇒' ,1.5:5:0);
   writeln ('=⇒' ,1.5:5:1);
   writeln ('=⇒' ,1.5: –5:0);
end.
```

خروجی برنامه چنین است :

```
=⇒ 12
=⇒1234567
=⇒12
=⇒ Rahim
=⇒Rahim
=⇒
```

```
==⇒ 1.5
==⇒
```

ساختارهای کنترلی[۶]

تا این‌جا با دستورهای ورودی و خروجی آشنا شدیم. در این بخش و نیز در ادامهٔ آن، شما را با ساختارهای کنترلی آشنا می‌کنیم.

دستور IF

این دستور، هنگامی به‌کار می‌رود که بخواهیم تعدادی از دستورهای برنامه را در صورت برقراری یک یا چند شرط، اجرا کنیم. دستور IF چنین است : if شرط Then دستور;

در واقع، دستور مورد نظر، هنگامی اجرا می‌شود که شرط موردنظر برقرار باشد ؛ در غیر این صورت این دستور، اجرا نشده و مترجم سراغ دستورهای بعدی برنامه می‌رود.

مثال ۱:

```
if x<10 Then
    writeln ('x=', x);
```

مثال ۲:

```
if (x<10) and (x>2) Then
    writeln ('2<x<10' );
```

همان‌طوری‌که در مثال ۲ دیده می‌شود، در صورتی‌که بخواهیم می‌توانیم از چندین شرط استفاده کنیم. در چنین حالتی، اگر کلّ عبارت شرطی برابر TRUE باشد، دستور موردنظر اجرا می‌شود. و در مثال ۲، اگر 2<x<10 باشد، این عبارت برابر TRUE خواهد شد.

در غیراین‌صورت FALSE می‌شود. برای ساختن یک عبارت شرطی، می‌توان از «عملگر»[۷] های نسبی[۸] یا منطقی[۹] استفاده کرد. این عملگرها در شماره‌های قبل، توضیح داده شده‌اند. نکتهٔ مهمی را که باید به آن اشاره کرد، این است که دستور IF فقط یک دستور را تحت پوشش قرار می‌دهد ؛ در صورتی که بخواهیم دستورهای بیشتری تحت پوشش قرار بگیرد، باید از یک بلوک فرعی استفاده کرد. به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال ۳:

```
x: = 4;
if x>6 Then
    writeln ('x=',x);
    writeln ('x>'2);
```

اگر قطعه برنامهٔ فوق را اجرا کنیم، نتیجه چنین است : x>2

در مثال فوق، مشاهده می‌شود که برقراری یا عدم برقراری شرط در دستور if تأثیری در اجرای دومین دستور writeln ندارد ؛ چون خارج از دستور if است. برای آن که هر دو دستور تحت شرط دستور if قرار گیرند، باید از بلوک فرعی استفاده کرد. به مثال زیر توجه کنید.

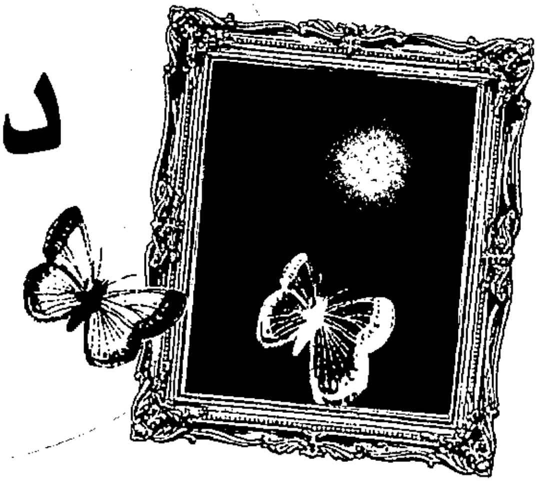
مثال ۴:

```
x: = 10;
If x>6 Then
begin
    writeln ('x =',x);
    writeln ('x >'6);
end.
```

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1- Format
2- Compiler
3- String
4- Left Justification
5 - Right Justification
6- Control Structure
7- Operator
8- Relational
9- Logical

در آینه



عالمی داشت...

• علی فرخ مهر

انشانویسِ کلاسها بودم. در آبادانِ داغ و پرشور، با آن مدرسه‌های خوب و منظّم، فقط به خاطرِ زنگهای انشا درخشندگی داشتم و در زنگهای ریاضی، دست به عصا و آهسته و پیوسته و گاهی هر دو پا در گل!

معلمان ریاضی که به خود دیدم، آقایان: ریاحی، بدیعی، مریمی، دیلمقانی، مختاری درخشان و عمیدی بودند. آقای هاشمی را هم فراموش نکنم که لاغر اندام بود و سفیدچهره، و موهای نرم قهوه‌ای شانه خورده. آذری و خیلی جدّی! عبوس بودن و نظم او، کاری کرد که این من! از درس جبر بگیرم نمرهٔ نوزده! فقط به خاطرِ ترس از آبرو! فقط به خاطرِ حفظ آبرومندی!

کسی که در زنگهای انشا بچه‌ها برای او کف می‌زدند، البته که نباید در زنگِ جبر یا مثلثات، خراب می‌کرد!

کسی که بارها موردِ تشویق آقایان اسدی لاری[1]، سیّدرضا طباطبایی، فیلی شیرازی و جوان قرار می‌گرفت، نمی‌باید در زنگهای ریاضی، آبروریزی می‌کرد! درحدّ توان سعی خودم را می‌کردم. امّا ادبیات و زنگهای انشا، عالمی داشت؛ زیبا، دلربا و مثلِ باغ هزار نقش!

آشنایی با آقای علی عمیدی[2] و آقای علی مختاری درخشان، کاری کرد که بدانم خیلی از معلمان ریاضی، «ادبیات» را هم دوست دارند و با آن کلامِ خوش و لحنِ زیبا و ذوق لطیف، می‌توانند ادبیات را هم خیلی خوب و هنرمندانه درس بدهند!

بعدها در موسمِ دانشگاه، دیدار و آشنایی با استاد پرویز شهریاری، به من ثابت کرد که معلمان ریاضی آشنا با دنیای وسیع و لطیف ادبیات، خیلی بهتر می‌توانند موفّق شوند و در دلها رخنه و نفوذ کنند!

لحظه‌های درس و کلاسِ استاد پرویز شهریاری، عالمی داشت.

می‌خواهم بروم سراغ معلمانِ ریاضی که به خود دیده‌ام؛ و امروز در گوشه و کنارِ ایران، کار می‌کنند و زحمت می‌کشند، و خدمت به بچه‌ها.

از آن معلم خوبِ همدانی که به ما مرابحه و مشارکت و تنزیل و رفع و تجنیس درس می‌داد، تا آن معلمِ زحمتکش اما تندخوی آذربایجانی که گاهی بعضی از بچه‌ها را می‌بست به مشت و لگد! با آن چشمهای زاغ و چهرهٔ گلگون و پُرخون! به لطف خدا می‌خواهم طوری بگویم و به گونه‌ای که بچه‌ها قدر معلمانِ خوبِ خود را بدانند و معلمان عزیز و گرانمایهٔ ریاضی، بر ارزشهای خود واقفتر شوند. روشمندی و توانمندی معلم در تدریس یک طرف، و سوی دیگر، هنر رخنه و نفوذ او به دلها به خاطرِ سازندگی و پرورش آدمهای نیکو.

عالمی دارد سرکشی به دنیای بچه‌های کلاس! عالمی دارد بررسی و وارسی ریشه‌ها. عالمی دارد تماشای رخسارِ دانش‌آموز

و معلم، در آینه! آن هم دانش‌آموزِ ریاضی‌خوان و معلمِ ریاضیدان! آن هم گفت‌وگو در بابِ معلمانِ ریاضی که در طبقه‌بندی ذهنِ بچه‌ها صدرنشین‌اند! که دلَم می‌خواهد صدر نشینند و «قدر» بینند. که دلمان می‌خواهد، فکر بچه‌ها را به «تعادل»، به «پویندگی» به «هدفداری» و «آزادگی» عادت دهند.

مبنا و الفبای زندگی را معلمان ریاضی، خیلی خوب و دقیق می‌دانند و می‌شناسند. ذهنِ محاسبه‌گر و نکته‌سنج آنها، مو را از ماست بیرون می‌کشد. بابی که به بهانهٔ در آینه ـ در برهان ـ گشوده خواهد شد، محض خاطر گستردن سفرهٔ پند و اندرز نیست؛ به‌خاطر نگاه به آینه است برای خود شکستن و نه آینه را شکستن!

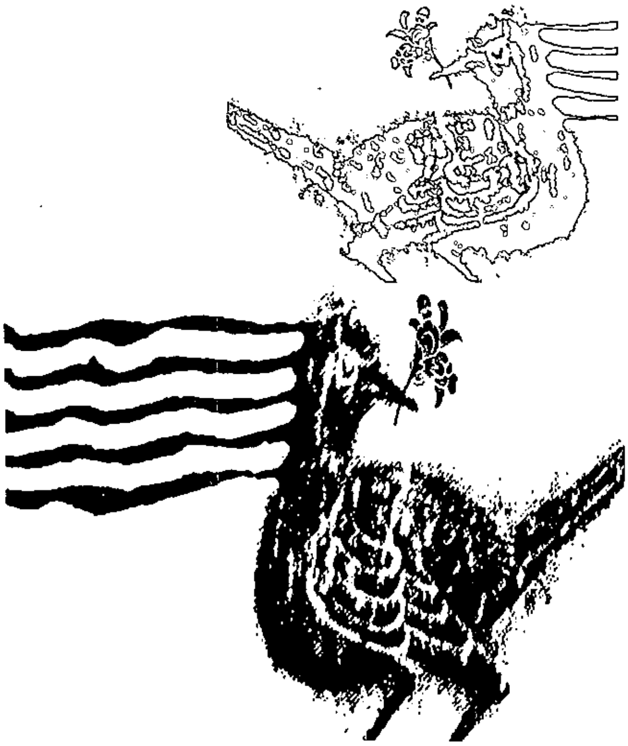
هرگز نشود به‌وصل مغرور هر دیده که در فراق بیناست*

یادداشتها:

۱. زنده یاد دکتر حسن اسدی‌لاری که در زمان وزارت آقای دکتر اکرمی، معاونت پارلمانی وزارت آموزش و پرورش را عهده‌دار بود.

۲. دکتر علی عمیدی، که آن سالهای دور،از معلمان موفق و سرشناس ریاضی در آبادان بود.

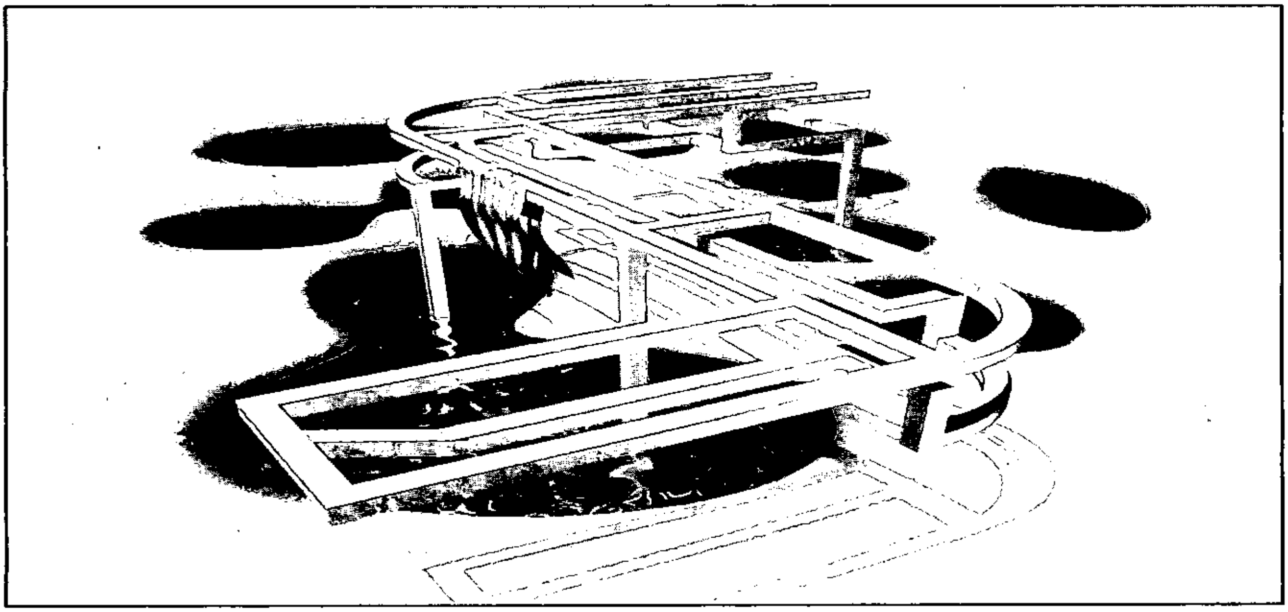
* سنایی





«ابن بنّا»ی مراکشی، ریاضیدان و ستاره‌شناس مراکشی، متولد سال ۶۵۴ هجری در مراکش. وی پس از فراگرفتن صرف و نحو، حدیث، فقه و ریاضیات به تدریس ریاضیات و هیئت پرداخت. ابن بنّا دانشمندی جامع بود و در رشته‌های گوناگون دانش دست داشت. در بیان علوم به زبان ساده مهارت داشت و از اَجِلّهٔ محاسبان با ارقام بود. دانشمندی بود باوقار، نیک‌نفس و پاکیزه‌خو.

ابن بنّا در ۵ رجب ۷۲۱ هجری در مراکش درگذشت. پس از مرگ وی، زمانی نگذشت که افسانه‌هایی درباره‌اش ساخته شد. مردم او را به منزلهٔ ساحری شمردند که با به‌کار بردن معلومات خود در سحر و ساحری، می‌توانسته اعجاز کند. اثر مهم وی، تلخیص «اعمالُ الحساب» ازمشهورترین کتابهای ریاضی در کشورهای اسلامی است که بیش از دو قرن مورد استفادهٔ دانشجویان این علم بوده است.



مکان هندسی و روش دو مکان هندسی در حلّ مسائل ترسیمی

● علیرضا عین‌اللهی

در این مقاله، به طور مختصر تصمیم داریم شما را با روشی از روشهای حلّ مسأله آشنا کنیم، که توسط آن، شما می‌توانید بسیاری از مسائل ترسیمی هندسهٔ خود را با کمی دقت و موشکافی، حل کنید.

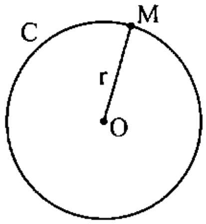
یکی از مفاهیمی که در هندسهٔ دورهٔ متوسطه با آن آشنا می‌شوید، مفهوم مکان‌هندسی است. فرض کنید A مجموعه‌ای از نقاط باشد و P یک ویژگی و خاصیت معین باشد. مجموعهٔ A را یک مکان‌هندسی می‌گوییم؛ هرگاه دو شرط ذیل برقرار باشد:

I . هر نقطه در A خاصیت P دارد.

II . هر نقطه که خاصیت P دارد، عضو مجموعهٔ A است.

برای درک بهتر تعریف فوق، به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱): فرض کنید Cمجموعهٔ نقاط روی دایرهٔ شکل (۱) باشد و P این ویژگی باشد که «فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه M از نقطهٔ ثابت O برابر عدد ثابت r است.» با شناختی که شما عزیزان از مفهوم دایره دارید، می‌دانید که:



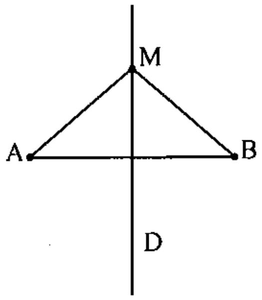
شکل۱

I . فاصلهٔ هر نقطهٔ M از دایرهٔ شکل (۱) تا نقطهٔ O (مرکز دایره) برابر مقدار ثابت r است ؛ یعنی هر نقطه از مجموعهٔ C دارای خاصیت P است.

II. اگر فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ O برابر مقدار ثابت r باشد، در این صورت، M روی دایرهٔ شکل (۱) قرار دارد ؛ یعنی هر نقطه که خاصیت P دارد، عضو مجموعهٔ C است.

بنابراین، می‌توانید بگویید مجموعهٔ C، یعنی **دایره‌ای به مرکز O و شعاع r**، یک مکان‌هندسی می‌باشد. ▲

مثال (۲): به احتمال زیاد همهٔ شما با مفهوم عمودمنصف یک پاره‌خط آشنا هستید. حال فرض کنید که D مجموعهٔ نقاط خط مشخص شده در شکل (۲) باشد و P این خاصیت باشد که «فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر است.» در این صورت شما می‌دانید که :



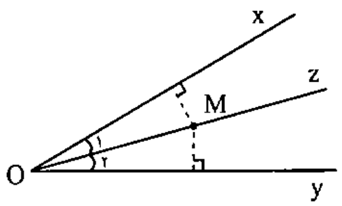
شکل۲

I. هر نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط AB از دو سر این پاره‌خط، به یک فاصله‌اند ؛ یعنی هر نقطه در مجموعهٔ D خاصیت P دارد.

II. هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن قرار می‌گیرد ؛ یعنی هر نقطه با خاصیت P در مجموعهٔ D قرار دارد.

پس بنابه تعریف مکان هندسی، مجموعهٔ D، یعنی **عمودمنصف پاره‌خط AB**، یک مکان هندسی است. ▲

مثال (۳): در شکل (۳) نیمخط Oz نیمساز زاویهٔ xOyاست.



شکل۳

فرض کنید H مجموعهٔ نقاط روی این نیمخط باشد و P این خاصیت باشد که «فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نیمخط ثابت Ox و Oy برابرند.» با توجه به شناختی که شما دانش‌آموزان عزیز از خواص مربوط به نیمساز یک زاویه دارید، دیده می‌شود :

I . فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز Oz از دو نیمخط Ox و Oy برابرند ؛ یعنی هر نقطه از مجموعهٔ H خاصیت P دارد.

II. هر نقطه که فاصله‌اش از دو نیمخط Ox و Oy برابر باشد، روی نیمساز Oz قرار دارد ؛ یعنی هر نقطه با خاصیت P در مجموعهٔ H قرار دارد.

بنابراین، مجموعهٔ H، یعنی **نیمساز زاویهٔ xOy**، یک مکان هندسی است. ▲

برای این‌که با مفهوم مکان هندسی، بیشتر و بهتر آشنا شوید، مکانهای هندسی خواسته شده در تمرینهای زیر را به دست آورید و مشابه آنچه در مثالهای بالا ذکر شد، درستی گفتهٔ خود را ثابت کنید :

تمرین (۱): مکان هندسی نقاطی که از یک خط مفروض و ثابت، به فاصلهٔ مفروض و ثابت باشند.

تمرین (۲): مکان هندسی نقاطی که از دو خط موازی مفروض و ثابت، به یک فاصله‌اند.

تمرین (۳): از مثلثی، دو رأس A و B و زاویهٔ α، روبه‌رو به ضلع AB، معلوم می‌باشد. مکان هندسی رأس سوّم این مثلث را پیدا کنید.

اوّلین قدم در ورود به یک مسأله، «فهمیدن مسأله» است. برای فهم یک مسأله، کافی است سه قسمت زیر از آن بدقت مشخص شود :

I. مجهول یا مجهولها (آنچه را که باید در مسأله پیدا کنید.)

II. داده یا داده‌ها (آنچه که در مسأله برای شما مشخص است.)

III. شرط (آنچه که مجهول را با داده‌ها، به‌طور مشخص، مربوط می‌سازد.) برای درک بهتر مطالب اخیر، به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال (۴): مسألهٔ زیر را درنظر بگیرید :

«دایره‌ای بر مثلث ABC مفروض، محیط کنید.»

I. مجهول چیست؟

جواب: یک دایره است.

II. داده‌ها کدامند؟

جواب: مثلث مفروض ABC.

III. شرط چیست؟

جواب: دایرهٔ خواسته شده، بر مثلث معلوم ABC محیط است.▲

مثال (۵): به مسألهٔ زیر توجه کنید :

«مثلثی با معلوم بودن سه ضلع آن، رسم کنید.»

I. مجهول چیست؟

جواب: یک مثلث است.

II. داده‌ها کدامند؟

جواب: سه پاره‌خط.

III. شرط چیست؟

جواب: پاره‌خطهای داده شده، اضلاع مثلث خواسته شده است. ▲

مثال (۶): مثلثی با معلوم بودن دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از این اضلاع را رسم کنید.

I. مجهول چیست؟

جواب: یک مثلث است.

II. داده‌ها کدامند؟

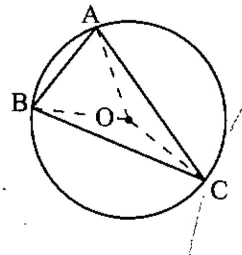
جواب: سه پاره‌خط.

III. شرط چیست؟

جواب: دو پاره‌خط از سه پاره‌خط داده شده، اضلاع و دیگری میانهٔ مثلث خواسته شده است. ▲

دومین قدم در حلّ مسأله، به روش دو مکان هندسی، تبدیل مسألهٔ داده شده به یک مسألهٔ هم‌ارز با آن می‌باشد، که در آن، **مجهول تنها یافتن یک نقطه است و شرط از دو جزء تشکیل یافته است.** به عبارت دیگر، باید مسأله‌تان را چنان تغییر دهید که اوّل، در اصل مسأله خدشه‌ای وارد نشود، دوم، در مجهول فقط یافتن یک نقطه مطرح شود و سوّم، شرط به دو قسمت مجزّا، که ارتباط بین داده‌های مختلف و مجهول است، تفکیک شود. به مثالهای زیر توجّه کنید :

مثال (۷): یک بار دیگر به مثال (۴) توجه کنید. همان‌طور که در شکل (۴) می‌بینید، اگر O مرکز دایرهٔ خواسته شده باشد، در



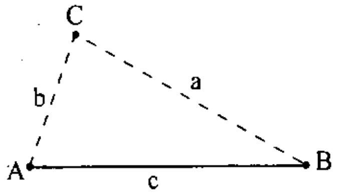
شکل۴

این صورت، فاصلهٔ O از رئوس مثلث برابر است. بنابراین، مسأله را می‌توانید به مسأله‌ای تبدیل کنید که در آن :

مجهول: یافتن نقطهٔ O است.

شرط: ۱) AO = BO و ۲) AO = CO . ▲

مثال (۸): در مثال (۵) اگر یکی از اضلاع معلوم را مطابق شکل (۵) رسم کنید، دو رأس مثلث خواسته شده، مشخص می‌شود



شکل۵

(مانند رئوس A و B)، سپس مسأله تبدیل به یافتن رأس C مثلث می‌شود ؛ اما چون دو ضلع دیگر مثلث نیز معلوم است، پس فاصلهٔ C تا A و همچنین فاصلهٔ C تا B مشخص می‌باشد. بنابراین داریم :

مجهول : یافتن نقطهٔ C است.

شرط: ۱) فاصلهٔ C از A برابر مقدار معلوم b است.
۲) فاصلهٔ C از B برابر مقدار معلوم a است. ▲

مثال (۹): آیا می‌توانید دومین قدم روش دو مکان‌هندسی را برای مثال (۶) بیان کنید؟

آخرین قدم برای حلّ مسأله به روش دو مکان هندسی چیست؟ اگر کمی به اجزای شرط در دو مثال (۷) و (۸) دقت کنید، خواهید دید که هر جزء یک مکان هندسی برای نقطه‌ای می‌باشد که در مجهول خواسته شده است، لذا نقطهٔ مجهول در مسأله محلّ برخورد این دو مکان هندسی در شرط می‌باشد. برای درک بهتر آن، به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال (۱۰): دایره‌ای بر مثلث ABC مفروض، محیط کنید.

حل: بر طبق توضیحات مثال (۴) داریم :

مجهول: یک دایره.

داده‌ها: مثلث مفروض ABC.

شرط: دایرهٔ خواسته شده، بر مثلث معلوم ABC محیط است.

از این‌جا مطابق با توضیحات مثال (۷) داریم :

مجهول: یک نقطهٔ O.

شرط: (۱ AO = BO .
(۲ AO = CO .

از جزء (۱) شرط دیده می‌شود که نقطهٔ O روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. همچنین از جزء (۲) شرط دیده می‌شود که نقطهٔ O روی عمود منصّف پاره‌خط AC است. (مثال (۲) را ببینید.)

بنابراین برای پایان حلّ آن، کافی است عمودمنصّف پاره‌خطهای AB و AC را رسم کنید؛ محلّ برخورد این دو عمودمنصّف، نقطهٔ O را می‌دهد. ▲

مثال (۱۱): مثلثی با معلوم بودن سه ضلع آن، رسم کنید.

حل: در مثال (۵) دیدید که:

مجهول: یک مثلث.

داده‌ها: سه پاره‌خط.

شرط: پاره‌خطهای داده شده، اضلاع مثلث خواسته شده است. بر مبنای توضیحات مثال (۸) دیدید که:

مجهول: یک نقطهٔ C .

شرط:
(۱) AC = b .
(۲) BC = a .

از جزء (۱) شرط دیده می‌شود که C روی دایره‌ای به مرکز A به شعاع b است. همچنین از جزء (۲) شرط دیده می‌شود که C روی دایره‌ای به مرکز B به شعاع a است (مثال (۱) را ببینید).

در نتیجه، برای کامل شدن حل آن، کافی است دو دایره، یکی به مرکز A به شعاع b و دیگری به مرکز B به شعاع a رسم کنید. محلّ برخورد این دو دایره، نقطهٔ C را می‌دهد. ▲

مثال (۱۲): مثلثی با معلوم بودن دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از این اضلاع را رسم کنید.

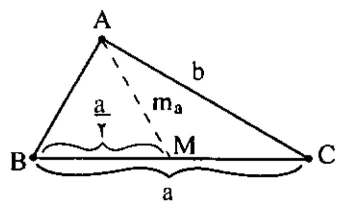
حل: بر اساس مثال (۶) داریم:

مجهول: یک مثلث.

داده‌ها: سه پاره‌خط.

شرط: دو پاره‌خط از سه پاره‌خط داده شده اضلاع و دیگری میانهٔ مثلث خواسته شده است.

مطابق شکل، اگر دو ضلع a و b و میانهٔ m_a معلوم باشد، در این صورت داریم:



مجهول: یک نقطهٔ A . (چرا؟)

شرط:
(۱) فاصلهٔ A تا نقطهٔ معلوم C برابر b است؛ یعنی AC = b .
(۲) فاصلهٔ A تا نقطهٔ معلوم M برابر m_a است؛ یعنی AM = a . (چرا؟)

پس نقطهٔ A محلّ برخورد دو مکان هندسی است، که این مکانها بترتیب، دو دایره یکی به مرکز C و شعاع b، و دیگری به مرکز M و شعاع m_a می‌باشد. (چرا؟) ▲

در انتها با حل تمرینهای ذیل، شما می‌توانید مهارت لازم در حلّ مسائل ترسیمی هندسه به روش دو مکان هندسی را کسب نمایید.

تمرین (۱): با فرض معلوم بودن a (ضلع مثلث)، h_a (ارتفاع نظیر ضلع a) و m_a (میانهٔ وارد بر ضلع a)، مثلث را رسم کنید.

تمرین (۲): با فرض معلوم بودن a (ضلع مثلث)، h_a (ارتفاع نظیر ضلع a) و α (زاویهٔ روبه‌رو به ضلع a)، مثلث را رسم کنید.

تمرین (۳): با معلوم بودن سه خط راست، دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط مماس باشد و مرکزش روی خط سوم قرار گیرد.

تمرین (۴): در داخل مثلث، نقطه‌ای پیدا کنید که از آن‌جا، هر سه ضلع مثلث، به یک زاویه دیده شود.

● منبع برای مطالعهٔ بیشتر

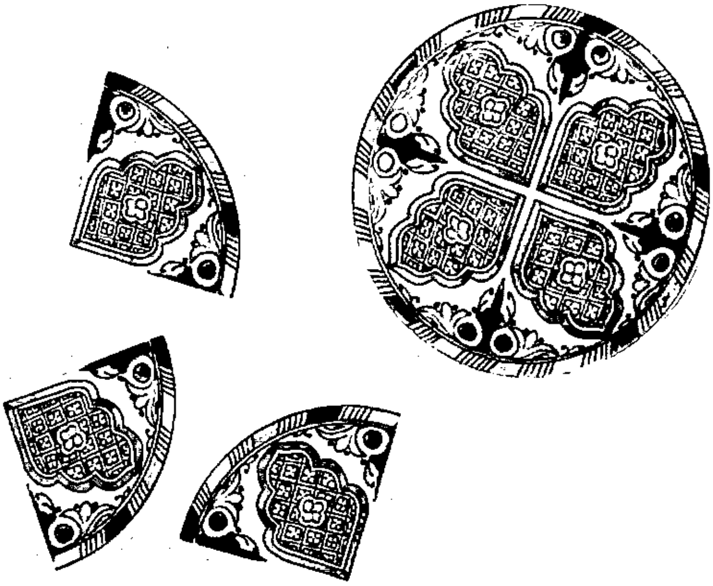
خلاقیت ریاضی: تألیف جورج پولیا، ترجمهٔ پرویز شهریاری، انتشارات فاطمی.



جزء صحیح

(قسمت چهارم)

● علی حسن زاده ماکویی



ث ـ مشتق تابع $y=[g(x)]$.

تابع y در مجموعهٔ $g(x)\in \mathbb{R}-Z$ مشتق‌پذیر بوده و مشتق آن برابر صفر است.

چند مثال

۱. تابع $f(x)=\left[\frac{۲x+۱}{۳}\right]$ را درنظر می‌گیریم. در بازهٔ $[۰,۸)$ به‌ازای چند عدد متعلق به مجموعهٔ Z، تابع $f(x)$ مشتق‌پذیر است؟

حل:

$$\frac{۲x+۱}{۳}=u \text{ و } ۰\le x<۸ \Rightarrow \frac{۱}{۳}\le u<\frac{۱۷}{۳}$$

$$\frac{۱}{۳}\le u<۱ \Rightarrow ۰\le x<۱ \text{ و } f'(x)=۰\ ,\ x_۱=۰$$

$$۱<u<۲ \Rightarrow ۱<x<\frac{۵}{۲} \text{ و } f'(x)=۰\ ,\ x_۲=۲$$

$$۲<u<۳ \Rightarrow \frac{۵}{۲}<x<۴ \text{ و } f'(x)=۰\ ,\ x_۳=۳$$

$$۳<u<۴ \Rightarrow ۴<x<\frac{۱۱}{۲} \text{ و } f'(x)=۰\ ,\ x_۴=۵$$

$$۴<u<۵ \Rightarrow \frac{۱۱}{۲}<x<۷ \text{ و } f'(x)=۰\ ,\ x_۵=۶$$

$$۵<u<\frac{۱۷}{۳} \Rightarrow ۷<x<۸ \text{ و } f'(x)=۰\ ,\ \text{ریشه ندارد}$$

با توجه به مطالب بالا در بازهٔ $[۰,۸)$ به‌ازای پنج عدد صحیح تابع مشتق‌پذیر است.

۲. تابع
$$f(x)=\begin{cases}[x]+۲x & ,\ x>۱\\ [\,Ln(۴x^۲+۱)\,] & ,\ ۰<x\le ۱\\ |x^۲-x-۶| & ,\ x\le ۰\end{cases}$$
را درنظر می‌گیریم.

مقدار عبارت $A=f'(-۳)+f'(\frac{۱}{۲})+f'(\frac{۵}{۲})$ چه‌قدر است؟

۱) -۷ ‏ ۲) ۶ ‏ ۳) ۹ ‏ ۴) -۵

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$$x=-۳, f(x)=x^۲-x-۶, f'(x)=۲x-۱, f'(-۳)=-۷$$

$$x=\frac{۱}{۲}\ ,\ f(x)=[Ln۲]\ ,\ f'(\frac{۱}{۲})=۰$$

$$x\to\frac{۵}{۲}\ ,\ f(x)=۲+۲x\ ,\ f'(\frac{۵}{۲})=۲ \Rightarrow A=-۵$$

ج ـ انتگرال تابعهایی که دارای جزء صحیح هستند.

یادآوری می‌شود که تابع $y=[f(x)]$ وقتی که $f(x)\in Z$، ناپیوسته می‌باشد. بنابراین، در انتگرال‌گیری تابعهایی که شامل جزء صحیح هستند، باید دقّت بیشتری کرد و برای تعیین انتگرال تابعهای به‌صورت: $I=\int_p^q [nx]dx$ باید I را به انتگرالهای جزء

به‌صورت $\int_{a_1}^{b_1}[nx]dx$ و $n\in Z$ تبدیل کرد؛ به قسمی که (b_1-a_1) برابر $\frac{1}{n}$ باشد.

چند مثال

مقدار عبارتهای زیر را تعیین کنید.

۱. $I=\int_{-1}^{2}[x]dx$

حل: $I=\int_{-1}^{0}(-1)dx+\int_{0}^{1}(0)dx+\int_{1}^{2}(1)dx \Rightarrow$

$I=(-x)\Big|_{-1}^{0}+(0)+(x)\Big|_{1}^{2}=-1+(2-1)=0$

۲. $I=\int_{-1}^{1}[2x]dx$

حل:

$I=\int_{-1}^{-0/5}[2(-1)]dx+\int_{-0/5}[2(-0/5)]dx+\int_{0}^{0/5}[2(0)]dx$

$+\int_{0/5}^{1}[2(0/5)]dx=(-2x)\Big|_{-1}^{-0/5}+(-x)\Big|_{-0/5}^{0}+(x)\Big|_{0/5}^{1}$

$=(1-2)+(0-0/5)+(1-0/5)=-1$

۳. $I=\int_{-1}^{1}[2x-1]dx$

حل: $-1\le x<-\frac{1}{2}\Rightarrow[2x-1]=-3$,

$-\frac{1}{2}\le x<0\Rightarrow[2x-1]=-2$

$0\le x<\frac{1}{2}\Rightarrow[2x-1]=-1$,

$\frac{1}{2}\le x<1\Rightarrow[2x-1]=0\Rightarrow$

$I=\int_{-1}^{-0/5}(-3)dx+\int_{-0/5}(-2)dx+\int_{0}^{0/5}(-1)dx\Rightarrow$

$I=(-\frac{3}{2})+(-1)+(-\frac{1}{2})=-3$

۴. $I=\int_{1}^{e^3}\frac{[Lnx]}{x}dx$

حل:

$1\le x<e\Rightarrow 0\le Lnx<1\Rightarrow[Lnx]=0$

$e\le x\le e^2\Rightarrow 1\le Lnx<2\Rightarrow[Lnx]=1$

$e^2\le x<e^3\Rightarrow 2\le Lnx<3\Rightarrow[Lnx]=2$

$I=\int_{1}^{e}(\frac{0}{x})dx+\int_{e}^{e^2}(\frac{1}{x})dx+\int_{e^2}^{e^3}(\frac{2}{x})dx\Rightarrow$

$I=0+(Lnx)\Big|_{e}^{e^2}+2(Lnx)\Big|_{e^2}^{e^3}=(2-1)+2(3-2)=3$

۵. $I=\int_{0}^{6}[x]\sin(\frac{\pi x}{6})dx$

حل:

$I_1=\int_{0}^{1}(0)\sin\frac{\pi x}{6}dx$, $I_2=\int_{1}^{2}(1)\sin\frac{\pi x}{6}dx$,... ,

$I_6=\int_{5}^{6}5\sin\frac{\pi x}{6}$

$I=I_1+I_2+\cdots+I_6=\frac{30}{\pi}$

۶. $I=\int_{0}^{2}\left[e^x\right]dx$

حل: $0\le x<Ln2\Rightarrow 1\le e^x<2\Rightarrow\left[e^x\right]=1$,

$I_1=\int_{0}^{Ln2}(1)\,dx$

$Ln2\le x<Ln3\Rightarrow 2\le e^x<3\Rightarrow\left[e^x\right]=2$,

$I_2=\int_{Ln2}^{Ln3}(2)\,dx$

....

$Ln7\le x\le 2\Rightarrow 7\le e^x\le e^2\Rightarrow\left[e^x\right]=7$,

$I_7=\int_{Ln7}^{2}(7)\,dx$

$I=I_1+I_2+...+I_7=14-Ln(7!)$

۷. $I=\int_{1}^{n+1}Ln[x]dx$, $n\in IN$

حل: $I_1=\int_{1}^{2}Ln(1)dx$, $I_2=\int_{2}^{3}Ln(2)dx$,...,

$I_n=\int_{n}^{n+1}Ln(n)dx$

$I=I_1+I_2+\cdots+I_n=Ln(1\times2\times\cdots\times n)=Ln(n!)$

۸. $I=\int_{1}^{2}\left[x^2\right]dx$

حل:

$I_1=\int_{1}^{\sqrt{2}}dx$, $I_2=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}2dx$, $I_3=\int_{\sqrt{3}}^{2}3dx\Rightarrow$

$I=I_1+I_2+I_3=5-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

۹. مقدار، $I=\int_{1}^{e^2}\frac{[Lnx]}{x-1}dx$ کدام است؟

۱) $Ln(e^2-1)$ ۲) $Ln(e+1)$

۳) $Ln(e^2-1)-1$ ۴) $Ln(e-1)$

حل: گزینهٔ دوم صحیح است.

$I=\int_{1}^{e}\frac{0}{x-1}dx+\int_{e}^{e^2}\frac{dx}{x-1}=0+Ln(x-1)\Big|_{e}^{e^2}\Rightarrow$

$$I = Ln(e^2-1) - Ln(e-1) = Ln\frac{e^2-1}{e-1} = Ln(e+1)$$

۱۰. مقدار، $\int_{-1}^{1}[2x+1]dx$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۱

حل: گزینهٔ چهارم صحیح است.

$$I = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}}(-1)dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{0}(0)dx + \int_{0}^{\frac{1}{2}}(1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(2)dx \Rightarrow$$

$$I = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 1$$

۱۱. قسمتی از نمودار تابع $y=[x]$ را که بین دو خط $x=1$ و $x=3$ قرار دارد، حول محور $x'x$ دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل چه‌قدر است؟

۱) π ۲) 3π ۳) 5π ۴) 7π

حل: گزینهٔ سوّم صحیح است.

$$V = \pi\int_{1}^{3}([x])^2dx = \pi\int_{1}^{2}dx + \pi\int_{2}^{3}4dx = 5\pi$$

تمرین

۱. اگر $f(x) = 3x^2 + [x]$، آن‌گاه $f'(3)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) $\varnothing$

۲. اگر $f(x) = x^3 - 6x + \left[\frac{5x+1}{7}\right]$، آن‌گاه $f'(2)$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) $\varnothing$

۳. مقدار $\int_{-1}^{3}[x]dx$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

۴. مقدار $\int_{-1}^{3}[x+1]dx$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

۵. مقدار $\int_{1}^{\frac{5}{2}}[x+2]dx$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱− ۴) ۰

۶. مقدار $\int_{1}^{\frac{3}{2}}[x].(x^2+3)dx$ کدام است؟

۱) $\frac{17}{24}$ ۲) $\frac{47}{24}$ ۳) $\frac{55}{24}$ ۴) $\frac{61}{24}$

۷. مقدار $\int_{-1}^{3}[x]^{Sgnx}dx$ و $x \neq 0$ کدام است؟

۱) ۲− ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

۸. مقدار $\int_{1}^{4}[x]^{[x]}dx$ کدام است؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۰ ۳) ۲۴ ۴) ۱۸

۹. مقدار $\int_{0}^{2\pi}[\sin x]dx$ کدام است؟

۱) -2π ۲) $-\pi$ ۳) π ۴) 2π

۱۰. مقدار $\int_{1}^{4}Ln[x]dx$ کدام است؟

۱) $Ln2$ ۲) $Ln3$ ۳) $Ln\frac{2}{3}$ ۴) $Ln6$

پاسخها:

شماره	پاسخ
۱	۴
۲	۳
۳	۱
۴	۴
۵	۲
۶	۳
۷	۴
۸	۱
۹	۲
۱۰	۴



● علی اکبر بناگر

عددی را به شما معرفی می‌کنیم که بسیار بی‌نظیر است. این عدد ۱۴۲۸۵۷ می‌باشد، که دو رقم اوّل سمت چپ آن، عدد ۱۴، نزد ما معروفیت خاص دارد و شب ۱۴ ماه قمری را به‌خاطر می‌آورد. در این شب، قرص ماه به‌طور کامل در آسمان می درخشد و نورافشانی آن، شکوه و جلوهٔ خاص دارد. دو رقم بعد، ۲۸، دو برابر ۱۴ می‌باشد و اگر از دو رقم آخر، یعنی ۵۷، یک واحد کم کنیم، عدد ۵۶ نیز چهار برابر ۱۴ است. چنانچه دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم کنیم و ارقام ۱۴۲۸۵۷ را مطابق شکل مقابل، در کنارهٔ آن و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بنویسیم، این دایره را دایرهٔ محاسب می‌نامیم.



دایرهٔ محاسب

چنانچه ۱۴۲۸۵۷ را در هر یک از اعداد ۵،۴،۳،۲ و۶ ضرب کنیم، ۵ عدد شش رقمی دیگر به‌ترتیب ۲۸۵۷۱۴ ، ۴۲۸۵۷۱ ، ۵۷۱۴۲۸، ۷۱۴۲۸۵ و ۸۵۷۱۴۲ حاصل می‌شود، که هر یک از این پنج عدد ۶رقمی را روی دایرهٔ محاسب، می‌توان مشاهده کرد. طریق یافتن پنج عدد روی دایره، به‌این ترتیب است که، اوّلین رقم سمت چپ هر یک از ۵ عدد بالا را روی دایره می‌یابیم. آن‌گاه پنج رقم دیگر آن را بعد از آن رقم و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیدا نموده، در سمت راست آن رقم می‌نویسیم؛ مثلاً اگر بخواهیم ۷۱۴۲۸۵ را روی دایره ملاحظه کنیم، عدد هفت را روی دایره پیدا نموده، ۵ رقم دیگر آن عدد را بعد از ۷ و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت که اعداد ۸،۲،۴،۱ و ۵ می‌باشند، می‌بینیم.

اعداد دوّار

هر یک از شش عدد ۶ رقمی ۱۴۲۸۵۷، ۲۸۵۷۱۴، ۴۲۸۵۷۱، ۵۷۱۴۲۸، ۷۱۴۲۸۵ و ۸۵۷۱۴۲ را که روی دایره و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌توان مشاهده نمود، اعداد دوّار می‌نامیم.

طرز پیدا کردن اعداد دوّار: اگر از یک میلیون، یک واحد کم کنیم و عدد ۹۹۹۹۹۹ را بر هفت تقسیم نماییم، عدد ۱۴۲۸۵۷ به‌دست می‌آید، و اگر عدد ۱۴۲۸۵۷ را بترتیب، در اعداد ۵،۴،۳،۲ و ۶ ضرب کنیم، ۵ عدد ۶ رقمی دیگر دوّار حاصل می‌شود.

۱۴۲۸۵۷×۲=۲۸۵۷۱۴ , ۱۴۲۸۵۷×۳=۴۲۸۵۷۱ ,

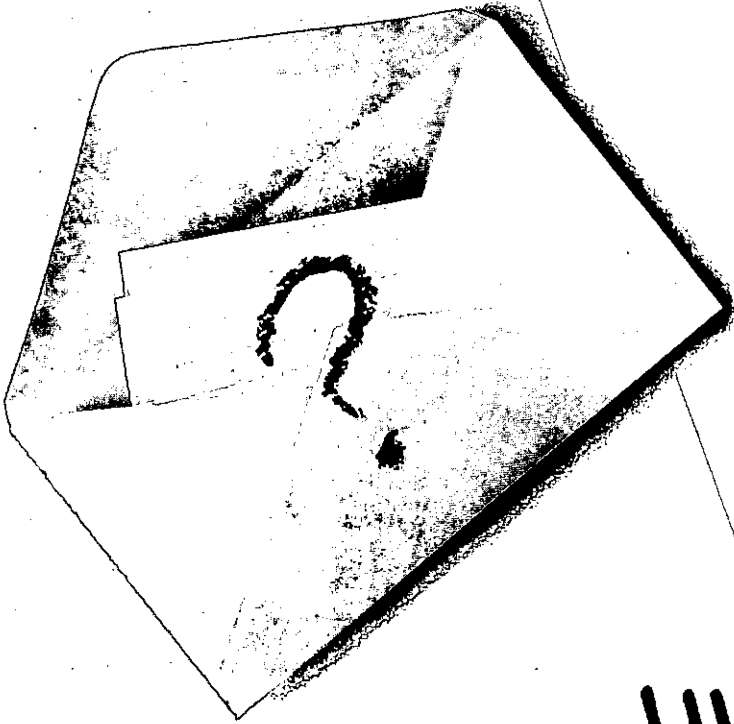
۱۴۲۸۵۷×۴=۵۷۱۴۲۸ , ۱۴۲۸۵۷×۵=۷۱۴۲۸۵ ,

۱۴۲۸۵۷×۶=۸۵۷۱۴۲

۱۰۰۰۰۰۰−۱=۹۹۹۹۹۹=۷×۱۱×۱۳×۲۷×۳۷

=۷×۱۴۲۸۵۷

۱۴۲۸۵۷=۱۱×۱۳×۲۷×۳۷



آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام، خدمت همگی دانش‌آموزان و خوانندگان محترم مجلهٔ ریاضی برهان

هر روز، نامه‌های پرمحتوا و دلگرم کننده شما عزیزان در دفتر مجله به دستمان می‌رسد، از خداوند بزرگ بسیار سپاسگزاریم که توانسته‌ایم، تا حدی مشکلات درسی شما عزیزان را برطرف کنیم و تا اندازه‌ای شما را به ریاضیات علاقه‌مند سازیم. در این شماره پرسشهای چهارگزینه‌ای با حل تشریحی درسهایی را ارائه کردیم که دانش آموزان در ترم اول گذرانده‌اند و در شمارهٔ بعد، ادامه پرسشهای چهارگزینه‌ای با حل تشریحی را خواهیم آورد.

اسامی تعدادی از خوانندگان محترم مجلّه که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: سید مصطفی شریعت‌زاده (اهواز)، علی رحیمی (آذربایجان غربی ـ خوی)، مصطفی جعفری (تهران)، احسان تقی‌پور (بروجرد)، همکار محترم آقای منصور دوباش (کرمانشاه)، مجتبی دهقانی (فارسان)، همکار محترم خانم بهدخت کشمیری‌پور (شیراز)، سیدعلی حسینی (مینودشت)، حامد اولادغفاری (تبریز)، علیرضا قزلسفلو (مینودشت)، محسن ساعی نیک (تبریز)، سراج‌الدین طلّایی (گنبدکاوس)، عباس نخستین (لاهیجان)، عادل طاهرخانی (تاکستان)، وحید طاهری (تبریز)، علی ملکی و حسین آقایی (تهران)، سیدهادی ناصری (دانشگاه مازندران)، بابک مقبولی (تهران)، احسان ایزدی (سبزوار)، رضا خواجوی‌نیا (ملک‌شهر اصفهان)، همکار محترم آقای مراد کریمی شهماروند (فرخ‌شهر)، محمود اکبری (شیراز)، و **خانمها** : کبری جهانی مقدم (قاین)، معصومه پناهی شهری (تهران) و مریم خانجابی (تهران).

از همه شما عزیزان، به پاس ارسال مقاله، مسائل همراه با حل و پیشنهادها و انتقادهای سازنده سپاسگزاریم. در صورت امکان از مسائل و مقاله‌های شما پس از تصویب در هیأت تحریریه، در مجلّه استفاده خواهیم کرد.

آقای محمدحسن منشیان (اصفهان) از پیشنهادات جناب‌عالی دربارهٔ کتاب کوچک ریاضی دنباله‌ها و سریها سپاسگزاریم و منتظر دریافت نامه‌های بعدی از طرف شما هستیم.

آقای سیدمصطفی شریعت‌زاده (اهواز) برای این که مطالبی

را دربارهٔ ویژگیها و تولید فرکتالها مطالعه کنید، به مجلّه رشد آموزش ریاضی شماره ۵۳ مراجعه کنید.

آقای مصطفی فولادکار (مشهد مقدس)، کتابهای زیر از طرف گروه ریاضی انتشارات مدرسه در دست تهیه و چاپ است :

۱. فرهنگ و دایرةالمعارف ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی/ مؤلفان : گروه ریاضی انتشارات مدرسه.

۲. مکان هندسی/ مؤلف : محمدهاشم رستمی

۳. نظریهٔ اعداد (از سری کتابهای کوچک ریاضی)/ مؤلف : حمیدرضا امیری

۴. سری کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی/ هیأت مؤلفان

۵. سری کتابهای از مدرسه تا دانشگاه/ مؤلفان : گروه ریاضی انتشارات مدرسه

در ضمن از پیشنهادات و انتقادات سازندهٔ شما سپاسگزاریم و منتظر دریافت نامه‌های بعدی از طرف شما هستیم.

آقای افاضت (اصفهان) نشانی چند مجلّه ریاضی معتبر خارجی را در قسمت آنچه از دوست رسد برهان شماره ۳۰ چاپ کرده‌ایم. در ضمن قسمتی از مطالب تفریح اندیشه از کتاب تفریح اندیشه، نوشته : پی‌یر برلوکن/ ترجمه : سیمین‌دخت ترکپور/ انتشارات محراب قلم است و بقیه مطالب تفریح اندیشه و ادب ریاضی را آقای غلامرضا یاسی‌پور تهیه می‌کنند.

همکار محترم جناب آقای حسین زارعی، دبیر ریاضی شهرستان آباده (استان فارس) از آن‌جا که مسائل ارسالی جناب‌عالی می‌تواند مورد استفاده دانش‌آموزان قرار گیرد، بنابراین دو مسأله را در زیر می‌آوریم :

مسأله ۱. اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع باشد و به ازای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x+y)=f(x)-f(y)$ ، ثابت کنید برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم : $f(x)=0$.

حل. با فرض $x=y=0$ داریم :

$$f(0+0)=f(0)-f(0)\Rightarrow f(0)=0 \qquad (۱)$$

اکنون با فرض $x=0$ و $y\in\mathbb{R}$ ، $y\neq 0$ خواهیم داشت :

$$f(0+y)=f(0)-f(y)\Rightarrow f(y)=-f(y)\Rightarrow f(y)=0 \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که برای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم : $f(x)=0$.

مسأله ۲. فرض کنید $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد و برای هر $x,y\in\mathbb{R}$ داشته باشیم $f(x+y)=f(x)\times f(y)$ و f^{-1} وجود داشته باشد، ثابت کنید $f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$.

حل. فرض کنید $f(x)=t$ و $f(y)=t'$. بنابراین داریم : $tt'=f(x)\times f(y)$.

$$f(x+y)=f(x)\times f(y)\Rightarrow f^{-1}[f(x+y)]=f^{-1}[f(x)\times f(y)]$$

$$\Rightarrow f^{-1}[f(x+y)]=f^{-1}(tt')$$

$$\Rightarrow f^{-1}(tt')=(x+y) \quad (۱)$$

$$\begin{cases} f(x)=t\Rightarrow x=f^{-1}(t) \\ f(y)=t'\Rightarrow y=f^{-1}(t') \end{cases} \quad (۲)$$

با توجه به (۱) و (۲) داریم :

$$f^{-1}(tt')=f^{-1}(t)+f^{-1}(t')$$

با تبدیل t' و t به x و y خواهیم داشت :

$$f^{-1}(xy)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$$



ادب ریاضی

یکی از شرایط اساسی برای این‌که درخت علم بتواند با کمال سرعت، رشد و نمو کند آن است که در محلّ مسدودی کاشته نشود، برای این درخت هوایی لازم است که زود به زود تازه و تجدید شود و نسیمی که از خارج بوزد، و عدهٔ بیشماری که در تقویت آن سهیم شوند.

تاریخ علوم - پی‌یر روسو

پاسخ پرسشهای چهار گزینه ای را در همین شمارهٔ مجله ببینید.

پرسشهای چهار گزینه ای

● احمد قندهاری ● محمدهاشم رستمی ● حمیدرضا امیری ● میرشهرام صدر ● هوشنگ شرقی ● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

ریاضیات ۱

۱. اگر $A=\{x|x\in \mathbb{Z}, x\geq ۴\}$ و $B=\{x|x\in\mathbb{R}, x<-۲\}$
حاصل $A'\cap B'$ کدام است؟

۱) $x\in\mathbb{Z}:\{x|-۲\leq x<۴\}$

۲) $x\in\mathbb{R}:\{x|-۲\leq x<۴\}$

۳) $x\in\mathbb{Z}:\{x|-۲\leq x\leq ۴\}$

۴) $x\in\mathbb{Z}:\{x|-۲< x\leq ۴\}$

۲. اگر $A=\{۲,\{۲\},\{\{۲\}\},\{\,\}\}$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\{۰,\{۲\}\}\notin A$ ۲) $\{\varnothing\}\in A$

۳) $\{\{۲\}\}\not\subset A$ ۴) $\{\{۲\}\}\in A$

۳. کوچکترین عددی که اگر در عبارت $A=۲^۵\times ۳^۶\times ۷^۴\times ۵^۲$ ضرب کنیم، مکعب کامل می‌شود، کدام است؟

۱) $۲^۴\times ۵^۴\times ۳^۲\times ۷^۳$ ۲) $۲^۴\times ۳^۳\times ۷^۲\times ۵$

۳) $۲\times ۳^۳\times ۷^۲\times ۵^۴$ ۴) $۲\times ۷^۲\times ۵$

۴. کوچکترین مضرب مشترک عددهای ۲۴، ۱۴۴ و ۱۲۰، کدام است؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۳۶۰

۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

۵. حاصل عبارت تواندار $۴۵(۷\times۲)^۷\div ۹(۲^۴\times ۷^۳)$، کدام است؟

۱) $۲^۳\times ۷^۲\times ۵$ ۲) $۲^۳\times ۷^۴\times ۵$

۳) $۲^۲\times ۷^۲\times ۵$ ۴) $۲^۳\times ۷^۵\times ۵$

۶. حاصلضرب دو عدد فرد متوالی مثبت برابر ۹۹ است؛ حاصلجمع آن دو عدد کدام است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹

۳) ۲۰ ۴) ۲۱

۷. حاصل عبارت $A=\dfrac{۵^{-۲}+۳^{-۲}}{۳\times ۳^{-۱}+۲^{-۳}}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۲۱۴۴}{۱۰۱۲۵}$ ۲) $\dfrac{۴۲۸۸}{۱۱۲۵}$

۳) $\dfrac{۱۰۷۲}{۱۰۱۲۵}$ ۴) $\dfrac{۱۰۷۲}{۴۲۸۸}$

۸. کسر متعارفی مولد عدد اعشاری $۳/۰\overline{۴}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱۳۴}{۴۵}$ ۲) $\dfrac{۱۳۵}{۴۵}$

۳) $\dfrac{۱۳۶}{۴۵}$ ۴) $\dfrac{۱۳۷}{۴۵}$

۹. ربع عدد $(۱۲)^۳$ را به ثلث آن اضافه کرده‌ایم، حاصل چه عددی است؟

۱) $۴^۲\times ۳^۲\times ۷$ ۲) $۴^۲\times ۳^۲\times ۵$

۳) $۴^۲\times ۳^۳$ ۴) $۴^۳\times ۳^۲$

۱۰. خارج قسمت تقسیم عبارت $۸x^۳+۱$ بر $(۲x+۱)$، به‌اضافهٔ خارج‌قسمت تقسیم $۸x^۳-۱$ بر $(۲x-۱)$، کدام است؟ $(x\neq\pm\frac{۱}{۲})$

۱) $۴x^۲$ ۲) ۲

۳) $۴x^۲+۲$ ۴) $۲(۴x^۲+۱)$

۱۱. اگر $a^۲+b^۲+c^۲=ab+ac+bc$، آن‌گاه حاصل عبارت $\dfrac{۳\sqrt[۳]{abc}}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c}}$ کدام است؟ $(abc\neq ۰)$

۱) $\sqrt[۳]{a^۲}$ ۲) $\sqrt[۳]{a}$

۳) $۳\sqrt[۳]{a^۲}$ ۴) $۳\sqrt[۳]{a}$

۱۲. معادلهٔ $۳^{x+۱}+۹^x=۱۰۸$ به ازای چه مقداری از x برقرار است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) هیچ یک از سه مورد قبل

ریاضیات ۳

۱. معادلهٔ درجه دومی که ریشه‌های آن قرینهٔ نصف ریشه‌های معادلهٔ $۲x^۲+x=۴$ هستند، کدام است؟

۱) $۲x^۲-x-۴=۰$ ۲) $۴x^۲+x-۲=۰$

۳) $۴x^۲-x-۲=۰$ ۴) $۲x^۲-x-۲=۰$

۲. مجموعه جوابهای معادلهٔ $۲x+\sqrt{x^۲-۷}+۵=۰$ کدامند؟

۱) $\{-۴\}$ ۲) $\left\{-\frac{۸}{۳}\right\}$

۳) $\left\{-۴,-\frac{۸}{۳}\right\}$ ۴) $\varnothing$

۳. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۱}{x^۲}\geq ۱$ برابر است با:

۱) $[-۱,۱]$ ۲) $(-۱,۱)$

۳) $[-۱,۱]-\{۰\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{۰\}$

۴. به ازای کدام یک از مجموعه مقادیر زیر کسر $\dfrac{(x-۱)(x-۲)^۲}{(x+۱)^۳}$ منفی است؟

۱) $(-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۲})$ ۲) $(-۱,۲)$

۳) $(-۱,\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$

۵. برای آن که $(۲-m)x^۲+۲(m-۲)x-m$ به‌ازای جمیع

مقادیر x منفی باشد، باید داشته باشیم :

۱) $m > ۲$ ۲) $m < ۲$

۳) $۱ < m \leq ۲$ ۴) $۲ \leq m < ۳$

۶. تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x+۲ & x \geq ۰ \\ -x^۲ & x < ۰ \end{cases}$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده است. این تابع :

۱) پوششی است و یک به یک نیست.

۲) یک به یک است و پوششی نیست.

۳) یک به یک و پوششی است.

۴) نه یک به یک است و نه پوششی.

۷. ضابطهٔ معکوس تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=۲^{x-۱}-۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) $f^{-۱}(x)=\log_۲^{x+۱}$ ۲) $f^{-۱}(x)=\log_۲^{۲x+۱}$

۳) $f^{-۱}(x)=\log_۲^{۲x+۴}$ ۴) $f^{-۱}(x)=\log_۲^{۲x+۲}$

۸. اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A+A^{-۱}|$ کدام است؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۵−

۳) ۲۹ ۴) ۲۹−

۹. به‌ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-۱)x+۴y=۶ \\ ۳x+(m+۳)y=۵ \end{cases}$ دارای جواب یکتا می‌باشد؟

۱) $m \neq ۲$ ۲) $m \neq ۳$

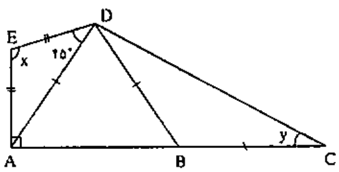
۳) $m \neq ۳,-۵$ ۴) $m \neq -۳,۵$

۱۰. جواب معادلهٔ $\log_۳^x+\log_{\sqrt{۳}}^x+\log_{\frac{۱}{۳}}^x=۶$ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) $\frac{۱}{۳}$

هندسهٔ ۱

۱. در شکل، ضلعهای مشخص شده با علامتهای یکسان با هم برابر و $AB \perp AE$ است. اندازهٔ $x+y$ چه‌قدر است؟



۱) $۱۰۵°$ ۲) $۱۱۵°$

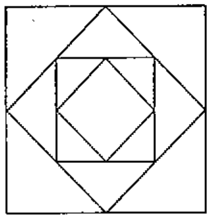
۳) $۱۲۵°$ ۴) $۱۳۵°$

۲. مساحت یک مستطیل برابر ۱۴۴۰ و طول آن ۲/۴ برابر عرض آن است. نسبت اندازهٔ محیط این مستطیل به طول قطر آن چند است؟

۱) $\frac{۳۴}{۱۳}$ ۲) $\frac{۶۸}{۱۳}$

۳) $\frac{۱۷}{۱۳}$ ۴) $\frac{۱۷}{۲۶}$

۳. در شکل، وسطهای ضلعهای هر مربع به‌طور متوالی به هم وصل شده‌اند. نسبت مساحت کوچکترین مربع به مساحت بزرگترین مربع چند است؟



۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

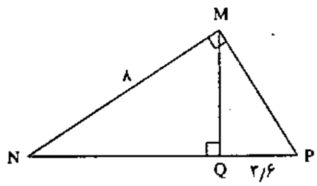
۳) $\frac{۱}{۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۴. مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی برابر $۹\sqrt{۳}cm^۲$ است. اندازهٔ ارتفاع این مثلث برابر است با :

۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $۳\sqrt{۳}$

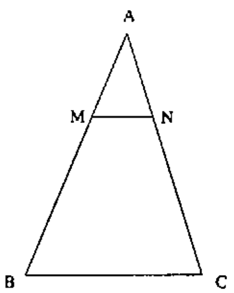
۵. در مثلث قائم الزاویهٔ MNP $(\hat{M}=۹۰°)$، ارتفاع MQ رسم شده است. اگر $MN=۸$ و $PQ=۳/۶$ باشد، اندازهٔ MP برابر است با :



۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۱۰

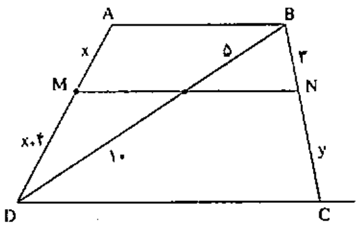
۶. نقطه‌های M و N روی ضلعهای AB و AC چنان قرار دارند که $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{۱}{۴}$ است. نسبت مساحت چهارضلعی MNCB به مساحت مثلث AMN چه‌قدر است؟



۱) ۳ ۲) ۲

۳) ۴ ۴) ۵

۷. در ذوزنقهٔ ABCD، $MN \| AB \| CD$ است. با توجه به شکل، $۲x-y$ چه‌قدر است؟



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۸. قاعدهٔ منشور قائمی، شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۱۰ است. اگر ارتفاع این منشور برابر ۱۸ باشد، اندازهٔ مساحت کل آن چه‌قدر است؟

۱) $۳۰۰\sqrt{۳}$ ۲) ۱۰۸۰

۳) $۶۰(۱۸-۵\sqrt{۳})$ ۴) $۶۰(۱۸+۵\sqrt{۳})$

۹. مخروط دواری به شعاع قاعدهٔ R و ارتفاع h داده شده است. اگر شعاع قاعدهٔ این مخروط ۲ برابر و ارتفاع آن نصف شود، حجم آن چند برابر می‌شود؟

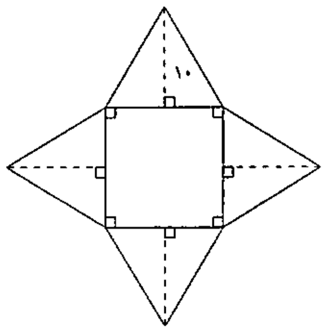
۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۱ ۴) ۲

۱۰. شکل زیر، گستردهٔ یک هرم مربع‌القاعده است. اندازهٔ ضلع مربع چه‌قدر باشد تا ارتفاع هرم برابر ۸ گردد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۶

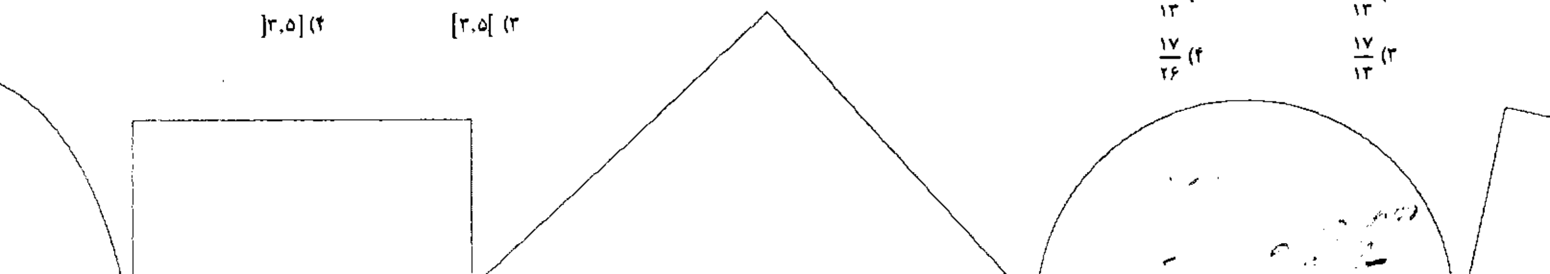


ریاضی ۵

۱. سادهٔ شدهٔ عبارت $]-۳,۵[\cap[۳,۷]$ کدام است؟

۱) $[۳,۵]$ ۲) $]۳,۵[$

۳) $[۳,۵[$ ۴) $]۳,۵]$



۲. تابع f به‌صورت $\begin{cases} f(x)=\sqrt{3}+x, & x\geq 1 \\ f(x)=\sqrt{3}-x, & x<1 \end{cases}$ تعریف شده است، اندازهٔ $f(3-\sqrt{3}).f(\sqrt{3}-1)$ چه‌قدر است؟

۱) ۳ ۲) ۴
۳) ۵ ۴) ۶

۳. دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\log_x(16-x^2)$ کدام است؟

۱) $0<x<4$ ۲) $-4<x<4$
۳) $x\neq 1, -4<x<4$ ۴) $x\neq 1, 0<x<4$

۴. اگر $f(x)=x+4$ و $g(x)=x-4$ باشند، $(gof)(x)-(fog)(x)$ کدام است؟

۱) $2x$ ۲) 0
۳) 8 ۴) $x-8$

۵. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x>2 \\ 11, & x=2 \\ ax^2+bx-1, & x<2 \end{cases}$ در نقطهٔ $x=2$ پیوسته باشد، $2a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷
۳) ۸ ۴) ۹

۶. مشتق تابع $y=\frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$ ۲) $\frac{3}{\sqrt{2x+1}}$
۳) $\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ ۴) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

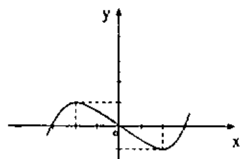
۷. اگر $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ باشد، $f'(\frac{\pi}{6})$ چه‌قدر است؟

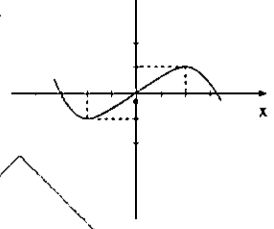
۱) $2(2+\sqrt{3})$ ۲) $3(2+\sqrt{3})$
۳) $4(2+\sqrt{3})$ ۴) $4(2-\sqrt{3})$

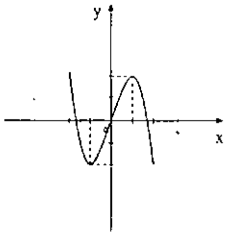
۸. اگر $(-1,2)$ نقطهٔ عطف منحنی به معادلهٔ $y=x^3+ax^2+bx+2$ باشد، $a+2b$ چه‌قدر است؟

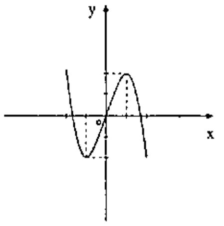
۱) ۷ ۲) ۸
۳) ۹ ۴) ۱۰

۹. نمودار تابع $y=-x^3+3x$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰. معادلهٔ خط قائم بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{1}{x^2}-x$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

۱) $3y+x+1=0$ ۲) $3y-x+1=0$
۳) $3y-x-1=0$ ۴) $3y+x-1=0$

حسابان ۱

۱. کدام یک از تابعهای به معادله‌های زیر مساویند.

۱) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x} \\ g(x)=\cos x \end{cases}$ ۲) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1+\tan^2 x} \\ g(x)=\frac{1}{\cos x} \end{cases}$

۳) $\begin{cases} f(x)=\frac{x^4-1}{x^2-1} \\ g(x)=x^2+1 \end{cases}$ ۴) $\begin{cases} f(x)=0 \\ g(x)=\left\lfloor \frac{x^4}{x^4+1} \right\rfloor \end{cases}$

۲. اگر $f(x)=\sqrt{4-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-2}$، آن‌گاه دامنهٔ fog کدام است؟

۱) $[2,4]$ ۲) $[2,16]$
۳) $[0,18]$ ۴) $[2,18]$

۳. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log(\sqrt{1+x^2}-x)$، تابعی :

۱) فرد است ۲) زوج است
۳) هم فرد است و هم زوج ۴) نه فرد است و نه زوج

۴. در معادلهٔ درجه دوم $x^2+(m-1)x-8=0$ اگر یکی از ریشه‌ها مربع ریشهٔ دیگر باشد، m کدام است؟

۱) -1 ۲) -2
۳) -3 ۴) -4

۵. اگر باقیماندهٔ تقسیم $2x^3+ax+b$ بر $(x+1)$ مساوی -2 باشد، آن‌گاه باقیماندهٔ تقسیم $5x^2+2ax+2b$ بر $(x+1)$ کدام است؟

۱) $a+b$ ۲) $a-b$
۳) 5 ۴) -5

۶. به‌ازای کدام مقدار m، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{(m-1)x+4}{2x-2m}$ بر نمودار تابع معکوس خودش منطبق است؟

۱) -1 ۲) -2
۳) -3 ۴) -4

۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor$ مفروض است، کدام نتیجه درست است؟

۱) $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

۲) $\lim_{x\to 5} f(x)\neq\lim_{x\to\frac{1}{5}} f(x)$

۳) این تابع در اعداد صحیح حد ندارد.

۴) این تابع در اعداد غیرصحیح حد ندارد.

۸. حاصل $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x}$ برابر است با :

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
۳) $\sqrt{2}$ ۴) $-\sqrt{2}$

۹. منحنی با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$ چه مجانبهایی دارد؟

۱) یک قائم و یک افقی ۲) یک قائم و دو افقی
۳) فقط یک افقی ۴) فقط دو افقی

۱۰. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x>0 \\ \lfloor x\rfloor+b & x<0 \\ a(\lfloor x\rfloor+1) & x=0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته است، $(a+b)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳
۳) ۲ ۴) ۱

۱۱. اگر $y=(\sqrt{4+x^2}-x)^{10}$ و $z=(\sqrt{4+x^2}+x)^{10}$، آن‌گاه حاصل $y'_x.z+z'_x.y$ برابر است با :

۱) $10(4)^9$ ۲) 4^{10}
۳) 0 ۴) 10

۱۲. اگر $f(x)=x(x-1)(x-2)...(x-5)$، $f'(4)$ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲۰
۳) -120 ۴) -24

تستهای ترکیبی در ریاضیات گسسته

۱. درخت T از مرتبهٔ p و اندازهٔ q مفروض است، اگر p عددی اوّل و $p|7^{11}$، در این صورت، مجموع درجهٔ رأسهای این درخت کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۷ ۴) ۱۴

۲. اگر p و q بترتیب، مرتبه و اندازهٔ درخت T بوده و هر دو اعداد اوّل باشند، در این صورت، حاصل (p^2+q^2) کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۲۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۳

۳. اگر p و q به ترتیب، مرتبه و اندازهٔ درخت T باشند، در این صورت، بزرگترین مقسوم علیه مشترک p^2q^2 و p^2-q^2 کدام است؟

۱) ۱ ‏ ‏ ۲) ۲ ‏ ‏ ۳) p ‏ ‏ ۴) q

۴. دو تاس را با هم می‌ریزیم، مطلوب است احتمال آن که مجموع دو تاس برابر با عدد k باشد ؛ به شرط آن که بدانیم k تعداد عاملهای عدد ۷ در !۵۰ است.

۱) $\frac{5}{36}$ ‏ ‏ ۲) $\frac{6}{37}$ ‏ ‏ ۳) $\frac{3}{36}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{4}{36}$

۵. معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=r$ چند جواب صحیح نامنفی دارد ؛ به شرط آن که r باقیماندهٔ تقسیم $(14)^{1802}$ بر عدد ۱۹ باشد؟

۱) ۵۶ ‏ ‏ ۲) ۴۸ ‏ ‏ ۳) ۲۴ ‏ ‏ ۴) ۲۸

۶. از بین اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی با ۲۱۰۰، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که عدد انتخاب‌شده بر ۵ و بر ۳ تقسیم‌پذیر نباشد.

۱) $\frac{58}{201}$ ‏ ‏ ۲) $\frac{56}{105}$ ‏ ‏ ۳) $\frac{112}{2100}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{1012}{2100}$

۷. تعداد رابطه‌هایی که می‌توان روی مجموعهٔ A تعریف کرد، که هم خاصیت تقارنی و هم خاصیت پادتقارنی داشته باشند، برابر است با $[20+\varphi(42)]$ ؛ A چند عضو دارد؟ (φ تابع حسابی اویلر است.)

۱) ۴ ‏ ‏ ۲) ۵ ‏ ‏ ۳) ۶ ‏ ‏ ۴) ۳

۸. از بین جوابهای معادلهٔ $X \gg \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ یک ماتریس به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن که ماتریس انتخاب شده، ماتریس واحد (I_3) باشد، کدام است؟

۱) $\frac{1}{64}$ ‏ ‏ ۲) $\frac{1}{16}$ ‏ ‏ ۳) $\frac{1}{8}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{1}{32}$

۹. گراف همبند G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q مفروض است، به‌طوری که $sp-rq=1$: اگر $pq=40$ ، در این صورت، مجموع درجه‌های رأسهای این گراف کدام است؟ $(p<q)$

۱) ۸ ‏ ‏ ۲) ۱۲ ‏ ‏ ۳) ۱۰ ‏ ‏ ۴) ۱۶

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱. حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ وقتی $n\to\infty$ برابر است با : $n\in N$

۱) $\frac{1}{2}$ ‏ ‏ ۲) ۲ ‏ ‏ ۳) ۱ ‏ ‏ ۴) ۰

۲. سری $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)$

۱) همگرا به ۱ است ‏ ‏ ۲) همگرا به ۱- است

۳) همگرا به ۰ است ‏ ‏ ۴) واگراست

۳. اگر $\lim_{x\to+\infty}(x^2-2x)=+\infty$ ، آن‌گاه برای هر $N>0$ وجود دارد : $M>0$ ، به طوری که $x>M \Rightarrow x^2-2x>N$ ، M بزرگتر و مساوی کدام است؟

۱) $\sqrt{N+1}$ ‏ ‏ ۲) $\sqrt{N-1}$

۳) $\sqrt{N-1}+1$ ‏ ‏ ۴) $\sqrt{N+1}+1$

۴. در معادلهٔ $ax^{2n-1}+bx^{2n-2}+\dots+k=0$ ، ضرایب حقیقی‌اند و $n\in N$. کدام نتیجه درست و کامل است؟

۱) معادله حداکثر n ریشهٔ حقیقی دارد.

۲) معادله حداکثر $(2n-1)$ ریشهٔ حقیقی دارد.

۳) معادله حداقل یک ریشه دارد.

۴) گزینه‌های ۲ و ۳

۵. مقدار $\lim\left\lfloor\frac{7x^2-1}{x^2+1}\right\rfloor$ وقتی $x\to+\infty$ ، برابر است با :

۱) ۷ ‏ ‏ ۲) ۶ ‏ ‏ ۳) ۵ ‏ ‏ ۴) ۴

۶. مقدار $\lim_{x\to0^+}(\sin x)^{x^2}$ برابر است با :

۱) ۰ ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ۳) e ‏ ‏ ۴) e^2

۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\lfloor x\rfloor+a & x>2\\ \lfloor x^2-4\rfloor & x=2\\ \lfloor x\rfloor+bx & x<2\end{cases}$ ، در $x_0=2$ پیوسته است، $(a+b)$ کدام است؟

۱) $\frac{5}{2}$ ‏ ‏ ۲) $-\frac{5}{2}$ ‏ ‏ ۳) $\frac{7}{2}$ ‏ ‏ ۴) $-\frac{7}{2}$

۸. معادله‌های مجانبهای مایل تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{x^3-6}{x-2}}$ کدام است؟

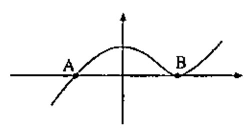
۱) $y=\pm x$ ‏ ‏ ۲) $y=\pm(x-1)$

۳) $y=\pm(x+1)$ ‏ ‏ ۴) $y=x\pm2$

۹. اگر $f(x)=\sin 2x$ ، آن‌گاه $\lim_{h\to0}\frac{f'(\frac{\pi}{4}+h)-f'(\frac{\pi}{4})}{h}$ برابر است با :

۱) ۴ ‏ ‏ ۲) ۴- ‏ ‏ ۳) ۲ ‏ ‏ ۴) ۲-

۱۰. اگر نمودار تابع f' به صورت زیر باشد، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟



۱) دو اکسترمم نسبی دارد. ‏ ‏ ۲) یک ماکزیمم نسبی دارد.

۳) یک مینیمم نسبی دارد. ‏ ‏ ۴) اکسترمم نسبی ندارد.

۱۱. اگر در تابع وارون‌پذیر f داشته باشیم $f'(x)=f(x)$ ، آن‌گاه $(f^{-1})'(2x)$ کدام است؟

۱) $2x$ ‏ ‏ ۲) $\frac{2}{x}$ ‏ ‏ ۳) $\frac{1}{2x}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{x}{2}$

۱۲. ذره‌ای روی مسیر به معادلهٔ $2y^2-3y-x^2+4x=5$ حرکت می‌کند، چنانچه مؤلفه x با سرعت ۰/۲ متر در ثانیه افزایش یابد، در نقطهٔ (۲، ۱) ، مؤلفهٔ y با چه سرعتی تغییر می‌کند.

۱) $\frac{2}{25}$ ‏ ‏ ۲) $-\frac{2}{25}$ ‏ ‏ ۳) $-\frac{25}{2}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{25}{2}$

ریاضی عمومی ۱

۱. اگر واریانس درجه حرارت در شهری برحسب سانتیگراد برابر ۵ باشد، انحراف معیار درجه حرارت در این شهر، بر حسب فارنهایت کدام است؟

۱) ۱۸ ‏ ‏ ۲) ۹ ‏ ‏ ۳) ۳۷ ‏ ‏ ۴) ۴۱

۲. از جعبه‌ای که ۵ مهرهٔ سفید و ۹ مهرهٔ سبز دارد، به طور متوالی و با جایگذاری، مهره‌ای خارج می‌کنیم، احتمال آن که اولین مهرهٔ سبز، سومین مهره‌ای باشد که از جعبه خارج می‌کنیم، کدام است؟

۱) $\frac{180}{14^3}$ ‏ ‏ ۲) $\frac{180}{14\times13\times12}$

۳) $\frac{225}{14\times13\times12}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{225}{14^3}$

۳. اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند و $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ ، آن‌گاه $P(\overline{A}|\overline{B})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$ ‏ ‏ ۲) $\frac{3}{8}$ ‏ ‏ ۳) $\frac{5}{8}$ ‏ ‏ ۴) $\frac{1}{4}$

۴. اگر $A=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & (a+1) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right]$ ماتریس سطری پلکانی باشد، آن‌گاه کدام درست است؟

۱) $-a=b=1$ ‏ ‏ ۲) $a=b=1$

۳) $a=-b=1$ ‏ ‏ ۴) $a=b=-1$

۵. در بسط دوجمله‌ای $(2x-3x^2)^4$ ضریب جملهٔ شامل x^6 کدام گزینه است؟

۱) ۲۱۶ ‏ ‏ ۲) ۲۱۶- ‏ ‏ ۳) ۲۱۴ ‏ ‏ ۴) ۲۱۴-

۶. مجانب موازی محور xهای تابع با ضابطهٔ $y=e^{-x+2}-3$ کدام است؟

۱) $y=3$ ‏ ‏ ۲) $y=-3$

۳) $y=2$ ‏ ‏ ۴) $y=-2$

۷. حاصل $\lim_{x\to+\infty}(1-\frac{3}{x})^x$ کدام است؟

۱) e^3 ‏ ‏ ۲) e^{-3} ‏ ‏ ۳) $3e$ ‏ ‏ ۴) $-3e$

۸. در بارهٔ دنبالهٔ $\left\{\frac{n^2+3}{n^2+1}\right\}$ کدام درست است؟

۱) از بالا کراندار است.

۲) از پایین کراندار است.

۳) نزولی است.

۴) از بالا و پایین کراندار است.

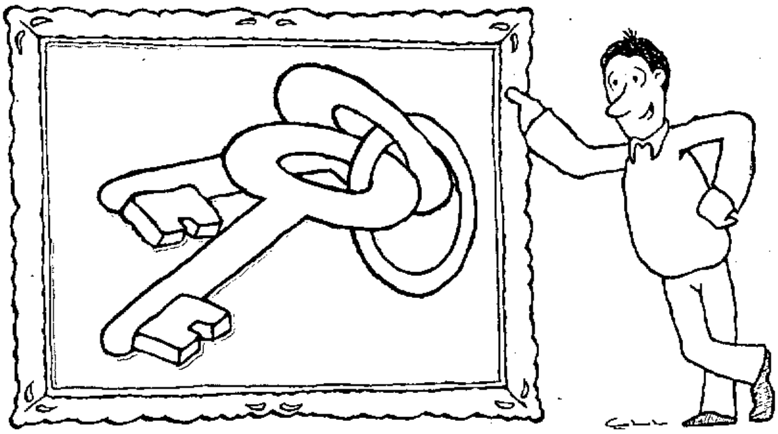
۹. مشتق تابع با ضابطهٔ $y=x^{e^x}$ در نقطهٔ $x=1$ کدام است؟

۱) $e+1$ ‏ ‏ ۲) $1-e$ ‏ ‏ ۳) e ‏ ‏ ۴) $-e$

۱۰. به ازای چه مقدار m، خط به معادلهٔ $y=x+m$ ، بر منحنی به معادلهٔ $y=x^2-x$ مماس است؟

۱) ۲ ‏ ‏ ۲) ۱ ‏ ‏ ۳) ۱- ‏ ‏ ۴) ۲-

پاسخ پرسشهای چهار گزینه‌ای



● ریاضیات ۱

۱. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$A=\{x|x\in Z, x\ge ۴\}=\{۴,۵,۶,۷,...\}$

$\to A'=\{x|x\in Z, x<۴\}$

$B=\{x|x\in R, x<-۲\}\to B'=\{x|x\in R, x\ge -۲\}$

$A'\cap B'=\{-۲,-۱,۰,۱,۲,۳\}=\{x|x\in Z, -۲\le x<۴\}$

۲. گزینهٔ (۳) صحیح است.

۳. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$A=۲^۵\times ۳^۶\times ۷^۴\times ۵^۲=\frac{۲^۶\times ۳^۶\times ۷^۶\times ۵^۳}{۲\times ۷^۲\times ۵}$$

$$=\frac{(۲^۲\times ۳^۲\times ۷^۲\times ۵)^۳}{۲\times ۷^۲\times ۵}$$

$A(۲\times ۷^۲\times ۵)=(۲^۲\times ۳^۲\times ۷^۲\times ۵)^۳$ (مکعب کامل)

۴. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$۲۴=۲^۳\times ۳\ ,\ ۱۴۴=۲^۴\times ۳^۲\ ,\ ۱۲۰=۲^۳\times ۳\times ۵$

کوچکترین مضرب مشترک $=۲^۴\times ۳^۲\times ۵=۷۲۰$

۵. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$۴۵(۷\times ۲)^۷+۹(۲^۴\times ۷^۳)=\frac{۹\times ۵\times ۷^۷\times ۲^۷}{۹\times ۲^۴\times ۷^۳}$$

$=۲^۳\times ۷^۴\times ۵$

۶. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$(۲k-۱)(۲k+۱)=۴k^۲-۱=۹۹\ ;\ ۴k^۲=۱۰۰\ ;$

$k^۲=۲۵\ ,\ k=۵$ (k مثبت)

$k=۵\ :\ (۲k-۱)+(۲k+۱)$

$=(۲(۵)-۱)+(۲(۵)+۱)=۲۰$

۷. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$A=\frac{۵^{-۲}+۳^{-۲}}{۳\times ۳^{-۱}+۲^{-۳}}=\frac{\frac{۱}{۵^۲}+\frac{۱}{۳^۲}}{۳^۰+\frac{۱}{۲^۳}}=\frac{\frac{۹+۵^۲}{۵^۲\times ۹}}{۱+\frac{۱}{۸}}$$

$$=\frac{\frac{۱۳۴}{۵^۲\times ۹}}{\frac{۹}{۸}}=\frac{۸\times ۱۳۴}{۵^۳\times ۹^۲}=\frac{۸\times ۱۳۴}{۱۲۵\times ۸۱}=\frac{۱۰۷۲}{۱۰۱۲۵}$$

۸. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$x=۳/۰\overline{۴}\ ;\ ۱۰x=۳۰/\overline{۴}\ ;\ ۱۰۰x=۳۰۴/\overline{۴}$

$۱۰۰x-۱۰x=۳۰۴/\overline{۴}-۳۰/\overline{۴}\ ;\ ۹۰x=۳۰۴-۳۰\ ;$

$x=\frac{۲۷۴}{۹۰}\ ;\ x=\frac{۱۳۷}{۴۵}$ (کسر متعارفی عدد $۳/۰\overline{۴}$)

۹. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$(۱۲)^۳=۱۲\times ۱۲\times ۱۲=۴^۳\times ۳^۳\ ;$

$\frac{۱}{۴}(۱۲)^۳=\frac{۴^۳\times ۳^۳}{۴}=۴^۲\times ۳^۳\ ,$

$\frac{۱}{۳}(۱۲)^۳=\frac{۴^۳\times ۳^۳}{۳}=۴^۳\times ۳^۲\ ,$

$۴^۲\times ۳^۳+۴^۳\times ۳^۲=۴^۲\times ۳^۲(۳+۴)$

مجموع ربع عدد $(۱۲)^۳$ به اضافهٔ ثلث آن $=۴^۲\times ۳^۲\times ۷$

۱۰. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$\frac{۸x^۳+۱}{۲x+۱}=\frac{(۲x)^۳+۱}{۲x+۱}=\frac{(۲x+۱)(۴x^۲-۲x+۱)}{۲x+۱}$$

$=۴x^۲-۲x+۱\quad (x\neq -\frac{۱}{۲})$

$$\frac{۸x^۳-۱}{۲x-۱}=\frac{(۲x)^۳-۱}{۲x-۱}=\frac{(۲x-۱)(۴x^۲+۲x+۱)}{۲x-۱}$$

$=۴x^۲+۲x+۱\quad (x\neq \frac{۱}{۲})$

$(۴x^۲-۲x+۱)+(۴x^۲+۲x+۱)=۸x^۲+۲=۲(۴x^۲+۱)$

۱۱. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$a^۲+b^۲+c^۲=ab+ac+bc\ ;$

$۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲=۲ab+۲ac+۲bc$

$a^۲+a^۲+b^۲+b^۲+c^۲+c^۲-۲ab-۲ac-۲bc=۰\ ;$

$(a-b)^۲+(a-c)^۲+(b-c)^۲=۰$

طرف اوّل برابری اخیر، همیشه مثبت است و تنها وقتی صفر است که همهٔ عبارتها برابر صفر باشند :

$(a-b)^۲=۰\ ,\ (a-c)^۲=۰\ ,\ (b-c)^۲=۰\ ;\ a=b=c$

$$a=b=c\ :\ \frac{۳\sqrt[۳]{abc}}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c}}=\frac{۳\sqrt[۳]{a^۳}}{\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{a}}$$

$$=\frac{۳\sqrt[۳]{a^۳}}{۳\sqrt[۳]{a}}=\sqrt[۳]{a^۲}$$

۱۲. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$۳^{x+۱}+۹^x=۱۰۸\ ;\ ۳\times ۳^x+۳^{۲x}=۱۰۸\ ;$

$(۳^x)^۲+۳(۳^x)-۱۰۸=۰$

$۳^x=k\ :\ k^۲+۳k-۱۰۸=۰\ ;$

$(k-۹)(k+۱۲)=۰ \begin{cases} k=۹ \\ k=-۱۲ \end{cases}$ (غیرقابل قبول)

$k=۹\ :\ ۳^x=۹=۳^۲\ ;\ \boxed{x=۲}$

● ریاضیات ۳

۱. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) می‌باشد. اگر مجهول معادلهٔ موردنظر مسأله X باشد، با توجه به فرض مسأله $X=-\frac{x}{۲}$ و لذا $x=-۲X$ و با جایگزینی این مقدار در معادلهٔ اصلی، نتیجه می‌شود :

$۲x^۲+x=۴\Rightarrow ۲(-۲X)^۲+(-۲X)=۴$

$\Rightarrow ۸X^۲-۲X-۴=۰\Rightarrow ۴X^۲-X-۲=۰$

۲. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است :

$$2x+5=-\sqrt{x^2-7} \Rightarrow 4x^2+20x+25=x^2-7$$

$$\Rightarrow 3x^2+20x+32=0$$

$$\Delta=400-384=16 \Rightarrow x=\frac{-20\pm 4}{6}$$

$$\Rightarrow x_1=-4\ ,\ x_2=-\frac{8}{3}$$

هر دو پاسخ در دامنهٔ تعریف معادله صدق کرده و در معادله نیز صدق می‌کنند.

۳. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است :

$$\frac{1}{x^2}\geq 1 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2}\geq 0\ ,\ (x^2>0) \Rightarrow 1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1$$

$$\Rightarrow -1\leq x\leq 1\ ,\ x\neq 0 \Rightarrow x\in[-1,1]-\{0\}$$

۴. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است. کسر فوق را می‌توان به‌صورت $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x+1)^2(x+1)}$ نوشت. از آن‌جایی که $(x-2)^2$ و $(x+1)^2$ نامنفی هستند، لذا کافی است که $\frac{x-1}{x+1}$ منفی باشد. با تعیین علامت کسر فوق، محدوده‌ای از x را که در آن، این کسر منفی می‌شود، تعیین می کنیم :

x	$-\infty$ تا -1	-1 تا 1	1 تا $+\infty$
$x-1$	−	−	+
$x+1$	−	+	+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	+	+

$$\Rightarrow -1<x<1$$

بنابراین، به‌ازای هر x در بازهٔ $(-1,1)$ کسر فوق منفی می‌شود و بنابراین $(-1,\frac{1}{2})$ نیز که زیرمجموعهٔ بازهٔ فوق است، می‌تواند پاسخ مسأله باشد.

۵. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۱) است. برای آن‌که سه‌جمله‌ای مزبور، همواره منفی باشد، باید $\Delta<0$ و $a<0$ باشد ؛ یعنی مبین سه‌جمله‌ای منفی و ضریب x^2 هم منفی باشد (می‌دانیم اگر مبین یک سه‌جمله‌ای منفی باشد، علامت آن همواره موافق علامت ضریب x^2 است) :

$$(2-m)x^2+2(m-2)x-m=0$$

$$\Delta=4(m-2)^2-4(2-m)(-m)<0$$

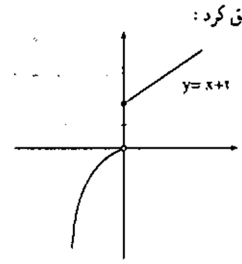
$$\Rightarrow (m-2)(4-8-4m)<0$$

$$\Rightarrow -8(m-2)<0 \Rightarrow m-2>0 \Rightarrow m>2$$

$$a=2-m<0 \Rightarrow m>2$$

لذا کافی است $m>2$ باشد تا سه‌جمله‌ای فوق، همواره منفی باشد.

۶. با رسم نمودار تابع، می‌توان یک به یک و پوشایی تابع فوق را بسادگی تحقیق کرد :



همان‌گونه که از روی نمودار پیدا است، تابع فوق یک به یک بوده و پوشش نیست و پاسخ صحیح، گزینهٔ (۲) است.

۷. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۴) است :

$$y=2^{x-1}-1 \Rightarrow x=2^{y-1}-1 \Rightarrow y-1=\log_2^{x+1}$$

$$\Rightarrow y=\log_2^{x+1}+1=\log_2^{x+1}+\log_2^2=\log_2^{2(x+1)}=\log_2^{2x+2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_2^{2x+2}$$

۸. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۴) است. می‌دانیم که اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$:

بنابراین می‌توان نوشت :

$$A^{-1}=\frac{1}{10-12}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

و از آن‌جا به‌دست می‌آید :

$$A+A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{9}{2}\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A+A^{-1}|=-2-27=-29$$

۹. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است. از دستور کرامر استفاده می‌کنیم. می‌دانیم برای آن‌که دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی، دارای جواب یکتا باشد، لازم و کافی است دترمینان مخرج کسرهایی که مساوی x و y هستند ـ یعنی دترمینان ضرایب ـ مخالف صفر باشد.

$$\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases} \Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}}\ ,\ y=\frac{\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix}m-1 & 4\\ 3 & m+3\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\Rightarrow (m+3)(m-1)-12\neq 0$$

$$\Rightarrow m^2+2m-15\neq 0 \Rightarrow (m+5)(m-3)\neq 0$$

$$\Rightarrow m\neq 3\ ,\ m\neq -5$$

۱۰. پاسخ صحیح، گزینهٔ (۳) است.

به کمک قضیهٔ $\log_{a^n}^x=\frac{1}{n}\log_a^x$ همهٔ لگاریتمها را همپایه نموده و معادله را حل می‌کنیم :

$$\log_3^x+\log_{3^{\frac{1}{2}}}^x+\log_{3^{-1}}^x=6$$

$$\Rightarrow \log_3^x+\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_3^x+\frac{1}{-1}\log_3^x=6$$

$$\Rightarrow \log_3^x+2\log_3^x-\log_3^x=6$$

$$\Rightarrow 2\log_3^x=6 \Rightarrow \log_3^x=3 \Rightarrow x=3^3=27$$

هندسهٔ ۱

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است. مثلثهای ABD ،ADE و BCD متساوی‌الساقین و $D\hat{A}B=D\hat{B}A=50^\circ$ است ؛ زیرا $E\hat{A}B=90^\circ$ و $D\hat{A}E=A\hat{D}E=40^\circ$ می‌باشد. بنابراین :

$A\hat{E}D=x=180^\circ-2\times 40^\circ=100^\circ$ و

$y=B\hat{C}D=\frac{1}{2}D\hat{B}A=25^\circ$

است. پس :

$$x+y=100^\circ+25^\circ=125^\circ$$

۲. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$k=$ عرض و طول $=2/4k \Rightarrow$

$=S=2/4k^2=240 \Rightarrow$ مساحت

$k^2=100 \Rightarrow k=10 \Rightarrow$ عرض $=10$ و طول $=24 \Rightarrow$

محیط مستطیل $=2(10+24)=68$ و طول‌قطر $=\sqrt{10^2+24^2}=26$

$$\Rightarrow \frac{\text{اندازه محیط}}{\text{طول قطر}}=\frac{68}{26}=\frac{34}{13}$$

۳. گزینهٔ (۳) صحیح است. اگر طول ضلع بزرگترین مربع را a فرض کنیم، طول ضلع مربعی که از وصل کردن وسطهای ضلعهای آن پدید می‌آید، $\frac{a}{\sqrt{2}}$ و طول ضلع مربعی که از وصل کردن وسطهای ضلعهای این مربع جدید به‌وجود می‌آید، $\frac{a}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{a}{2}$ و طول ضلع مربع آخری، $\frac{a}{2\times\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$ است. بنابراین :

مساحت بزرگترین مربع / مساحت کوچکترین مربع

$$=(\frac{a}{2\sqrt{2}})^2/a^2=\frac{1}{8}$$

۴. گزینهٔ (۴) صحیح است. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a فرض می‌کنیم. با توجه به این که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است، داریم :

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3} \Rightarrow a^2=36 \Rightarrow a=6$$

$$h_a=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h_a=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

۵. گزینهٔ (۲) صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MNP داریم :

$$MN^2=NQ.NP \Rightarrow 64=NQ(NQ+3/6) \Rightarrow$$

$$NQ^2+3/6NQ-64=0 \Rightarrow NQ=\frac{-1/8\pm\sqrt{3/24+64}}{1}$$

$$=-1/8\pm 8/2$$

$$\Rightarrow NQ=6/4 \Rightarrow NP=6/4+3/6=10 \Rightarrow$$

$$MP^2=\sqrt{NP^2-MN^2}=\sqrt{100-64}=\sqrt{36}=6$$

۶. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا $MN\|BC$ و مثلث AMN با مثلث ABC متشابه و نسبت مساحتشان برابر $\frac{1}{4}$ است. بنابراین :

$$S_{AMN}/S_{ABC}=\frac{1}{4} \Rightarrow S_{MNCB}/S_{ABC}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MNCB}/S_{AMN}=\frac{3}{4}/\frac{1}{4}=3$$

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا با استفاده از قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{x+4}{x}=\frac{10}{5}=\frac{y}{3} \Rightarrow x=4\ ,\ y=6 \Rightarrow 2x-y=2$$

۸. گزینهٔ (۴) صحیح است. سهم شش‌ضلعی منتظم برابر $10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ است. از آن‌جا :

$= \frac{1}{2}\times 6\times 10\times 5\sqrt{3} = 150\sqrt{3}$ مساحت شش ضلعی منتظم

$\Rightarrow$ مساحت دو قاعده $= 300\sqrt{3}$

مساحت جانبی $= 6\times 10\times 18 = 1080$

مساحت کل $= 1080 + 300\sqrt{3} = 60(18+5\sqrt{3})$

۹. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

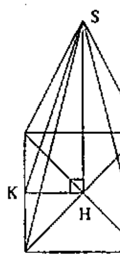
حجم مخروط جدید / حجم مخروط اولی =

$\frac{1}{3}\pi(2R)^2\times\frac{h}{2}\Big/\frac{1}{3}\pi R^2 h = 2$

۱۰. گزینهٔ (۳) صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $SHK(\hat{H}=90^\circ)$ داریم :

نصف ضلع مربع $HK=\sqrt{SK^2-SH^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

$\Rightarrow$ ضلع مربع $= 2\times 6 = 12$



● ریاضی ۵

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است. از تعریف اشتراک دو مجموعه نتیجه می‌شود.

۲. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$3-\sqrt{3} = 3-1/7 = 1/3 > 1 \Rightarrow f(3-\sqrt{3})$

$= \sqrt{3}+3-\sqrt{3} = 3$

$\sqrt{3}-1 = 1/7-1 = 0/7 < 1$

$\Rightarrow f(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}-(\sqrt{3}-1) = 1$

$\Rightarrow f(3-\sqrt{3}).f(\sqrt{3}-1) = 3\times 1 = 3$

۳. گزینهٔ (۴) صحیح است. با توجه به تعریف لگاریتم، جواب دستگاه نامعادلهٔ $\begin{cases}16-x^2>0\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}$ را باید به‌دست آوریم. داریم :

$16-x^2>0 \Rightarrow -4<x<4 \Rightarrow 0<x<4\ ,\ x\neq 1$

۴. گزینهٔ (۲) صحیح است. با توجه به تعریف ترکیب تابعها، داریم :

$(gof)(x) = g(f(x)) = (x+4)-4 = x$

$(fog)(x) = f(g(x)) = (x-4)+4 = x$

$\Rightarrow (gof)(x)-(fog)(x) = x-x = 0$

۵. گزینهٔ (۱) صحیح است. شرط پیوسته بودن تابع در $x=2$ آن است که $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$ باشد. بنابراین داریم :

$2a+1 = 11 \Rightarrow a = 5 (1)$ و $4a+2b-1 = 11 \Rightarrow$

$2a+b = 6(2) \Rightarrow b = -4 \Rightarrow 2a+b = 6$

نکته. در این تست، رابطهٔ (۲) جواب مسأله را مشخص می‌کند. بنابراین بدون محاسبهٔ b می‌توان گزینهٔ جواب را تعیین کرد.

۶. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$y = \frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} = \sqrt{2x+1} \Rightarrow y' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

نکته. اگر از تابع $y=\frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}$ (بدون تبدیل کردن آن) مشتق بگیریم، پس از ساده کردن جواب به‌دست آمده، همان نتیجهٔ بالا حاصل می‌شود.

۷. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$y = \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x} = \frac{(\cos x+\sin x)^2}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{1+\sin 2x}{\cos 2x} \Rightarrow$

$y' = \frac{2\cos^2 2x + 2\sin 2x(1+\sin 2x)}{\cos^2 2x} = \frac{2+2\sin 2x}{\cos^2 2x}$

$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{2+\sqrt{3}}{\frac{1}{4}} = 4(2+\sqrt{3})$

نکته. اگر بدون تبدیل نمودن تابع، مشتق بگیریم، داریم :

$y' = \frac{(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x-\sin x)^2} = \frac{2}{(\cos x-\sin x)^2}$

$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2})^2} = \frac{8}{4-2\sqrt{3}}$

$= \frac{4}{2-\sqrt{3}} = 4(2+\sqrt{3})$

۸. گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ اولاً. مختصات نقطهٔ عطف در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند، بنابراین داریم :

$(-1,2) \xrightarrow{\text{در تابع}} 2 = -1+a-b+2 \Rightarrow a-b = 1 \quad (1)$

ثانیاً. طول نقطهٔ عطف منحنی، ریشهٔ مشتق دوم تابع است ؛ پس :

$y' = 3x^2+2ax+b \Rightarrow y'' = 6x+2a \Rightarrow 0 = 6(-1)+2a$

$\Rightarrow a = 3 \ (2)$ و $(1),(2) \Rightarrow b = 2$

درنتیجه خواهیم داشت :

$a+2b = 3+4 = 7$

۹. گزینهٔ (۴) صحیح است. نمودار تغییرات این تابع، از ربع دوم دستگاه مختصات شروع و به ربع چهارم ختم می‌شود ؛ زیرا :

$\begin{vmatrix}x\to+\infty\\ y\to-\infty\end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix}x\to-\infty\\ y\to+\infty\end{vmatrix}$

از طرفی، نقطه‌های $(-1,-2)$ و $(1,2)$ نقطه‌های می‌نیمم و ماکزیمم آن هستند.

۱۰. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$x=1 \xrightarrow{\text{در تابع}} y=0 \Rightarrow N(1,0)$ پای قائم

$y = \frac{1}{x^2}-x \Rightarrow y' = \frac{-2}{x^3}-1 \Rightarrow$ مماس $m = \frac{-2}{(1)^3}-1 = -3$

$\Rightarrow$ قائم $m = \frac{1}{3} \Rightarrow y-y_1 = m(x-x_1)$

$\Rightarrow y-0 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 3y-x+1 = 0$ معادلهٔ خط قائم

● حسابان ۱

۱. گزینهٔ (۴)

$g(x) = \left\lfloor\frac{x^2}{x^2+1}\right\rfloor \qquad 0 \le \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \Rightarrow \left\lfloor\frac{x^2}{x^2+1}\right\rfloor = 0$

$\begin{cases}f(x)=0\\ g(x)=0\end{cases} D_f = D_g = R\ ,\ f(x)=g(x)$

۲. گزینهٔ (۴)

$f(x)=\sqrt{4-x} \quad D_f: x\le 4$

$g(x)=\sqrt{x-2} \quad D_g: x\ge 2$

$D_{fog} = \{x | x\in D_g, g(x)\in D_f\}$

$x\in D_g \Rightarrow x\ge 2$

$g(x)\in D_f \Rightarrow \sqrt{x-2}\le 4 \Rightarrow x-2\le 16 \Rightarrow x\le 18$

$D_{fog} = [2,18]$

۳. گزینهٔ (۱)

$f(x) = \log(\sqrt{1+x^2}-x)$

$f(-x) = \log(\sqrt{1+x^2}+x)$

$f(x)+f(-x) = \log(\sqrt{1+x^2}-x)+\log(\sqrt{1+x^2}+x)$

$f(x)+f(-x) = \log(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)$

$= \log(1+x^2-x^2) = \log 1 = 0$

$f(-x) = -f(x)$ تابعی فرد است f

۴. گزینهٔ (۱)

$x^2+(m-1)x-8 = 0$

دوطرف تساوی را در x'' ضرب می‌کنیم $x' = x''^2$

$x'\cdot x'' = x''^3 \Rightarrow \frac{c}{a} = x''^3 \Rightarrow -8 = x''^3 \Rightarrow x'' = -2$

$x'' = -2$ در معادله : $4+(m-1)(-2)-8 = 0 \Rightarrow$

$4-2m+2-8 = 0 \Rightarrow -2m-2 = 0 \Rightarrow m = -1$

۵. گزینهٔ (۳)

$f(x) = 2x^3+ax+b$

$f(-1) = -2 \Rightarrow -2-a+b = -2 \Rightarrow b = a$

$g(x) = 5x^2+2ax+2b$

$g(-1) = 5-2a+2b = 5$

۶. گزینهٔ (۱). درتابع با ضابطهٔ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$، اگر $a+d=0$ آن‌گاه، نمودار f بر نمودار f^{-1} منطبق است ؛ پس :

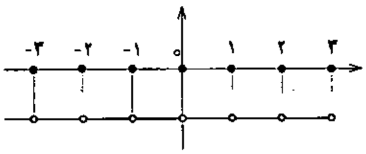
$y = \frac{(m-1)x+4}{2x-2m}$

$a+d = 0 \Rightarrow m-1-2m = 0 \Rightarrow m = -1$

۷. گزینهٔ (۱)

$f(x) = \lfloor x\rfloor+\lfloor -x\rfloor \Rightarrow f(x) = \begin{cases}0 & x\in Z\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$

اگرنمودار این تابع را رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که این تابع در تمام نقاط $\mathbb{R}$ حد دارد و حدّ آن برابر ۱- است.



۸. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2\sin^2 x}}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{2x^2}}{2x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x\sqrt{2}}{2x}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۹. گزینهٔ (۴)

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}$$

مجانب قائم $x=1$ است که چون داخل رادیکال را به عدد منفی تبدیل می‌کند، قابل قبول نیست.

$$x\to\pm\infty\Rightarrow \lim\frac{\sqrt{x^2-2}}{x-1}=\lim\frac{\pm x}{x}=\pm 1$$

پس $y=\pm 1$، معادلهٔ مجانب افقی است.

۱۰. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2}x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=[0^-]+b=-1+b$$

$$f(0)=a([0]+1)=a$$

$$-1+b=1\Rightarrow b=2\ ,\ a=1\ ,\ a+b=3$$

۱۱. گزینهٔ (۳)

$$\begin{cases} y=(\sqrt{4+x^2}-x)^{10} \\ z=(\sqrt{4+x^2}+x)^{10}\end{cases}\Rightarrow y.z=(4+x^2-x^2)^{10}$$

از دو طرف تساوی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$y.z=4^{10}$$

$$y'_x.z+z'_x.y=0$$

۱۲. گزینهٔ (۴) $f(x)=(x-4)\underbrace{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)}_{u(x)\ \text{فرض می‌شود}}$

$$f(x)=(x-4)u(x)\Rightarrow f'(x)=u(x)+u'(x)(x-4)$$

$$f'(4)=u(4)=4(3)(2)(1)(-1)=-24$$

● ریاضیات گسسته

۱. گزینهٔ (۲) صحیح است: زیرا در هر درخت، رابطهٔ $p=q+1$ بین تعداد رأسها (p) و تعداد یالها (q) برقرار است و چون $p|7^{11}$، پس باید $p|7$؛ یعنی $p=1$ یا $p=7$، که طبق فرض p اوّل است: بنابراین $p=7$ و در نتیجه $q=6$ و $\sum \deg V_i=2q=12$.

۲. گزینهٔ (۴) صحیح است: زیرا p و q هر دو عدد اوّل و در هر درخت داریم $p-q=1$ و تنها دو عدد اوّلی که متوالی هستند، ۳ و ۲ می‌باشند: یعنی $p=3$ و $q=2$ و در نتیجه:

$$p^2+q^2=9+4=13$$

۳. گزینهٔ (۱) صحیح است: زیرا p و q در رابطهٔ $p-q=1$ صدق می‌کنند؛ بنابراین p و q دو عدد صحیح و متوالی بوده و همواره $(p,q)=1$ و داریم:

$$(p,q)=1\Rightarrow(p^2,q^2)=1\Rightarrow(p^2q^2,p^2\pm q^2)=1$$

(اگر دو عدد نسبت به هم اوّل باشند، حاصلضرب و مجموع (و تفاضل) آن دو عدد نیز نسبت به هم اوّلند.)

۴. گزینهٔ (۱) صحیح است: زیرا تعداد عاملهای عدد اوّل p در $n!$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\dots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\dots+0+0+\dots$$

([ ] نماد جزء صحیح است.)

بنابراین k به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$k=\left[\frac{50}{7}\right]+\left[\frac{50}{49}\right]+0+0+\dots=7+1=8$$

$$\Rightarrow p(\text{مجموع دو تاس ۸ باشد})=\frac{5}{36}$$

$$(A=\{(5,3)(3,5),(2,6)(6,2),(4,4)\})$$

۵. گزینهٔ (۴) صحیح است: زیرا باقیماندهٔ تقسیم $(14)^{1802}$ بر عدد ۱۹ به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$(14,19)=1\overset{\text{تعمیم فرما}}{\Longrightarrow}14^{18}\overset{19}{\equiv}1\Rightarrow(14^{18})^{100}\times 14^2\overset{19}{\equiv}1^{100}\times 14^2$$

$$\Rightarrow 14^{1802}\overset{19}{\equiv}196\overset{19}{\equiv}6\Rightarrow r=6$$

و تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $(x_1+x_2+x_3=6)$، برابر است با $\binom{8}{2}$، که $\binom{8}{2}=28$.

۶. گزینهٔ (۲) صحیح است: زیرا باید تعداد اعداد بین ۱ تا ۲۱۰۰ را که بر ۵ و بر ۳ بخش‌پذیر نیستند، محاسبه کرده و بر تعداد کل اعداد تقسیم کنیم، تا احتمال موردنظر محاسبه شود و طبق اصل رد و شمول، تعداد این اعداد، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A_1=\text{مضارب ۳}\Rightarrow|A_1|=\frac{2100}{3}=700$$

$$A_2=\text{مضارب ۵}\Rightarrow|A_2|=\frac{2100}{5}=420$$

$$\Rightarrow|A_1\cap A_2|=\frac{2100}{[5,3]}=\frac{2100}{15}=140$$

$$\Rightarrow|\overline{A_1\cup A_2}|=2100-|A_1\cup A_2|$$

$$=2100-(700+420-140)=1120$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{1120}{2100}=\frac{56}{105}$$

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است: زیرا:

$$42=2\times3\times7\Rightarrow\varphi(42)=42\times(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{7})$$

$$\Rightarrow\varphi(42)=42\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{7}=12$$

بنابراین $32=12+20$، رابطه طبق فرض روی A تعریف می‌شود که هم تقارنی و هم پادتقارنی هستند. که البته اگر رابطه‌ای هر دو خاصیت تقارنی و پادتقارنی را دارا باشد، باید زیرمجموعهٔ رابطهٔ همانی، یعنی I باشد: یعنی به تعداد زیرمجموعه‌های I می‌توان چنین رابطه‌هایی تعریف کرد و چون تعداد این زیرمجموعه‌ها $32=2^5$ است، پس I دارای ۵ عضو است و اعضای I نیز با اعضای A برابرند!

$$(A=\{2,4,6\}\Rightarrow I=\{(2,2),(4,4),(6,6)\})$$

۸. گزینهٔ (۱) صحیح است: زیرا با توجه به تعریف رابطهٔ (≪) در مجموعهٔ ماتریسهای مجاورت، (درآیه‌ها صفر و یک هستند) تعداد جوابهای معادلهٔ $X\ll A$ که A ماتریس مفروضی باشد، برابر است با $2^{(\text{تعداد صفرهای A})}$، که در این تست، این تعداد برابر است با $64=2^6$، که در بین همهٔ این ۳۲ ماتریس، فقط یک ماتریس مساوی با I_3 وجود دارد، پس احتمال موردنظر برابر است با $\frac{1}{64}$.

(در معادلهٔ $X\ll A$ درآیه‌های متناظر با هر درآیهٔ یک در A برای ماتریس X باید ۱ باشند و به ازای صفرهای A برای هر درآیهٔ متناظر در X، دو حالت ۰ یا ۱ وجود دارد.)

۹. گزینهٔ (۴) صحیح است: زیرا طبق فرض $sp-rq=1$، پس $(p,q)=1$ و چون $pq=40$، پس $p=5$ و $q=8$ و مجموع درجه‌های رأسهای گراف G، برابر است با $2q=2\times8=16$.

● حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱. گزینهٔ (۴)

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\dots\times2}^{n\ \text{مرتبه}}}{1\times2\times3\times\dots\times n}<\frac{2}{1}\times\frac{2}{2}\times1\times1\times\dots\times\frac{2}{n}$$

$$0<\frac{2^n}{n!}<\frac{4}{n},\ \lim_{n\to\infty}(0)<\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}<\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\Rightarrow 0<\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}<0$$

پس:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0$$

۲. گزینهٔ (۱)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}-\frac{(-1)^k}{k}\right)\ ,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}-\frac{(-1)^k}{k}\right)$$

با فرض $f(k)=\frac{(-1)^k}{k}$، $S_n=f(n+1)-f(1)=\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+1$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1$$

۳. گزینهٔ (۴)

$$x^2-2x>N\Rightarrow(x-1)^2>N+1\Rightarrow\underset{x\to+\infty\Rightarrow|x-1|=x-1}{|x-1|>\sqrt{N+1}}$$

$$x-1>\sqrt{N+1}\Rightarrow x>\sqrt{N+1}+1\qquad M\geq\sqrt{N+1}+1$$

۴. گزینهٔ (۴). $(2n-1)$ عددی است فرد. معادله با درجهٔ $(2n-1)$، حداکثر $(2n-1)$ ریشهٔ حقیقی و حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۵. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{7x^2-1}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{7(x^2+1)-8}{x^2+1}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(7 + \left[\frac{-8}{x^2+1}\right]\right)$$

$$= 7 + [0^-] = 7 - 1 = 6$$

۶. گزینهٔ (۳)

$$x \to 0 \Rightarrow \sin x \sim x \ , \ \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{x^2} = \lim_{x\to 0^+} (x)^{x^2}$$

$$y = x^{x^2} \Rightarrow Lny = x^2 Lnx = \frac{Lnx}{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{Lnx}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \ , \ H: \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$

$$Lny = 0 \Rightarrow y = e$$

۷. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2 + a$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1 + 2b$$

$$f(2) = 0 \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ 1+2b=0 \Rightarrow b=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b = -\frac{5}{2}$$

۸. گزینهٔ (۳)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3-6}{x-2}}$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-6 & x-2 \\ \hline 2 & x^2+2x+4 \end{array}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+2x+4+\frac{2}{x-2}} \underset{x\to\pm\infty}{=} \pm(x+1) \text{ یا } y = \pm(x+1)$$

۹. گزینهٔ (۲). حدّ این کسر برابر $f''(\frac{\pi}{4})$

$$f'(x) = 2\cos 2x \Rightarrow f''(x) = -4\sin 2x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})$$

$$= -4\sin\frac{\pi}{2} = -4$$

۱۰. گزینهٔ (۳). منحنی f' محور xها را در یک نقطه قطع کرده است، پس تابع f یک اکسترمم نسبی دارد. پیش از نقطهٔ A، مشتق منفی و بعد از نقطهٔ A، مشتق مثبت است؛ پس نقطهٔ A مربوط به نقطهٔ می‌نیمم نسبی تابع f است.

۱۱. گزینهٔ (۳). داریم:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$f'(x) = f(x)$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow (f^{-1})'(2x) = \frac{1}{2x}$$

۱۲. گزینهٔ (۲)

$$2y^2 - 3y - x^2 + 4x = 5 \qquad \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ x'_t = \frac{2}{10} \end{cases}$$

$$y'_t = -\frac{(-2x+4)x'_t}{4y-3}$$

$$y'_t = -\frac{(-2+4)\frac{2}{10}}{8-3} = -\frac{\frac{4}{10}}{5} = -\frac{2}{25}$$

● ریاضی عمومی ۱

۱. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا رابطهٔ بین درجهٔ حرارت برحسب سانتیگراد و فارنهایت، به‌صورت $F = 1/8C + 32$ است، بنابراین، طبق دستور $\delta^2_{ax+b} = a^2\delta^2 x$ خواهیم داشت:

$$\delta^2_F = \delta^2_{1/8C+32} = (1/8)^2\delta^2 C = (1/8)^2 \times 5^2$$

$$\Rightarrow \delta_F = 1/8 \times 5 = 9$$

۲. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا اگر قرار باشد اولین مهرهٔ سبز، سومین مهره باشد، پس مهره‌های اول و دوم سفید هستند؛ بنابراین:

$$P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C) = \frac{5}{14}\times\frac{5}{14}\times\frac{9}{14} = \frac{225}{14^3}$$

۳. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\cap\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\overline{A\cup B})}{P(\bar{B})} = \frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}$$

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{1-\frac{7}{12}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8}$$

۴. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ b-1=0 \Rightarrow b=1 \end{cases} \Rightarrow -a = b = 1$$

۵. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$t_k = (-1)^{k+1} \times \binom{4}{k-1} (2x)^{4-k+1} (3x^2)^{k-1}$$

$$ax^6 = (-1)^{k+1}\binom{4}{k-1} \times (2)^{5-k} \times (3)^{k-1} \times x^{k+3}$$

$$\Rightarrow k+3 = 6 \Rightarrow k = 3 \ ;$$

$$(\text{ضریب } x^6) \ a = (-1)^{3+1}\binom{4}{3-1} \times (2)^{5-3} \times (3)^{3-1}$$

$$= \binom{4}{2} \times 2^2 \times 3^2 = 216$$

۶. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا در یک تابع، مجانب افقی در صورتی به‌دست می‌آید که حاصل $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ یک عدد حقیقی باشد:

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x+2} - 3 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{e^{x-2}} - 3 = -3 \Rightarrow y = -3 \ \text{مجانب افقی}$$

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\lim_{x\to+\infty} (1-\frac{3}{x})^x = \lim_{x\to+\infty} \left(\left[1+(-\frac{3}{x})\right]^{\frac{x}{-3}}\right)^{-3} = e^{-3}$$

۸. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$u_n = \frac{n^2+3}{n^2+1} = \frac{(n^2+1)+2}{n^2+1} = 1+\frac{2}{n^2+1} > 1$$

$$\Rightarrow u_n > 1 \ (n\in N)$$

۹. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$y = x^{e^x} \Rightarrow \ln y = \ln x^{e^x} \Rightarrow \ln y = e^x \ln x \Rightarrow y = e^{e^x \ln x}$$

$$y' = (e^x \ln x)' e^{e^x Lnx} = (e^x \ln x + \frac{e^x}{x}) x^{e^x}$$

$$y'(1) = (e\ln 1 + e) = e$$

۱۰. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا ابتدا خط و منحنی را قطع داده (yها را مساوی قرار می‌دهیم)، سپس دلتای معادلهٔ درجهٔ دو حاصل را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x+m \\ y = x^2-x \end{cases} \Rightarrow x^2 - x = x+m \Rightarrow x^2 - 2x - m = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-m) = 0 \Rightarrow 4+4m = 0 \Rightarrow m = -1$$





جوابهای تفریح اندیشه

جوابهای تفریح اندیشه
جوابهای تفریح اندیشه
جوابهای تفریح اندیشه
جوابهای تفریح اندیشه

پاسخ ۱:

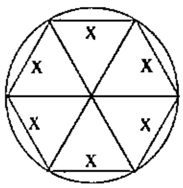
جواب: ۱

حل: قطر چرخ عقب (۲۵)۲:۱۲۵ یا $\frac{۵}{۲}$ قطر چرخ جلو است.

در نتیجه، $\frac{۲}{۵}$ تعداد دورهای هر ثانیه را تشکیل می‌دهد، و :

$$\left(\frac{۲}{۵}\right)\left(\frac{۵}{۲}\right)=۱$$

پاسخ ۲:



جواب : ۴ متر

حل: با استفاده از نقطه‌ای در مرکز دایره، شش‌ضلعی موردبحث دقیقاً به شش‌مثلث متساوی‌الاضلاع برابر تقسیم می‌شود. در صورتی که طول ضلع یکی از این مثلثها x باشد، ارتفاع آن $(x/۲)\sqrt{۳}$ یا $x\sqrt{۳}/۲$ متر است. بنابراین، مساحت چمن توسط رابطهٔ مقابل به‌دست آمده است :

$$۶(\frac{۱}{۲})(x)(\frac{x\sqrt{۳}}{۲})=\sqrt{۱۰۸}$$

$$\frac{۳\sqrt{۳}x^{۲}}{۲}=\sqrt{۱۰۸}=۶\sqrt{۳}$$

$$۳x^{۲}=۱۲$$

و از آن‌جا که $x>۰$ ، $x=۲$. قطر باغ $۲x$ یا ۴ متر است.

پاسخ ۳:

جواب: ۸، ۵۳ و ۵۴.

حل: بر هر ورق، چهار صفحه موجود است. با شروع از ابتدا و انتها، صفحه‌های ۱ و ۲ با ۵۹ و ۶۰ یک ورق را تشکیل می‌دهند. همین‌طور ۳ و ۴ با ۵۷ و ۵۸، ۵ و ۶ با ۵۵ و ۵۶، ۷ و ۸ با ۵۳ و ۵۴. در نتیجه، صفحه‌های ۷ و ۸ و ۵۳ و ۵۴ سفیدند.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه



تقارن جبری و ضریبهای نامعین

مؤلف: پرویز شهریاری/ ناشر: انتشارات مدرسه

کتاب تقارن جبری و ضرایب نامعین بیست و دومین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. در این کتاب تنها به جنبهٔ ناچیزی از مفهوم تقارن پرداخته است. «تقارن در عبارتهای جبری» ولی حتی این جنبهٔ ناچیز هم گسترده‌تر از آن است که بتوان در بخشی از یک کتاب به آن پرداخت. به همین جهت، تلاش شده است چه در متن و چه ضمن حل تمرینها، اساسی ترین ویژگیهای عبارتهای متقارن و روشهای استفاده از آنها برای حل مسأله های محاسبه ای، بیاید. تسلط بر ویژگیهای عبارتهای متقارن، در بسیاری حالتها، نیروی لازم را برای حل مسأله در اختیار ما می گذارد. مطالعهٔ این کتاب را به همهٔ دانش آموزان و دانشجویان تربیت معلم و دبیران توصیه می کنیم.

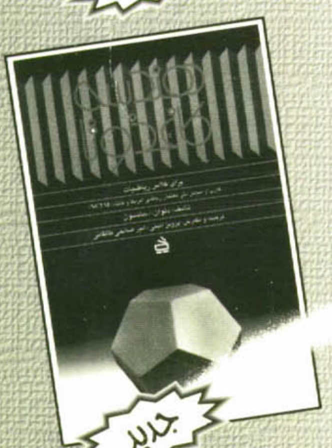


استقرای ریاضی

مؤلف: پرویز شهریاری/ ناشر: انتشارات مدرسه

کتاب استقرای ریاضی بیست و یکمین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است. یکی از انواع استدلالهای ریاضی، استقرای ریاضی است؛ با این نوع استدلال بسیاری از مسائل پیچیده ریاضی را می توان به سادگی حل کرد. در این کتاب، مؤلف محترم با شیوه ای روان، کاربرد این نوع استدلال را در حل مسائل به کار برده است.

مطالعهٔ این کتاب را به همه دانش آموزان و دبیران و علاقه مندان به ریاضی توصیه می کنیم.



هندسه کاغذ و تا

مؤلف: دنوان. ا. جانسون/ ترجمه و نگارش: پرویز امینی ـ امیر صالحی طالقانی/ ناشر: انتشارات مدرسه

این کتاب برای استفاده معلمان و دانشجویان پویا و کوشای تربیت معلم که به دنبال راه های جدیدی در آموزش مفاهیم ریاضی هستند در نظر گرفته شده است. اما دانش آموزان دوره دبیرستان و علاقه مندان دوره راهنمایی نیز می توانند از این کتاب بهره مند شوند. در بیان مطالب این کتاب از یک یا چند شکل استفاده شده است. یک برگ کاغذ و مداد تنها ابزاری هستند که برای فعالیتهای این کتاب نیاز دارید. فعالیتهای این کتاب برای دانش آموزان درس هندسه بسیار جالب خواهد بود.

ابونصر عراق (ابونصر جَعدی)*

ابونصر منصور بن علی بن عراق جیلانی

ریاضیدان و منجم معروف ایرانی (؟ ـ بین ۴۰۸ و ۴۲۷)

از خاندان آل عراق و از مشاهیر ریاضیدانان و منجم عصر خود و استاد ابوریحان بیرونی بود. در نیمهٔ دوم سدهٔ چهارم و اوایل سدهٔ پنجم در «خوارزم» می زیست و نوشته اند که در نقاشی مهارت داشته است.

در چند مأخذ و از جمله در *دایرة المعارف اسلام*، نسبت جیلانی (= گیلانی) برای او ذکر شده است؛ ولی در «*طبقات الشافعیة*»، به جای «جیلانی» نسبت «الجعدی» نوشته شده است. ظاهراً «جعدی» لقب ابونصر عراق بوده است.

ابونصر عراق با «ابوعلی سینا» معاصر بود و مدتی با او در دربار مامونیان می زیست. بین کسانی که مدّعی کشف «شکل مغنی» (= قضیهٔ سینوسها در مثلث کروی و مسطح) بوده اند، به قول بیرونی، حقّ تقدم با ابونصر عراق بوده است.

این که بعض مؤلّفان، ابوالوفای بوزجانی را استاد ابونصر عراق دانسته اند، درست نیست. مأخذ این اظهارنظر، ظاهراً این بوده که ابونصر عراق در مقدمهٔ رسالهٔ «*القسی الفلکیه*» از بوزجانی با عنوان «شیخنا» نام برده است. اما بیرونی در کتاب *مقالید «علم الهیئة»* نوشته است که ابونصر عراق، گاهی حتی کسانی را که در مرتبهٔ علمی از او پایین تر هستند، استاد خود می نامد. بنابراین، ذکر عنوان «شیخنا» که ابونصر همراه نام بوزجانی ذکر کرده است، دلیل این نمی تواند بود که بوزجانی معلم ابونصر بوده است. گذشته از این، می دانیم که بوزجانی در سنّ بیست سالگی به بغداد رفته و ابونصر عراق ظاهراً هرگز به بغداد مسافرت نکرده است.

ابونصر عراق در ریاضیات و نجوم دارای تألیفات نفیسی است که چند کتاب از آنها باقی است و متأسفانه تعدادی از آنها از بین رفته است، که از آن جمله است *تهذیب التعالیم* و *مجسطی شاهی*. آثار ریاضی و نجومی او همواره مورد استفادهٔ دانشمندان بوده است.

«حکیم عمر خیّام» در یکی از رسایل خود ابونصر عراق را در جزو ردیف اوّل و طبقهٔ عالی علمای ریاضی برشمرده است.

بعضی از آثار ریاضی موجود وی

۱ ـ *رسالة فی حل شبهة عرضت له فی المقالة الثالثة عشر من کتاب الاصول*

این رساله را ابونصر عراق، در جواب شاگرد خود بیرونی نوشته است و موضوع آن رفع شبهه ای است که دربارهٔ مقالهٔ سیزدهم کتاب *اصول اقلیدس* روی داده بوده است.

۲ ـ *اصلاح کتاب مانالاوس فی الاشکال الکریة*

این کتاب را ابونصر عراق در سال ۳۹۸ به پایان رسانیده. در سال ۱۹۳۶ میلادی «ماکس کراوزه» متن عربی این کتاب را با ترجمه و تفسیر آن و با مقدمه ای جامع و محققانه به زبان آلمانی منتشر کرد.

۳ ـ *رسالة فی معرفة القسی الفلکیة بعضها من بعض بطریق غیر طریق معرفتها بشکل القطاع و النسبة المؤلفة*

موضوع این رساله، اثبات «شکل مغنی» یعنی رابطهٔ سینوسها در مثلث کروی و مثلث مسطح است.

۴ ـ *رسالة فی الجواب عن بعض مسائل الهندسة*

این رساله را نیز ابونصر عراق در جواب بیرونی نوشته است و مشتمل بر پانزده مسألهٔ هندسی مختلف و حلّ آنهاست.

* برگرفته از کتاب زندگی‌نامه ریاضیدانان دورهٔ اسلامی / ابوالقاسم قربانی / نشر دانشگاهی

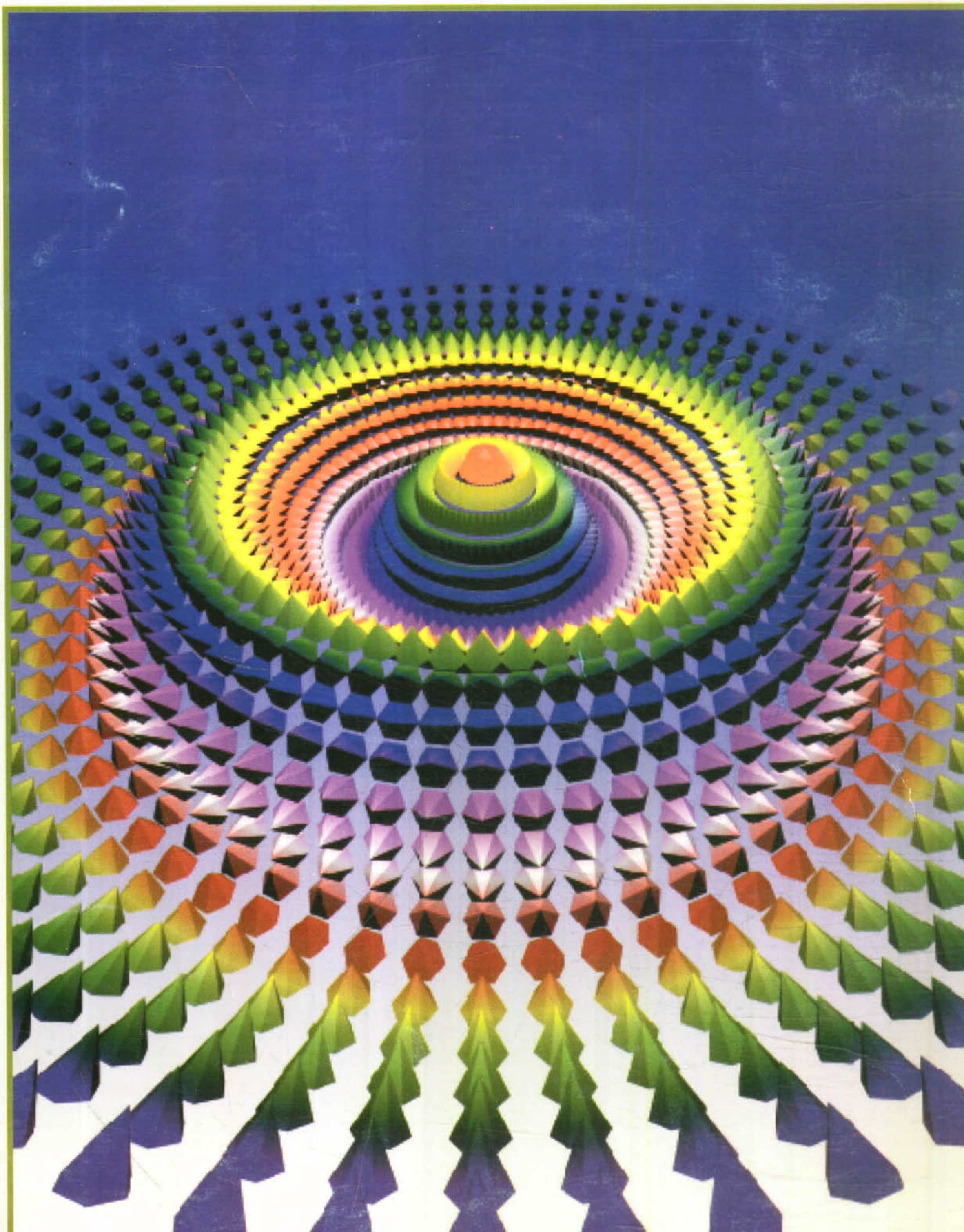
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۳۲

سال دهم ، شماره اول ، بهار و تابستان ۱۳۷۹ ، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

سال دهم، بهار و تابستان ۱۳۷۹، شمارهٔ اوّل

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

مدیر مسؤول: عبدالعظیم فریدون

سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی: میرشهرام صدر

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)

مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی

چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

برهان

● حرف اول/ سخن سردبیر	۱
● از تاریخ بیاموزیم/ پرویز شهریاری	۲
● در حاشیه مثلثات (قسمت چهارم)/ احمد قندهاری	۸
● روش از سرگیری/ عبدالحسین مصحفی	۱۴
● فضاهای برداری/ حمیدرضا امیری	۲۱
● گشت و گذاری در ریاضیات معاصر/ غلامرضا یاسی پور	۲۵
● آنالیز ترکیبی/ میرشهرام صدر	۳۰
● در باغ تجربه ها/ گفتگو با استاد معیری	۳۶
● مکان هندسی (۲۱)/ محمدهاشم رستمی	۴۰
● پوریسم/ دکتر احمد شرف الدین	۴۴
● کاربردهای انتگرال/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی	۴۹
● نقش شهود در ریاضیات دبیرستانی/ سیدحسین سیدموسوی	۵۵
● تابعهای صعودی و نزولی/ محمدصادق عسگری	۵۹
● راموناجان/ احمد قندهاری	۶۳
● درک شهودی/ علیرضا عین اللهی	۶۵
● معماهایی با ماهیت ریاضی	۶۸
● آموزش برنامه نویسی به زبان پاسکال (۶)/ محمد رحیم	۷۴
● آنچه از دوست رسد...	۷۷
● مسائل برای حل	۷۹
● جواب تفریح اندیشه	۸۸

نشانی: خیابان سپهبدقرنی، خیابان سپند شرقی، پلاک ۳۸

تلفن ۶-۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱-۸۸۰۴۵۶۸، دور نویس (فاکس): ۸۸۲۰۵۹۹، صندوق پستی: ۱۹۴۹/ ۱۴۱۵۵

تلفن امور مشترکین: ۹-۸۸۰۰۳۲۴

انتشارات مدرسه
وابسته به وزارت آموزش و پرورش

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می شود

■ هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.

■ مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.

■ مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

■ مقاله های رسیده مسترد نمی شود.

■ استفاده از مطالب مجلّه در کتابها یا مجلّه های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اوّل

به نظر شما مربّی و معلّم چگونه باید ارزشیابی کند؟ آیا جز با امتحان گرفتن راه دیگری هم سراغ دارید؟

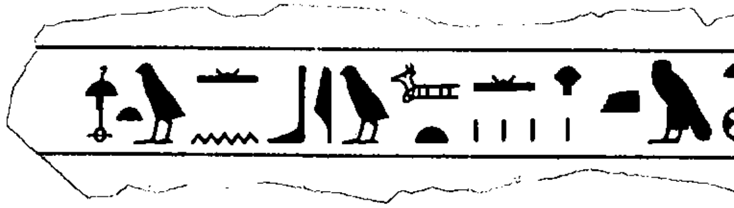
ارزشیابی، شفاهی یا کتبی باشد، مهم نیست. آنچه اهمیت دارد این است که برای تشخیص و متمایز کردن دانش‌آموز پرتلاش و درس‌خوان از دانش‌آموز بی‌توجه و کم کار، باید معیاری صحیح وجود داشته باشد. حتی وقتی مربّی و معلّم از حال دانش‌آموزانش باخبر است، می‌داند کدام یک در امتحان موفق و کدام ناموفق هستند باز هم امتحان می‌گیرد تا حجّت را تمام کرده باشد. آیا این امتحان فقط به دانش‌آموز، دانشجو، کتاب و درس اختصاص دارد؟ قطعاً چنین نیست ؛ زیرا انسان همواره در تمامی مراحل زندگی از زمانی که خوب و بد را تمیز می‌دهد از سوی پروردگار عالم، در بوتهٔ امتحان و آزمایش قرار دارد[1]. آزمون الهی، آزمونی عادلانه است که به روشهای مختلف انجام می‌گیرد و ما باید همیشه و در همه حال، خود را برای آزمونهای الهی آماده سازیم و البته هر کس به اندازهٔ توانایی‌اش، آزمایش می‌شود[2]. خداوند بلندمرتبه و والا، معلّمی عادل است و از همهٔ فصلهای کتاب آفرینش و همهٔ بخشهای زندگی امتحان خواهد گرفت و همهٔ اعضای ما در این امتحان شرکت دارند. امتحان چشم ما، دست ما، زبان ما، قلب ما، نیّت ما و محبّت ما به او هرکدام در جایگاه خود و در برهه‌ای از زمان صورت خواهد گرفت. معلمان این کلاس عظیم الهی، پیامبر اکرم(ص) و معصومین علیهم السلام هستند که اسوهٔ زندگی ما و چراغ هدایت بشرند.

خوشا به حال شما عزیزان که با مطالعه و پژوهش در سیرهٔ ایشان و عمل به آن در امتحان الهی سرفرازید و موجبات خشنودی و رضای پروردگار خویش را فراهم آورده‌اید. آفرین بر پیروان راستین مکتب سرخ ولایت که **انتظار** را سرلوحهٔ امتحان خود قرار داده و با تمام وجود از این امتحان لذّت می‌برند و ان‌شاءا... سربلند از آن بیرون خواهند آمد.

والسلام - سردبیر

۱ـ «وَلَنَبْلُوَنَّكُمْ بِشَيْءٍ مِنَ الْخَوْفِ وَ الْجُوعِ وَ نَقْصٍ مِنَ الْأَمْوالِ و الْأَنْفُسِ وَ الثَّمَرات...
سورهٔ بقره/ آیهٔ ۱۵۵
«و هر آینه شما را به چیزی از بیم و گرسنگی و کاهش ثروتها و جانها و میوه‌ها می‌آزماییم...»

۲ـ «لاتُكَلَّفُ نَفسٌ إلّا وُسْعَها ...» سورهٔ بقره/ آیهٔ ۲۳۳
«هیچ کس بیش از توانش مکلف نیست...»



از تاریخ بیاموزیم (٦)

● پرویز شهریاری

ریاضیات در مصر باستان (از بوریس بولگارسکی)



دوران تمدن مصر و شکوفایی آن، به زمانی مربوط می‌شود که از ما بسیار دور است. یادگارهای فرهنگ ریاضی مصر، که از سده‌های پنجم و چهارم پیش از میلاد هم عقبتر می‌رود، به ما یاری می‌دهد بتوانیم تصور روشنی از دانش ریاضی آن زمان مصر داشته باشیم.

قلمرو مصر باستان، چندان تفاوتی با سرزمین امروزی مصر ندارد. در آن زمان هم، مثل امروز، مردم مصر در کناره‌های پایین و میانهٔ رود نیل، یکی از طولانیترین رودها در جهان، زندگی می‌کردند. از سه هزار سال پیش از میلاد، با اتحاد حکومتهای زیادی که در سرزمین مصر بودند، حکومت متمرکزی پدید آمد که با نظام برده‌داری اداره می‌شد. اگر در آغاز، ساکنان مصر به شکار، ماهیگیری و دامپروری می‌پرداختند، بتدریج و درنتیجهٔ ساکن شدن قومهای کوچ‌نشین در مرکزهای حاصلخیز، کشاورزی رونق گرفت و بتدریج به یکی از مهمترین کارها تبدیل شد. پیشرفت موفقیّت‌آمیز کشاورزی، نتیجه‌ای از شرایط طبیعی درهٔ حاصلخیز رود نیل بود. در هر سال، در فاصلهٔ اردیبهشت تا شهریور ماه، رود نیل طغیان می‌کرد و بعد از فرو نشستن آب، گل و لای فراوانی که شامل مواد معدنی و گیاهی بود، در کناره‌های رود باقی می‌گذاشت که موجب باروری زمینهای کشاورزی، بویژه برای کشت گندم بود. همین وضع، موجب شد تا مصریها، کشاورزی را به‌عنوان جدی‌ترین کار خود بدانند. ولی با فرو نشستن آب نیل، زمینهای غنی و حاصلخیز بدون آب می‌ماندند؛ زیرا دوره‌ای از سال آغاز می‌شد که در آن، باران بسیار کم می‌بارید. این وضع مصریها را وادار به ساختن آبهایی برای آبیاری مصنوعی کشتزارها کرد که در زمان خود، بسیار پیچیده بود؛ به‌جز این، در شبکهٔ آبیاری مصریها، آب‌انبارهایی هم پیش‌بینی شده بود.

در کنار کشاورزی، پیشه‌وری و کارهای کارگاهی هم رشد می‌کرد؛ مانند کوزه‌گری، جواهرسازی و پارچه‌بافی. به‌جز این، حرفهٔ سنگتراشی هم بسیار پیشرفته بود و ابزارهای کشاورزی، نجّاری، سلاح و ظرف را از سنگ می‌ساختند. از سنگ برای ساختمانها، مقبره‌ها و نیایشگاه‌ها هم استفاده می‌کردند. سنگ را مصریها در سرزمین خود داشتند؛ ولی مواد لازم را برای جواهرسازی و وسیله‌های خانگی (مثل طلا، سرب، مس و بعدها آهن) از کشورهای همسایه تهیه می‌کردند؛ از شمال سودان، از جزیرهٔ قبرس، از شبه‌جزیرهٔ سینا، از کرانه‌های دریای سرخ و غیره. نیاز به مواد خام سرزمینهای دور و تمایل به فروش کالاهای خود، بازرگانی را بسرعت گسترش داد و حرکت کاروانها، چه در خشکی و چه در رودخانه یا دریا قطع نمی‌شد. کاروانهای دریایی، مسیر خود را از طریق کرانه‌های دریای سرخ و کناره‌های آسیایی دریای مدیترانه انجام می‌دادند.

همان‌طورکه دربارهٔ سرزمین بابل دیدیم، در این‌جا هم، پیشرفت کشاورزی، کارهای کارگاهی و بازرگانی، مشاهده و آزمایش برخی خصلتهای علمی پدیده‌ها را به همراه داشت که به نوبهٔ خود، موجب جمع شدن آگاهیهایی در زمینهٔ دانشهای طبیعی، جغرافیا، اخترشناسی و ریاضیات شد.

عامل اصلی پیشرفت کشاورزی در مصر، وجود رود نیل و طغیانهای آن بود که به‌نوبت و در زمانهای معینی از سال رخ می‌داد.

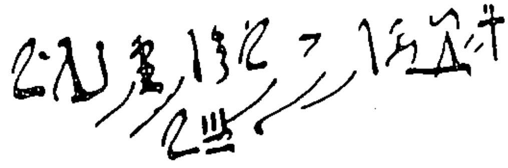


این پدیده، مصریها را ناچار کرد، به‌نحوی حساب زمان را داشته باشند و از آن‌جا که تغییر زمان به حرکتِ (ظاهری) ستارگان مربوط بود، مصریها به بررسی سیّاره‌ها پرداختند و فاصلهٔ زمانی بین طلوع و غروب آنها را زیرنظر گرفتند و متوجه شدند اوّل طلوع ستارهٔ کاروان‌کش (شِعرای یمانی) با آغاز بالا آمدن آب رود نیل همراه است. به همین مناسبت، مصریها فاصلهٔ زمانی بین دو طلوع این ستاره را، که ۳۶۵ روز بود، به‌عنوان سال انتخاب کردند. سال را به دوازده ماهِ ۳۰ روز تقسیم کردند و به پایان سال، پنج روز افزودند و این پنج روز را جشن می‌گرفتند. شبانه‌روز به ۲۴ ساعت تقسیم می‌شد؛ ۱۲ ساعت روز و ۱۲ ساعت شب. ساعت روزانه $\frac{۱}{۱۲}$ فاصلهٔ طلوع تا غروب خورشید و ساعت شبانه $\frac{۱}{۱۲}$ فاصلهٔ غروب تا طلوع خورشید بود و به همین دلیل، طول یک ساعت روز با طول یک ساعت شب، اغلب فرق داشت. البته اختلاف ساعت روز با ساعت شب، چندان زیاد نبود؛ زیرا در نزدیکیهای استوای کرهٔ زمین، طول روز با طول شب، تقریباً برابر است. برای تعیین وقت در طول روز، از ساعت آفتابی استفاده می‌کردند؛ ولی از حدود ۱۵۰۰ سال پیش از میلاد، ساعتهای آبی معمول شد که برای تعیین وقت، هنگام شب هم می‌شد از آنها استفاده کرد. اساس ساعت آبی، ظرفی بود که در ته آن سوراخی وجود داشت. این ظرف را پر از آب می‌کردند و آب بتدریج از سوراخ کف آن خارج می‌شد. فاصلهٔ زمانی خارج شدن تمام آب از ظرف، یک واحد زمان بود.

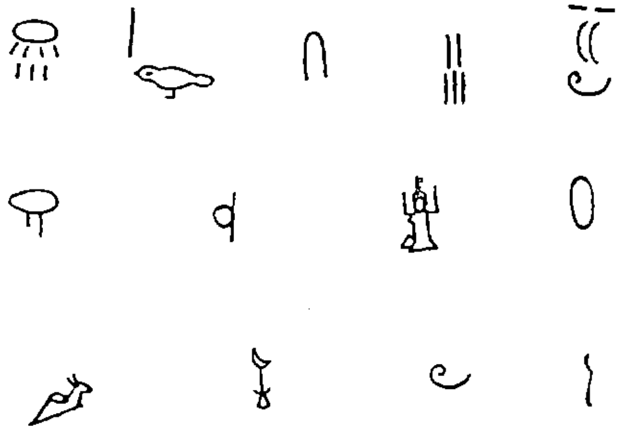
مصریها، برای ساختن نیایشگاه‌های بزرگ، برای برپاداشتن هرمهای مشهور، برای کار مربوط به آبراه‌های پیچیده و همچنین برای بازسازی مرزهای زمینهای کشاورزی (که با هر طغیان رود از بین می‌رفت) نیاز به محاسبه و اندازه‌گیری داشت؛ همین نیازها مصریها را برای تسلّط بر محاسبه و برای آشنایی شکلها و مفهومهای هندسی آماده کرد.

آغاز پیدایش فرهنگ مصر، به چهار هزار سال پیش از میلاد می‌رسد. گمان می‌رود که آغاز خط مصری هم مربوط به همین زمان باشد. این خط در آغاز، جنبهٔ «هیروگلیفی» داشت؛ یعنی هر مفهوم به‌صورت یک شکل جداگانه نشان داده می‌شد. ولی بتدریج،

نوشته‌های هیروگلیفی، تغییر شکل داد و ساده‌تر شد. به این شکل تازه، خط «ای‌یه‌راتیک» می‌گویند. در شکل، یک متن، هم با خط هیروگلیفی و هم با خط ای‌یه راتیک داده شده است.







برای نوشتن عددها هم همین روش را به‌کار می‌بردند. در نوشته‌های هیروگلیفی از دستگاه دهدهی (عددنویسی به مبنای ۱۰) استفاده شده است. درضمن، برای هر مرتبه‌ای نماد ویژه‌ای وجود داشت؛ یکان، دهگان، صدگان و غیره. واحد با نماد دهگان با نماد ، صدگان با نماد ، هزارگان با نماد ، ده هزارها با نماد ، صدهزارها با نماد ، میلیون‌ها با نماد و ده‌میلیون‌ها با نماد نشان داده می‌شد. همچنین اگر در مرتبه‌ای، چند واحد آن مرتبه وجود داشت، همان نماد را در نوشته، چند بار تکرار می‌کردند؛ یعنی قانون جمع را رعایت می‌نمودند.



برای نمونه، عدد ۵ را به صورت و عدد ۱۲۲ را به صورت



می‌نوشتند.

مصریها، از کسرهایی استفاده می‌کردند که با صورت واحد بیان می‌شدند. تنها استثنا کسر $\frac{2}{3}$ بود که نمادی ویژهٔ خود داشت: ؛ کسر $\frac{1}{2}$ هم نماد ویژه‌ای داشت و به‌صورت نشان داده می‌شد؛ همهٔ کسرهای دیگر را به یاری نمادی به‌صورت معرفی می‌کردند. برای این که کسری را (که البته صورت آن برابر واحد است) نشان دهند، این نماد را رسم می‌کردند و عدد مخرج کسر را در زیر آن می‌نوشتند. برای نمونه، کسر $\frac{1}{7}$ را به‌صورت نشان می‌دادند.

نوشته‌ها را روی «پاپیروس» می‌نوشتند و اغلب به‌صورت رنگی، گاهی هم روی سنگ، چوب، پوست، پارچه یا پوست درخت می‌نوشتند. متنها را بیشتر سطر به سطر و از راست به چپ و یا ستونی از بالا به پایین یادداشت می‌کردند. برخی از پاپیروسها تا امروز باقی مانده‌اند و می‌توانند ما را با ریاضیات مردم باستانی مصر آشنا کنند.

از میان همهٔ پاپیروسهای موجود، بررسی متنهای دو پاپیروس، اهمیت زیادی دارد: ۱) «پاپیروس ریند» که به‌نام صاحب نخستین

آن «ریند» و در موزهٔ بریتانیا نگهداری می‌شود ؛ ۲) «پاپیروس ریاضی مسکو» که به‌وسیلهٔ واسیلی‌سترووه (۱۸۹۱ـ۱۹۶۴)، تاریخ‌نویس شوروی بررسی شده است و در موزهٔ دولتی هنر به‌نام پوشکین، در مسکو نگهداری می‌شود. البته، پیش از «سترووه» که پاپیروس مسکو را در ۱۹۳۰ بررسی کرد، در سال ۱۹۱۷ هم به‌وسیلهٔ «ب.آ. تورایف» بررسی شده بود. هر دوی این پاپیروسها در فاصلهٔ بین سالهای ۲۰۰۰ تا ۱۸۰۰ پیش از میلاد نوشته شده‌اند. احتمال می‌رود، پاپیروس ریند، رونوشتی از یک پاپیروس کهنتر، یعنی نزدیک به ۳۰۰۰ سال پیش از میلاد باشد.

پاپیروس ریند، که گاهی آن را «پاپیروس آهمس» هم می‌نامند (زیرا احتمال می‌دهند به‌وسیلهٔ «آهمس» کاتب مصری در دو هزار سال پیش از میلاد نوشته شده است)، بیشتر یک متن آموزشی دربارهٔ اقتصاد کشاورزی است ؛ ولی آگاهیهای ریاضی که از این پاپیروس به‌دست می‌آید، چنان گوناگون است که می‌توان آن را سندی با خصلت ریاضی به‌شمار آورد.

از دو سندی که نام بردیم و سندهای دیگری که دربارهٔ ریاضیات از مصر باستان به ما رسیده است، روشن می‌شود که مصریها، نه‌تنها می‌توانستند عددها را بنویسند ؛ بلکه دربارهٔ عملهای ریاضی، از قانونهایی پیروی می‌کرده‌اند و نمادهایی برای این عملها داشته‌اند. از جمله عمل جمع را به‌وسیلهٔ نمادی به شکل پاهای انسان نشان می‌دادند ؛ از راست به چپ حرکت می‌کردند و برای عمل تفریق از همین نماد، ولی با حرکت در جهت عکس (از چپ به راست) استفاده می‌کردند. اختلاف دو مقدار با سه پیکان افقی، واژهٔ «یعنی» با شکلی شبیه جغد و دو نقطهٔ پشت سرهم به معنای «برابری» بود.

مصریها، عمل ضرب را با دو برابر کردنها انجام می‌دادند ؛ برای ضرب ۸ در ۸، نخست ۸ را دو برابر می‌کردند، بعد حاصلضرب را دوباره دو برابر می‌کردند و سرانجام دو برابر نتیجه، ضرب اخیر را به‌دست می‌آوردند. برای به‌دست آوردن حاصلضرب ۱۵ در ۱۷، این عملها را انجام می‌دادند :

$$۱۵(۱+۲\times۲\times۲\times۲)=۱۵\times۱+۱۵\times۲\times۲\times۲\times۲$$

$$=۱۵+۳۰\times۲\times۲\times۲=۱۵+۶۰\times۲\times۲$$

$$=۱۵+۱۲۰\times۲=۱۵+۲۴۰=۲۵۵$$

عمل تقسیم را با توجه به این که عکس عمل ضرب است، انجام می‌دادند ؛ یعنی به جست‌وجوی عددی می‌رفتند که از حاصلضرب آن در بخشیاب، عدد بخشی به‌دست آید.

مصریها، برای بیان کسرها به‌صورت مجموعی از کسرهایی که صورتی برابر واحد داشته باشند، جدولهایی تنظیم کرده بودند. نمونهٔ این جدولها در این‌جا داده شده است (در صفحهٔ ۷).

این جدولها، برای حلّ پرسشهایی به‌کار می‌رفت که مربوط به عمل دربارهٔ کسرها بود. برای نمونه، برای تقسیم ۵ بر ۲۱، کار منجر به این ردیف عملها می‌شد :

$$\frac{۵}{۲۱}=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۲}{۲۱}+\frac{۲}{۲۱}=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۴۲}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۴۲}$$

$$=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۲}{۱۴}+\frac{۲}{۴۲}=\frac{۱}{۲۱}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۲۱}=\frac{۱}{۷}+\frac{۲}{۲۱}$$

$$=\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۴۲}$$

این راه به ظاهر طولانی، اغلب منجر به نتیجه‌ای می‌شود که کار با آن برای مصریها، بسیار ساده‌تر از کار با کسر $\frac{۵}{۲۱}$ بود. به این مسأله مصری توجه کنید : می‌خواهیم ۷ قرص نان را بین ۸ نفر تقسیم کنیم ؛ پاسخ به این‌صورت است :

$$\frac{۷}{۸}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}$$

یعنی باید، ۴ نان را نصف کرد، ۲ نان را هرکدام به چهار بخش برابر و ۱ نان را به هشت بخش برابر تقسیم کرد.

در پاپیروسها، به محاسبه‌های پیچیده‌ای روی عددهای درست و عددهای کسری برمی‌خوریم. به‌جز این، در دو پاپیروسی که نام بردیم، آگاهیهایی از سایر بخشهای ریاضیات وجود دارد. از جمله با مسأله‌هایی روبه‌رو می‌شویم که به جبر مربوط می‌شوند یا خصلت هندسی دارند.

در پاپیروس ریند، بخش ویژه‌ای به «محاسبهٔ توده» اختصاص داده شده است. درواقع، این بخش، شامل مسأله‌هایی است که به معادلهٔ درجهٔ اوّل یک مجهولی منجر می‌شوند. «توده» یا به زبان قبطی «هااو» همان است که ما امروز مجهول می‌نامیم. منظور از «هااو» توده‌ای گندم است که باید تعداد دانه‌های آن محاسبه شود. تکّه‌ای را که پیش از این، با خطهای هیروگلیفی و هیراتیکی آوردیم، مربوط به شرح یکی از همین گونه معادله‌ها می‌شود. مضمون این

نوشته چنین است :

توده‌ای، $\frac{۲}{۲}$ آن، $\frac{۱}{۲}$ آن، $\frac{۱}{۷}$ آن و خود آن می‌شود ۳۷.

حلّ چنین معادله‌هایی به این صورت انجام می‌شود : همهٔ عددهای شامل مجهول، با هم جمع شده‌اند. درضمن، از تبدیل کسرها به کسرهای با صورت واحد هم استفاده می‌شود. گاهی هم برای یافتن مجهول، از روش فرضی استفاده شده است.

در پاپیروسها، به مسأله‌هایی هم برمی‌خوریم که به تصاعدهای حسابی و هندسی مربوط می‌شوند. این مفهومها به این دلیل در ریاضیات مصری پدید آمده‌اند که در مسأله‌های مربوط به زندگی و عمل، با آنها برخورد می‌کردند. در این‌جا نمونه‌ای از یک مسأله را که به تصاعد حسابی مربوط می‌شود، می‌آوریم :

تعداد ۱۰۰ نان را بین پنج نفر طوری تقسیم کنید که سه نفر اوّل، هفت برابر دو نفر دیگر داشته باشند. تقسیم برابر انجام نگرفته است و تعداد نانهای هر نفر به مقدار مشخصی از تعداد نانهای نفر قبلی کمتر است.

در واقع، از یک تصاعد حسابی، مجموع پنج جملهٔ اوّل (۱۰۰) و نسبت مجموع سه جملهٔ اوّل به دو جملهٔ آخر (۷) داده شده است.

در پاپیروس، مسأله بدرستی حل شده و پاسخ آن آمده است.

در پاپیروس، تصاعد هندسی به این صورت طرح شده است : عددهای

۷, ۴۹, ۳۴۳, ۲۴۰۱, ۱۶۸۰۷, ...

و مجموع آنها ۱۹۶۰۷ داده شده است. این یک تصاعد با قدرنسبت ۷ است و در طرح آن گفته شده است، ۷ نفر هرکدام ۷ گربه دارند، هر گربه می‌تواند ۷ موش بگیرد، هر موش می‌تواند ۷ خوشهٔ جو بخورد و هر خوشهٔ جو دارای ۷ دانهٔ جو است.

در پاپیروسها، مسأله‌های زیادی با خصلت هندسی وجود دارد که به محاسبهٔ مساحت و حجم زمینهای کشاورزی و ساختمانها مربوط می‌شود. در این زمینه هم مسأله‌هایی دیده می‌شود که پاسخ آنها با دقت محاسبه شده است و هم مسأله‌هایی با پاسخهای تقریبی. روشن است که مصریها، با روشهای دقیق محاسبهٔ سطح و حجم شکلهای اساسی هندسی آشنا بودند ؛ ولی اغلب ترجیح می‌دادند به روشهای تقریبی ـ که چندان دقیق نبود ـ متوسل شوند.

در پاپیروس مسکو، محاسبهٔ حجم یک هرم ناقص منتظم با قاعده‌های مربع شکل، با دقت و بدرستی داده شده است. همچنین، در پاپیروس ریند، مساحت دایره با دقت محاسبه شده است. ریاضیدان مصری، قطر دایره را به ۹ بخش برابر تقسیم می‌کند و مساحت مربعی به‌دست می‌آید، که طول ضلع آن برابر ۸ بخش از این ۹ بخش قطر است. درواقع، اختلاف محاسبهٔ ریاضیدان مصری با محاسبه‌ای که امروزه برای مساحت دایره می‌کنیم، در این است که او عدد π را برابر ۳/۱۶ می‌گیرد.

ولی این نکته را نباید از یاد برد که همهٔ کارهای ریاضی مصریها، جنبهٔ تجربی دارد. در نوشته‌های باقیمانده از مصریها، هیچ‌گونه تعمیم یا استدلالی که بر پایهٔ اثبات منطقی باشد، دیده نمی‌شود. آگاهی ریاضی، مربوط به جنبه‌هایی می‌شود که ضمن کار و عمل و در زندگی روزانه، در برابر آنها قرار می‌گرفته است. به همین دلیل است که در سندهای موجود، به قاعده‌های کلی برنمی‌خوریم و دربارهٔ هر مسأله‌ای، به‌عنوان یک مسألهٔ مستقل و جدا از مسأله‌های مشابه خود، راه‌حل جست‌وجو می‌شود. به همین مناسبت، نمی‌توانیم ادّعا کنیم که در بابِل یا مصر، ریاضیات به‌عنوان شاخهٔ مستقلی از دانش پدید آمد ؛ تنها می‌توانیم بگوییم، در این جاها، آگاهیهای پراکنده‌ای از مفهومهای ریاضی، بتدریج روی هم جمع می‌شد و زمینه را برای تکامل دانش ریاضی، در دوران بعد، و نه چندان نزدیک به آنها، فراهم کرد.



جدول کسرها از پاپیروس رند

$\frac{۲}{۳}=\frac{۲}{۳}$

$\frac{۲}{۵}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۱۵}$

$\frac{۲}{۷}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۲۸}$

$\frac{۲}{۹}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۱۸}$

$\frac{۲}{۱۱}=\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۶۶}$

$\frac{۲}{۱۳}=\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۵۲}+\frac{۱}{۱۰۴}$

$\frac{۲}{۱۵}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۳۰}$

$\frac{۲}{۱۷}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۵۱}+\frac{۱}{۶۸}$

$\frac{۲}{۱۹}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۷۶}+\frac{۱}{۱۱۴}$

$\frac{۲}{۲۱}=\frac{۱}{۱۴}+\frac{۱}{۴۲}$

$\frac{۲}{۲۳}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۲۷۶}$

$\frac{۲}{۲۵}=\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۷۵}$

$\frac{۲}{۲۷}=\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۵۴}$

$\frac{۲}{۲۹}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۵۸}+\frac{۱}{۱۷۴}+\frac{۱}{۲۳۲}$

$\frac{۲}{۳۱}=\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۱۲۴}+\frac{۱}{۱۵۵}$

$\frac{۲}{۳۳}=\frac{۱}{۲۲}+\frac{۱}{۶۶}$

$\frac{۲}{۳۵}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۴۲}$

$\frac{۰}{۳۷}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۱۱۱}+\frac{۱}{۲۹۶}$

$\frac{۲}{۳۹}=\frac{۱}{۲۶}+\frac{۱}{۷۸}$

$\frac{۲}{۴۱}=\frac{۱}{۲۴}+\frac{۱}{۲۴۶}+\frac{۱}{۳۲۸}$

$\frac{۲}{۴۳}=\frac{۱}{۴۲}+\frac{۱}{۸۶}+\frac{۱}{۱۲۹}+\frac{۱}{۳۰۱}$

$\frac{۲}{۴۵}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۹۰}$

$\frac{۲}{۴۷}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۱۴۱}+\frac{۱}{۴۷۰}$

$\frac{۲}{۴۹}=\frac{۱}{۲۸}+\frac{۱}{۱۹۶}$

$\frac{۲}{۵۱}=\frac{۱}{۳۴}+\frac{۱}{۱۰۲}$

$\frac{۲}{۵۳}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۳۱۸}+\frac{۱}{۷۹۵}$

$\frac{۲}{۵۵}=\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۳۳۰}$

$\frac{۲}{۵۷}=\frac{۱}{۳۸}+\frac{۱}{۱۱۴}$

$\frac{۲}{۵۹}=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۱}{۲۳۶}+\frac{۱}{۵۳۱}$

$\frac{۲}{۶۱}=\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۲۱۴}+\frac{۱}{۴۴۸}+\frac{۱}{۶۱۰}$

$\frac{۲}{۶۳}=\frac{۱}{۴۲}+\frac{۱}{۱۲۶}$

$\frac{۲}{۶۵}=\frac{۱}{۳۹}+\frac{۱}{۱۹۵}$

$\frac{۲}{۶۷}=\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۳۳۵}+\frac{۱}{۵۳۶}$

$\frac{۲}{۶۹}=\frac{۱}{۴۶}+\frac{۱}{۱۳۸}$

$\frac{۲}{۷۱}=\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۵۰۸}+\frac{۱}{۷۱۰}$

$\frac{۲}{۷۳}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۲۱۹}+\frac{۱}{۲۹۲}+\frac{۱}{۳۶۵}$

$\frac{۲}{۷۵}=\frac{۱}{۵۰}+\frac{۱}{۱۵۰}$

$\frac{۲}{۷۷}=\frac{۱}{۴۴}+\frac{۱}{۳۰۸}$

$\frac{۲}{۷۹}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۲۳۷}+\frac{۱}{۳۱۶}+\frac{۱}{۷۹۰}$

$\frac{۲}{۸۱}=\frac{۱}{۵۴}+\frac{۱}{۱۶۲}$

$\frac{۲}{۸۳}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۳۳۲}+\frac{۱}{۴۱۵}+\frac{۱}{۴۹۸}$

$\frac{۲}{۸۵}=\frac{۱}{۵۱}+\frac{۱}{۲۵۵}$

$\frac{۲}{۸۷}=\frac{۱}{۵۸}+\frac{۱}{۱۷۴}$

$\frac{۲}{۸۹}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۳۵۶}+\frac{۱}{۵۳۴}+\frac{۱}{۸۹۰}$

$\frac{۲}{۹۱}=\frac{۱}{۷۰}+\frac{۱}{۱۳۰}$

$\frac{۲}{۹۳}=\frac{۱}{۶۲}+\frac{۱}{۱۸۶}$

$\frac{۲}{۹۵}=\frac{۱}{۶۰}+\frac{۱}{۳۸۰}+\frac{۱}{۵۷۰}$

$\frac{۲}{۹۷}=\frac{۱}{۵۶}+\frac{۱}{۶۷۹}+\frac{۱}{۷۷۶}$

$\frac{۲}{۹۹}=\frac{۱}{۶۶}+\frac{۱}{۱۹۸}$

در حاشیهٔ مثلثات



(قسمت چهارم)

معادله های مثلثاتی

• احمد قندهاری

اگر $f(x)$ یک عبارت مثلثاتی باشد، برابری $f(x)=۰$ را یک معادلهٔ مثلثاتی با مجهول x می‌نامند. $\alpha \in D_f$ را جواب معادله گویند؛ هرگاه $f(\alpha)=۰$. منظور از حلّ معادلهٔ مثلثاتی، پیداکردن همهٔ α هایی است، که در برابری $f(x)=۰$ صدق می‌کنند.

۱ ـ معادلهٔ مثلثاتی سینوسی

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in Z)$$

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید و جوابهای واقع در بازه $[۰,۲\pi]$ را بیابید.

$$۱)\ ۲\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = -\frac{۱}{۲} = -\sin\frac{\pi}{۶} = \sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin(-\frac{\pi}{۶})$$

$$\text{(الف)}\quad x = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

k	x
۱	$۲\pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶}$

$$\text{(ب)}\quad x = ۲k\pi + \pi + \alpha \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۶}$$

k	x
۰	$\pi + \frac{\pi}{۶} = \frac{۷\pi}{۶}$

$$۲)\ ۲\sin ۲x + \sqrt{۳} = ۰$$

$$۲\sin ۲x = -\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \sin ۲x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -\sin\frac{\pi}{۳} = \sin(-\frac{\pi}{۳})$$

می‌دانیم که اگر داشته باشیم

$$\sin u = \sin\alpha$$

آنگاه داریم:

$$\text{(الف)}\quad u = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۶}$$

k	x
۱	$\pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۶}$
۲	$۲\pi - \frac{\pi}{۶} = \frac{۱۱\pi}{۶}$

$$\text{(ب)}\quad u = ۲k\pi + \pi - \alpha \Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \pi + \frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۲\pi}{۳}$$

k	x
۰	$\frac{۲\pi}{۳}$
۱	$\pi + \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۵\pi}{۳}$

۲ـ معادلهٔ مثلثاتی کسینوسی

$$\cos u = \cos\alpha \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \alpha$$

مثال: معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید و جوابهای کلّی آنها را بنویسید.

$$۱)\ ۲\cos ۲x - \sqrt{۲} = ۰$$

$$۲\cos ۲x = \sqrt{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \cos u = \cos\alpha$$

$$u = ۲k\pi \pm \alpha \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۴} \Rightarrow \boxed{x = k\pi \pm \frac{\pi}{۸}}$$

$$۲)\ \cos ۴x + \cos ۲x = ۰$$

$$\cos ۴x = -\cos ۲x = \cos(\pi - ۲x)$$

$$\Rightarrow \cos \underbrace{۴x}_{u} = \cos\underbrace{(\pi - ۲x)}_{\alpha}$$

الف) $u = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \pi - ۲x$

$$\Rightarrow ۶x = ۲k\pi + \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲k\pi + \pi}{۶}}$$

ب) $u = ۲k\pi - \alpha \Rightarrow ۴x = ۲k\pi - \pi + ۲x$

$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \pi \Rightarrow \boxed{x = \frac{۲k\pi - \pi}{۲}}$$

۳ـ معادلهٔ مثلثاتی تانژانتی یا کتانژانتی

$$\begin{cases} \tan u = \tan\alpha \\ \text{یا} \\ \cot u = \cot\alpha \end{cases} \Rightarrow u = k\pi + \alpha$$

مثال: معادله‌های مثلثاتی زیر را حل کنید و جوابهای کلّی آنها را بنویسید.

$$۱)\ ۳\tan(۲x + \frac{\pi}{۴}) - \sqrt{۳} = ۰$$

$$\tan\underbrace{(۲x + \frac{\pi}{۴})}_{u} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan\underbrace{\frac{\pi}{۶}}_{\alpha}$$

$$u = k\pi + \alpha \Rightarrow ۲x + \frac{\pi}{۴} = k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$۲x = k\pi - \frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲۴}}$$

$$۲)\ ۳\cot ۴x + \sqrt{۳} = ۰$$

$$\cot ۴x = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\cot\frac{\pi}{۳} = \cot(-\frac{\pi}{۳})$$

$$\cot\underbrace{۴x}_{u} = \cot\underbrace{(-\frac{\pi}{۳})}_{\alpha}$$

$$u = k\pi + \alpha \Rightarrow ۴x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۴} - \frac{\pi}{۱۲}}$$

حالتهای خاص در معادله‌های مثلثاتی

$$۱)\ \begin{cases} \sin x = ۰ \\ \text{یا} \\ \tan x = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi$$

$$۲)\ \begin{cases} \cos x = ۰ \\ \text{یا} \\ \cot x = ۰ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۳)\ \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$$

$$۴)\ \sin x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$$

$$۵)\ \cos x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi$$

$$۶)\ \cos x = -۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \pi$$

$$۷)\ \begin{cases} \tan x = ۱ \\ \text{یا} \\ \cot x = ۱ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$$

$$۸)\ \begin{cases} \tan x = -۱ \\ \text{یا} \\ \cot x = -۱ \end{cases} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴}$$

چند نکته دربارهٔ معادله‌های مثلثاتی

۱ـ برای حل هر معادلهٔ مثلثاتی که به صورت زیر باشد :

$$a \sin mx + b \cos mx = ۰$$

باید دو طرف، معادله را بر $\sin mx \neq ۰$ یا بر $\cos mx \neq ۰$ تقسیم کنیم.

مثال: معادلهٔ $۳\sin ۲x - \sqrt{۳}\cos ۲x = ۰$ را حل کنید و جواب کلّی آن را بنویسید.

حل: دوطرف معادله را بر $\cos ۲x \neq ۰$ تقسیم می‌کنیم.

توجه کنید اگر $\cos ۲x = ۰$، آن‌گاه $\sin ۲x = \pm ۱$، آن‌گاه معادله به صورت $\pm ۳ = ۰$ خواهد شد که درست نیست. پس در این مسأله $\cos ۲x \neq ۰$.

$$\frac{۳\sin ۲x}{\cos ۲x} - \frac{\sqrt{۳}\cos ۲x}{\cos ۲x} = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\tan ۲x - \sqrt{۳} = ۰$$

$$\Rightarrow \tan ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۱۲}}$$

۲ـ معادله‌هایی که دو طرف آن به دو نسبت مثلثاتی همنام تبدیل می‌شوند.

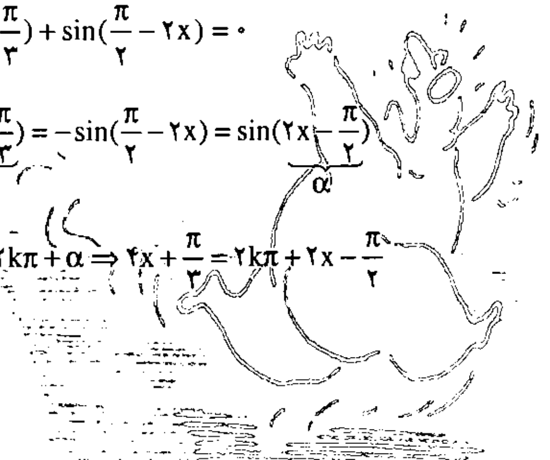
مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin(۴x + \frac{\pi}{۳}) + \cos ۲x = ۰$$

$$\sin(۴x + \frac{\pi}{۳}) + \sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x) = ۰$$

$$\sin(\underbrace{۴x + \frac{\pi}{۳}}_{u}) = -\sin(\frac{\pi}{۲} - ۲x) = \sin(\underbrace{۲x - \frac{\pi}{۲}}_{\alpha})$$

الف) $\alpha = ۲k\pi + \alpha \Rightarrow ۴x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + ۲x - \frac{\pi}{۲}$



$$\Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \boxed{x = k\pi - \frac{۵\pi}{۱۲}}$$

ب) $u = ۲k\pi + \pi - \alpha$

$$\Rightarrow ۴x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \pi - ۲x + \frac{\pi}{۲}$$

$$\Rightarrow ۶x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۶} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{۷\pi}{۳۶}}$$

۳ـ معادله‌هایی که از راه دسته‌بندی، قابل فاکتورگیری باشند، براحتی قابل حل هستند.

مثال: معادلهٔ $\sin x + ۲\cos x + ۲\sin x \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

$$\sin x + ۲\sin x\cos x + ۲\cos x + ۱ = ۰$$

$$\sin x(۱ + ۲\cos x) + (۲\cos x + ۱) = ۰$$

$$(۲\cos x + ۱)(\sin x + ۱) = ۰$$

الف) $۲\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = -\frac{۱}{۲}$

$$\text{Cos}x = -\cos\frac{\pi}{۳} = \cos(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{۲\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}}$$

ب) $\sin x + ۱ = ۰ \Rightarrow \sin x = -۱$

$$\Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}}$$

۴ـ معادله‌هایی که به معادلهٔ درجه دوم جبری تبدیل می‌شوند.

مثال: معادله‌های زیر را حل کنید.

$$۱)\ \cos ۲x + \cos x - ۲ = ۰$$

می دانیم : $\boxed{\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱}$ بنابراین داریم :

$$۲\cos^۲ x - ۱ + \cos x - ۲ = ۰$$

$$۲\cos^۲ x + \cos x - ۳ = ۰$$

فرض می‌شود : $\cos x = y$

$$۲y^۲ + y - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$ مجموع ضرایب صفر است.

الف) $\cos x = y_1 = 1 \Rightarrow \boxed{x = 2k\pi}$

ب) $\cos x = y_2 = -\frac{3}{2}$ غیر ممکن است

زیرا $-1 \le \cos x \le +1$

۲) $4\sin^2 x - 2(\sqrt{2}+1)\sin x + \sqrt{2} = 0$

فرض می‌شود : $\sin x = y$

$$\underbrace{4}_{a}y^2 - \underbrace{2(\sqrt{2}+1)}_{b}y + \underbrace{\sqrt{2}}_{c} = 0 \; ; \; b' = -(\sqrt{2}+1)$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (\sqrt{2}+1)^2 - 4\sqrt{2}$$

$$= 2+1+2\sqrt{2}-4\sqrt{2} = 2+1-2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{\sqrt{2}+1 \pm \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1 \pm (\sqrt{2}-1)}{4}$$

$$y_1 = \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

الف) $\sin x = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

ب) $\sin y = y_2 = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$3\tan x + 3\cot x = 4\sqrt{3}$$

راه اول:

دو طرف معادله را در tanx ضرب می‌کنیم.

$$3\tan^2 x + 3 = 4\sqrt{3}\tan x$$

$$3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$$

فرض می‌شود : $\tan x = y$

$$\underbrace{3}_{a}y^2 - \underbrace{4\sqrt{3}}_{b}y + \underbrace{3}_{c} = 0 \; ; \; b' = -2\sqrt{3}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-2\sqrt{3})^2 - 9 = 12 - 9 = 3$$

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{3}$$

$$y_1 = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$y_2 = \frac{2\sqrt{3}-\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

الف) $\tan x = y_1 = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{3}}$

ب) $\tan x = y_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}}$

راه دوم:

$$3\tan x + 3\cot x = 4\sqrt{3}$$

دو طرف معادله را بر (۳) تقسیم می‌کنیم.

$$\tan x + \cot x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$4\sqrt{3}\sin x\cos x=3\Rightarrow 2\sqrt{3}(2\sin x\cos x)=3$$

$$2\sqrt{3}\sin 2x=3\Rightarrow\sin 2x=\frac{3}{2\sqrt{3}}$$

$$\sin rx\,\frac{3}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{3}$$

الف) $2x=2k\pi+\frac{\pi}{3}\Rightarrow\boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{6}}$

ب) $2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\boxed{x=k\pi+\frac{\pi}{3}}$$

۵ ـ معادله‌هایی که به کمک تبدیل به حاصل ضرب، قابل حل هستند.

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin 5x-\sin 3x+\sin x=0$$

توجه: $\sin p-\sin q=2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

$$\sin\underbrace{5x}_{p}-\sin\underbrace{3x}_{q}+\sin x=0$$

$$2\cos\frac{5x+3x}{2}\cdot\sin\frac{5x-3x}{2}+\sin x=0$$

$$2\cos 4x\sin x+\sin x=0$$

$$\sin x(2\cos 4x+1)=0$$

الف) $\sin x=0\Rightarrow\boxed{x=k\pi}$

ب) $2\cos 4x+1=0\Rightarrow\cos 4x=-\frac{1}{2}$

$$\cos 4x=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\cos 4x=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow 4x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\boxed{x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6}}$$

۶ ـ معادله‌هایی که به کمک تبدیل به حاصل‌جمع، قابل حل هستند.

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$2\sin\underbrace{\frac{3x}{2}}_{a}.\cos\underbrace{\frac{x}{2}}_{b}=\sin x$$

فرمول: $2\sin a\cos b=\sin(a+b)+\sin(a-b)$

$$=\sin(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2})+\sin(\frac{3x}{2}-\frac{x}{2})=\sin x$$

$$\Rightarrow\sin 2x+\cancel{\sin x}=\cancel{\sin x}$$

$$\Rightarrow\sin 2x=0\Rightarrow 2x=k\pi\Rightarrow\boxed{x=\frac{k\pi}{2}}$$

۷ ـ معادله‌هایی که کمانهای متمّم دارند و از دو نسبت مثلثاتی تشکیل شوند.

مثال: معادلهٔ زیر را حل کنید.

$$\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\cos(\frac{5\pi}{8}-x)=3$$

$$\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{8}+x)=3$$

کمانها متمم‌اند: $(x-\frac{\pi}{8})+(\frac{5\pi}{8}-x)=\frac{\pi}{2}$

فرض می‌شود: $\sin(x-\frac{\pi}{8})=y$

$$\sin^2(x-\frac{\pi}{8})+2\sin(x-\frac{\pi}{8})-3=0$$

$$y^2+2y-3=0$$

مجموع ضرایب صفر است $\Rightarrow\begin{cases}y_1=1\\ y_2=\frac{c}{a}=-3\end{cases}$

الف) $\sin(x-\frac{\pi}{8})=y_1=1\Rightarrow x-\frac{\pi}{8}=2k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$$x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\Rightarrow\boxed{x=2k\pi+\frac{5\pi}{8}}$$

ب) $\sin(x-\frac{\pi}{8})=y_2=-3$ غیر ممکن است

۸ ـ هر معادلهٔ مثلثاتی که به صورت زیر باشد :

$$a\sin nx + b\cos nx = c \quad (n \in \mathbb{R})$$

به دو روش زیر قابل حل است :

روش اوّل: دو طرف معادله را بر $a \neq ۰$ تقسیم می‌کنیم، آن‌گاه به جای $\frac{b}{a}$ ، $\tan\varphi$ را به $\sin x + \frac{۳}{\sqrt{۳}}\cos x = \frac{۳}{\sqrt{۳}} \Leftarrow$ تبدیل می‌کنیم و سپس دو طرف تساوی را در $\cos\varphi$ ضرب می‌کنیم. معادلهٔ حاصل به یک معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی تبدیل می‌شود.

مثال: معادلهٔ $\sqrt{۳}\sin x + ۳\cos x = ۳$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را بر $\sqrt{۳}$ تقسیم می‌کنیم.

$$\sin x + \frac{۳}{\sqrt{۳}}\cos x = \frac{۳}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow \sin x + \boxed{\sqrt{۳}}\cos x = \sqrt{۳}$$

دو طرف معادله را در $\cos\frac{\pi}{۳}$ ضرب می‌کنیم:

$$\Rightarrow \sin x + \tan\frac{\pi}{۳}\cos x = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{۳}}{\cos\frac{\pi}{۳}}.\cos x = \sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{۳} + \cos x\sin\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}.\cos\frac{\pi}{۳}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۳}) = \sqrt{۳}\times\frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{۳}) = \sin\frac{\pi}{۳}$$

الف) $x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi}$

ب) $x + \frac{\pi}{۳} = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \Rightarrow \boxed{x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}}$

روش دوم: به جای sinx و cosx از دو فرمول زیر استفاده می‌کنیم :

$$\sin x = \frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} \qquad \cos x = \frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$$

$$\Rightarrow a\times\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} + b\times\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}} = c$$

فرض می‌شود : $\tan\frac{x}{۲} = y$

دو طرف معادله را در $(۱+y^۲)$ ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow a\times\frac{۲y}{۱+y^۲} + b\times\frac{۱-y^۲}{۱+y^۲} = c$$

$$\Rightarrow ۲ay + b - by^۲ = c + cy^۲$$

$$\Rightarrow \boxed{\overbrace{(b+c)}^{a}y^۲ - \overbrace{۲a}^{b}y + \overbrace{(c-b)}^{c} = ۰}$$

از حلّ این معادلهٔ درجه دوم y یعنی $\tan\frac{x}{۲}$ ، سپس x محاسبه می‌شود. شرط این که این معادله دارای جواب باشد، آن است که : $\Delta' \geq ۰$

$$\Delta' = b'^۲ - ac = a^۲ - (c+b)(c-b) \geq ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ - (c^۲ - b^۲) \geq ۰ \Rightarrow a^۲ - c^۲ + b^۲ \geq ۰$$

$$\Rightarrow \boxed{a^۲ + b^۲ \geq c^۲}$$

مثال: به ازای چه مقادیر m معادلهٔ

$$(m-۲)\sin x + (m+۱)\cos x = m\sqrt{۲}$$

دارای جواب است؟

حل: برای این که این معادله، جواب داشته باشد، باید،

$$a^۲ + b^۲ \geq c^۲$$

$$\Rightarrow (m-۲)^۲ + (m+۱)^۲ \geq (m\sqrt{۲})^۲$$

$$\Rightarrow \cancel{m^۲} - ۴m + ۴ + \cancel{m^۲} + ۲m + ۱ \geq ۲\cancel{m^۲}$$

$$-۲m + ۵ \geq ۰ \Rightarrow -۲m \geq -۵ \Rightarrow m \leq \frac{۵}{۲}$$



●عبدالحسین مصحفی

روش از سرگیری (= روش تکرار)*

و کاربرد آن در به دست آوردن اندازهٔ تقریبی ریشهٔ یک معادله

امروزه «روش از سرگیری» یک ابزار نرم‌افزاری بسیار کارامد در الگوریتمهای کامپیوتری است و در برنامه‌نویسیها برای کامپیوتر، کاربرد بسیار گسترده دارد. در رابطه‌ها و معادله‌هایی ماتریسی نیز به‌کار می‌رود. اما پیش از اینها، کاربرد روش از سرگیری در به‌دست آوردن اندازهٔ تقریبی ریشهٔ معادله‌ها بوده است؛ معادله‌هایی که با روشهای شناخته شده حل نمی‌شده‌اند. با روی کارآمدن ماشینهای حساب و کامپیوترها، این کاربرد روش از سرگیری نیز گسترش یافته است. از دیدگاه تاریخی، *غیاث‌الدین جمشید کاشانی*، ریاضیدان بزرگ ایرانی سدهٔ نهم هجری، نخستین کسی به‌شمار می‌آید که روش از سرگیری را برای حلّ معادلهٔ درجهٔ سوم به‌کار برده است. او در اثر خود به نام «رسالهٔ در جیب و وتر» از راه به‌کار بردن روش از سرگیری، اندازهٔ تقریبی ریشهٔ معادله‌ای را که اکنون به صورت

$$3x - x^3 = 0/10467191...$$

نوشته می‌شود و از روی آن، مقدار سینوس زاویهٔ یک درجه را تا ۲۲ رقم پس از ممیّز به‌دست آورده است.**

دنبالهٔ تقریبهای یک عدد حقیقی

در ریاضیات کاربردی، زیاد پیش می‌آید که باید عددی حقیقی را در یک محاسبه به‌کاربرد، در حالی که دسترسی به اندازهٔ واقعی آن عدد ممکن نیست؛ مثلاً عددی گنگ غیرجبری یا ریشهٔ معادله‌ای حل نشدنی باشد. در چنین فرایندهایی، به جای اندازهٔ واقعی عدد، اندازهٔ تقریبی آن را به کار می‌برند. برای به دست آوردن اندازهٔ تقریبی چنین عددهایی، روشهای گوناگونی هم نشان داده شده است. در این روشها، اگر بنا باشد اندازهٔ تقریبی عدد حقیقی α به‌دست آید، دنباله‌ای همگرا از عددهای حقیقی μ_n و از گونهٔ

$$(\mu_n) = \mu_0, \ \mu_1, \ \mu_2, \dots, \mu_k, \ \mu_{k+1}, \dots$$

چنان تشکیل می‌شود که جمله‌هایش بترتیب، به اندازهٔ واقعی α نزدیکتر شوند و سرانجام حدّ آن، همان اندازهٔ واقعی α باشد. این دنباله را *دنبالهٔ تقریبهای* عدد α، و در حالتی که α ریشهٔ معادلهٔ

داده شدهٔ $f(x)=0$ باشد، *دنبالهٔ تقریبهای ریشهٔ معادلهٔ* $f(x)=0$ می‌نامند.

در دنبالهٔ تقریبهای α، نظیر هر عدد کوچک و داده شدهٔ ε، جمله‌ای مانند μ_k وجود خواهد داشت که :

$$|\alpha-\mu_k|<\varepsilon$$

عدد μ_k با این شرط را *اندازهٔ تقریبی* α *با تقریب کمتر از* ε می‌نامند. هرگاه در دنبالهٔ همگرای (μ_n)، هرچه باشد عدد طبیعی n داشته باشیم :

$$|\mu_{k+n}-\mu_k|<\varepsilon,\ \ n=1,2,3,\ldots$$

حد μ_{k+n} نیز همان حدّ دنباله و برابر با α است و نتیجه می‌شود :

$$|\alpha-\mu_k|<\varepsilon$$

از این رو، اگر در به دست آوردن جمله‌های یک دنبالهٔ همگرای (μ_n) به جمله‌ای برسیم که تفاوت آن با جملهٔ بعد و با جمله‌های پس از آن، کوچکتر از ε باشد، آن جمله، مقدار تقریبی α با تقریب کمتر از ε خواهد بود. برای نمونه، در دنبالهٔ

$$1/2\ ,\ 1/25\ ,\ 1/259\ ,\ 1/2599\ ,\ 1/25992\ ,\ 1/259921\ ,\ldots$$

که یک دنبالهٔ تقریبهای ریشهٔ معادلهٔ $x^3-2=0$ است، می‌بینیم که جمله‌های از پنجم به بعد همه با جملهٔ چهارم تا چهار رقم پس از ممیّز مشترکند ؛ یعنی تفاوت جملهٔ چهارم با هر یک از جمله‌های پس از خودش، از ۰/۰۰۰۱ کوچکتر است. بنابراین، عدد ۱/۲۵۹۹ اندازهٔ تقریبی ریشهٔ سوم ۲ با تقریب کمتر ۰/۰۰۰۱ است.

دنبالهٔ تقریبهای هر عدد حقیقی α یکتا نیست ؛ بنابر فرایندی که برای پدید آوردن دنباله می‌توان به کار برد و بنابر انتخاب جملهٔ یکم μ_0، برای هر عدد α، دنباله‌های زیادی را می‌توان تشکیل داد. از بین این دنباله‌ها و از آنها که همگرا باشند، آن را باید برگزید که شتاب همگرایی آن بیشتر و نظیر هر ε، محاسبهٔ تعداد کمتری از جمله‌ها لازم باشد. به این نکته هم باید توجه داشت که یک دنبالهٔ با قانون معین هم ممکن است تنها آن‌گاه همگرا باشد که جملهٔ یکم μ_0 از آن بیرون از فاصلهٔ معینی انتخاب نشده باشد.

متغیّر تابع تغییرهای خودش

روشهایی گوناگون را که برای به‌دست آوردن اندازهٔ تقریبی ریشهٔ یک معادلهٔ $f(x)=0$ می‌توان به‌کاربرد، تفاوتشان در چگونگی فرایندی است که هر کدام برای پدید آوردن دنبالهٔ تقریبها به‌کار می‌برند. در روش از سرگیری، معادلهٔ داده شدهٔ $f(x)=0$ به معادلهٔ $x=g(x)$ تبدیل می‌شود. این معادله، رابطه‌ای است که در آن، متغیر x تابع تغییرهای خودش است و برای هرمقدار آغازی x_0 که به جای x گذاشته شود، یک دنبالهٔ

$$(x_n)=x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots,x_{k-1}\ ,\ x_k\ ,\ldots$$

را به‌دست می‌دهد که جمله‌هایش بترتیب برابرند با :

$$x_1=g(x_0)\ ,$$

$$x_2=g(x_1)\ ,$$

$$x_3=g(x_2)\ ,$$

$$\vdots$$

$$x_k=g(x_{k-1})$$

$$\vdots$$

بنا بر مقدار x_0 و بنا بر ساختار $g(x)$، دنبالهٔ (x_n) ممکن است همگرا، واگرا یا تکرار جملهٔ ثابت باشد. حالت اخیر، هنگامی است که مقدار x_0 ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ باشد.

مثال ۱: معادلهٔ $2x-1=0$ را اگر به‌صورت $x=3x-1$ بنویسیم، در این صورت، بجز ۰/۵ که جواب معادله است، هر عدد دیگر را مقدار آغازی x_0 بگیریم، دنباله‌ای واگرا به‌دست می‌آید. با مقدار آغازی $x_0=1$ داریم :

$$x_1=3\times1-1=2\ ,\ \ x_2=3\times2-1=5\ ,$$

$$x_3=3\times5-1=14\ ,\ldots$$

و با دنبال کردن عمل، دنبالهٔ زیر را خواهیم داشت که صعودی و واگراست :

$$(x_n)=1\ ,\ 2\ ,\ 5\ ,\ 14\ ,\ 41\ ,\ 122,\ \ldots$$

هر عدد دیگر را هم مقدار آغازی بگیریم، باز دنباله‌ای واگرا به‌دست می‌آید. چنان‌که :

$$x_0=0\Rightarrow(x_n)=0\ ,\ -1\ ,\ -4\ ,\ -13\ ,\ -40\ ,\ \ldots$$

$$x_0=-0/7\Rightarrow(x_n)=-0/7\ ,\ -3/1\ ,\ -10/3\ ,\ldots$$

در حالت $x_0=0/5$ دنباله‌ای با تکرار همین جمله به‌دست می‌آید :

$$x_0=0/5\Rightarrow(x_n)=0/5\ ,\ 0/5\ ,\ 0/5\ ,\ldots$$

مثال ۲: همان معادلهٔ $2x-1=0$ را اگر به صورت $x=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}$ بنویسیم، با انتخاب $x_0=1$، دنبالهٔ

$(x_n)=1\ ,\ 0/666...\ ,\ 0/555...\ ,\ 0/5185...\ ,$

$0/50617\ ,\ 0/50205\ ,\ 0/50068\ ,$

به‌دست می‌آید که اگر به‌دست آوردن جمله‌ها را دنبال کنیم، رقمهای از مرتبهٔ دوم به بعد، پس از ممیّز، یکی یکی صفر می‌شوند که نشان می‌دهد دنبالهٔ همگرا و حدّ آن ۰/۵ است. اگر $x_\circ$ را برابر با هر عدد دیگر مگر ۰/۵، انتخاب کنیم، باز هم دنباله‌ای همگرا و با حدّ ۰/۵ به‌دست می‌آید.

تبدیل با کامیابی معادلهٔ $f(x)=0$ به معادلهٔ $x=g(x)$

در روش از سرگیری، تبدیل معادلهٔ داده شدهٔ $f(x)=0$ به معادلهٔ $x=g(x)$ نخستین گام است؛ اما دیدیم که این تبدیل، ممکن است به پدید آمدن دنباله‌هایی واگرا بینجامد و کاری بیهوده باشد. برای آن‌که دنبالهٔ

$$(x_n)=x_\circ\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots\ ,x_n\ ,\ x_{n+1}\ ,\ \dots$$

همگرا و حدّ آن، همان x ریشهٔ معادلهٔ داده شده باشد، کافی است که هر چه باشد n :

$$|x-x_{n+1}|<|x-x_n|\ ,\ x=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,3\ ,\ \dots$$

اما $x=g(x)$ و $x_{n+1}=g(x_n)$ ، بنابراین:

$$|g(x)-g(x_n)|<|x-x_n|$$

$$\left|\frac{g(x)-g(x_n)}{x-x_n}\right|<1\ ,\ n=0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,3\ ,\dots$$

هرگاه $n\to\infty$ و در نتیجهٔ آن $x_n\to x$ و $g(x_n)\to g(x)$ و بنابر تعریف مشتق تابع، خواهیم داشت:

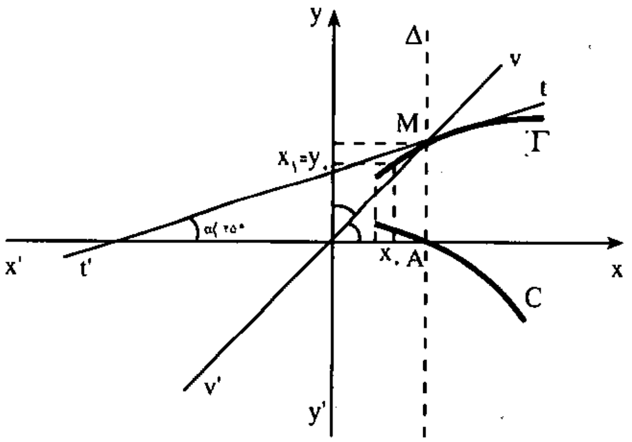
$$|g'(x)|<1$$

در همسایگی x شامل $x_\circ$ ، منحنی نمایش تابع $g(x)$ یکنوا (یا کلاً صعودی یا کلاً نزولی) و قدرمطلق شیب خط مماس بر منحنی کوچکتر از یک باشد (یعنی زاویهٔ حاده‌ای که مماس بر منحنی با محور طولها می‌سازد، کوچکتر از ۴۵ درجه باشد).

تعبیر هندسی

از دیدگاه هندسی، x ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ طول نقطهٔ A، محل برخورد خم C نمودار تابع $y=f(x)$ با محور طولهاست و اگر در نقطهٔ A، خط Δ ، عمود بر محور طولها رسم شود، طول هر نقطهٔ Δ ، و بویژه طول نقطهٔ M، محل برخورد آن با نیمساز ربع یکم و سوّم نیز برابر با x است. از این رو، برای به‌دست آوردن ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ ، کافی است که طول (یا عرض) نقطهٔ M به‌دست آید.

معادلهٔ $x=g(x)$ نیز از دیدگاه هندسی، هم‌ارز با دستگاه دو معادلهٔ $y=g(x)$ و $y=x$ است و چنانچه خم Γ نمودار تابع $y=g(x)$ باشد، منحنی Γ از نقطهٔ M می‌گذرد. هرگاه مماس بر Γ در همسایگی با محور طولها، زاویهٔ کوچکتر از ۴۵ درجه بسازد، نقطه‌های به طولهای $x_\circ$ ، x_1 ، x_2 ، ... از Γ بترتیب، به M نزدیکتر می‌شوند. به این نکته هم باید توجه داشت که هر دو نقطهٔ به طولهای x_k و x_{k+1} از Γ ممکن است در یک طرف یا دو طرف M واقع باشند.



در حالتی هم که معادلهٔ داده شده خطی و به صورت $ax+b=0$ باشد، تبدیل آن به $x=px+q$ باید چنان انجام گیرد که p کوچکتر از یک باشد.

یکتا نبودن $g(x)$

برای هر معادلهٔ $f(x)=0$ ، معادلهٔ $x=g(x)$ یکتا نیست و آن را به صورتهای گوناگون می‌توان به‌دست آورد؛ از جمله به صورتهای:

$$x=x+f(x)\ ,\ \ x=x.f(x)\ ,\ \ x=\frac{x}{f(x)}\ ,\ \dots$$

در انتخاب این معادله، به دو نکته باید توجه شود؛ نخست آن که دنبالهٔ پدید آمده از آن، همگرا باشد، دیگر آن که این همگرایی سرعتی، هر چه بیشتر داشته باشد؛ که این هر دو مورد، به چگونگی انتخاب مقدار آغازی $x_\circ$ نیز بستگی دارد.

مثال ۳: به‌دست آوردن اندازهٔ تقریبی ریشهٔ دوم یک عدد حقیقی و مثبت R، هم‌ارز است با به‌دست آوردن اندازهٔ تقریبی ریشهٔ معادلهٔ

$$x^2 = R$$

و این معادله را به صورتهای گوناگون می‌توانیم به $x = g(x)$ تبدیل کنیم. از جمله :

$$1)\ x^2 + x = x + R \Rightarrow x = 1 + \frac{R-1}{x+1}$$

$$2)\ 2x^2 = x^2 + R \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{R}{x}\right)$$

$$3)\ 2x^2 = x^2 + R \Rightarrow x = \sqrt{\frac{x^2 + R}{2}}$$

با فرض $R = 2$ و با انتخاب $x_0 = 1$ و با تقریب کمتر از ۰/۰۰۱، بنابر حالت (۱) :

$$x = 1 + \frac{1}{x+1}\ ;$$

$$x_1 = 1/5\ ,\ x_2 = 1/4\ ,\ x_3 = 1/41666\ ,$$

$$x_4 = 1/41379\ ,\ x_5 = 1/41428\ ,\ x_6 = 1/414201$$

بنابر حالت (۲) :

$$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}\ ;$$

$$x_1 = 1/5\ ,\ x_2 = 1/41666$$

$$x_3 = 1/414219\ ,\ x_4 = 1/414213$$

بنابر حالت (۳) :

$$x = \sqrt{\frac{x^2 + 2}{2}}$$

$$x_1 = 1/22477\ ,\ x_2 = 1/32287\ ,\ldots,$$

$$x_{11} = 1/41404\ ,\ x_{12} = 1/41427$$

در حالت (۱) پس از ۶ بار، در حالت (۲) پس از ۴ بار و در حالت (۳) پس از ۱۲ بار عمل از سرگیری، در می‌یابیم که جواب پذیرفتنی ۱/۴۱۴ است و می‌بینیم که بین سه حالت بالا، حالت (۲) بهینه است.

یادآوری می‌شود که تبدیل معادلهٔ $x^2 = R$ به معادلهٔ $x = \frac{R}{x}$ به دنباله‌ای متناوب از دو جملهٔ ثابت می‌انجامد و کارساز نیست.

انتخاب مقدار آغازی x_0

گام نخست که برداشته شد و رابطهٔ $x = g(x)$ به‌صورت اثربخش به‌دست آمد، گام بعدی، انتخاب مقدار آغازی x_0 است. مقدار x_0 باید در فاصله‌ای باشد که قدرمطلق مشتق کوچکتر از یک است و در این فاصله هم، هر چه به اندازهٔ واقعی x نزدیکتر باشد، اندازهٔ خواسته شده، زودتر به‌دست می‌آید. برای انتخاب بهینهٔ مقدار x_0، روش معینی را نمی‌توان نام برد، می‌توان دو یا سه مقدار را آزمایش کرد و دریافت که جمله‌های دنبالهٔ نظیر، کدام یک از آنها به هم نزدیکترند و همان را به کاربرد.

روش از سرگیری، سریعترین روشهای محاسبهٔ اندازهٔ تقریبی ریشهٔ یک معادله به شمار می‌آید. اما هم تشکیل معادلهٔ $x = g(x)$ و هم انتخاب مقدار آغازی x_0، به ذوق و سلیقهٔ شخص و به ورزیدگی و مهارت او بستگی دارد.

برنامهٔ کامپیوتری روش از سرگیری

یک امتیاز دیگر روش از سرگیری، سادگی و کوتاهی برنامهٔ کامپیوتری آن است. این برنامه، بیش از چند دستور عمل ندارد و می‌توان آن را به هر زبان برنامه‌نویسی برگرداند و روی هرگونه کامپیوتر اجرا کرد. دستور عملهای این برنامه چنین هستند :

۱ـ معرفی تابع $g(x)$.

۲ـ دستور جایگزینی $a = x_0$.

۳ـ محاسبهٔ $x = g(a)$.

۴ـ بررسی شرط $x - a < \varepsilon$.

۵ـ
- در صورت برقرار نبودن شرط ۴، جایگزینی $a = x$ و برگشت به دستور ۳.
- در صورت برقرار شدن شرط ۴، نمودن مقدار x و پایان برنامه.

چند مسألهٔ نمونه

۱ـ معادلهٔ کاشانی: پیش از این یادآوری شد که کاشانی برای به‌دست آوردن اندازهٔ سینوس یک درجه، محاسبه‌هایی را انجام می‌دهد و سرانجام با معادلهٔ درجهٔ سوم زیر روبه‌رو می‌شود :

$$3x - x^3 = 0/104719$$

کاشانی استدلال می‌کند که چون مقدار x خیلی کوچک است،

مقدار $x^۳$ خیلی کوچکتر است، و با چشم‌پوشی از آن، در نخستین رقم با معنای جواب معادله، تفاوتی پیش نخواهد آمد. پس با فرض $x^۳ = ۰$ به دست می‌آورد :

$$x \approx ۰/۱۰۴۷۷۱۹ \div ۳ \approx ۰/۰۳$$

و نتیجه می‌گیرد، نخستین رقم با معنای جواب معادله ۳ و در مرتبهٔ دوم پس از ممیّز واقع است. او رقم با معنای بعدی را a می‌گیرد و از معادلهٔ

$$۰/۰۳a = \frac{۰/۱۰۴۷۷۱۹ + (۰/۰۳)^۳}{۳}$$

رقم a را برابر با ۴ به‌دست می‌آورد. او محاسبه را به همین ترتیب (و در پایهٔ ۶۰) دنبال می‌کند و ۹ رقم با معنای بعدی را به‌دست می‌آورد.

هرگاه روش از سرگیری را به‌گونهٔ امروزی آن و با مقدار آغازی $x_۰ = ۰/۰۳$ به‌کار ببریم، خواهیم داشت :

$$x = \frac{۰/۱۰۴۷۷۱۹ + x^۳}{۳}$$

$$x_۰ = ۰/۰۳ \Rightarrow (x_n) = ۰/۰۳ \ , \ ۰/۰۳۴۹۳۲۹ \ ,$$
$$۰/۰۳۴۹۳۸۱ \ ,...$$

و تا ۹ رقم پس از ممیّز، به عدد ۰/۰۳۴۹۰۴۸۱۲ دست می‌یابیم.

یادآوری می‌شود که در روش از سرگیری، تبدیل

$$x^۲ - px + q = ۰ \rightarrow x = \frac{q + x^۲}{p}$$

تنها برای آن جواب از معادله کارساز است که قدر مطلقش بسیار کوچک باشد وگرنه بهتر است تبدیلی از گونهٔ

$$x = \sqrt[۳]{px - q} \ \text{یا} \ x = \frac{q}{p - x^۲} \ \text{یا} \ ...$$

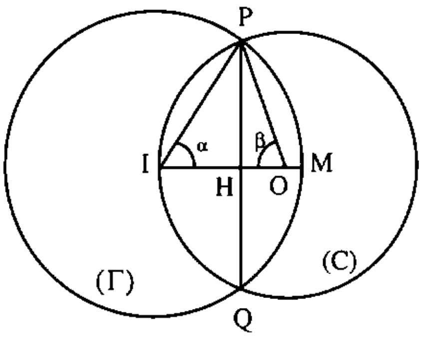
را به کار برد. چنان‌که برای معادلهٔ $x^۳ + x - ۳ = ۰$ که جواب آن بین ۱ و ۲ واقع است، با تبدیل $x = \sqrt[۳]{۳ - x}$ و با انتخاب $x_۰ = ۱$، پس از ۹ بار از سرگیری، به جواب ۱/۲۱۳۴۱۱۶ دست می‌یابیم.

۲ـ مسألهٔ بز و چراگاه: رسم کردن دایره‌ای که محیط دایرهٔ داده شده‌ای را نصف کند، کار ساده، و مسأله‌های حل شدنی زیادی در زمینهٔ آن طرح شده است و می‌توان طرح کرد. اما رسم کردن دایره‌ای که مساحت دایرهٔ داده شده‌ای را نصف کند، با خط‌کش و پرگار، شدنی نیست. این مسأله، با عنوان «مسألهٔ بز و چراگاه» بیان شده و به مسابقه گذاشته شده است : کسی نصف چمنی دایره شکل را صاحب است، یک بز دارد، یک سر ریسمانی را به گردن بز می‌بندد و سر دیگر آن را در یک نقطه از محیط چمن ثابت می‌کند. درازای ریسمان را چه اندازه بگیرد تا بز بیش از نیمی از مساحت چمن را نتواند چرا کند؟

به بیان هندسی : دایرهٔ (C) به مرکز O و به شعاع R داده شده است. به مرکز I واقع بر محیط دایرهٔ (C)، دایرهٔ (Γ) به شعاع r، اگر چنان رسم شده باشد که مساحت دایرهٔ (C) را نصف کرده باشد، اندازهٔ r را برحسب R به دست آورید.

برای سادگی، شعاع دایرهٔ (C) را $R = ۱$ می‌گیریم.

به فرض $\angle OIP = \alpha$ و $\angle IOP = \beta$، در مثلث IOP داریم :



$$۲\alpha + \beta = \pi$$

$$\sin\beta = r\sin\alpha$$

و چون مساحت قطعهٔ PIQ از دایرهٔ (C) و مساحت قطعهٔ PMQ از دایرهٔ (Γ) را حساب کنیم و مجموع آنها را با نصف مساحت دایرهٔ (C) برابر بگیریم، به دست می‌آوریم :

$$\beta + r^۲\alpha - \sin\beta = \frac{\pi}{۲}$$

از حذف α و r بین رابطه‌های بالا به‌دست می‌آید :

$$\beta = \frac{\pi}{۲} + \sin\beta - ۲(\pi - \beta)\sin^۲\frac{\beta}{۲}$$

اکنون روش از سرگیری را روی این معادله، به‌کار می‌بریم و چون IO از $IP = IM$ و بنابر آن β از $\frac{\pi}{۳}$ کوچکتر است، مقدار آغازی $\beta_۰$، را یک رادیان می‌گیریم. در این صورت، دنبالهٔ تقریبهای β برحسب رادیان چنین به‌دست می‌آید :

۱ , ۱/۴۲۷۷۸۲۱ , ۱/۲۴۰۷۰۳۸ , ۱/۲۳۵۸۹۹۴ ,

۱/۲۳۵۸۹۶۹ , ۱/۲۳۵۸۹۶۹

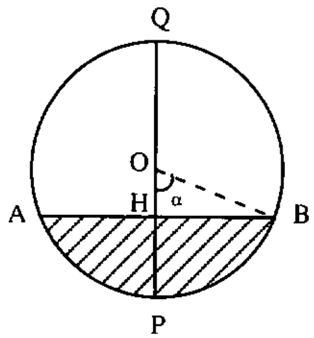
و مقدار r تا ۷ رقم پس از ممیّز می‌شود :

$$r = ۲\sin\frac{۱/۲۳۵۸۹۶۹}{۲} = ۱/۱۵۸۷۲۸۴$$

شعاع دایره‌ای که باید رسم شود، تقریباً ۱/۱۶ برابر شعاع دایرهٔ داده شده است.

۳ـ درجه‌بندی مخزن گازوئیل: مخزن گازوئیل شوفاژخانه‌ها به شکل استوانه است و معمولاً چنان نصب می‌شود که مولدهای آن در وضع افقی‌اند و لوله‌ای پلاستیکی که سطح گازوئیل درون مخزن را نشان می‌دهد، در وضع قائم قرار دارد. درجه‌بندی این لوله، در عمل خیلی ساده است ؛ هر بار حجم معینی از گازوئیل را درون مخزن می‌ریزند و سطح آن را روی لولهٔ پلاستیکی نشانه می‌گذارند. اما این درجه‌بندی به عنوان یک مسألهٔ ریاضی، عبارت از این است که اگر نسبت مساحت قطعه‌ای از یک دایره به مساحت آن دایره معلوم باشد، ارتفاع آن قطعه، چه کسری از قطر دایره است؟

شعاع دایره را R، ارتفاع قطعه دایره را x، زاویهٔ مرکزی کمان قطعه را ۲α، مساحت قطعه را S، و نسبت مساحت قطعه به مساحت دایره را a می‌گیریم و خواهیم داشت :



$$x = R(۱-\cos\alpha)$$

$$S = R^۲\alpha - \frac{۱}{۲}R^۲\sin ۲\alpha$$

و به‌دست خواهیم آورد :

$$۲\alpha - \sin ۲\alpha = ۲a\pi$$

از این معادله، برای مقدارهای مختلف a، اندازهٔ α و از روی آن ارتفاع x به‌دست می‌آید. برای حلّ این معادله نیز می‌توانیم روش از سرگیری را به کار ببریم. برای مثال، به فرض $a = \frac{۱}{۸}$ داریم :

$$\alpha = \frac{۴\sin ۲\alpha + \pi}{۸}$$

و چون در این حالت، اندازهٔ x نزدیک به یک چهارم شعاع است و بنابر آن :

$$\cos\alpha \approx ۰/۷۵ \;,\; \alpha \approx ۰/۷۲۳$$

مقدار آغازی α. را ۰/۷۲۳ می‌گیریم و دنبالهٔ تقریبهای α می‌شود :

۰/۷۲۳ , ۰/۸۸۸۱۰۶ , ۰/۸۸۲۰۴۳ , ۰/۸۸۳۳۸۷۹ ,

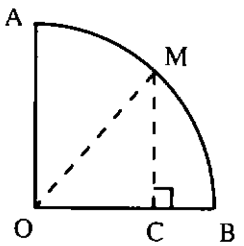
۰/۸۸۳۳۱۲۷۷ , ۰/۸۸۳۱۷۸۳ ,...

و با تقریب ۰/۰۰۰۱ داریم :

$$\alpha = ۰/۸۸۳۱ \Rightarrow \frac{x}{R} = ۰/۳۶۵۲ \;,\; \frac{x}{۲R} = ۰/۱۸۲۶$$

۴ـ مسأله‌ای از خیّام: روی کمان AB از ربع دایرهٔ AOB، نقطهٔ M را چنان بیابید که اگر C پای عمود وارد از M بر OB باشد، داشته باشیم :

$$\frac{OA}{MC} = \frac{OC}{CB}$$



اگر راه‌حل جبری را به‌کار ببریم، با فرض $OC = x$ و با فرض این‌که شعاع دایره برابر یک باشد، به معادلهٔ درجهٔ سوّم زیر می‌رسیم :

$$x^۳ + x^۲ + x - ۱ = ۰$$

این معادله، یک ریشهٔ حقیقی دارد که کمی از ۰/۵ بزرگتر است و چون آن را به صورت

$$x = \frac{۱}{x^۲ + x + ۱}$$

بنویسیم و روش از سرگیری را با مقدار آغازی $x_۰ = ۰/۵$ به کار ببریم، تا پنج رقم پس از ممیّز، به جواب $x = ۰/۵۴۳۶۸$ دست می‌یابیم.

می‌توانیم راه مثلثاتی را به کار ببریم. با فرض $\angle MOB = \alpha$ و این‌که شعاع ربع دایره را یک بگیریم، به معادلهٔ مثلثاتی

$\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha-۱=۰$

می‌رسیم. این معادله را به‌صورت

$$\cos\alpha=\frac{۱}{۱+\sin\alpha}\Rightarrow\alpha=\mathrm{Arc}(\cos\frac{۱}{۱+\sin\alpha})$$

می‌نویسیم و روی آن، روش از سرگیری را با مقدار آغازی $\alpha_۰=۶۰^\circ$ به کار می‌بریم که جواب

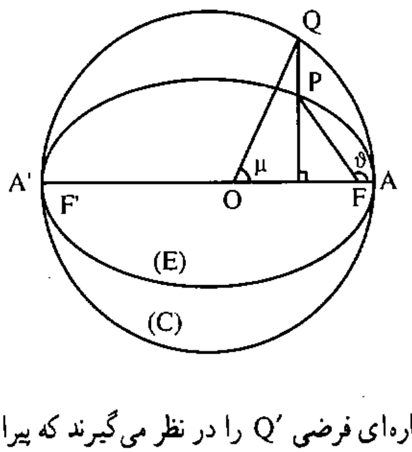
$$\alpha=۵۷^\circ۰۳'۵۵''$$

به‌دست خواهد آمد. (توجه داشته باشید که مجهول x راه‌حلّ جبری با $\cos\alpha$ برابر است.)

۵ـ معادلهٔ کپلر: پس از آن‌که کپلر قانونهای سه گانهٔ حرکت سیّاره‌ها به دور خورشید و نیوتن قانون جاذبهٔ عمومی را به‌دست آوردند، این مسأله به میان آمد که ثابت کنند از قانون جاذبهٔ عمومی، می‌توان قانونهای کپلر را به‌دست آورد. در پی حلّ این مسأله، با معادلهٔ

$$\mu-e\sin\mu=M$$

به نام *معادلهٔ کپلر* روبه‌رو شدند. در این معادله، μ *بی هنجاری مرکزی*، M *بی هنجاری متوسط*، و e *خروج از مرکز* مدار سیّاره به دور خورشید است. اگر بیضی (E) به مرکز O و به قطر بزرگ A′A مدار سیّاره، F کانون این بیضی، دایرهٔ (C) به قطر A′A دایرهٔ اصلی بیضی، P موضع سیّاره و Q نقطهٔ نظیر P روی دایرهٔ (C) باشد، زاویهٔ $v=AFP$ را *بی هنجاری حقیقی* و زاویهٔ $\mu=AOQ$ را *بی هنجاری مرکزی* نظیر موضع P از سیّاره می‌نامند.



همچنین سیّاره‌ای فرضی Q′ را در نظر می‌گیرند که پیرامون دایرهٔ (C) را با حرکت یکنواخت بپیماید و با سیّارهٔ حقیقی در A و A′ بر هم واقع باشند و زاویهٔ $M=AOQ'$ را *بی هنجاری متوسط* می‌نامند.

در معادلهٔ کپلر، اندازهٔ e برحسب رادیان و اندازهٔ M برحسب درجه معلوم است و باید اندازهٔ μ برحسب درجه به‌دست آید. بجز روشهایی که نیوتن و کسانی دیگر برای حل معادله به کار بردند، ریاضیدان آلمانی کونیکس، روش از سرگیری با مقدار آغازی $\mu_۰=M$ را به‌کار برد و زودتر به جواب پذیرفتنی دست یافت. برای مثال، در حالت:

$$e=۰/۰۰۲۸۴۳۳\ ,\ M=۲۱۵^\circ\ ۲۸'\ ۴۷/۷''$$

خواهیم داشت:

$$\mu_۰=۲۱۵^\circ\ ۲۸'\ ۴۷/۷''$$

$$\Rightarrow\mu_۱=۲۱۵^\circ\ ۲۳'\ ۰۷/۲''\ ,$$

$$\mu_۲=\mu_۳=۲۱۵^\circ\ ۲۳'\ ۰۸''$$

تنها پس از سه بار عمل از سرگیری، جواب پذیرفتنی به دست می‌آید.

۶ـ سه مسأله از هفت مسألهٔ شیخ بهایی:

$$۱)\begin{cases}x+\sqrt{y}=۱۰\\ y+\sqrt{x}=۵\end{cases}$$

$$x=۱۰-\sqrt{۵-\sqrt{x}}\ ,\ ۹>x>۱۰-\sqrt{۵}$$

$$x_۰=۸\ \Rightarrow x\approx۸/۵۵۹۷۵۹۳\ ,\ y=۲/۰۷۴۲۹۳۳$$

$$۲)\begin{cases}x+y=۱۰\\ (x+\sqrt{x})(y+\sqrt{y})=۳۵\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=۱۰-y\\ x=\dfrac{۳۵}{y+\sqrt{y}}-\sqrt{x}\end{cases}$$

$$x_۰=۲\ ,\ y_۰=۸\Rightarrow x\approx۱/۸۲۱۱۹\ ,\ y\approx۸/۱۷۸۸۱$$

$$۳)\begin{cases}x+y=۱۰\\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=x\end{cases}$$

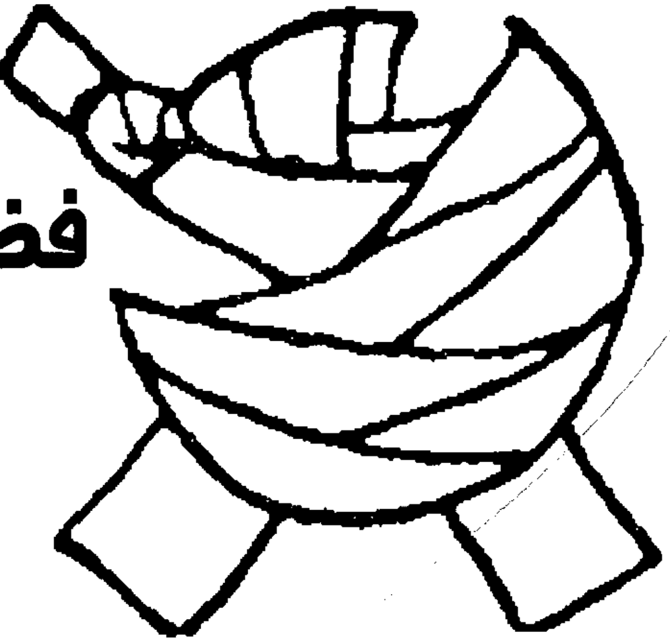
$$x=\frac{۱۰۰}{۲۰+۸x-x^۲}$$

$$x_۰=۳\Rightarrow x\approx۲/۸۷۸۳۶۵۷\ ,\ y\approx۷/۱۲۱۶۳۴۳$$

یادداشتها:

* Iteration Method

** برای اطلاع بیشتر، می‌توانید به «کاشانی‌نامه» تألیف استاد ابوالقاسم قربانی، یا به نوشتار ایشان در مجلهٔ ریاضی یکان خرداد ۱۳۴۹ مراجعه کنید.



فضاهای برداری و ضرب داخلی

● حمیدرضا امیری

وقتی از ضرب داخلی صحبت به میان می‌آید، معمولاً بردارهایی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ برایمان مجسّم می‌شوند و حاصلضرب داخلی آنها که عددی است حقیقی ؛ امّا بردار، واژه‌ای است که برای ما تازگی ندارد و از قبل با آن آشنا هستیم، *فضای برداری* نیز باید چنین باشد که البته با حذف این مبحث (فضای برداری) از برنامهٔ درسی دبیرستان، با این واژه زیاد مأنوس نبوده یا حدّاقل زیاد از آن استفاده نمی‌کنیم. ولی فضای برداریِ چندجمله‌ایها، فضای برداری ماتریسها، فضای برداریِ توابع پیوسته و... فضاهایی برداری هستند که همواره از اعضای آنها، یعنی بردارهای این فضاها، امّا نه به‌عنوان بردار و نه حتّی با نامِ بردار، از آنها استفاده می‌کنیم.

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا تعریف ضرب داخلی، اندازه (نُرم)، زاویهٔ بین دو بردار و عمود بودن، که با آنها در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ آشنا هستیم، قابل تعمیم است؟

می‌خواهیم با درنظر گرفتن اصلهایی خاصّ، تعریفی برای ضرب داخلی دو بردار (در هر فضای برداری) ارائه دهیم که جامع و مانع بوده و درواقع، ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ حالت خاص آن باشد و همهٔ خواصِ ضرب داخلی و نتیجه‌های حاصل از آن حفظ شود.

برای شروع، فضای برداری حقیقی را تعریف می‌کنیم :

اگر V مجموعه‌ای ناتهی باشد و عملی به‌نام عمل جمع روی V تعریف کنیم، به‌طوری که این عمل روی V، دارای خواص شرکت‌پذیری، عضو خنثی، عضو متقابل (عضو قرینه) و جابه‌جایی باشد ؛ یعنی :

I) $a+(b+c)=(a+b)+c$ (برای هر a و b و c در V)

II) $a+\bar{0}=\bar{0}+a=\bar{0}$ ($\bar{0}$ را عضو خنثی می‌نامیم)

III) $a+(-a)=(-a)+a=\bar{0}$ ($(-a)$ قرینهٔ a نامیده می‌شود)

IV) $a+b=b+a$ (برای هر a و b در V)

و بین اعضای V و اعضای $\mathbb{R}$ (مجموعهٔ اعداد حقیقی) عملی به‌نام ضرب اسکالر، به‌گونه‌ای تعریف شود که اوّلاً این عمل در V بسته باشد ؛ یعنی برای هر $r\in\mathbb{R}$ و هر $u\in V$ همواره $r.u\in V$ و ثانیاً خواصّ زیر، همگی برقرار باشند، در این صورت، V را یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$ یا یک *فضای برداری حقیقی* می‌نامند :

(برای هر $u\in V$)

I) $1u=u$

II) $(r_1+r_2).u=r_1\cdot u+r_2\cdot u$

III) $r.(u_1+u_2)=r.u_1+r.u_2$

IV) $r_1.(r_2.u)=(r_1r_2).u$

با توجه به تعریف فوق و تعریف جمع ماتریسی، جمع برداری در $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{R}^3$، ...، $\mathbb{R}^n$ (جمع مؤلفه به مؤلفه)، جمع چندجمله‌ایها، جمع توابع پیوسته و تعریف ضرب عدد در ماتریس،

ضرب عدد در nتایی، ضرب عدد در چندجمله‌ایها و ضرب عدد در ضابطهٔ تابع، هریک از مجموعه‌های زیر، یک فضای برداری حقیقی تشکیل می‌دهند :

۱ـ مجموعهٔ nتایی‌های مرتب ($\mathbb{R}^n$) و در حالت خاص $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$.

۲ـ مجموعهٔ ماتریسهای $m \times n$ (M_{mn})

۳ـ مجموعهٔ چندجمله‌ایها $(P(t))$

۴ـ مجموعهٔ توابع پیوسته روی بازهٔ $[a,b]$، $(C[a,b])$

حال به تعریف ضرب داخلی در هریک از فضاهای برداری فوق و به‌طورکلّی برای هر فضای برداری می‌پردازیم :

تعریف: فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد، برای هر دو عضو، از V مانند u و v، عدد حقیقی (u.v)، **ضرب داخلی** دو بردار u و v نامیده می‌شود ؛ هرگاه در سه اصل زیر صدق کند :

I) $\left((au_1 + bu_2).V\right) = a(u_1.V) + b(u_2.V)$ (خاصیت خطی)

II) $(u.V) = (V.u)$ (خاصیت جابجایی)

III) $(u.u) \geq 0$ $\left((u.u) = 0 \Leftrightarrow u = \vec{0}\right)$

تذکر ۱: با استفاده از اصل (I) و اصل (II) داریم :

$$\left(u.(aV_1 + bV_2)\right) = \left((aV_1 + bV_2).u\right)$$
$$= a(V_1.u) + b(V_2.u)$$
$$= a(u.V_1) + b(u.V_2)$$

تذکر ۲: درحالت کلی و به استقرا ثابت می‌شود :

$$\left((a_1u_1 + \ldots + a_nu_n).V\right) = a_1(u_1.V_1) + \ldots + a_n(u_n.V),$$
$$\left(u.(a_1V_1 + \ldots + a_nV_n)\right) = a_1(u.V_1) + \ldots + a_n(u.V_n)$$

از ترکیب دو خاصیت اخیر، رابطهٔ کلّی زیر حاصل می‌شود :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_iu_i . \sum_{j=1}^{n} a_jV_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j(u_i.V_j)$$

مثال: اگر V یک فضای برداری و $u, v \in V$ در این‌صورت :

$$\left((3u - 2V).(2u + 4V)\right) = 6(u.u) + 8(u.V) - 4(V.u)$$
$$-8(V.V) = 6(u.u) + 4(u.V) - 8(V.V)$$

نُرم (طول) یک بردار

با توجه به اصل (III) ضرب داخلی و این‌که $(u.u) \geq 0$ نُرم یا طول بردار u را با نماد $\|u\|$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\|u\| = \sqrt{(u.u)} \quad \text{یا} \quad \|u\|^2 = (u.u)$$

تذکر: اگر u برداری از فضای برداری V باشد و $\|u\| = 1$، در این صورت، u را *بردار* یکّه می‌نامیم و درحالت کلّی، هرگاه V برداری دلخواه از فضای برداری V باشد، همواره دارای بردار یکّه بوده و آن را با e_V نشان داده و از ضرب عدد $\frac{1}{\|V\|}$ در بردار V به‌دست می‌آید :

$$e_V = \frac{1}{\|V\|}V$$

مثالهایی از ضرب داخلی در فضاهای برداری

۱ـ فضای برداری $\mathbb{R}^n$

در فضای برداری $\mathbb{R}^n$ (nتایی‌های مرتب) ضربی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$u = (a_1^2 \cdots + a_n^2)$$
$$V = (b_1, \ldots, b_n) \Rightarrow (u.v) = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$$
$$\|u\| = \sqrt{(u.u)} = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$$

به‌راحتی قابل تحقیق است، ضربی که به‌صورت فوق در $\mathbb{R}^n$ تعریف شد، در هر سه اصل ضرب داخلی صدق می‌کند، بنابراین این ضرب، یک ضرب داخلی است که در حالت خاص n=3، برای فضای برداری $\mathbb{R}^3$، مثالهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم :

$$u = (1,-1,2)\ ,\ v = (2,1,-4)\ ,\ w = (-3,0,2)$$
$$(u.v) = 1\times 2 + (-1)\times 1 + 2\times(-4) = -7 = (v.u)$$
$$(u.w) = 1\times(-3) + (-1)\times 0 + 2\times 2 = 1 = (w.u)$$
$$(v+w) = (-1,1,-2)$$
$$\left((v+w).u\right) = (-1)\times 1 + 1\times(-1) + (-2)\times 2 = -6$$

(همان‌طور که ملاحظه می‌کنید : $\left((v+w).u\right) = (v.u) + (w.u)$)

$$\|u\| = \sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+۲^۲} = \sqrt{۶}$$

$$e_u = \frac{۱}{\sqrt{۶}}(۱,-۱,۲) = \left(\frac{۱}{\sqrt{۶}}, \frac{-۱}{\sqrt{۶}}, \frac{۲}{\sqrt{۶}}\right)$$

۲- فضای برداری ماتریسهای $m \times n$ (M_{mn})

در فضای برداری ماتریسهای $m \times n$ ضربی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(A.B) = tr(B^T \times A)$$

(منظور از $tr(A)$ حاصل جمع درآیه‌های روی قطر اصلیِ A است.)

مثال ۱: اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ در این‌صورت داریم:

$$(A.B) = tr(B^T \times A) = tr\left(\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ -۱ & ۱ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\begin{bmatrix} ۱۷ & ۲۲ & -۱۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۱۳ & ۲۰ & -۱۰ \end{bmatrix}\right) = ۱۷+۲-۱۰ = ۹$$

با کمی دقّت، متوجه می‌شویم که حاصل $tr(B^T \times A)$ با حاصل‌جمعِ حاصلضربهای نظیر به نظیر درآیه‌ها، برابر خواهد بود؛ یعنی:

$$(A.B) = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۵ & ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$= ۱\times۲ + ۲\times(-۱) + (-۱)\times۴ + ۳\times۵ + ۴\times۱ + (-۲)\times۳$$

$$= ۲ + (-۲) + (-۴) + ۱۵ + ۴ + (-۶) = ۹$$

این ضرب که به دو شکل معادل در M_{mn} تعریف شد، در هر سه اصل، ضرب داخلی صدق می‌کند؛ بنابراین یک *ضرب داخلی* است و درحالت کلّی در این فضا داریم:

$$(A.B) = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}b_{ij}, \quad \|A\|^۲ = (A.A) = \sum_{i=۱}^{m}\sum_{j=۱}^{n} a_{ij}^۲$$

با توجه به ماتریس A در مثال ۱ داریم:

$$\|A\|^۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & ۴ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$= ۱\times۱ + ۲\times۲ + (-۱)\times(-۱) + ۳\times۳ + ۴\times۴ + (-۲)\times(-۲)$$

$$= ۱+۴+۱+۹+۱۶+۴ = ۳۵ \Rightarrow \|A\| = \sqrt{۳۵} \geq ۰$$

مثال ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۳}}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ داریم:

$$(A.B) = tr(B^T \times A) = tr\left(\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{۳}}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲} \end{bmatrix}\right)$$

$$= tr\left(\left[-\frac{\sqrt{۳}}{۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۴}\right]\right) = tr([۰]) = ۰$$

(توجه دارید که بردارهای $\vec{a} = (\frac{۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}}{۲})$ و $\vec{b} = (-\frac{\sqrt{۳}}{۲}, \frac{۱}{۲})$ دو بردار عمود بر هم هستند!)

۳- فضای برداری تابعهای پیوسته روی $[a,b]$ ($C[a,b]$)

برای هر f و g در $C[a,b]$، ضربی به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f.g) = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad (a \leq t \leq b)$$

توجه دارید که *فضای برداری چندجمله‌ایها* ($P(t)$) زیرفضایی از $C[a,b]$ است و همین ضرب را می‌توانیم روی $P(t)$ تعریف کنیم.

مثال: چندجمله‌ایهای $f(t) = ۲t$ و $g(t) = -۳t$ را در بازهٔ $[۰,۱]$ درنظر گرفته و داریم:

$$(f.g) = \int_۰^۱ f(t)g(t)dt = \int_۰^۱ -۶t^۲dt = -۲t^۳\Big|_۰^۱ = -۲$$

$$\|g\|^۲ = \int_۰^۱ g(t)g(t)dt = \int_۰^۱ ۹t^۲dt = ۳t^۳\Big|_۰^۱ = ۳$$

$$\Rightarrow \|g\| = \sqrt{۳}$$

$$\|f\|^۲ = \int_۰^۱ f(t)f(t)dt = \int_۰^۱ ۴t^۲dt = \frac{۴}{۳}t^۳\Big|_۰^۱ = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \|f\| = \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}$$

زاویهٔ بین بردارها در هر فضای برداری

تعریف: اگر u و v دو بردار ناصفر از فضای برداری V باشند، در این‌صورت، زاویهٔ بین u و v، زاویه‌ای است چون $0 \le \theta \le \pi$ که از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$\cos\theta = \frac{(u.v)}{\|u\| \times \|v\|}$$

مثال: در مثال قبل، داشتیم $f(t) = 2t$ و $g(t) = -3t$ و نتایج زیر را به‌دست آوردیم:

$$(f.g) = -2\ ,\ \|f\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ ,\ \|g\| = \sqrt{3}$$

$$\cos\theta = \frac{-2}{\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3}} = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow \theta = \pi$$

بنابراین در فضای $P(t)$، زاویهٔ بین f و g برابر است با π، که البته اگر همین f و g را به‌صورت دو خط در فضای برداری $\mathbb{R}^2$ درنظر بگیریم، زاویهٔ بین آنها در $\mathbb{R}^2$، $\frac{\pi}{4}$ خواهد بود!

بردارهای عمود برهم

تعریف: اگر V یک فضای برداری حقیقی و u و v بردارهایی از فضای برداری V باشند، در این‌صورت، دو بردار u و v را عمود بر هم می‌نامیم؛ هرگاه: $(u.v)=0$.

تذکر ۱: با توجه به تعریف زاویه بین دو بردار، می‌توان گفت: «بردار u عمود بر بردار v است؛ هرگاه کسینوس زاویهٔ بین آنها صفر باشد.»

تذکر ۲: بردار صفر ($\bar{0}$) در هر فضای برداری، بر هر بردار دیگر در آن فضا عمود است:

$$(\bar{0}.u) = (\bar{0}u.u) = \bar{0}(u.u) = 0$$

مثال ۱: اگر فرض کنیم $u = (1,2,1)$، $v = (1,2,-5)$ و $w = (2,-4,-6)$ بردارهایی در $\mathbb{R}^3$ باشند، در این‌صورت داریم:

$$(u.v) = 1\times1 + 2\times2 + 1\times(-5) = 0$$

$$(u.w) = 1\times2 + 2\times(-4) + 1\times(-6) = 0$$

$$(v.w) = 1\times2 + 2\times(-4) + (-5)\times(-6) = -36$$

بنابراین بردار u بر v و w عمود است؛ ولی v و w عمود بر هم نیستند.

مثال ۲: تابعهای $f(t)=\sin t$ و $g(t)=\cos t$ را از فضای برداری $C[-\pi,\pi]$ درنظر می‌گیریم و داریم:

$$(\sin t\cdot\cos t) = \int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 - 0 = 0$$

بنابراین دو تابع فوق در فضای $C[-\pi,\pi]$، بر هم عمود می‌باشند.

مثال ۳: تابعهای $f(t)=t$ و $g(t) = -t$ را در فضای برداری $C[-1,1]$ درنظر می‌گیریم، در این‌صورت داریم:

$$(f(t).g(t)) = \int_{-1}^{1}-t^2dt = -\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

بنابراین، دو تابع فوق در فضای $C[-1,1]$ برهم عمود **نمی‌باشند**.

تذکر: مفهوم عمود بودن با توجه به تعریف ارائه شده، با مفهوم عمود بودن دو خط بر هم یا دو بردار بر هم، به لحاظ هندسی متفاوت است و البته درحالت خاص، یعنی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ به همان معناست که ما انتظار داریم.

مثال ۴: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ دو بردار (ماتریس) از فضای برداری $M_{2\times2}$ باشند، داریم:

$$(A.B) = 2\times0 + 0\times3 + 0\times1 + (-1)\times0 = 0$$

پس ماتریسهای A و B در فضای $M_{2\times2}$ بر یکدیگر عمودند!

مثال ۵: اگر $f(t)=t+k$ و $g(t) = t^2$ در این‌صورت، k را چنان بیابید که تابعهای f و g در $C[0,1]$ بر یکدیگر عمود باشند.

$$(f.g) = \int_0^1(t+k)t^2dt = \int_0^1(t^3 + kt^2)dt = 0$$

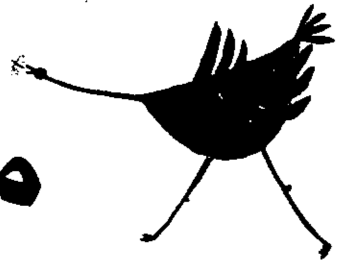
$$\Rightarrow (\frac{1}{4}t^4 + \frac{k}{3}t^3)\Big|_0^1 = (\frac{1}{4} + \frac{k}{3}) = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{4}$$

تمرین: در فضای برداری $C[0,1]$ مقدار k را چنان بیابید که دو تابع $f(t) = -t$ و $g(t)=t+k$ بر یکدیگر عمود باشند. (جواب: $k = -\frac{2}{3}$)

گشت و گذاری در ریاضیات معاصر







● غلامرضا یاسی‌پور

قانون تقابل. بررسی این پرسش که به ازای کدام یک از پیمانه‌های p ، عدد مفروض a ماندهٔ درجهٔ دوم است، به کشف قانون مشهور تقابل درجهٔ دوم انجامید، که توسط اویلر بر مبنای اطلاعات عددی گسترده‌ای تنظیم شد.

فرض می‌کنیم p و q اعداد اوّل و فرد باشند. در صورتی‌که دست کم یکی از آنها به صورت ۱ + ۴k باشد، آن‌گاه هم‌نهشتیهای $x^2 \equiv p \pmod q$ و $y^2 \equiv q \pmod p$ هردو حل‌پذیر یا هردو حل‌ناپذیرند (به عبارت دیگر، p ماندهٔ به پیمانهٔ q است، اگر و تنها اگر q ماندهٔ به پیمانهٔ p باشد).

اما در صورتی که هم p و هم q به صورت ۳ + ۴k باشند، آن‌گاه تنها یکی از دو هم‌نهشتی حل‌پذیر است و دیگری حل‌ناپذیر.

اوّلین اثبات کامل این قانون، توسط گاوس، زمانی که هجده ساله بود، یافت شد. بعدها وی، شش اثبات دیگر از آنچه که *قضیهٔ اصلی* «Theorema fundamentale» نامید، به دست داد، و از آن زمان تاکنون، روی هم رفته، بیش از پنجاه اثبات مختلف برای این قضیه به دست آمده است.

اصول گوناگونی که برای یافتن قوانین تقابل مانده‌های توانی بالاتر به‌کار رفته و زحماتی که برای این کار کشیده شده، وسیله‌ای قدرتمند به‌نظریهٔ اعداد داده‌اند.

در حدود ده سال پیش از اثبات گاوس، اثباتی در مورد قانون تقابل درجهٔ دوم توسط **لژاندر** «LEGENDRE» (۱۷۵۲-۱۸۳۳) انتشار یافت؛ اما این اثبات دارای رخنه بود. لژاندر نماد سودمند $(\frac{a}{p})$ (*نماد لژاندر* «Legendre symbol») را معرفی کرد، که بسته به این که a ماندهٔ به پیمانهٔ p یا ماندهٔ به پیمانهٔ p و یا بخشپذیر بر p باشد، دارای مقدار ۱+، ۱-، یا ۰ است. این نماد، بیان قانون مورد بحث را در یک فرمول ممکن می‌کند:

$$(\frac{p}{q}).(\frac{q}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$

قضیه‌های زیر مکملهای قانون تقابل‌اند:

$$(\frac{-1}{p}) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \quad , \quad (\frac{2}{p}) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

قضیهٔ اوّل مقرر می‌کند که هم‌نهشتی $x^2 \equiv -1 \pmod p$ زمانی حل‌پذیر است که p به صورت ۱ + ۴k باشد. در نتیجه، $\frac{(p-1)}{2}$ زوج است و زمانی حل‌ناپذیر است که p به صورت ۳ + ۴k باشد؛ در نتیجه $\frac{(p-1)}{2}$ فرد است.

معادله‌های دیوفانتی. فرض می‌کنیم $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیحی بر حسب x_1، x_2، ...، x_n باشد.

معادلهٔ $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ را در صورتی *دیوفانتی* «Diophantine» می‌نامیم که جواب صحیح آن را خواسته باشیم. این نوع معادله را به نام ریاضیدان یونانی **دیوفانت** اسکندرانی «DIOPHANTOS of Alexandria» نامگذاری کرده‌اند.

دستگاه معادله‌های دیوفانتی «Diophantine equations»

$$f_1 = b_1 \ , \ f_2 = b_2 \ , \ \dots \ , \ f_k = b_k$$

هم‌ارز معادلهٔ منفرد

$$(f_1 - b_1)^2 + (f_2 - b_2)^2 + \dots + (f_k - b_k)^2 = 0$$

است ؛ یعنی مجموعه‌های جواب واقع در Z دستگاه و معادلهٔ منفرد فوق یکسان‌اند.

معادلهٔ دیوفانتی

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (\text{صحیح } b \text{ ، } a_n \text{ ، ... ، } a_2 \text{ ، } a_1)$$

حل‌پذیر است ؛ اگر و تنها اگر b بر $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ب.م.م. بخشپذیر باشد.

معادلهٔ مورد بحث اگر حل‌پذیر باشد، در این صورت، بی‌نهایت جواب nتایی دارد. در این مورد، بررسی حالت $n = 2$ آسان است.

اگر a_1 و a_2 متباین (نسبت به هم اوّل) و x_1' ، x_2' یکی از جوابهای $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ باشد، آن‌گاه کل جوابها را می‌توان به صورت $x_1 = x_1' + a_2t$ ، $x_2 = x_2' - a_1t$ نمایش داد، که در آن t عددی صحیح است.

یک جفت جواب خصوصی را می‌توان از کسر تقریبی یکی مانده به آخر عبارت کسر مسلسل $\frac{a_1}{a_2}$ به دست آورد.

مثال: $43x_1 + 19x_2 = b$. کسرهای تقریبی ۴۳/۱۹ عبارت‌اند از ۷/۳، ۹/۴ و ۴۳/۱۹. کسر ۹/۴،

$$x_1' = 4b \quad , \quad x_2' = -9b$$

را به دست می‌دهد ؛ بنابراین جواب عمومی معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$x_1 = 4b + 19t \quad , \quad x_2 = -9b - 43t$$

به ازای $n \geq 3$ روشهای کسر مسلسلی عمومی تری "general continued fraction methods" مطرح شده‌اند.

اگر دستگاهی خطی از m معادلهٔ مستقل

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, m$$

مفروض باشد و اگر $m > n$ ، در این صورت دستگاه مزبور، *فرامعین* «overdetermined» است و عموماً جواب ندارد.

اما اگر $m < n$ ، دستگاه *فرومعین* «underdetermined» است و عموماً بی‌نهایت جواب دارد. به طور دقیقتر، در حالت اخیر، دستگاه برحسب اعداد صحیح x_1 ، x_2 ، ... ، x_n حل‌پذیر است ؛ اگر و تنها اگر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دترمینانهای m ـ سطری «m - rowed determinants» ماتریس ضرایب (a_{ij}) برابر ب.م.م. دترمینانهای m ـ سطری ماتریس ضرایب فزوده‌ای باشد، که از (a_{ij}) با افزودن ستون b_i ایجاد می‌شود.

مسألهٔ حل عمومیترین معادلهٔ دیوفانتی درجهٔ دوم برحسب دو مجهول x_1 ، x_2 ،

$$c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{22}x_2^2 + c_{13}x_1 + c_{23}x_2 + c_{33} = 0$$

با اعداد صحیح c_{ij} را می‌توان با تبدیل متغیرها به مسألهٔ همسان معادله‌ای به صورت خاص

$$y_1^2 - Dy_2^2 = b$$

با اعداد صحیح D و b تحویل کرد. در این مورد، دو حالت متمایز وجود دارند.

اگر $D < 0$ ، در این صورت یا جوابی موجود نیست یا بی‌نهایت جواب y_1 ، y_2 موجود می‌شوند.

اگر $D > 0$ ، آن‌گاه معادلهٔ موسوم به معادلهٔ پل Pell's equation

$$y_1^2 - Dy_2^2 = 1$$

بجز جوابهای بدیهی $y_1 = \pm 1$ ، $y_2 = 0$ بی‌نهایت جواب دارد، که می‌توانند از جوابی مینیمال به دست آیند.

بسادگی ملاحظه می‌شود که معادلهٔ عمومی

$$y_1^2 - Dy_2^2 = b$$

در صورتی که b ناماندهٔ درجهٔ دوم به پیمانهٔ D باشد، اصلاً جواب ندارد.

مثالها:

۱. معادلهٔ $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 19$ دقیقاً دارای ۱۲ جفت جواب زیر است :

۲,۳;−۲,−۳;۳,۲;−۳,−۲;۲,−۵;

−۲,۵;۵,−۲;−۵,۲;۳,−۵;−۳,۵;۵,−۳;−۵,۳

۲. $y_1^2 - 5y_2^2 = 1$. از جواب مینیمال $y_1' = 9$ ، $y_2' = 4$ و به‌ازای $n = 0, 1, 2, \dots$ کل جوابها، یعنی :

$$y_1 = \pm\left[(9 + 4\sqrt{5})^n + (9 - 4\sqrt{5})^n\right] / 2$$

$$y_2 = \pm\left[(9 + 4\sqrt{5})^n - (9 - 4\sqrt{5})^n\right] / (2\sqrt{5})$$

را به دست می‌آوریم.

مسألهٔ یافتن جمیع مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای که در مورد آنها x و y، اضلاع زاویهٔ قائمه و وتر z مضارب صحیحی از طول واحد باشند، به معادلهٔ دیوفانتی $x^2 + y^2 = z^2$ منجر می‌شود. جوابهای

آن، یعنی *اعداد فیثاغورسی* «*Pythagorean numbers*» را می‌توان با فرمولهای

$$x = u^{۲} - v^{۲}\ ,\ \ y = ۲uv\ ,\ \ z = u^{۲} + v^{۲}$$

نمایش داد، که در آنها u و v اعداد صحیح دلخواه‌اند. کوچکترین این جوابها عبارت‌اند از :

$$۳^{۲} + ۴^{۲} = ۵^{۲}\ \ ,\ \ ۵^{۲} + ۱۲^{۲} = ۱۳^{۲}$$

در این موارد، تفاوت شگفت‌آوری بین حالتهای $n = ۲$ و $n \geq ۳$ موجود است. *قضیهٔ تو* «theorem of Thue» بر این است که معادلهٔ

$$a_{۱}x^{n} + a_{۲}x^{n-۱}y + ... + a_{n}y^{n} = b(n \geq ۳\ ,\ \ a_{۱} \neq ۰)$$

با اعداد صحیح $a_{۱}$ ، $a_{۲}$ ،...، a_{n} تنها به تعداد متناهی جواب دارد ؛ مگر آن که بتوان سمت چپ آن را به عاملهای همگن از درجات پایین‌تری با ضرایب صحیح تجزیه کرد.

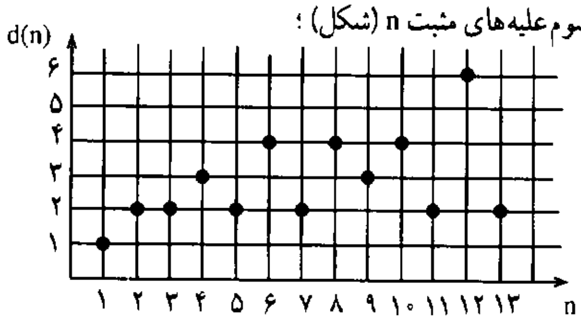
معادله‌های دیوفانتی از درجهٔ بالاتر، به مسائل عمیقی می‌انجامند که حلشان به معلوماتی از نظریهٔ میدانهای اعداد جبری نیازمند است.

در میان این معادله‌ها، *حدس فرما* «Fermat's conjecture» (نیز موسوم به آخرین قضیهٔ فرما) از توجه خاصی برخوردار بوده است : به ازای هر نمای صحیح $n > ۲$ ، هیچ سه عدد صحیح ناصفر x ، y و z صادق در معادلهٔ $x^{n} + y^{n} = z^{n}$ وجود ندارد.

در مورد این قضیه، فرما (در حدود ۱۶۳۷) در حاشیهٔ کپی خودش از آثار دیوفانت نوشته است : «من در این مورد، اثباتی به واقع شگفت‌آور یافته‌ام ؛ اما این حاشیه، کوچکتر از آن است که دربرگیرندهٔ آن باشد.» اثبات فرما هیچ‌گاه به دست نیامد و به رغم کوششهای ریاضیدانهای مشهور، هیچ‌کس تاکنون موفق به اثبات یا عدم اثبات این حدس نشده است[۱] ؛ اما نتایج جزئی جالبی دربارهٔ آن به دست آمده که از آن جمله است مورد زیر : معلوم شده که حدس مزبور به ازای جمیع نماهای تا ۱۲۵۰۰۰ صحیح است.

نظریهٔ اعداد تحلیلی. بجز تابع اویلر، یعنی $\varphi(n)$ توابع عدد-نظریه‌ای بسیار دیگری با مجموعهٔ اعداد طبیعی به عنوان حوزهٔ تعریف، مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

مثالها عبارت‌اند از : $\pi(x)$، تعداد اولهای $\leq x$ ؛ $d(n)$، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت n (شکل) ؛



تابع عدد نظریه ای d(n) : تعداد کل مقسوم علیه های مثبت n

$d(n)$ ، مجموع مقسوم‌علیه‌های مثبت n ؛ $r(n)$ ، تعداد جفتهای جواب صحیح x ، y معادلهٔ $x^{۲} + y^{۲} = n$.

بعضی از این توابع، رفتاری بسیار غیرعادی از خود نشان می‌دهند ؛ به عنوان مثال :

$$d(۱) = ۱\ ,\ \ d(۲) = ۲\ ,\ \ d(۳) = ۲\ ,\ \ d(۴) = ۳,$$

$$d(۵) = ۲\ ,\ \ d(۶) = ۴\ ,\ \ d(۷) = ۲\ ,\ \ d(۸) = ۴\ ,\ ...$$

با وجود این، اغلب می‌توان در مورد *متوسط* «average»، n مقدار اولّیهٔ تابع f ، نظمی به دست آورد.

تابع

$$[f(۱) + f(۲) + ... + f(n)]/n$$

در بسیاری از حالتها، به ازای n صعودی، مانند یک تابع تحلیلی n، به‌طور مجانبی رفتار می‌کند. به عنوان مثال، $(۱/n)\sum_{k \leq n} d(k)$ مانند لگاریتم طبیعی n نمو می‌کند. با قرار دادن :

$$[d(۱) + d(۲) + ... + d(n)]/n = \ln n + R(n)$$

درمی‌یابیم که اندازهٔ $R(n)$ نسبت به n از مرتبه‌ای کوچکتر از مورد $\ln n$ است.

بررسی متوسطهای توابع عدد ـ نظری و بالاتر از آن، باقیمانده‌های $R(n)$ آنها، به ظریفترین ابزارهای آنالیز نیازمند است. این شاخه از ریاضیات، یعنی *نظریهٔ اعداد تحلیلی* «*analytic* number theory» ذهن ریاضیدانان مشهوری را اشغال کرده که

۱ـ این حدس در دههٔ ۱۹۹۰ به اثبات رسیده است. توضیح مترجم



با اویلر در قرن هجدهم میلادی آغاز می‌شود و به‌طور مستقیم تا امروزه ادامه دارد. در این مورد، به تابع $\pi(x)$، یعنی تعداد اولهای تا (با) x، توجه خاصی معطوف شده است.

گاوس قانون مجانبی «asymptotic law» $\pi(x) \sim x/\text{Ln}x$ را حدس زد، که درستی آن تا حدود ۱۹۰۰ که توسط **آدامار** «HADAMARD» و **دولاواله ـ پواسن** «de la VALLEE - POUSSIN» به اثبات رسید، ثابت نشده بود.

بررسیهای اینان نشان داد که بهترین تقریب به $\pi(x)$ *انتگرال لگاریتمی* «*integral logarithm*» $\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ است و برآورد باقیماندهٔ $R(x) = \pi(x) - \text{li}(x)$ به گونه‌ای تنگاتنگ با موضع صفرهای مختلط *تابع زتای ریمان* «Riemann zeta - function»، یعنی، $\zeta(s) = \sum(۱/n^s)$ با $s = \sigma + it$ و $\sigma > ۱$ مرتبط است.

در میان مسائل توزیعی «distribution problems» بسیار دیگر، قضیهٔ مشهور زیر است، که ابتدا توسط **لژیون دیریکله** «Lejeune DIRICHLET» (۱۸۰۵ ـ ۱۸۵۹) به اثبات رسیده است: هر تصاعد حسابی که در آن جملهٔ اوّل و قدر نسبت، نسبت به هم اوّل باشند، شامل بی‌نهایت عدد اوّل است.

نظریهٔ اعداد جمعی. سؤالهای مربوط به نظریهٔ اعداد جمعی را با استفاده از چند قضیه و مسألهٔ خاص توضیح می‌دهیم.

قضیهٔ فرما: هر عدد اوّل p با $p \equiv ۱ (\text{mod } ۴)$ مجموع مربعات دو عدد طبیعی است. نمایش مزبور، غیر از ترتیب جمعوندها، یکتاست.

مثال: $۲۳۳ = ۸^۲ + ۱۳^۲$

قضیهٔ لاگرانژ: هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع مربعات حداکثر چهار عدد طبیعی نمایش داد.

مثال: ۱۱ را می‌توان به صورت مجموع سه مربع نوشت:

$$۱۱ = ۳^۲ + ۱^۲ + ۱^۲$$

۷ به چهار مربع نیاز دارد:

$$۷ = ۲^۲ + ۱^۲ + ۱^۲ + ۱^۲$$

مسألهٔ وارینگ «Waring's problem» (در سال ۱۷۷۰ توسط **وارینگ** مطرح، و ابتدا در سال ۱۹۰۹ توسط هیلبرت حل شد). تابع عدد ـ نظریه‌ای g(k)ای چنان موجود است که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع حداکثر g(k) توان kام اعداد طبیعی نمایش داد.

به عنوان مثال، بنابه قضیهٔ لاگرانژ، $g(۲) = ۴$ و $g(۳) = ۹$.

جالب است که به ازای $k \geq ۳$ ، هر عدد به قدر کافی بزرگ n، به جمعوندهایی کمتر از g(k) نیاز دارد و معلوم شده است که

$$۲۳۹ = ۴^۳ + ۴^۳ + ۳^۳ + ۳^۳ + ۳^۳ + ۳^۳ + ۱^۳ + ۱^۳ + ۱^۳$$

بزرگترین عددی است که به ۹ مکعب نیاز دارد؛ جمیع اعداد بزرگتر، حداکثر ۸ مکعب لازم دارند و اثبات شده که از عدد طبیعی معینی به بعد، جمیع اعداد بعدی، تجزیه‌ای به حداکثر ۷ مکعب را پذیرا می‌شوند.

حدس *گلدباخ* «Goldbach's conjecture». به سال ۱۷۴۲، گلدباخ در نامه‌ای به اویلر حدس زد که هر عدد زوج $n > ۶$ مجموع دو عدد اوّل فرد است. این حدس، تاکنون نه به اثبات رسیده و نه رد شده است. بهترین نتیجه در این زمینه، از **وینوگرادوف** «VINOGRADOV» (متولد ۱۸۹۱)، قضیهٔ سه اوّل «three primes theorem» است: هر عدد صحیح به قدر کافی بزرگ و فردی مجموع سه اوّل فرد است. اثبات قضیه از روشهای تحلیلی بسیار ظریفی، استفاده کرده است.

افرازها. منظور از افراز «partition» عدد طبیعی n، نمایش آن به صورت مجموعی از اعداد طبیعی است.

تعداد کل افرازهای عدد n را با p(n) نمایش می‌دهیم، که در آن تعداد جمله‌ها محدود نیست؛ جمعوندهای برابر پذیرفته می‌شود و از ترتیب جمعوندها صرف‌نظر می‌شود.

به این ترتیب

$$۵ = ۴ + ۱ = ۳ + ۲ = ۳ + ۱ + ۱ = ۲ + ۲ + ۱$$

$$= ۲ + ۱ + ۱ + ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

هفت افراز ۵اند، و بنابراین $p(۵) = ۷$.

تابع p(n) دارای ویژگیهای بسیار جالبی است؛ به عنوان مثال:

$$p(۵n + ۴) \equiv ۰ (\text{mod } ۵)$$

و به ازای nهای بزرگ:

$$p(n) \sim \left[۱/(۴n\sqrt{۳})\right]\exp\left[\pi\sqrt{۲n/۳}\right]$$

به‌طور عمومیتر، یکی از مسائل اصلی نظریهٔ اعداد جمعی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد. فرض می‌کنیم A مجموعه‌ای از اعداد طبیعی و $S > ۲$ عدد طبیعی مفروضی باشد؛ آیا می‌توان هر عدد طبیعی را به صورت مجموع حداکثر S عنصر A نمایش داد؟

از سال ۱۹۳۰ به بعد و با استفاده از روشها و مفاهیم جدید (چگالی «density» و مرتبهٔ ۱) به چنین مسائلی پرداخته شده است.

اعداد جبری

میدانهای اعداد جبری، عدد جبری «algebraic number» α عددی مختلط است که ریشهٔ معادلهٔ جبری «algebraic equation» $f(x)=0$ است. در این‌جا:

$$f(x)=a_0x^m+\dots+a_m$$

یک چند جمله‌ای روی Q، میدان اعداد گویا، با $a_0 \neq 0$، $m\ge 1$ است؛ به عبارت دیگر، ضرایب a_0، a_1، ...، a_m گویا هستند.

عدد α ریشهٔ بی‌نهایت معادله از درجه‌های گوناگون است؛ به‌عنوان مثال $\alpha=\sqrt{3}$ در معادله‌های

$$x^2-3=0,\quad x^3-x^2-3x+3=0,\quad x^4-9=0$$

و غیره صدق می‌کند. اما چندجمله‌ایهای دو معادلهٔ اخیر را می‌توان به چندجمله‌ایهایی از درجهٔ پایین‌تر تجزیه کرد:

$$x^3-x^2-3x+3=(x^2-3)(x-1)$$

و

$$x^4-9=(x^2-3)(x^2+3)$$

چندجمله‌ایهایی از این دست را تجزیه‌پذیر «reducible» می‌نامیم و در صورتی که تجزیهٔ چندجمله‌ای f روی Q به عوامل ناثابت «non - constant factors» از درجهٔ پایین‌تر، البته باز هم با ضرایب در Q، ممکن نباشد، f را روی Q *تحویل‌ناپذیر* «*irreducible*» می‌نامیم؛ به عنوان مثال، $f(x)=x^2-3$ تحویل‌ناپذیر است.

به ازای عدد جبری α دقیقاً یک چندجمله‌ای گویا ـ تحویل‌ناپذیر «rationally irreducible Polynomial» $\phi(x)$ با ضریب پیشرو[1]، چنان وجود دارد که $\phi(\alpha)=0$. درجهٔ عدد جبری α را به صورت درجهٔ $\phi(x)$ تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال، هر عدد گویای r جبری از درجهٔ ۱ است؛ زیرا ریشهٔ $x-r=0$ است، $(1+i\sqrt{3})/2$ از درجهٔ ۲ است؛ زیرا ریشهٔ $x^2-x+1=0$ به حساب می‌آید، و $\sqrt[n]{2}$، به عنوان ریشهٔ $x^n-2=0$، از درجهٔ n است.

$\alpha^{(1)}$، $\alpha^{(2)}$، ...، $\alpha^{(n)}$ ریشه‌های $\phi(x)=0$ (که یکی از آنها α است) به *مزدوجها* «conjugates»ی α موسوم و جمیعاً متمایزند. اگر در $\phi(x)=0$ جمیع ضرایب عدد صحیح باشند، آن‌گاه α را *عدد صحیح جبری* «algebraic integer» می‌نامیم.

فرض می‌کنیم V عدد جبری باشد. کوچکترین میدان $k=Q(V)$ را که شامل Q نیز V است، *میدان اعداد جبری* «algebraic number field» می‌نامیم. به عنوان مثال، $Q(\sqrt{3})$ شامل جمیع اعداد به صورت $a+b\sqrt{3}$ ای‌است، که در آنها a و b اعدادی گویا هستند.

به سادگی می‌توان بررسی کرد که این اعداد، در واقع، تشکیل یک میدان می‌دهند؛ به عنوان مثال:

$$1/(a+b\sqrt{3})=(a-b\sqrt{3})/(a^2-3b^2)=A+B\sqrt{3}$$

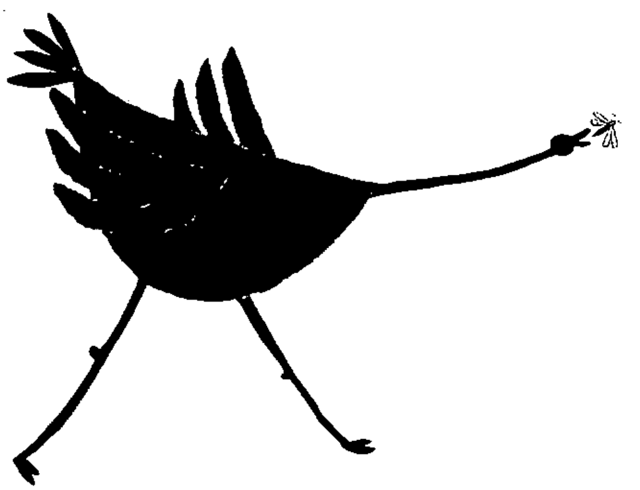
درجهٔ k را به صورت درجهٔ n (به گونه‌ای یکتا معین شدهٔ) هر عدد V ای تعریف می‌کنیم که به ازای آن $k=Q(V)$.

میدانهای عددی درجهٔ دوم. در میان میدانهای از نوع خاص، *میدانها (هیئتها)ی عددی درجهٔ دوم* «quadratic number fields» به گونه‌ای کاملتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با درنظر گرفتن $V=\sqrt{d}$، می‌توان فرض کرد که d عدد صحیحی نابخش‌پذیر بر یک مربع است. تحت این شرط، بین میدانهای عددی درجهٔ دوم $Q(\sqrt{d})$ با $d\equiv 1 \pmod 4$ و با $d\equiv 2$ یا $3 \pmod 4$ تمیز قائل می‌شویم.

در حالت اوّل *پایهٔ صحیح* «integralbasis» میدان با

$$\omega_1=1,\quad \omega_2=(-1+\sqrt{2})/2$$

و در حالت اخیر با $\omega_1=1$، $\omega_2=\sqrt{d}$ داده شده است. مقصود از این موضوع، آن است که هر عدد صحیح جبری $Q(\sqrt{d})$ را می‌توان به گونه‌ای یکتا به صورت $c_1\omega_1+c_2\omega_2$ با اعداد صحیح گویای c_1 و c_2 نمایش داد.



آنالیز ترکیبی

(قسمت اوّل)

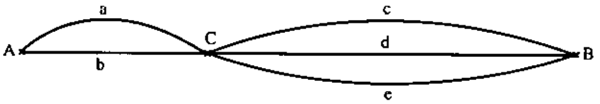
● میرشهرام صدر

برای دانش آموزان سال دوم تا پیش دانشگاهی



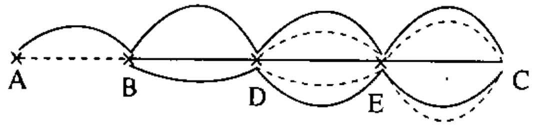
اصل ضرب و اصل جمع

در زندگی روزمرّه، بسیاری از تصمیم گیریهای خود را براساس شمارش انجام می‌دهیم. برای مثال، اگر برای رفتن از منزل (نقطهٔ A) به مدرسه (نقطهٔ B) از محل C عبور کنید و از A تا C، ۲ راه مختلف و از C تا B، ۳ راه مختلف وجود داشته باشد، در این صورت، با توجه به شکل زیر و با شمارش، ملاحظه می کنیم که از A تا B (منزل تا مدرسه) ۶ راه مختلف وجود دارد.



اگر دو راه از A تا C را با حرفهای a و b و سه راه از C تا B را با حرفهای e و d و c مشخص کنیم، آن‌گاه ۶ مسیر مختلف از A تا C عبارت است از : ac، ad، ae، bc، bd و be.

اکنون اگر برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ C، بخواهید از محلهای B، D و E عبور کنید و تعداد زیادی راه بین این نقاط وجود داشته باشد، آن‌گاه شمردن تعداد مسیرهای موجود از A تا C، از طریق B و D و E به کمک شکل، کاری طاقت‌فرساست. در این حالت، برای سرعت بخشیدن به محاسبات، نیازمند به مطالعه و یادگیری روشهای شمارش هستیم.



آنالیز ترکیبی، ارائهٔ روشهای شمارش و تعداد حالتهای ممکن است ؛ بدون این که هریک از حالتها شمرده شوند. این مبحث در ریاضیات، شامل جایگشتها، تبدیلها و ترکیبها است.

در ریاضیات هم، مانند زندگی روزمرّه، با مسائلی روبه‌رو می‌شویم که برای حلّ آنها نیاز به شمارش پیدا می‌کنیم. برای مثال، می‌دانیم که در حال حاضر، شمارهٔ پلاک خودروها از یک عدد ۵ رقمی و یک حرف از الفبای فارسی تشکیل شده است. با این شرایط، با حرف «ب» چند خودرو را می‌توان شماره کرد؟ از مجموعهٔ ۴ عضوی B، به مجموعهٔ ۳ عضوی A چند نگاشت یک‌به‌یک و چند نگاشت پوشا وجود دارد؟ تعداد رابطه‌هایی که خاصیت بازتابی روی مجموعهٔ $A = \{a, b, c, d\}$ داشته باشند، چندتاست؟

اصل ضرب یا اصل شمارش

هرگاه عملی در k مرحلهٔ متوالی انجام پذیرد ؛ به طوری که در مرحلهٔ اوّل به n_1 راه مختلف، در مرحلهٔ دوم به n_2 راه مختلف، در مرحلهٔ سوّم به n_3 راه مختلف، ... و در مرحلهٔ kام به n_k راه مختلف انجام شود، در این صورت، آن عمل را می‌توان به $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ راه مختلف انجام داد.

مثال. در یک دبیرستان ؛ ۳ کلاس جبر و احتمال مختلف و ۲ کلاس حسابان مختلف تشکیل می‌شود. یک دانش‌آموز به چند راه مختلف می‌تواند این دو درس را انتخاب واحد کند.

حل. عمل انتخاب واحد درسی، در دو مرحله انجام می‌گیرد ؛ مرحلهٔ اوّل، دانش‌آموز می‌تواند به ۳ راه مختلف کلاس جبر و احتمال و در مرحلهٔ دوم می‌تواند به ۲ راه مختلف کلاس حسابان را انتخاب کند ؛ بنابراین طبق اصل ضرب، دانش‌آموز می‌تواند به ۶=۲×۳ راه مختلف، انتخاب واحد کند.

مثال. با رقمهای ۲، ۵، ۶، ۳ و ۱ چند عدد سه رقمی بدون تکرار رقمها می‌توان نوشت؟

حل. عمل نوشتن یک عدد سه رقمی، در سه مرحله انجام می‌گیرد ؛ مرحلهٔ اوّل، انتخاب رقم صدگان عدد است که می‌تواند به ۵ راه مختلف انجام پذیرد ؛ زیرا پنج عدد متمایز داریم که در این مرحله، می‌توان هریک از این عددها را انتخاب کرد. اکنون در شروع مرحلهٔ دوم، چهار عدد داریم ؛ زیرا یک عدد را برای رقم صدگان، در مرحلهٔ اوّل انتخاب کرده‌ایم. مرحلهٔ دوم، انتخاب رقم دهگان عدد است که می‌تواند به ۴ راه مختلف انجام گیرد. مرحلهٔ سوّم، انتخاب رقم یکان عدد است که می‌تواند به ۳ راه مختلف انجام پذیرد ؛ بنابراین طبق اصل ضرب، می‌توان ۶۰=۳×۴×۵ عدد سه رقمی بدون تکرار نوشت :

	رقم صدگان	رقم دهگان	رقم یکان
۵×۴×۳=۶۰	۵ انتخاب	۴ انتخاب	۳ انتخاب
	مرحلهٔ اوّل	مرحلهٔ دوم	مرحلهٔ سوّم

مثال. در مثال قبل، فرض کنیم رقمهای عدد سه رقمی بتوانند تکرار شوند ؛ در این صورت، هر مرحله می‌تواند به ۵ راه مختلف انجام پذیرد ؛ زیرا رقمی که برای صدگان انتخاب کردیم، می‌تواند برای رقم دهگان یا یکان نیز انتخاب شود ؛ بنابراین طبق اصل ضرب، می‌توان ۱۲۵=۵×۵×۵ عدد سه رقمی نوشت :

	رقم صدگان	رقم دهگان	رقم یکان
۵×۵×۵=۱۲۵	۵ انتخاب	۵ انتخاب	۵ انتخاب
	مرحلهٔ اوّل	مرحلهٔ دوم	مرحلهٔ سوّم

مثال. شمارهٔ پلاک خودروها، از یک عدد پنج رقمی و یک حرف از الفبای فارسی تشکیل شده است ؛ به طوری که حداقل یک رقم از این عدد پنج رقمی، با رقمهای دیگر متمایز است، و شمارهٔ پلاک، فاقد عدد صفر است. با این شرایط، چند خودرو را می‌توان شماره‌گذاری کرد؟

حل. این کار در شش مرحله انجام می‌گیرد ؛ مرحلهٔ اوّل که انتخاب یک حرف از الفبای فارسی است، با ۳۲ راه انجام می‌شود. مرحله‌های دوم تا ششم که انتخاب یک عدد پنج رقمی است، هر کدام با ۹ راه انجام می‌شوند ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

۳۲	۹	۹	۹	۹	۹

۳۲×۹×۹×۹×۹×۹ = ۲^۵ × ۹^۵

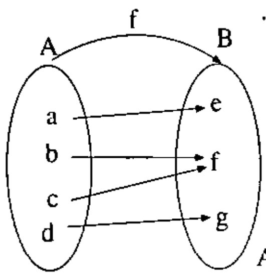
از بین این اعداد، فقط ۹ تای آنها، همهٔ رقمهایشان تکراری است، که عبارت است از : ۱۱۱۱۱، ۲۲۲۲۲، ...، ۹۹۹۹۹

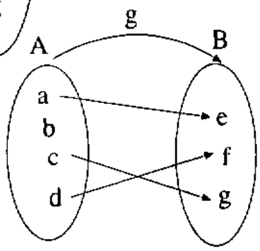
هر کدام از این عددها، می‌توانند با یکی از حروف الفبای فارسی بیایند ؛ بنابراین تعداد خودروهایی که با شرایط مسأله می‌توان شماره کرد، عبارت است از :

۲^۵ × ۹^۵ − ۹ × ۳۲ = ۲^۵ × (۹^۵ − ۹)

نگاشت

دو تابع زیر را از مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d\}$ به مجموعهٔ $B=\{e,f,g\}$ در نظر بگیرید.



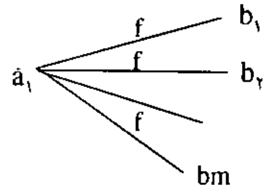


همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، $f:A \rightarrow B$ تابعی است که در آن، $D_f = A$ ؛ یعنی تابع f روی همهٔ عضوهای مجموعهٔ A اثر می‌کند ؛ امّا $g:A \rightarrow B$ تابعی است که در آن $D_g \subsetneq A$ ؛ یعنی تابع g روی همهٔ عضوهای مجموعهٔ A اثر نمی‌کند. بنا به تعریف، تابع $f:A \rightarrow B$ را یک نگاشت گوییم ؛ ولی تابع $g:A \rightarrow B$ نگاشت نیست.

تعریف. تابع $f:A \rightarrow B$ را یک نگاشت گوییم ؛ هرگاه در این تابع $D_f = A$.

محاسبهٔ تعداد نگاشتها از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی

فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ و $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ ، می‌خواهیم تعداد نگاشتهای $f:A \rightarrow B$ را محاسبه کنیم. برای این منظور، ابتدا تابع f را روی a_1 اثر می‌دهیم ؛ $f(a_1)$ می‌تواند برابر b_1 یا b_2 یا ... یا b_m باشد ؛ یعنی برای $f(a_1)$ ، m انتخاب داریم :



به همین ترتیب، برای a_2 ، a_3 ، ...، a_n ، هرکدام m انتخاب داریم ؛ بنابراین :

$$\underbrace{\overset{f(a_1)}{\boxed{m}}\ \overset{f(a_2)}{\boxed{m}}\ \cdots\ \overset{f(a_m)}{\boxed{m}}}_{\text{n مرتبه}}$$

در نتیجه، طبق اصل ضرب داریم :

تعداد نگاشتها از مجموعه A به مجموعه B

$$= \underbrace{m \times m \times \cdots \times m}_{\text{n مرتبه}} = m^n$$

مثال. تعداد نگاشتهایی که از یک مجموعهٔ سه عضوی به یک مجموعهٔ چهار عضوی می‌توان تعریف کرد، چندتاست؟

حل. فرض کنیم $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ و $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ، پس $n = ۳$ و $m = ۴$ ؛ بنابراین :

تعداد نگاشتها از A به B $= ۴^۳ = ۶۴$

اصل جمع

فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ متناهی و جدا از هم باشند ؛ یعنی $A \cap B = \varnothing$ ، بنابراین تعداد اعضای $A \cup B$ برابر با مجموع تعداد عضوهای دو مجموعهٔ A و B است ؛ یعنی :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

به عبارت دیگر، می‌توان گفت اگر دو عمل ناسازگار باشند ؛ یعنی انجام همزمان آنها با هم غیرممکن باشد و عمل اوّل به m راه و عمل دوم به n راه انجام پذیرد، در این صورت، عمل اوّل یا عمل دوم (نه هر دو با هم) را به $m+n$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال. با رقمهای ۱، ۲، ۵ و ۳ چند عدد بزرگتر از ۱۰۰ می‌توان نوشت؟

حل. عددهای بزرگتر از ۱۰۰ را که می‌توان با این اعداد ساخت، سه رقمی یا چهار رقمی می‌باشند :

اگر مجموعهٔ A، اعداد سه رقمی ساخته شده با این رقمها باشند، آن‌گاه داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان
۲	۳	۴

$$n(A) = ۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$$

اگر مجموعهٔ B اعداد چهاررقمی ساخته شده با این رقمها باشند، آن‌گاه داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۲	۳	۴

$$n(B) = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

چون $A \cap B = \varnothing$ ؛ یعنی عدد ساخته شده نمی‌تواند هم سه رقمی و هم چهاررقمی باشد ؛ بنابراین تعداد عددهای سه رقمی یا چهاررقمی، طبق اصل جمع برابر است با :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = ۲۴ + ۲۴ = ۴۸$$

مثال. با رقمهای ۴، ۳، ۵، ۰، ۱ و ۹ چند عدد بدون تکرار رقمها می‌توان ساخت ؛ به طوری که :

الف) چهاررقمی باشد.

ب) چهاررقمی فرد باشد.

ج) چهاررقمی زوج باشد.

د) چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد.

هـ) چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ و زوج باشد.
و) چهاررقمی مضرب ۵ باشد.

حل) الف. عمل نوشتن یک عدد چهاررقمی در ۴ مرحله انجام می‌گیرد ؛ مرحلهٔ اوّل، انتخاب عدد هزارگان است ؛ چون این عدد نمی‌تواند برابر ۰ باشد، پس این مرحله با ۵ راه مختلف انجام می‌پذیرد. اکنون در شروع مرحلهٔ دوم، پنج عدد داریم ؛ پس این مرحله با ۵ راه مختلف انجام می‌گیرد. به همین صورت، مرحله‌های سوّم و چهارم به ترتیب، با ۴ راه مختلف و ۳ راه مختلف انجام می‌پذیرد ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۳	۴	۵	۵

۵×۵×۴×۳ = ۳۰۰

ب. عدد فرد، عددی است که رقم یکان آن فرد باشد ؛ بنابراین رقم یکان می‌تواند یکی از عددهای ۵، ۷، ۱ و ۹ باشد، پس انتخاب رقم یکان با ۴ راه مختلف انجام می‌گیرد ؛ بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۴	۳	۴	۴

۴×۴×۳×۴ = ۱۹۲

ج. عدد زوج، عددی است که رقم یکان آن زوج باشد ؛ بنابراین رقم یکان می‌تواند ۰ یا ۴ باشد ؛ دو حالت در نظر می‌گیریم :
حالت اوّل. رقم یکان عدد ۴ باشد ؛ در این حالت، خانهٔ مربوط به رقم یکان، با ۱ راه پُر می‌شود، بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۳	۴	۴

n(A) = ۴×۴×۳×۱ = ۴۸

حالت دوم. رقم یکان عدد ۰ باشد ؛ در این حالت نیز خانهٔ مربوط به رقم یکان با ۱ راه پُر می‌شود، بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۳	۴	۴

n(B) = ۴×۴×۳×۱ = ۴۸

طبق اصل جمع و با توجه به حالتهای اول و دوم ؛ تعداد عددهای چهاررقمی زوج برابر است با :

n(A∪B) = n(A) + n(B) = ۴۸ + ۴۸ = ۹۶

د. در صورتی که عدد چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد، آن‌گاه رقم هزارگان آن یکی از عددهای ۴، ۵ و ۹ است ؛ بنابراین خانهٔ مربوط به رقم هزارگان، با ۳ راه مختلف پُر می‌شود، بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۳	۴	۵	۳

۳×۵×۴×۳ = ۱۸۰

هـ. دو حالت در نظر می‌گیریم :
حالت اوّل. رقم هزارگان عدد ۴ باشد ؛ چون عدد زوج است، پس رقم یکان باید عدد ۰ قرار گیرد، بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۴	۵	۱

n(A) = ۱×۵×۴×۱ = ۲۰

حالت دوم. رقم هزارگان ۵ یا ۹ باشد ؛ پس خانهٔ مربوط به رقم هزارگان، با ۲ راه مختلف پُر می‌شود ؛ چون عدد زوج است، پس رقم یکان، یکی از عددهای ۰ یا ۴ است، پس خانهٔ مربوط به رقم یکان، با دو راه مختلف پُر می‌شود، بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۲	۳	۴	۲

n(B) = ۲×۴×۳×۲ = ۴۸

طبق اصل جمع و با توجه به حالتهای اوّل و دوم، تعداد عددهای چهاررقمی بزرگتر از ۴۰۰۰ و زوج، برابر است با :

n(A∪B) = n(A) + n(B) = ۲۰ + ۴۸ = ۶۸

و. عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن، ۰ یا ۵ باشد ؛ دو حالت در نظر می‌گیریم :

حالت اوّل. رقم یکان عدد ۰ باشد ؛ بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۳	۴	۵

$$n(A) = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۱ = ۶۰$$

حالت دوم. رقم یکان عدد ۵ باشد ؛ بنابراین داریم :

رقم یکان	رقم دهگان	رقم صدگان	رقم هزارگان
۱	۳	۴	۴

$$n(B) = ۴ \times ۴ \times ۳ \times ۱ = ۴۸$$

طبق اصل جمع و با توجه به حالتهای اوّل و دوم، تعداد عددهای چهاررقمی مضرب ۵، برابر است با :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = ۶۰ + ۴۸ = ۱۰۸$$

تعداد ماتریسها از مرتبهٔ $m \times n$ که درآیه‌های ۰ یا ۱ دارند

فرض کنیم A یک ماتریس از مرتبهٔ $m \times n$ باشد، این ماتریس دارای $m \times n$ درآیه است که هریک از آنها می‌توانند عدد ۰ یا ۱ باشند. اگر مکان هریک از درآیه‌ها را با یک خانهٔ مستطیل شکل نمایش دهیم، هر خانه با ۲ راه مختلف پُر می‌شود ؛ زیرا هر خانه می‌تواند با دو عدد ۰ یا ۱ پُر شود ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{۲} & \boxed{۲} & \cdots & \boxed{۲} \\ \boxed{۲} & \boxed{۲} & \cdots & \boxed{۲} \\ \vdots & & & \\ \boxed{۲} & \boxed{۲} & \cdots & \boxed{۲} \end{bmatrix} \updownarrow m = \text{تعداد سطرها}$$

$$\leftarrow n = \text{تعداد ستون} \rightarrow$$

تعداد ماتریسهای از مرتبهٔ $m \times n$ با درآیه‌های ۰ یا ۱

$$= \underbrace{۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{m \times n \text{ مرتبه}} = ۲^{m \times n}$$

مثال. چند ماتریس ۳×۳ با درآیه‌های ۰ و ۱ می‌توان نوشت؟

حل. تعداد ماتریسها از مرتبهٔ ۳×۳ با درآیه‌های ۰ یا ۱

$$= ۲^{۳ \times ۳} = ۲^{۹}$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی

فرض کنیم $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ یک مجموعهٔ n عضوی باشد ؛ هریک از زیرمجموعه‌های A را با یک کُد n رقمی شامل رقمهای ۰ و ۱ مشخص می‌کنیم ؛ به طوری که اگر آن زیرمجموعه، شامل عضو x_i $(1 \le i \le n)$ باشد، iامین رقم کد عدد ۱ و اگر زیرمجموعه شامل عضو x_i نباشد، iامین رقم کد عدد ۰ است. برای مثال، کد $\underbrace{۱۱۰۰\ldots۰۱}_{n \text{ رقم}}$ زیرمجموعهٔ زیر را مشخص می‌کند :

$$B = \{x_1, x_2, x_n\}$$

زیرا اوّلین، دومین و nامین رقم کد، عدد ۱ می‌باشند ؛ پس زیرمجموعه شامل x_1 ، x_2 و x_n است و بقیهٔ رقمهای کد، برابر صفرند، پس زیرمجموعه شامل بقیهٔ اعضای A نمی‌باشد.

در حالت کلی، تعداد کُدهای n رقمی که با دو عدد ۰ و ۱ ساخته می‌شوند، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ n عضوی A است. برای یافتن تعداد کدهای n رقمی که با دو رقم ۰ و ۱ ساخته می‌شوند، کافی است n خانهٔ مستطیل شکل در نظر بگیریم ؛ واضح است که هر خانه با دو راه مختلف پُر می‌شود، بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$$\boxed{۲}\ \boxed{۲}\ \boxed{۲}\ \cdots\ \boxed{۲}$$

$$\longleftarrow n \text{ تا خانه} \longrightarrow$$

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی

$$= \underbrace{۲ \times ۲ \times ۲ \times \ldots \times ۲}_{n \text{ مرتبه}} = ۲^{n}$$

برای مثال، کد n رقمی ۱...۱۱۱ که همهٔ رقمهای آن عدد ۱ هستند، زیرمجموعهٔ $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ را مشخص می‌کند که این زیرمجموعه، برابر A است و کد n رقمی ۰...۰۰۰ که همهٔ رقمهای آن عدد ۰ هستند، زیرمجموعهٔ $\varnothing$ را مشخص می‌کند.

تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی یک مجموعهٔ n عضوی

رابطه. مجموعه‌های A و B را در نظر می‌گیریم، هر زیرمجموعهٔ حاصلضرب دکارتی $A \times B$ ، یک رابطه از A در B است. اگر رابطه را با R نشان دهیم، آن‌گاه $R \subseteq A \times B$. درصورتی که $A = B$ ، R را یک رابطه روی A می‌گوییم. هرگاه

R رابطه‌ای روی A باشد و $(a,b)\in R$ ، می‌نویسیم : aRb .

درصورتی که A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، $A\times A$ دارای $n^۲$ عضو است و تعداد زیرمجموعه‌های $A\times A$ که همان تعداد رابطه‌ها روی A می‌باشد، برابر $۲^{n^۲}$ است.

رابطهٔ انعکاسی (بازتابی)

رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A یک رابطهٔ انعکاسی (بازتابی) است ؛ هرگاه برای هر $x\in A$ ، داشته باشیم :

$(x,x)\in R$ یا xRx

یعنی هر عضو A، با خودش رابطه داشته باشد. رابطهٔ R در A، انعکاسی نیست، هرگاه $x\in A$ ای وجود داشته باشد ؛ به طوری که $(x,x)\notin R$.

مثال. مجموعهٔ دوعضوی $A=\{a,b\}$ را در نظر بگیرید، تعداد رابطه‌های انعکاسی روی مجموعهٔ A را مشخص کنید؟

حل. $A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$

درصورتی که R یک رابطهٔ انعکاسی روی مجموعهٔ A باشد، R باید شامل دو عضو (a,a) و (b,b) باشد. همچنین R می‌تواند بجز این دو عضو، شامل عضوهای (a,b) یا (b,a) باشد.

اکنون اگر همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{(a,b),(b,a)\}$ را بنویسیم و به هریک از این زیرمجموعه‌ها، دو عضو (a,a) و (b,b) را اضافه کنیم، همهٔ رابطه‌های انعکاسی روی A به‌دست می‌آید.

$\{(a,b)\}\subseteq B$; $R_۱=\{(a,a),(b,b),(a,b)\}$

$\{(b,a)\}\subseteq B$; $R_۲=\{(a,a),(b,b),(b,a)\}$

$\{(a,b),(b,a)\}\subseteq B$; $R_۳=\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$

$\varnothing\subseteq B$; $R_۴=\{(a,a),(b,b)\}$

در حالت کلی، اگر $A=\{x_۱,x_۲,\dots,x_n\}$ یک مجموعهٔ n عضوی باشد، می‌دانیم $A\times A$ دارای $n^۲$ عضو است و تعداد عضوهای $A^۲$ که به صورت (x_i,x_i) $۱\le i\le n$ هستند، برابر n است ؛ بنابراین مجموعهٔ $B=\{(x_i,x_j)|i\ne j\ ,\ ۱\le i,j\le n\}$ وجود دارد که دارای $n^۲-n$ عضو است. اکنون اگر به هریک از زیرمجموعه‌های B، عضوهای مجموعهٔ $A=\{(a_۱,a_۱),(a_۲,a_۲),\dots,(a_n,a_n)\}$ را بیفزاییم، رابطه‌های انعکاسی روی A به دست می‌آید ؛ چون B دارای $۲^{n^۲-n}$ زیرمجموعه است، پس تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی مجموعهٔ n عضوی A برابر $۲^{n^۲-n}$ است.

تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعهٔ n عضوی

رابطهٔ تقارنی. رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A، یک رابطهٔ تقارنی است ؛ هرگاه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم :

$(x,y)\in R\Rightarrow(y,x)\in R$

مجموعهٔ n عضوی $A=\{x_۱,x_۲,\dots,x_n\}$ را در نظر می‌گیریم، می‌دانیم که $A\times A$ دارای $n^۲$ عضو است و مجموعهٔ $A_۱=\{(x_i,x_i)|۱\le i\le n\}$ دارای n عضو است ؛ بنابراین مجموعهٔ $A_۲=A^۲-A_۱=\{(x_i,x_j)|i\ne j\ ,\ ۱\le i\ ,\ j\le n\}$ و دارای $n^۲-n$ عضو است و مجموعهٔ $A_۲$ دارای $\frac{۱}{۲}(n^۲-n)$ زیرمجموعه، به صورت $A_{ij}=\{(x_i,x_j)\ ,\ (x_j,x_i)\}$ است.

برای نوشتن رابطهٔ متقارن R روی مجموعهٔ A، می‌توانیم هریک از عضوهای $A_۱$ را در R قرار دهیم یا ندهیم، همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم ؛ بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A به صورت زیر به دست می‌آید :

تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعهٔ n عضوی

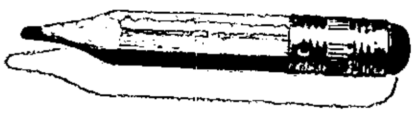
$$=۲^n\times ۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)}=۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲+n)}$$

تذکر. برای نوشتن رابطهٔ R که تقارنی و انعکاسی باشد، کافی است عضوهای مجموعهٔ $A_۱$ را در R قرار دهیم و می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم ؛ بنابراین تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی مجموعهٔ n عضوی A، برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{A_{ij}|i\ne j\ ,\ ۱\le i\ ,\ j\le n\}$ است ؛ چون B، $\frac{۱}{۲}(n^۲-n)$ عضو دارد، بنابراین، داریم :

تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی یک مجموعهٔ n عضوی

$$=۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)}$$

در باغ تجربه‌ها



• گفت‌وگو با استاد محمّدطاهر معیّری

شرح حال

«محمدطاهر معیّری» در آستانهٔ سال ۱۳۰۰ خورشیدی، در «همدان» متولد و تحصیلات ابتدایی و متوسطهٔ خود را در همان شهر به پایان رسانیده است. دو سال آخر تحصیلات متوسطهٔ خود را در دانشسرای مقدماتی بوده و پس از این دوره، به تدریس علوم ریاضی در دبیرستانها منصوب و در جریان نخستین سال تدریس برنامهٔ دورهٔ دوم متوسطه را، فقط با استفاده از کتابهای موجود گذرانیده و به اخذ دیپلم کامل متوسطهٔ رشتهٔ ریاضی نائل آمده است. در ادامهٔ خدمت تدریس، در سال ۱۳۲۵ به یک مأموریت تحصیلی، به دانشسرای عالی اعزام و در سال ۱۳۲۸ پس از اخذ لیسانس در رشتهٔ ریاضی، دوباره برای تدریس به شهرستانها (کرمانشاه و همدان) بازگشته و به تدریس و دیگر مشاغل فرهنگی ادامه داده است. در فاصلهٔ سالهای ۱۳۲۷ تا ۱۳۳۸ خدمات خود را با تدریس، ریاست دبیرستان و سرپرستی تعلیمات متوسطهٔ استان پشت سرگذاشته و در سال ۱۳۳۷ بنا به نظر وزارت متبوع، برای همکاری در تشکیلات آمار فرهنگی، به تهران احضار و از آن پس، تا سال ۱۳۵۸ در مشاغل پژوهشی، عهده‌دار مسؤولیتهایی بوده و در شکل‌گیری تغییرات نظام آموزشی کشور نقش داشته است. در جریان این خدمات، در سال ۱۳۴۱ فوق لیسانس «آمارشناسی» دانشگاه تهران را اخذ و در پی آن، برای یک دوره کوتاه به کارآموزی در زمینهٔ آمار در دانشگاه کلمبیای نیویورک پرداخته است. نامبرده در مجموع، ۳۸ سال در خدمات موظّف فرهنگی اشتغال به‌کار داشته و در عین حال، به مدت ۵۶ سال، همواره به صورت تمام وقت و پاره‌وقت به تدریس علوم ریاضی در دبیرستان و دانشگاه اشتغال داشته است. همچنین وی، در تألیف ۲۵ جلد کتابهای مختلف علوم ریاضی و آمار و مسائل تربیتی، از سالها قبل اشتغال داشته است، که شش جلد آنها با همکاری دیگر مؤلّفان کتابهای درسی بوده و به مدت بیش



از ۲۵ سال در دبیرستانهای کشور، به عنوان کتاب رسمی تدریس شده‌اند. معلم کهنسال، دارای دو فرزند پسر است که هر دو تحصیلات دانشگاهی (دکتری) در رشتهٔ «برق و الکترونیک» را گذرانیده و در همین بخش، مشاغل فنی حساسی را عهده دارند.

در فرصت کوتاه ملاقاتی دوستانه، وقتی از خاطرات دورهٔ کودکی و جوانی و بعد ایشان سؤال شد، پس از اندکی سکوت و تفکر چنین گفت: خوب از کدام مسائل گذشته‌ام سخن بگویم که یکی دو تا و بحث کوتاهی نیست. شاید هم در مقیاس عمومی، آن‌چنان جالب هم نباشد. آنچه بیش از همه برجستگی دارد، این است که مرحوم پدرم را در چهارده سالگی از دست دادم و پیداست که بر یک نوجوان پدر از دست داده، از همین بابت چه می‌گذرد. کوچکترین تأثیرش، بی‌گمان تغییر مسیر زندگی و مواجه شدن با سرنوشت دیگری است.

جناب استاد؛ دبیرستانها و دانشگاههای محل تدریس خود را بیان کنید؟

در ارتباط با اشتغال به کار در آموزش و پرورش و به مدتی کوتاه در علوم و آموزش عالی، با هزارها نکتهٔ خوب و بد، زیبا و زشت، و مشوق و ناراحت‌کننده مواجه شدم که بالاخره همه گذشت. از آنها گفتن امروز چه لطفی دارد؟ برای همهٔ معلمان و استادان عزیزم، در همهٔ عمر، ارج و احترام خاصی احساس کرده‌ام که نام‌بردن از موارد خاص را، که به راستی درخور احترام و حرمت بیشتری است، به سبب بروز مفهوم مخالف نمی‌پسندم. امیدوارم خدای بزرگ، زندگان را یار و نگهدار و گذشتگان را قرین رحمت فرماید. آنچه در جریان تحصیلم برجستگی خاص دارد، این است که دورهٔ تحصیلی را دوست می‌داشتم. علاقه‌مند و جدّی و سختگیر تحصیل می‌کردم و می‌توانم ادّعا کنم که به همین سبب، همهٔ استادان عزیزم روی من تأثیر خوب و به یاد ماندنی باقی گذاشته‌اند.

در دبیرستانها و مؤسّسات مختلف تدریس کردم. به‌راستی هرجا انضباط و نظم، موضع قویتری داشت، پیشرفت هم بیشتر بود. چه پیشرفت تحصیلی و چه اعتلای اخلاقی و تغییر رفتار، بی‌گمان همهٔ چهره‌های برجسته‌ای هم که از سالهای طولانی تدریسم به یاد می‌آورم، آنهایی هستند که از محیط انضباطی‌تر مدرسه به جامعه وارد شدند. از بازیگوشی نوجوانان می‌پرسید؟ می‌توانم ادّعا کنم که من شخصاً کمتر با چنین دشواری مواجه بودم؛ زیرا که روش و سابقهٔ خدمتم در ارتباط با این مسأله دو جنبهٔ مؤثر داشت: جنبهٔ اول، اعمال قدرت، به خصوص به سبب مقیّد بودن خودم به نظم و انضباط، و جنبهٔ دوم، احترام متقابل در رابطه با مستمعان خوب کلاسها بود که روی دیگران هم تأثیر سازنده باقی می‌گذاشت.

نام بعضی از شاگردان خود را که به مراتب بالای علمی رسیده‌اند، با ذکر مشخصات علمی ایشان بیان کنید؟

از دورهٔ طولانی تدریسم افراد موفق بسیاری به یاد می‌آورم که اکنون گاهی آنها را در سنین بالا ملاقات می‌کنم و خوشحال می‌شوم و شاید این بهترین حاصل دوران فعالیتهای ناچیزم بوده که هنوز به کار و کوشش، تشویقم می‌کند. از چهره‌های برجستهٔ دوران کارم در سازمانهای بزرگ خارجی و بین‌المللی متعدد و فراوان به یاد می‌آورم که نام بردن از آنها نه میسّر است و نه مجال باقی است.

نظر خود را دربارهٔ تدریس ریاضیات و کتاب درسی بیان کنید؟

تدریس ریاضیات نیز مانند دیگر رشته‌ها از زمان پیدایش مدارس جدید در ایران، عمدتاً مبتنی بر تقریر معلم و استماع متعلّم بنیاد شد و به همین ترتیب هم پایدار ماند، که آنچنان شیوهٔ مطلوبی هم نیست. در این روش که مجال خودآموزی و تمرین را به حدّاقل می‌رساند، در کتاب درسی و در بیان معلم، چه بسیار مطالب مهم مطرح می‌شود که شنوندگان به آنها فقط گوش می‌دهند؛ در عین آن که به ماهیّتها پی نمی‌برند؛ زیرا در شنیدن مجال تفکر و کاوش فراهم نمی‌آید. در چنین روند آموزشی، آنهایی هم که از پیشرفت قابل توجه بهره‌مند می‌شوند، چه بسا که فقط آنچه را که شنیده یا در کتاب درسی خوانده‌اند، از حفظ دارند و عموماً به مقیاس وسیعتر آنها که مستلزم دقّت و ممارست در محتواست، وارد نمی‌شوند. در مدارس قدیم، آن فرصتی که برای بحث و تبادل نظر در مباحث مختلف وجود داشت، به دانش طلبه، عمق و وسعتی می‌داد که دسترسی به آن، فقط با خطابهٔ معلّم میسّر نمی‌تواند بود. روش تدریس در مدارس امروز، حصاری دور اندیشه می‌کشد که در حدّ و مرز سخن معلّم متوقف است. در دوره‌های چند ماهه، ساعت به ساعت و هفته به هفته، هر معلّم مباحث معیّنی محدود به دانش و اطلاعات خود و محدود به برنامهٔ معین عرضه می‌دارد و همهٔ کوششها به آن محدود است که دورنمای امتحان و نمرهٔ امتحانی، آن‌را تبلیغ و تشویق می‌کند. درحالی که اگر معلمان مجال و امکان ارزیابی‌های هفتگی

می‌داشتند، فعالیتهای جاری، صورت مستمر و مدام به‌خود می‌گرفت و برای متعلّم هر درس، نه فقط بر شنیده‌ها، بلکه بر فهمیده‌های درس قبل بنا می‌شد و پیشرفت بیشتر و عمیقتری فراهم می‌آمد، و هر نفر در جریان سال، قدم به قدم و با سیری مستمر، به ابعاد مختلف هر مبحث و موضوع درسی وارد می‌شد، و اکنون متأسفانه چنین نیست و چاره‌ای هم جز تحمّل به خاطر سپردن سطحی و فراموش کردن نداریم.

مسألهٔ کتابهای درسی هم متأسفانه در مدرسه‌داری ما، همیشه از معضلات بوده است. آن‌گاه که سیاست متمرکز آموزشی، تألیف و تدریس کتابهای درسی را آزاد و در اختیار معلمان گذاشت، گروه‌هایی هر چند بعضی با صلاحیت کافی، گرد هم جمع و کتابهایی فراهم آوردند که پشت جلد هر یک، نام چندین نویسنده، زینت‌آرای جنبهٔ تبلیغاتی کتاب بود، و عملاً چه پیش آمد؟ آشکارا دیده شد که فصلهای مختلف کتاب، هماهنگ نیست؛ زیرا در اثر شتاب برای تألیف سریع و عرضه به متقاضیان، تهیهٔ هرفصل کتاب را به عهدهٔ یک مؤلّف گذاشته بودند و بعد از به هم پیوستن مباحثی با سلیقه و اطلاع و سبکهای مختلف، کتابهایی فراهم آمد که از لحاظ محتوا و عمق و شیوه و روش نگارش، پراکندگی فراوان داشتند. نکتهٔ دیگر آن که، در ابتدای هر سال، مؤلّفان، چنین کتابهایی را به صورت انبوه، در دست، از این مدرسه به آن مدرسه، حتی از یک شهر به شهر دیگر، با توصیه و اهدای کتاب به معلمان، تلاش می‌کردند که کتابهایشان را تدریس کنند. از این طریق، هرج و مرجی در انتخاب کتاب پدید آمد که می‌رفت تا امتیازهای برنامه‌های واحد را زیر سؤال ببرد. چنین بود که به‌دنبال تجربه‌های دیگری در همین زمینه، سازمان متمرکز مدیریت، لزوم تدریس کتابهای واحد را سیاست عمومی اعلام کرد و برای تألیف کتابهای درسی، دست به‌کار سازمان مسؤولی شد که باید جست‌وجو می‌کرد و در حدّی که امکان داشت، تألیف کتاب درسی را به افرادی محوّل می‌کرد که واجد صلاحیت لازم باشند و در عین حال، برای هر درس، کتاب واحد فراهم کنند. در این روش نیز اگر حقّ‌التألیف مناسب و متعادلی در نظر نمی‌گرفتند، دسترسی به مؤلّف واجد شرط، دشوار بود و اگر دستمزد متناسب و همخوان با ارزش و اهمیت کار می‌پرداختند، توقّعها گل می‌کرد و بعضاً دستهای بی‌تجربه و ناکافی به سوی امتیازها دراز می‌شد. در اثر این عوامل، می‌توان گفت که کتابهای درسی، در هر حال، آنچه باید باشند، نبوده و عجیب آن که تجارب ناموّفق را پی در پی و متناوباً دنبال کرده‌ایم. گاه به این راه و گاه به آن راه رفته‌ایم. مرتّب آسیب یک طرفهٔ زمان را تحمّل کرده‌ایم و خطا تکرار شده است. ببخشید، بگذارید باز تر صحبت کنم. در امر تهیهٔ کتاب درسی ـ که با سرنوشت میلیونها جوان و نوجوان بیگناه برخورد دارد و فقط این نیست که در نشریه‌ای کسی بخواند و یا خوشش بیاید یا نه ـ دو مسأله خیلی مهم است؛ صلاحیت مؤلّف و فارغ بودن وی از انگیزهٔ مادّی. این هم روشن است که هر دوی این ویژگیها نسبی است، هیچ‌کس از صلاحیت مطلق بهره‌مند نیست، چه بسا که انسان بکلّی فارغ از انگیزهٔ مادّی وجود نداشته باشد. سخن این است که هر قدر کسی به این دو ویژگی نزدیکتر باشد، برای این کار صالحتر است.

وضع تدریس ریاضیات در حال حاضر چگونه است؟

دربارهٔ وضع تدریس یا تألیف کتابهای درسی در این برهه از زمان و در حال حاضر، من شخصاً چیزی اظهار نمی‌کنم. خدا کند امروز وضع از مسائل گذشته فارغ باشد. چیزی که آشکار است و مکتوم نگاه داشتن آن خود فریبی است ـ زیرا به وجه روشن جلب توجه می‌کند ـ رقیقتر شدن هر روز و هر سال محتوا و کم‌مایه‌تر شدن تحصیلات رسمی است و این برای آنها که به‌صورت پیگیر درکلاسهای درس متوسطه و دانشگاه مشغول تدریس بوده‌اند، تردید ناپذیر است و هر سال با توانایی کمتری مواجه شده‌ایم. در ارتباط با چنین پدیده‌ای، سخن این است که اگر عرضه و ارائهٔ مطالب معمول در مدارس ما لازم نیست، چرا چنان پیش می‌رویم که سرانجامش برای بسیاری جوانان، شکست و ناکامی است، و اگر لازم است، چرا، هم از لحاظ معلمان و مسؤولان امور آموزشی و هم از نظر جامعهٔ میلیونی که در مدرسه سرگرم است، از این ضرورت، سطحی و بی‌توجه می‌گذریم؟ فراموش نکنید که سخنم متوجه مجموع فرآیند کار مدرسه است؛ نه آن اقلیت کمتر از ۵ درصدی که با کوشش شخصی و با شیوه‌های جنبی و کمکی توسّل جستن به‌راستی به پیشرفتهای قابل توجه دست می‌یابند.

برای این که دانش‌آموزی در ریاضیات موفق باشد، باید چه کارهایی انجام دهد؟

در یادگیری، بی‌تردید ممارست و کنجکاوی شخصی، هزاران‌بار

از شنیدن مؤثرتر است. هر یک از ما وقتی به گذشته برمی‌گردیم، بدان‌جا می‌رسیم که همهٔ ژرفای اطلاعاتمان، حاصل مطالعات و جست‌وجوهای بعد از مدرسه است. هر کس آن چیزی را عمیق و فراموش نشدنی یاد می‌گیرد که از طریق تفکر و کنجکاوی شخصی، به آن رسیده باشد؛ نه از راه حافظه. فرزندان ما در آموزش ریاضی، در همهٔ موارد درسی، برای رسیدن به واقعیتها از تلاش شخصی استفاده کنند. تمرین و کنجکاوی برای درک عمیق، به‌راستی از کوششهای چاره‌ساز مشکل جوانان مدرسه‌ای است.

به نظر شما یک کتاب درسی خوب چه ویژگیهایی باید داشته باشد؟

آن محاسنی که یادگیری، بلکه خودآموزی را تسهیل کند از حجم کتاب درسی نباید ترسید. آن‌جا که کتاب، بیشتر به مثال و شهود و تمرین و تکرار می‌پردازد و صورت جامع دارد، کثرت صفحه‌ها، جای نگرانی ندارد.

بیان رسا و شیرین، لازمهٔ کتاب درسی است. قلم خوب، از ضرورتهای این مسأله است. سیری منطقی که خود به خود محرّک کنجکاوی و مشوّق مطالعه باشد، جای کتاب درسی را در دلها باز می‌کند. چاپ نفیس و زیبای کتاب درسی، هر چند در ردهٔ دوم اهمیت، به هر حال علاقه‌مندی کودکان و نوجوانان را فراهم می‌آورد.

از گذاشتن شکل و تصویر زیبا در کتابهای درسی نباید امساک کرد. ارتباط مطالب از فصلی به فصل دیگر و از سالی به سال دیگر، از ضرورتهای کتابهای درسی است. کتاب درسی را هر چند که باید جامع باشد، از پرگویی و تکرار هم باید دور نگه داشت. در کتابهای ریاضی، مثالها و تمرینها با سیری تدریجی باید پیش برود. نظم و نظام این سیر تدریجی تمرینها با متن، باید هماهنگی داشته باشد، از پر کردن متن با اعداد بزرگ و نامأنوس، که در زندگی به‌کار نمی‌آیند، باید احتراز کرد. مسأله‌های پیچیده و راه‌حلهای منحصر به فرد و فانتزی را نباید در کتاب درسی و برای همهٔ دانش‌آموزان گذاشت و به استعدادهای در مقیاسهای مختلف تحمیل کرد. تمرینها تا حدّ امکان، به جوابهای مأنوس و قابل تحمل باید منتهی شود و ... .

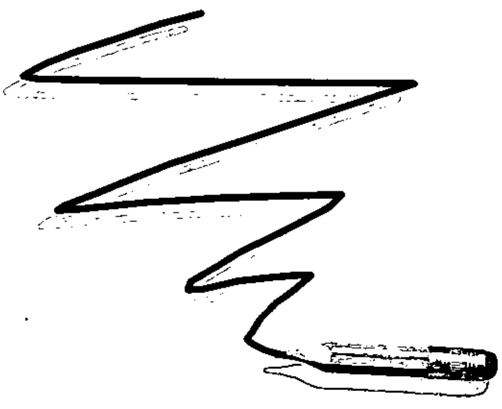
خلاصه آن‌که، اگر بعضی کتابها را با حوصله و فرصت کافی و با دید عمیق و جست‌وجوگر، سطر به سطر و صفحه به صفحه مطالعه کنیم، به مسائل و معایب آشکاری برخورد می‌کنیم که خود آنها (دانش‌آموزان) شخصاً می‌گویند. کتاب درسی چه محاسنی باید داشته باشد.

آیا وجود کتابهای کمک درسی را لازم می‌دانید و اگر لازم‌اند، چه ویژگیهایی باید داشته باشند؟

وجود و ارزش کتابهای کمک درسی را نمی‌توان انکار کرد؛ امّا نه به آن صورت که لقمهٔ حاضر در دهان طفل بگذرایم و نه آن که بازاری و شامل خلاصهٔ نیم بندی از برنامه و کتاب درسی باشد. تهیهٔ متن کمک‌درسی، چه بسا دشوارتر از متن معیّن درسی باشد. این‌جا توانایی و ابتکاری لازم است که هم آشنایی با محتوا را لازم دارد و هم دید و نقطه‌نظر تربیتی و آموزشی را می‌طلبد. به‌صورت بی‌بند و بار، کتاب کمک درسی تهیه کردن و فارغ از انگیزه‌های فنّی و تربیتی، کنار بساط روزنامه‌فروش ردیف کردن و سؤالهای امتحانی را از همانها گرفتن، به‌راستی زیان‌بخش است و از انگیزه‌های کمک درسی دور می‌افتد. آشفته بازار علم‌فروشی را باید مهار کرد.

ـ زبان، لازمهٔ تفهیم و تفهّم است و مقدم بر همهٔ داناییهاست. بی‌تردید معلّم ریاضی هم هر قدر به زبان و بیان مسلّط‌تر باشد، موفّقتر و سودبخش‌تر خواهد بود. نمونه‌های بسیار آن‌را تجربه کرده‌ایم.

ـ من شخصاً خود را در هیچ زمینه و بخشی متبحّر نمی‌شناسم. معذرت می‌خواهم زیادپرحرفی کردم. شما مطالب زیادی را مطرح کرده‌اید؛ چه می‌شود کرد؟

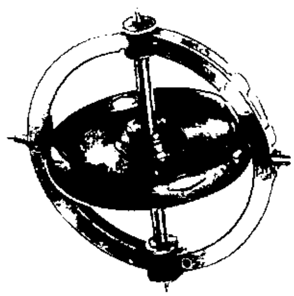


● محمد هاشم رستمی

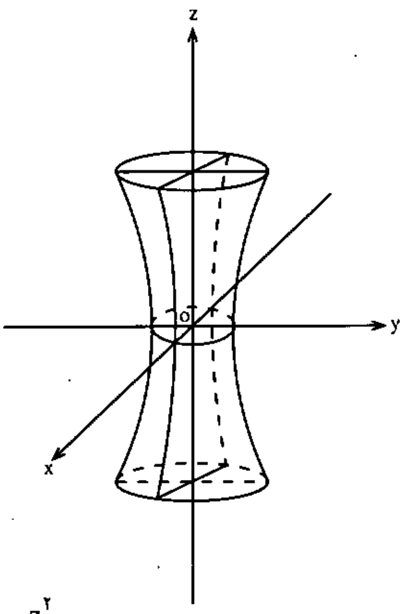
مکان هندسی

(قسمت بیست و یکم)

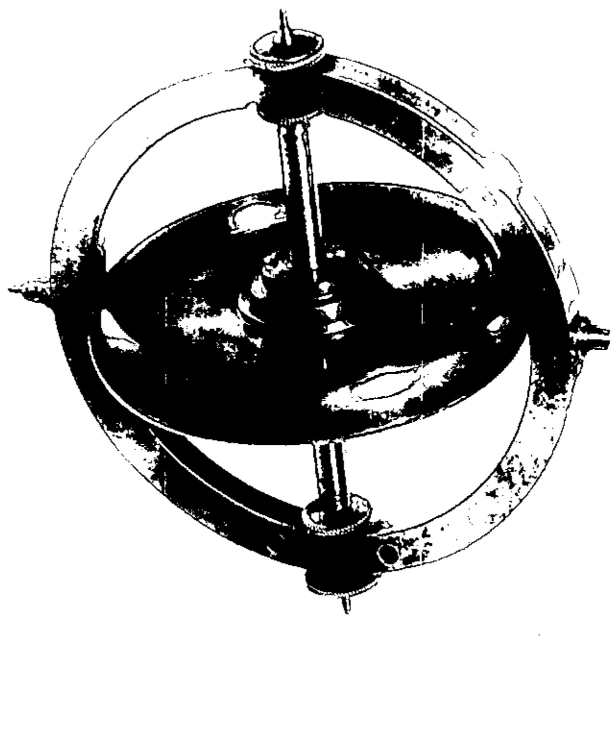
هذلولوی



هذلولوی یکپارچه. هرگاه در معادلهٔ کلی رویه‌های درجهٔ دوم که به‌صورت $Ax^{۲}+By^{۲}+Cz^{۲}+L=۰$ است، ضریبهای A، B، C و L مخالف صفر، L− با A و B هم‌علامت و با C مختلف‌العلامه باشد، با فرض $\frac{-L}{A}=a^{۲}$ ، $\frac{-L}{B}=b^{۲}$ و $\frac{-L}{C}=c^{۲}$ داریم :



$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{y^{۲}}{b^{۲}}-\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱$$



این معادله، رویه ای درجهٔ دوم را مشخص می کند که هذلولوی یکپارچه یا هذلولی‌وار یکپارچه یا هذلولیگون یکپارچه نامیده می‌شود. این رویه، ویژگیهای زیر را دارد :

۱. صفحه‌های مختصات، صفحه‌های تقارن و مبدأ مختصات، مرکز تقارن آن است.

۲. فصل مشترک آن با صفحهٔ xOy، بیضی به معادلهٔ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$ و با صفحهٔ yOz هذلولی به معادله $\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ و با صفحهٔ xOz، هذلولی به معادلهٔ $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ است.

۳. اگر آن را با صفحهٔ $z=h$ قطع دهیم، بیضی به معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

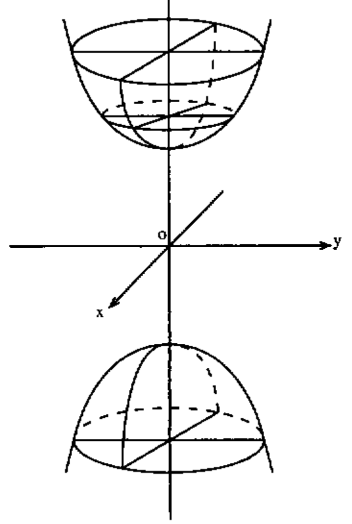
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}\\ z=h\end{cases}$$

نیمهٔ قطرهای این بیضی $a_1=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ و $b_1=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$ است.

این بیضی به ازاء جمیع مقدارهای h وجود دارد و بعلاوه از رابطهٔ $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}$ دیده می‌شود که تمام بیضیها متشابه‌اند و کوچکترین آنها وقتی به دست می‌آید که هذلولوی را با صفحهٔ $z=0$ قطع دهیم.

هذلولوی دوپارچه. اگر در معادلهٔ کلی رویه‌های درجهٔ دوم $Ax^2+By^2+Cz^2+L=0$، ضریبهای A، B، C و L مخالف صفر، $-L$ با A و B مختلف‌العلامه و با C همعلامت باشد، با فرض $\frac{L}{A}=a^2$، $\frac{L}{B}=b^2$ و $\frac{-L}{C}=c^2$، داریم:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



این معادله، رویه‌ای درجهٔ دوم را مشخص می‌کند که هذلولوی دوپارچه یا هذلولی‌واردوپارچه یا هذلولیگون دوپارچه نامیده می‌شود. این رویه ویژگیهای زیر را دارد:

۱. صفحه‌های مختصات، صفحهٔ تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن آن است.

۲. صفحهٔ xOy را قطع نمی‌کند. مقطع آن با دو صفحهٔ yOz و xOz بترتیب هذلولیهای به معادلهٔ $\begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=0\end{cases}$ و $\begin{cases}\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\\ y=0\end{cases}$ است.

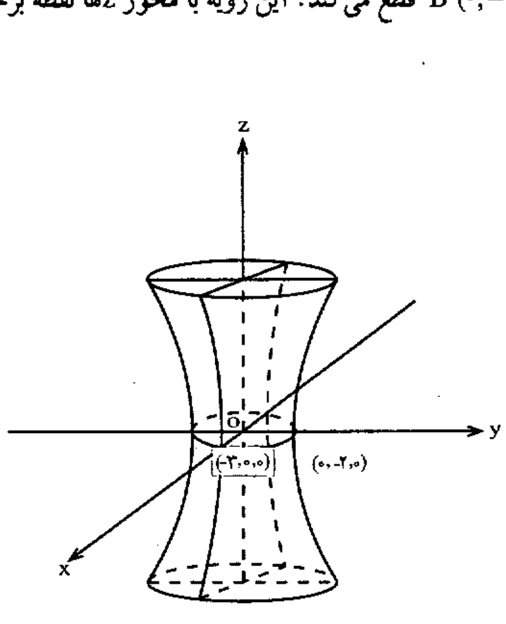
۳. اگر آن‌را با صفحهٔ $z=h$ قطع دهیم، با شرط $|h|>c$، بیضیهایی به معادله‌های

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{c^2}-1\right)}=1$$

به‌دست می‌آید. اگر h تغییر کند، بیضیهای به‌دست آمده متشابه‌اند.

مثال ۱. رویهٔ به معادلهٔ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1$ را مورد بحث و بررسی قرار دهید و نمودار آن را رسم کنید.

حل. این رویه نسبت به هریک از صفحه‌های مختصات و همچنین مبدأ مختصات متقارن است. محور xها را در نقطه‌های $A(3,0,0)$ و $A'(-3,0,0)$ و محور yها را در نقطه‌های $B(0,2,0)$ و $B'(0,-2,0)$ قطع می‌کند. این رویه با محور zها نقطهٔ برخورد



ندارد. فصل مشترک آن با صفحه‌های $z=k$، بیضیهایی هستند که مرکزشان روی محور zها واقع است و وقتی k زیاد شود، این بیضیها نیز بزرگتر می‌شوند.

مقطعهای این رویه با صفحه‌هایی موازی با صفحه‌های yOz و xOz هذلولی هستند. این رویه، هذلولی‌وار یکپارچه است.

مثال۲. مختصات مرکز و نیمهٔ قطرهای هذلولوی یکپارچه به معادلهٔ

$$2x^2-3y^2+4z^2-8x-6y+12z-10=0$$

را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$2(x^2-4x)-3(y^2+2y)+4(z^2+3z)-10=0$$

$$\Rightarrow 2\left[(x-2)^2-4\right]-3\left[(y+1)^2-1\right]+$$

$$4\left[(z+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\right]-10=0$$

$$\Rightarrow 2(x-2)^2-3(y+1)^2+4(z+\frac{3}{2})^2=24$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{12}-\frac{(y+1)^2}{8}+\frac{(z+\frac{3}{2})^2}{6}=1$$

$$\Rightarrow O'(2,-1,-\frac{3}{2}) \quad \text{مرکز}$$

$$a^2=12\Rightarrow a=2\sqrt{3}$$

$$b^2=8\Rightarrow b=2\sqrt{2}$$

$$c^2=6\Rightarrow c=\sqrt{6}$$

محور کانونی این هذلولوی موازی محور yهاست.

مثال ۳. مختصات مرکز و نیمهٔ قطرهای هذلولی‌وار دوپارچه به معادلهٔ $2x^2-3y^2-4z^2-12x-6y-21=0$ را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$2(x^2-6x)-3(y^2+2y)-4z^2-21=0$$

$$\Rightarrow 2\left[(x-3)^2-9\right]-3\left[(y+1)^2-1\right]-4z^2-21=0$$

$$2(x-3)^2-3(y+1)^2-4z^2=36$$

$$\Rightarrow \frac{(x-3)^2}{18}-\frac{(y+1)^2}{12}-\frac{z^2}{9}=1$$

$$\Rightarrow O'(3,-1,0)$$

$$a^2=18\Rightarrow a=3\sqrt{2}\ ,\ b^2=12,\ b=2\sqrt{3}\ ,$$

$c^2=9\Rightarrow c=3$ محور کانونی موازی محور xهاست.

مثال۴. معادلهٔ هذلولی‌وار دوپارچه‌ای را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و محورهای تقارنش، محورهای مختصات باشد و از نقطه‌های $(3,1,2)$، $(2,\sqrt{11},3)$ و $(6,2,\sqrt{15})$ می‌گذرد.

حل. معادلهٔ هذلولی‌وار دوپارچه را که محور کانونی‌اش، در امتداد محور zهاست، می‌نویسیم. این معادله به‌صورت کلی $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ یا $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ است. مختصات نقطه‌های داده شده، در این معادله باید صدق کنند. بنابراین داریم:

$$\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{4}{c^2}=-1 \qquad (1)$$

$$\frac{4}{a^2}+\frac{11}{b^2}-\frac{9}{c^2}=-1 \qquad (2)$$

$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}-\frac{15}{c^2}=-1 \qquad (3)$$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$a^2=1 \quad ,\ b^2=\frac{1}{2} \quad ,\ c^2=\frac{1}{3}$$

و از آن‌جا معادلهٔ هذلولی‌وار دوپارچه به‌صورت زیر است:

$$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}-\frac{z^2}{\frac{1}{3}}=-1 \quad \text{یا} \quad x^2+2y^2-3z^2=-1 \quad \text{یا}$$

$$3z^2-x^2-2y^2=1$$

مثال ۵. صفحهٔ $z+1=0$ هذلولوی یک پارچهٔ به معادلهٔ $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1$ را در یک هذلولی قطع می‌کند. معادلهٔ این هذلولی، نیمهٔ قطرها و مختصات رأسهای آن را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{z^2}{2}=1\\ z+1=0\Rightarrow z=-1\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}+\frac{1}{2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{18}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\Rightarrow \begin{cases}\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1\\ z=-1\end{cases}$$

$$a^2=16 \Rightarrow a=4,\ b^2=9 \Rightarrow b=3$$

$$y=0 \Rightarrow x=+4\ ,\ x=-4$$

$$\Rightarrow A(4,0,-1)\ ,\ A'(-4,0,-1)$$

مثال ۶. هذلولی‌وار یکپارچهٔ به معادلهٔ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$ داده شده است :

۱. نیمهٔ قطرها و مختصات رأسهای مقطع این هذلولی‌وار با صفحهٔ xOy را تعیین کنید.

۲. نشان دهید که صفحهٔ $4x-5y-10z-20=0$ این هذلولی‌وار را در خط مستقیمی قطع می‌کند.

حل. ۱. مقطع این هذلولی‌وار با صفحهٔ xOy یک بیضی است. داریم :

$$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1 \\ z=0\end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\ ,\ z=0$$

$$\Rightarrow a_1^2=25 \Rightarrow a_1=5\ ,\ b_1^2=16 \Rightarrow b_1=4,$$

مرکز بیضی $O(0,0)$

$$A(5,0,0)\ ,\ A'(-5,0,0)\ ,\ B(0,4,0)\ ,\ B'(0,-4,0)$$

۲. داریم :

$$\begin{cases}\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1 \\ 4x-5y-10z-20=0 \Rightarrow x=\frac{5(y+2z+4)}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{25(y+2z+4)^2}{16\times 25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow y^2+2yz+4y+8z=0 \Rightarrow y(y+2z)+4(y+2z)=0$$

$$\Rightarrow (y+2z)\ (y+4)=0 \Rightarrow \begin{cases}y+2z=0 \\ y+4=0\end{cases}$$ معادلهٔ خط فصل مشترک

مثال ۷. هذلولی‌وار دوپارچهٔ به معادلهٔ $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$ داده شده است.

۱. معادلهٔ مقطع این هذلولی‌وار با صفحهٔ yOz را به‌دست آورید. نیمهٔ قطرها و مختصات رأسهای آن را تعیین کنید.

۲. معادلهٔ فصل مشترک این هذلولی‌وار با صفحهٔ $x-3y=0$ را تعیین کنید.

حل. ۱. داریم :

$$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1 \\ x=0\end{cases} \Rightarrow \frac{z^2}{25}-\frac{y^2}{4}=1$$

$$\Rightarrow a_1^2=25 \Rightarrow a_1=5$$

$$b_1^2=4\ ,\ b_1=2\ ,\ A(0,0,5)\ ,\ A'(0,0,-5)$$

۲. دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1 \\ x-3y=0\end{cases} \Rightarrow \frac{9y^2}{3}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=-1$$

$$3y^2+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{25}=1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{4}{13}}-\frac{z^2}{25}=-1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\frac{z^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{4}{13}}=1 \\ x-3y=0\end{cases}$$ مقطع یک هذلولی است.

مثال ۸. به ازای چه مقداری از m، صفحهٔ به معادلهٔ $x+mz-1=0$ هذلولوی دوپارچهٔ به معادلهٔ $x^2+y^2-z^2=-1$ را اولاً در یک بیضی، ثانیاً در یک هذلولی قطع می‌کند.

حل. داریم :

$$\begin{cases}x^2+y^2-z^2=-1 \\ x+mz-1=0 \Rightarrow x=-mz+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow (-mz+1)^2+y^2-z^2=-1$$

$$\Rightarrow m^2z^2+1-2mz+y^2-z^2+1=0$$

$$(m^2-1)z^2+y^2-2mz+2=0$$

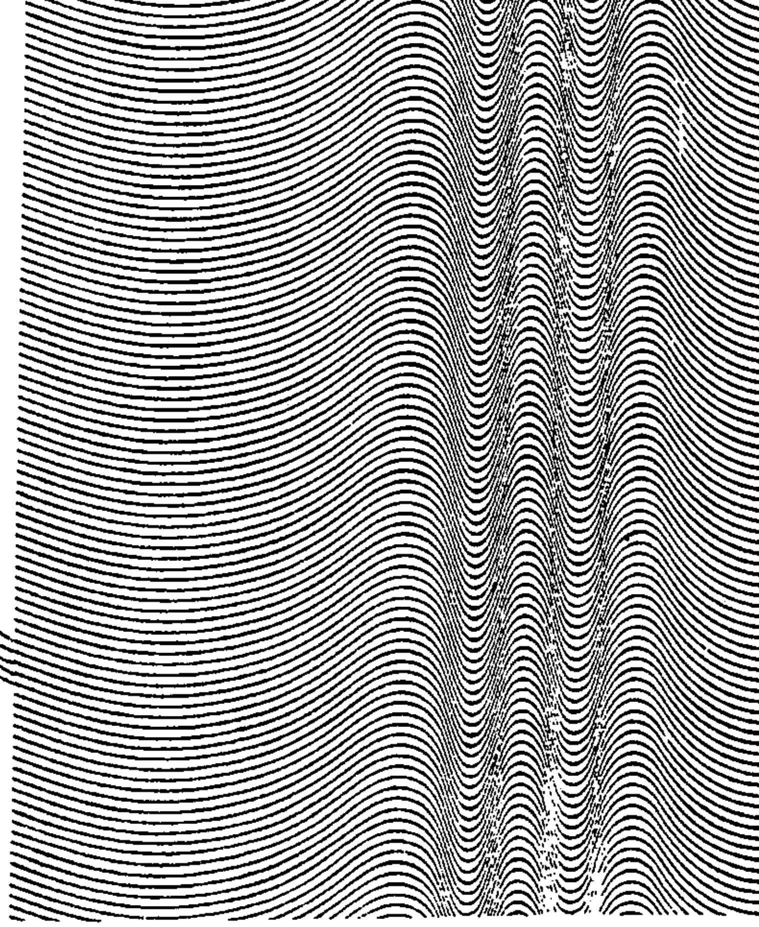
اولاً. برای آن که مقطع بیضی باشد، باید $m^2-1>0$ باشد ؛ یعنی $m>+1$ و یا $m<-1$ باشد.

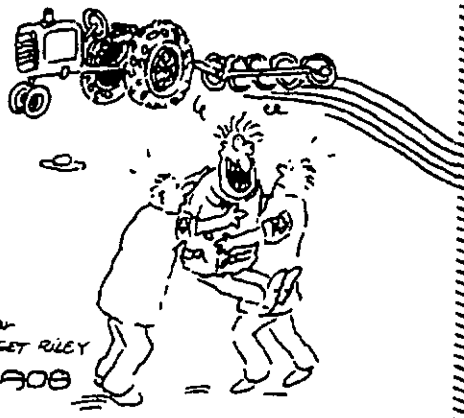
ثانیاً. برای آن که مقطع هذلولی باشد، باید $m^2-1<0$ ؛ یعنی $-1<m<+1$ باشد.

پوریسم

(PORISM)

● دکتر احمد شرف‌الدین



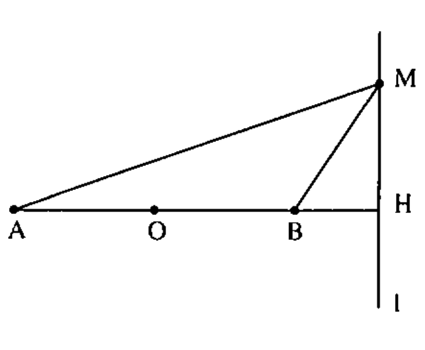


چکیده

در هندسه، پوریسم، به مسأله‌ای گفته می‌شود که اگر در آن مسأله، شرط معینی برقرار باشد، دارای بی‌نهایت جواب باشد و اگر آن شرط برقرار نباشد، هیچ جوابی برای مسأله وجود نداشته باشد. در این مقاله، در مثالهای ۱ تا ۴ چند پوریسم ساده مطرح می‌کنیم تا دانش‌آموزان، مسائل پوریسم را بخوبی دریابند. سپس به شرح دو پوریسم مهم از اویلر و اشتینر می‌پردازیم. در آنالیز ریاضی، هر جواب معادلهٔ $f(x) = x$ را یک نقطهٔ ثابت تابع f می‌نامند. اگر بخواهیم به زبان آنالیز ریاضی صحبت کنیم، می‌توانیم بگوییم پوریسم یک مسأله هندسی است که تابعی که داده‌های آن را به هم مربوط می‌کند، دارای بی‌نهایت نقطه ثابت است.

***

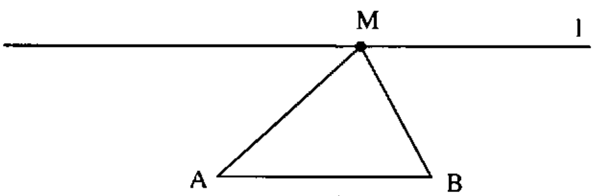
مثال ۱: در صفحهٔ P دو نقطهٔ A و B و خط l عمود بر خط AB مفروضند. بر خط l نقطه‌ای تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد.



حل: وسط پاره‌خط AB را نقطهٔ O و نقطهٔ برخورد دو خط l و AB را H می‌نامیم. اگر شرط $\overline{OH} = 0$ برقرار باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است و اگر این شرط برقرار نباشد، مسأله جوابی ندارد.

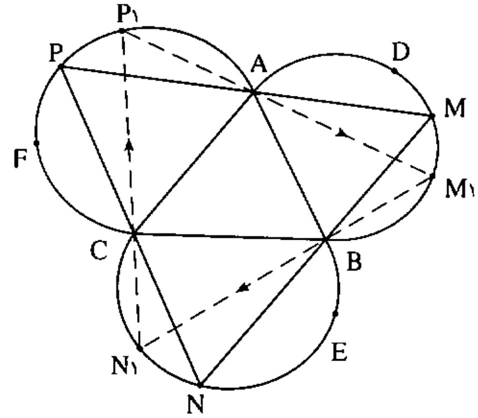
مثال ۲: در صفحهٔ P خط l و دو نقطهٔ A و B مفروضند؛ به‌طوری که دو خط l و AB موازیند. فاصلهٔ دو خط l و AB را h می‌نامیم. می‌خواهیم بر خط l نقطهٔ M را چنان بیابیم که مساحت مثلث MAB برابر عدد معلوم s باشد.

حل: طول پاره‌خط AB را a می‌نامیم. اگر شرط $s = \frac{1}{2}ah$ برقرار باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است و اگر این شرط برقرار نباشد، مسأله دارای جواب نیست.



مثال ۳: مثلث ABC مفروض است. بر اضلاع AB، BC و CA از این مثلث سه کمان دایره ADB، BEC و CFA در خارج مثلث رسم شده؛ به‌طوری که بترتیب کمان درخورهای سه زاویهٔ معلوم α، β و γ می‌باشند.

بر مثلث ABC مثلثی چون MNP محیط کنید ؛ به‌طوری که سه رأس M، N و P بترتیب بر کمانهای ADB، BEC و CFA قرار داشته باشند.



حل: اگر شرط

$$(۱)\quad \alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$$

برقرار باشد، می‌توان بی‌نهایت مثلث بر مثلث ABC محیط کرد ؛ به‌طوری که سه رأس آنها بر سه کمان یاد شده قرار داشته باشند و اگر شرط (۱) برقرار نباشد، هیچ مثلثی وجود ندارد که بر مثلث ABC محیط باشد ؛ به‌طوری که سه رأس آن بر سه کمان یاد شده قرار داشته باشند.

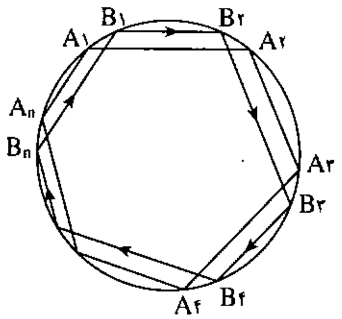
برای اثبات چنین می‌گوییم : نقطهٔ دلخواه M_1 را بر کمان ADB اختیار می‌کنیم و آن را به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خط M_1B را با کمان BEC به N_1 نشان می‌دهیم. سپس نقطهٔ N_1 را به نقطهٔ C وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد خط N_1C را با کمان AFC به P_1 نمایش می‌دهیم. از نقطهٔ P_1 به نقطهٔ A وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد خط P_1A را با خط M_1B به L نشان می‌دهیم. چون مقدار دو زاویهٔ BN_1C و CP_1A بترتیب برابر β و γ می‌باشند، پس مقدار زاویهٔ ALB برابر :

$$۱۸۰-(\beta+\gamma)$$

می‌باشد. حال اگر بخواهیم که نقطهٔ L بر کمان ADB قرار داشته باشد، باید شرط $\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$ وجود داشته باشد.

اگر شرط یاد شده برقرار باشد، بر مثلث ABC می‌توان بی‌نهایت مثلث محیط کرد ؛ به‌طوری که سه رأس آن بر سه کمان ADB، BEF و CFA قرار داشته باشند و اگر شرط یاد شده برقرار نباشد، هیچ مثلثی وجود ندارد که بر مثلث ABC محیط باشد و سه رأس آن بر سه کمان مذکور قرار داشته باشند.

مثال ۴: دایرهٔ (O) و n ضلعی $A_1A_2...A_n$ محاط در آن را درنظر می‌گیریم. در دایرهٔ (O)، n ضلعی $B_1B_2...B_n$ را چنان محاط کنید که اضلاع B_1B_2 ، B_2B_3 ، . . . و B_nB_1 بترتیب موازی اضلاع A_1A_2 ، A_2A_3 ، . . . و A_nA_1 باشند.



حل: اگر n زوج باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است ؛ یعنی هر نقطهٔ دلخواه B_1 که بر محیط دایره بگیریم و خط B_1B_2 را موازی خط A_1A_2 رسم کنیم و سپس خط B_2B_3 را موازی خط A_2A_3 رسم کنیم و عمل ترسیمات متوالی را ادامه دهیم تا به نقطهٔ B_n برسیم، آن‌گاه خط B_nB_1 موازی خط A_nA_1 خواهد بود. اما اگر n فرد باشد، مسأله دارای جواب نیست.

برای اثبات بر دایرهٔ (O) جهت مثبت مثلثاتی را به‌عنوان جهت مثبت اختیار می‌کنیم. اگر دو نقطهٔ M و N بر محیط دایرهٔ (O) اختیار کنیم، طول کمان MN را مثبت محسوب می‌کنیم ؛ در صورتی که جهت حرکت از M به N در جهت مثبت مثلثاتی باشد و در غیر این صورت، اندازهٔ جبری کمان MN را منفی محسوب می‌کنیم.

اکنون اندازهٔ جبری کمان A_1B_1 را بر محیط دایرهٔ جهت‌دار (O) به l نشان می‌دهیم. اندازهٔ جبری کمان A_2B_2 برابر $(-l)$ می‌باشد و اندازهٔ جبری کمان A_3B_3 برابر $(-(-l))$ است ؛ یعنی برابر l. اندازهٔ جبری کمان A_nB_n برابر $(-l)^{n+1}$ است. اگر n زوج باشد، این مقدار برابر $(-l)$ است و لذا اگر n زوج باشد، دو کمان A_1B_1 و A_nB_n هم‌طول و ناهمسو می‌باشند ؛ پس دو خط A_nA_1 و B_nB_1 موازی می‌باشند، و اگر n فرد باشد، دو کمان A_nA_1 و B_nB_1 هم‌طول و همسو می‌باشند و لذا دو خط A_nA_1

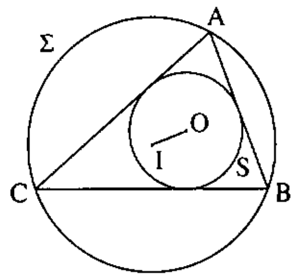
و B_nB_1 موازی نیستند.

دو پوریسم مهم

در سطور آینده، دو پوریسم مهم ذکر می‌کنیم. پوریسم اوّل از یکی از قضیه‌های هندسی اویلر نتیجه می‌شود. پوریسم دوم از پوریسمهای بسیار جالب است که از کارهای ژاکوب اشتینر، هندسه‌دان برجستهٔ قرن نوزدهم است.

پوریسم اویلر: دایرهٔ $S(I, R)$ محاط در دایرهٔ $\Sigma(O, R)$ داده شده است.

مثلثی در دایرهٔ Σ محاط کنید که بر دایرهٔ S محیط باشد.



برای حلّ این مسأله، از قضیهٔ زیر که از آن اویلر است، استفاده می‌کنیم:

قضیه: اگر شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث، برابر R، شعاع دایرهٔ محاط در آن، برابرr و طول خط‌المرکزین برابر d باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$d^2 = R^2 - 2rR$$

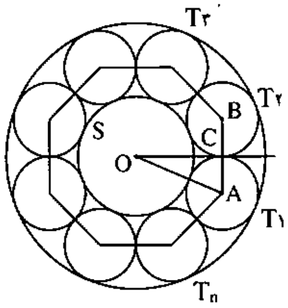
اگر در مسألهٔ موردنظر داشته باشیم:

$$(1)\quad \overline{OI}^2 = R^2 - 2rR$$

آن‌گاه بی‌نهایت جواب داریم؛ یعنی بی‌نهایت مثلث وجود دارد که در دایرهٔ Σ محاط و بر دایرهٔ S محیط باشند و اگر رابطهٔ (۱) بین سه مقدار R، r و $\overline{OI}$ برقرار نباشد، مسأله دارای جواب نیست.

پوریسم اشتینر: پوریسم اشتینر را ابتدا در حالت خاص (در قسمت الف) و سپس در حالت کلی (در قسمت ب) مطرح می‌کنیم.

الف. دو دایرهٔ هم مرکز $S(O, r)$ و $\Sigma(O, R)$ را در نظر می‌گیریم. یک سلسله دایره‌های T_1، T_2، ... و T_n را که دوبه‌دو مماس خارجند و به‌علاوه بر دایرهٔ S مماس خارج و بر دایرهٔ Σ مماس داخلند، در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم چه رابطه‌ای بین r، R و n موجود باشد تا دایرهٔ T_n بر دایرهٔ T_1 مماس گردد.



حل: می‌توانیم هر یک از این دایره‌ها را دایرهٔ اوّل تلقی کنیم که بر دایرهٔ دوم و بر آخرین دایره مماس می‌باشد. دو دایرهٔ مماس متوالی به مرکزهای A و B را که در نقطهٔ C مماسند، در نظر می‌گیریم. خط مماس OC بر خط‌المرکزین AB عمود است. برای آن که حلقهٔ دایره‌ها پس از یک دور بسته شود؛ یعنی دایرهٔ T_n بر دایرهٔ T_1 مماس شود، باید شرط زیر برقرار باشد.

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{AC}{OA}$$

و چون $\overline{AC} = \frac{1}{2}(R - r)$ و $\overline{OA} = \frac{1}{2}(R + r)$، پس باید داشته باشیم:

$$(1)\quad \sin\frac{\pi}{n} = \frac{R - r}{R + r}$$

اگر شرط (۱) برقرار باشد، حلقهٔ دایره‌ها پس از یک دور، بسته می‌شود و مسأله دارای بی‌نهایت جواب است؛ زیرا هر نقطه از دایرهٔ S را می‌توان یک نقطهٔ تماس دایره T_1 با دایرهٔ S دانست. به‌عبارت دیگر، با چرخاندن یکی از جوابها (یعنی حلقهٔ دایره‌ها) به اندازهٔ زاویهٔ دلخواه، یک جواب دیگر به‌دست می‌آید.

تبصره: اگر بخواهیم که پس از k دور چرخیدن دور دایرهٔ S، دایره آخری، یعنی دایرهٔ T_n، به دایرهٔ T_1 مماس شود، باید داشته باشیم:

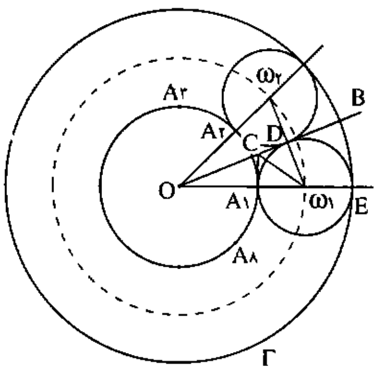
$$\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{R - r}{R + r}$$

طرز رسم شکل پوریسم

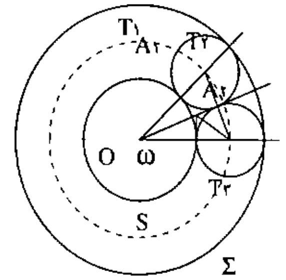
می‌خواهیم دو دایرهٔ هم مرکز رسم کنیم؛ به‌طوری‌که در حلقهٔ

بین این دو دایره بتوان n دایرهٔ مساوی (مثلاً ۸ دایره) رسم کرد که دو به دو مماس باشند و به‌علاوه، بر دایرهٔ داخلی، مماس خارج و بر دایره خارجی، مماس داخل باشند.

یک دایرهٔ دلخواه (O) رسم می‌کنیم. محیط این دایره را به‌وسیلهٔ نقاط A_1 ، A_2 ، ... و A_8 به هشت کمان مساوی تقسیم می‌کنیم. مماس A_1C را بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم تا خط OB نیمساز زاویهٔ A_1OA_2 را در نقطهٔ C قطع کند. نیمساز زاویهٔ A_1CB را رسم می‌کنیم تا خط OA_1 را در نقطهٔ ω_1 قطع کند. عمود ω_1D را بر خط OC فرود می‌آوریم. چنین داریم $\overline{\omega_1A_1} = \overline{\omega_1D}$ (خاصیت نیمساز). دایره‌ای به مرکز O و شعاع $O\omega_1$ رسم می‌کنیم تا خطهای OA_2 ، OA_3 ، ... و OA_8 را بترتیب در نقاط ω_2 ، ω_3 ، ... و ω_8 قطع کند. هشت دایرهٔ مساوی با مرکزهای ω_1 ، ω_2 ، ... و ω_8 و با شعاع ω_1A_1 رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خط OA_1 با دایرهٔ به مرکز ω_1 و شعاع ω_1A_1 را به E نشان می‌دهیم. دایرهٔ به مرکز O و شعاع OE را دایرهٔ Γ می‌نامیم. هشت دایرهٔ یاد شده بر دایرهٔ O، مماس خارج و بر دایرهٔ Γ ، مماس داخلند. شکل حاصل یعنی شکل زیر، همان شکل مطلوب است.



ب. دو دایرهٔ $S(O, r)$ و $\Sigma(\omega, R)$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که دایرهٔ S داخل دایرهٔ Σ باشد. یک سلسله دایره‌های T_1 ، T_2 ، ... و T_n را که دو به دو مماس خارجند و به‌علاوه بر دایرهٔ S، مماس خارج و به دایرهٔ Σ ، مماس داخلند، در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ دو مرکز را d می‌نامیم. چه رابطه‌ای باید بین R، r و d برقرار باشد تا حلقهٔ دایره‌های T_1 ، T_2 ، ... و T_n پس از یک دور بسته شود؛ یعنی دایرهٔ T_n بر دایرهٔ T_1 مماس شود.



حل: برای حل، دو قضیهٔ یاد شدهٔ زیر را به‌کار می‌گیریم:

قضیهٔ الف. به‌وسیلهٔ انعکاس می‌توان دو دایرهٔ غیرمشخص غیرمتقاطع را به دو دایرهٔ هم مرکز تبدیل کرد.

قضیهٔ ب. دو دایرهٔ (C , R) و (C_1 , R_1) را که طول خط‌المرکزین آنها d است، در نظر می‌گیریم. منعکس آنها را نسبت به یک نقطهٔ O بترتیب دایره‌های (C', R') و (C_1', R_1') می‌نامیم و طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ اخیر را d' می‌نامیم. عبارت $\frac{d^2 - R^2 - R_1^2}{RR_1}$ در برابر تبدیل انعکاس پایاست؛ یعنی:

$$\frac{d^2 - R^2 - R_1^2}{RR_1} = \pm \frac{d_1'^2 - R'^2 - R_1'^2}{R'R_1'}$$

کسر سمت راست، دارای علامت (+) است؛ اگر توانهای نقطهٔ O نسبت به دو دایرهٔ (C , R) و (C_1 , R_1) هم علامت باشند و در غیر این صورت، علامت کسر سمت راست (-) است.

دو دایرهٔ S و Σ را به‌وسیلهٔ تبدیل انعکاس، به دو دایرهٔ هم‌مرکز تبدیل می‌کنیم. مسأله، به مسألهٔ دو دایرهٔ هم مرکز برمی‌گردد؛ به‌شرط آن که حلقهٔ دایره‌ها پس از یک دور چرخش به دور دایره S، بسته شود؛ یعنی دایرهٔ T_n .

به دایرهٔ T_1 مماس شود، آن است که:

$$(1)\quad \sin^2 \frac{\pi}{n} = \frac{(R-r)^2 - d^2}{(R+r)^2 + d^2}$$

شرط آن که حلقهٔ دایره‌ها پس از kدور چرخش به دور دایرهٔ S، بسته شود، آن است که:

$$(2)\quad \sin^2 \frac{k\pi}{n} = \frac{(R-r)^2 - d^2}{(R+r)^2 + d^2}$$

اگر رابطهٔ (۱) یا (۲) برقرار باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب

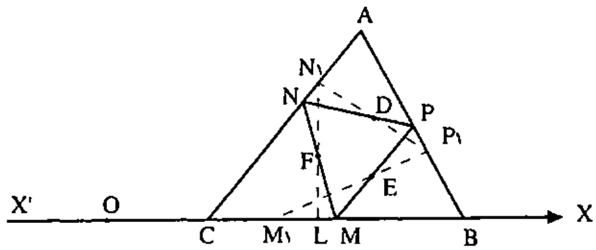
است ؛ زیرا از هر یک از وضعیتهای حلقهٔ دایره‌های مسألهٔ اشتینر درحالت الف، یک جواب برای مسألهٔ اشتینر در حالت ب حاصل می‌شود.

نقطهٔ ثابت

تابع f از متغیر حقیقی x را در نظر می‌گیریم. هر جواب معادلهٔ $f(x) = x$ یک نقطهٔ ثابت تابع f نامیده می‌شود. این موضوع در آنالیز ریاضی مطرح می‌گردد. اگر بخواهیم مسألهٔ پوریسم را به زبان آنالیز ریاضی بیان کنیم، می‌توانیم بگوییم که پوریسم یک مسألهٔ هندسی است، که تابعی که داده‌های آن را به هم مربوط می‌کند، دارای بی‌نهایت نقطهٔ ثابت است. به کمک نقطهٔ ثابت، می‌توان تعداد زیادی از قضیه‌های هندسه، از جمله قضیهٔ مشهور پاسکال (خاصیت شش‌ضلعی محاط در دایره) را ثابت کرد.

در مثال ساده و زیبای زیر، کاربردی از نقطهٔ ثابت را برای دانش‌آموزان یاد می‌کنیم.

مسأله: در صفحهٔ P مثلث ABC و سه نقطهٔ D، E و F مفروضند. مثلث MNP را در مثلث ABC طوری محاط کنید که خطوط NP، PM و MN بترتیب از سه نقطهٔ D، E و F بگذرند.



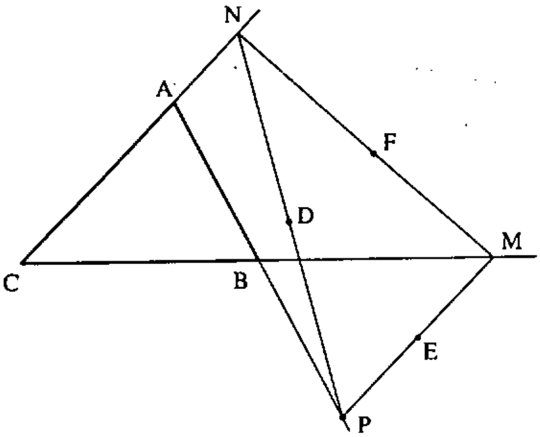
حل: محور $x'Ox$ را منطبق بر خط BC اختیار می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه M_1 را بر محور $x'Ox$ در نظر می‌گیریم و اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{OM_1}$ را روی محور $x'Ox$ به x نشان می‌دهیم. نقطهٔ M_1 را به نقطهٔ E وصل می‌کنیم و محلّ برخورد خط M_1E را با خط AB به P_1 نشان می‌دهیم. نقطهٔ برخورد P_1D را با خط AC به N_1 و نقطهٔ برخورد خط N_1F را با خط BC به L نشان می‌دهیم.

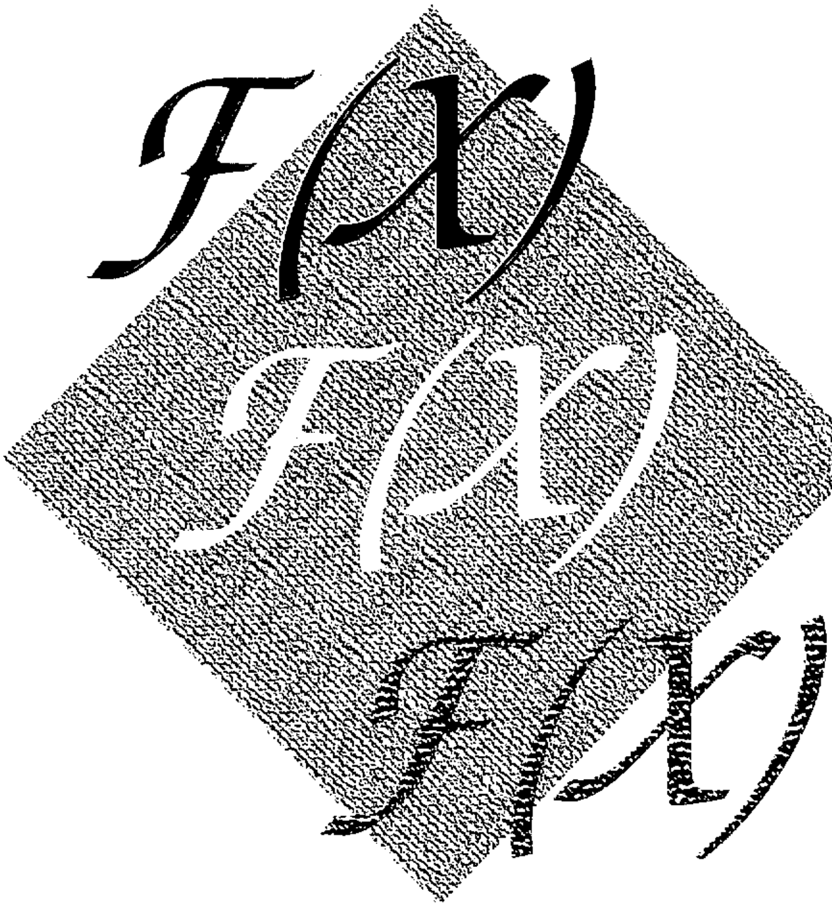
اندازهٔ جبری بردار OL را روی محور $x'Ox$ به y نشان می‌دهیم. به ازای هر نقطهٔ M_1 از محور $x'Ox$ یک و فقط یک نقطهٔ L از این محور به‌دست می‌آید. پس y تابع x است که آن را به‌صورت $y = f(x)$ نشان می‌دهیم.

اگر نقطهٔ M_1 در جایی از خط BC انتخاب شود که نقطهٔ L بر آن منطبق گردد، در این صورت، نقطهٔ M_1 یک رأس مثلث محاطی مطلوب می‌باشد. طول نقطهٔ M_1 جواب معادلهٔ $y = f(x)$ است. x نقطهٔ ثابت تابع f است.

تابع f یک تابع هموگرافیک است که می‌توان به آسانی ضرایب آن را به‌دست آورد.

تبصره: در هندسه، وقتی می‌گوییم که در مثلث ABC مثلثی محاط کنید که دارای فلان خاصیت باشد، منظور آن است که سه رأس مثلث مطلوب، بر سه خط AB، BC و CA قرار داشته باشند و دارای خاصیت موردنظر باشند. شکل زیر، یکی از حالتهای مسأله را نشان می‌دهد.





کاربردهای انتگرال

محاسبهٔ مساحت

● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

انتگرال معیّن در بسیاری از مسائل کاربرد دارد، که از آن جمله می‌توان محاسبهٔ مساحت، حجم حاصل از دوران، طول منحنی و تعیین تابع چگالی در احتمال و مسائل مربوط به آنالیز، مکانیک، فیزیک، شیمی و... را نام برد. در این‌جا به برخی از آنها اشاره می‌کنیم:

محاسبهٔ مساحت

اگر تابع با ضابطهٔ عمومی $y = f(x)$ در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$، $a < b$، پیوسته و نامنفی باشد، اندازهٔ مساحت سطح محصور بین منحنی تابع f و محور xها و دو خط به معادلات $x = a$ و $x = b$ که عددی معین است، از محاسبه انتگرال معین زیر به‌دست می‌آید:

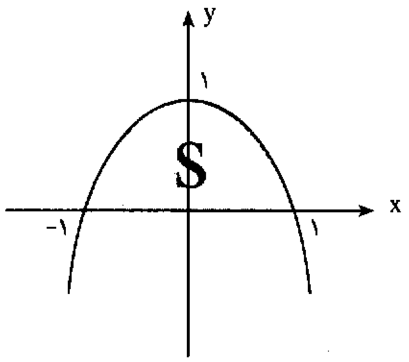
$$S = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال: سطح محصور بین نمایش تغییرات تابع با ضابطهٔ $y = -x^2 + 1$ و محور xها را به‌دست آورید.

حل: برای محاسبهٔ سطح محصور بین یک منحنی و محور xها باید طول نقاط برخورد آن منحنی با محور xها را به‌دست آوریم. بنابراین، طول نقاط برخورد منحنی با محور طولها را محاسبه می‌کنیم:

$$y = 0 :\ -x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

سطح مورد نظر بالای محور xها است:



بنابراین:

$$S = \int_{-1}^{1} y dx = \int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3}(1)^3 + (1) - \left[-\frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)\right]$$

$$= -\frac{1}{3} + 1 - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{4}{3} \ \text{(واحد سطح)}$$

مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطهٔ $y = -x^2 - x + 6$ و محور xها و دو خط $x = -2$ و $x = 1$ را

به‌دست آورید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور xها را محاسبه می‌کنیم:

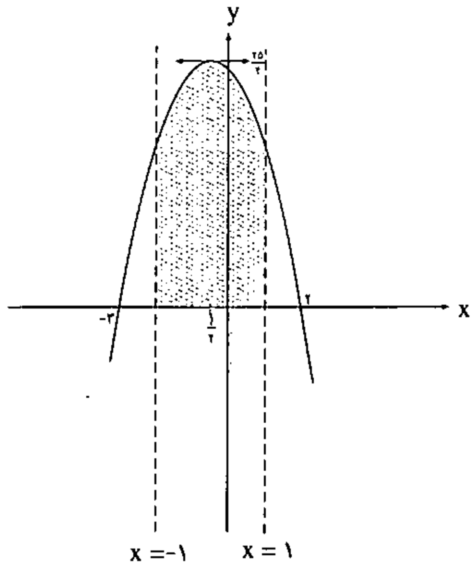
$$y=0:\ -x^2-x+6=0 \Rightarrow x=2\ ،\ x=-3$$

ملاحظه می‌کنیم که: $-3<-2<1<2$

مشاهده می‌شود که هیچ یک از طولهای به‌دست آمده، بین ۲- و ۱ قرار ندارند؛ پس سطح مورد محاسبه، به‌طور کامل در یک طرف محور xها است و چون $f(0)=6>0$ است، بنابراین تمامی سطح بالای محور xها قرار دارد؛ پس:

$$S=\int_{-2}^{1}(-x^2-x+6)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+6\right)-\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-12\right)=16\frac{1}{2}\ \text{(واحد سطح)}$$



تبصرهٔ ۱. اگر تمام سطح مورد محاسبه، زیر محور xها قرار داشته باشد؛ یعنی در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$، $f(x)<0$ باشد، آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx$ عددی منفی است که باید قدرمطلق آن را در نظر بگیریم:

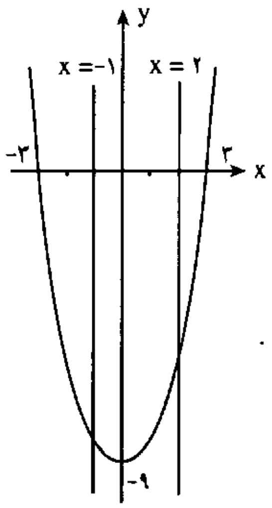
$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=\left|[F(x)]_a^b\right|=\left|F(b)-F(a)\right|$$

مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطهٔ $y=x^2-9$ و محور xها و دو خط $x=-1$ و $x=2$ را به‌دست آورید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور xها را محاسبه می‌کنیم:

$$y=0:\ x^2-9=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\pm 3$$

$$\Rightarrow -3<-1<2<3$$



مشاهده می‌شود که هیچ‌یک از طولهای به‌دست آمده، بین ۱- و ۲ قرار ندارند، و چون $f(0)=-9<0$ و $f(1)=-8<0$، پس تمام سطح مورد محاسبه، در پایین محور xها قرار دارد؛ بنابراین:

$$S=\left|\int_{-1}^{2}(x^2-9)dx\right|=\left|\left[\frac{1}{3}x^3-9x\right]_{-1}^{2}\right|$$

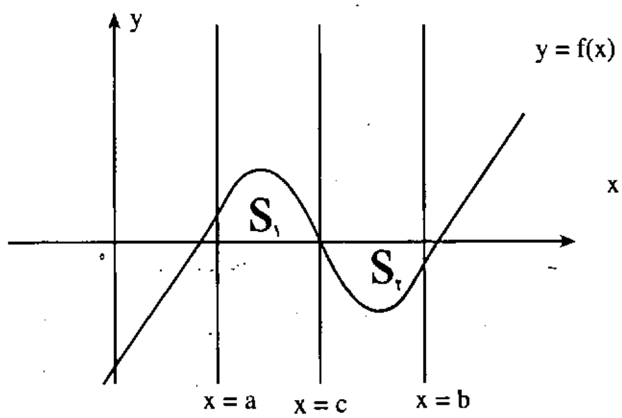
$$=\left|\left(\frac{8}{3}-18\right)-\left(-\frac{1}{3}+9\right)\right|=\left|-24\right|=24\ \text{(واحد سطح)}$$

تبصرهٔ ۲. هرگاه در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ تابع با ضابطهٔ عمومی $y=f(x)$ تغییر علامت دهد، قسمت یا قسمتهایی از سطح مورد محاسبه، در بالا و پایین محور xها قرار می‌گیرد که در این صورت، باید هر قسمت از سطح را به‌طور جداگانه محاسبه کنیم و سپس قدرمطلق آنها را با هم جمع کنیم. به‌طور مثال، در شکل زیر منحنی محور xها را در نقطه‌ای به طول $x=c$، $a<c<b$، قطع کرده است؛ یعنی تابع f در مجاورت نقطه‌ای به طول $x=c$ تغییر علامت داده است.

بنابراین: $S_1=\int_a^c f(x)dx$

و: $S_2=\left|\int_c^b f(x)dx\right|$

پس : $S = S_1 + S_2$



مثال: سطح محصور بین منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطهٔ $y = x^3 - 3x$ و محور xها و دو خط $x = -1$ و $x = 2$ را حساب کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور xها را محاسبه می‌کنیم :

$$y = 0 :\ x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0\ ;\ x = \pm\sqrt{3}$$

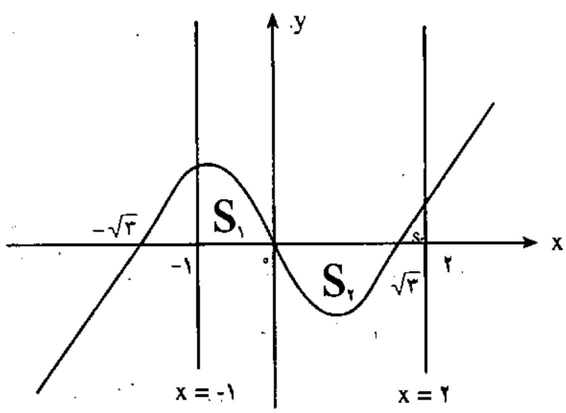
$$\Rightarrow -\sqrt{3} < -1 < 0 < \sqrt{3} < 2$$

مشاهده می‌شود که تابع فوق در فاصلهٔ $[-1\ ,\ 2]$ در مجاورت نقاطی به طولهای $x = 0$ و $x = \sqrt{3}$ تغییر علامت می‌دهد ؛ یعنی دو ریشهٔ معادلهٔ $y = 0$ بین دو مقدار $x = -1$ و $x = 2$ واقع است.

با توجه به $f(-1) = 2 > 0$ و $f(1) = -2 < 0$ و $f(2) = 2 > 0$ نتیجه می‌شود :

$$S_1 = \int_{-1}^{0}(x^3 - 3x)dx\ ,\ S_2 = \left|\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^3 - 3x)dx\right|$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{3}}^{2}(x^3 - 3x)dx \Rightarrow S = S_1 + S_2 + S_3$$



بنابراین :

$$S_1 = \int_{-1}^{0}(x^3 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{4}$$

$$S_2 = \left|\int_{0}^{\sqrt{3}}(x^3 - 3x)dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{\sqrt{3}}\right| = \left|\frac{-9}{4}\right| = \frac{9}{4}$$

$$S_3 = \int_{\sqrt{3}}^{2}(x^3 - 3x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_{\sqrt{3}}^{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{4} + \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \Rightarrow S = \frac{15}{4}$$ (واحد سطح)

تبصرهٔ ۳. برای محاسبهٔ سطح محصور بین یک خط و یک منحنی یا سطح محصور بین دو منحنی، ابتدا باید طولهای نقاط برخورد آنها را از حلّ دستگاه معادله‌های خط و منحنی یا دو منحنی به دست آوریم و در صورت لزوم، عرضهای نقاط برخورد را نیز محاسبه کنیم. در صورتی که طولهای نقاط برخورد (دو نقطهٔ متوالی) a و b باشند، به یکی از دو روش زیر، سطح موردنظر در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ را محاسبه می‌کنیم :

روش اوّل ـ سطح محصور بین خط و منحنی (یا دو منحنی) و محور xها و دو خط $x = a$ و $x = b$ را به‌طور جداگانه محاسبه می‌کنیم و سطوح به‌دست آمده را از هم کم می‌کنیم :

$$S_1 = \int_a^b f_1(x)dx\ ,\ S_2 = \int_a^b f_2(x)dx \Rightarrow S = |S_2 - S_1|$$

روش دوم ـ اگر معادله‌های خط و منحنی (یا دو منحنی)، دو تابع f_1 و f_2 به صورت زیر باشند :

$$y_1 = f_1(x)\ ,\ y_2 = f_2(x)$$

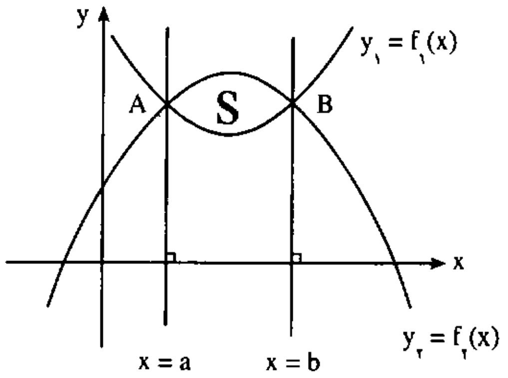
که در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ پیوسته و $f_2(x) > f_1(x)$ ، سطح مورد نظر، از دستور زیر محاسبه می‌شود :

$$S = \int_a^b (y_2 - y_1)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

یعنی ابتدا $g(x) = f_2(x) - f_1(x)$ را محاسبه می‌کنیم ؛ و اگر تابع اولیهٔ $g(x)$ را $G(x)$ بنامیم، سطح مطلوب، در حالت کلی برابر است با :

$$S = \left|\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx\right| = \left|\int_a^b g(x)dx\right|$$

$$= \left|[G(x)]_a^b\right| = |G(b)-G(a)|$$



توجه: توصیه می‌شود برای سهولت در محاسبهٔ سطح محصور بین دو منحنی، همیشه از روش دوم استفاده کنید.

مثال: سطح محصور بین منحنی تابع با ضابطهٔ $y=-x^2-2x+1$ و خط به معادلهٔ $y=x+1$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد خط و منحنی را به‌دست می‌آوریم:

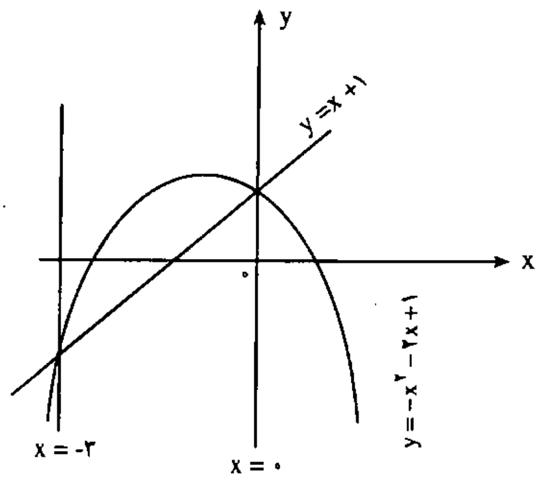
$$\begin{cases} y_1 = x+1 \\ y_2 = -x^2-2x+1 \end{cases} \Rightarrow -x^2-2x+1 = x+1$$

$$\Rightarrow x(x+3)=0 \Rightarrow x=0\ ,\ x=-3$$ (طولهای نقاط تقاطع)

$$g(x) = y_2 - y_1 = f_2(x) - f_1(x)$$

$$= (-x^2-2x+1)-(x+1)$$

$$\Rightarrow g(x) = -x^2-3x \Rightarrow S = \int_{-3}^{0} g(x)dx$$



$$\Rightarrow S = \int_{-3}^{0}(-x^2-3x)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{0}$$

$$= 0-\left(\frac{27}{3}-\frac{27}{2}\right) = -\left(\frac{-27}{6}\right) = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$S=\frac{9}{2}$ (واحد سطح)

مثال: سطح محصور بین دو منحنی به معادلات $y=-x^2-3x+1$ و $y=x^2-7x-5$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{cases} y = -x^2-3x+1 \\ y = x^2-7x-5 \end{cases} \Rightarrow -x^2-3x+1 = x^2-7x-5$$

$$\Rightarrow 2x^2-4x-6=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3)=0$$

$$\Rightarrow x=-1\ \ x=3$$ (طولهای نقاط تقاطع)

$$S = \int_{-1}^{3}(y_2-y_1)dx$$

$$= \int_{-1}^{3}(-x^2-3x+1-x^2+7x+5)dx$$

$$= \int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}$$

$$= (-18+18+18)-\left(\frac{2}{3}+2-6\right) = \frac{64}{3} \Rightarrow$$

$S = 21\frac{1}{3}$ (واحد سطح)

تبصرهٔ ۴. هرگاه سطح محصور بین یک منحنی و محور عرضها و دو خط $y=a$ و $y=b$ را بخواهیم محاسبه کنیم، باید رابطهٔ $x=g(y)$ را مشخص سازیم و سپس مانند محاسبهٔ سطح محصور بین منحنی، به معادلهٔ $y=f(x)$ و محور xها و دو خط $x=a$ و $x=b$ عمل کنیم.

مثال: سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y^2-5y-x+4=0$ و محور عرضها و دو خط $y=2$ و $y=3$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا عرضهای نقاط تلاقی را به دست می‌آوریم:

$x=0:\ y^2-5y+4=0 \Rightarrow y=1, y=4$

(عرضهای نقاط تقاطع)

$$\Rightarrow ۱<۲<۳<۴$$

سطح مورد نظر در یک طرف محور عرضها است ؛ بنابراین :

$$y^۲-۵y-x+۴=۰ \Rightarrow x=y^۲-۵y+۴$$

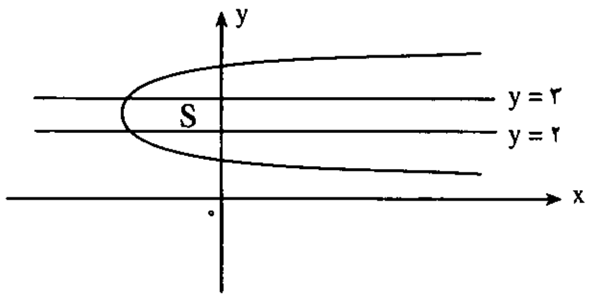
$$S=\left|\int_۲^۳ x\,dy\right|=\left|\int_۲^۳ (y^۲-۵y+۴)dy\right|$$

$$=\left|\left[\frac{۱}{۳}y^۳-\frac{۵}{۲}y^۲+۴y\right]_۲^۳\right|$$

$$=\left|\left(\frac{۲۷}{۳}-\frac{۴۵}{۲}+۱۲\right)-\left(\frac{۸}{۳}-\frac{۲۰}{۲}+۸\right)\right|$$

$$=\left|\frac{-۱۳}{۶}\right|=\frac{۱۳}{۶}=۲\frac{۱}{۶}$$

$S=۲\frac{۱}{۶}$ (واحد سطح)



مثال: اندازهٔ سطح محصور بین دو منحنی به معادلات $۲y^۲-۴px=۰$ و $۳x^۲-۶py=۰$ برابر ۲۷ است، $|p|$ برابر چیست؟

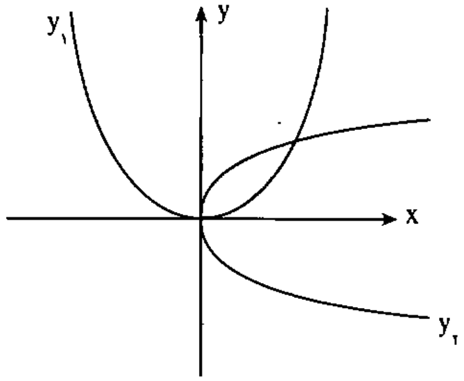
حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد دو منحنی را به‌دست می‌آوریم :

$$\begin{cases}۲y^۲-۴px=۰\\ ۳x^۲-۶py=۰\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y^۲=۲px\\ x^۲=۲py\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}y^۲=۲px\\ y=\dfrac{x^۲}{۲p}\end{cases} \Rightarrow \left(\frac{x^۲}{۲p}\right)^۲=۲px \Rightarrow x^۴-۸p^۳x=۰$$

$$\Rightarrow x(x^۳-۸p^۳)=۰ \Rightarrow x=۰,$$

$x=۲p$ (طولهای نقاط تقاطع)



همچنین :

$$y_۱=\frac{x^۲}{۲p}\ ,\ \ y_۲=\sqrt{۲px}$$

بنابراین :

$$S=\int_۰^{۲p}(y_۲-y_۱)dx=\int_۰^{۲p}\left(\sqrt{۲px}-\frac{x^۲}{۲p}\right)dx$$

$$=\int_۰^{۲p}\left(\sqrt{۲p}\,x^{\frac{۱}{۲}}-\frac{۱}{۲p}x^۲\right)dx=\left[\frac{۲\sqrt{۲p}}{۳}x^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{۶p}x^۳\right]_۰^{۲p}$$

$$=\left(\frac{۲\sqrt{۲p}}{۳}(۲p)^{\frac{۳}{۲}}-\frac{۱}{۶p}(۲p)^۳\right)=\frac{۲(۲p)^۲}{۳}-\frac{(۲p)^۲}{۳}$$

$$=\frac{(۲p)^۲}{۳}$$

پس :

$$S=\frac{(۲p)^۲}{۳}=۲۷ \Rightarrow (۲p)^۲=۸۱$$

$$\Rightarrow |۲p|=۹ \Rightarrow |p|=\frac{۹}{۲}$$

تمرین: تابع با ضابطهٔ $y_۱=f(x)=۱۳x+\dfrac{۷۶}{(x+۳)^۲}$ مفروض است. سطح محصور بین منحنی تابع f و مجانب مایل (غیرموازی با محورها) آن را از خط $x=-۲$ تا خط $x=k>-۲$ بیابید. همچنین مقدار $\lim_{k\to\infty}S$ را نیز حساب کنید.

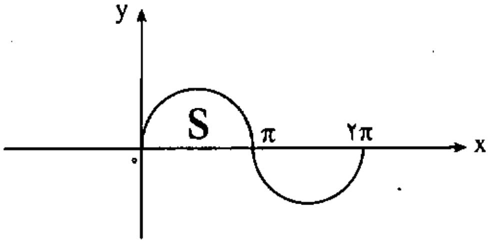
(راهنمایی : معادلهٔ مجانب مایل منحنی $y_۲ = ۱۳x$ است. پس :

$$(S = \left|\int_{-۲}^{k} (y_۲ - y_۱)dx\right|$$

مثال: سطح محصور بین یکی از طاقهای منحنی به معادلهٔ $y = \sin x$ و محور xها را محاسبه کنید.

حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی با محور xها را به‌دست می‌آوریم :

$$\begin{cases} y = \sin x \\ y = ۰ \end{cases} \Rightarrow \sin x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ , \ \pi \ , \ ۲\pi \ , \ \ldots$$



$$S = \int_۰^{\pi} y dx = \int_۰^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_۰^{\pi}$$

$$= (۱+۱) = ۲ \Rightarrow S = ۲$$ (واحد سطح)

مثال: تمام سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y = x^۳$ و خطهای $۲y - ۴x = ۰$ و $۷y - ۷x = ۰$ را محاسبه کنید.

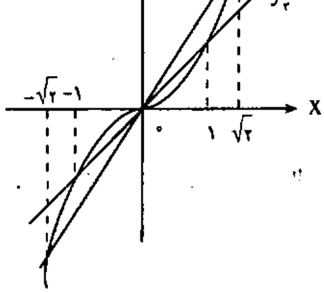
حل: ابتدا طولهای نقاط برخورد منحنی $y_۱ = x^۳$ را با خطهای $۲y - ۴x = ۰$ و $۷y - ۷x = ۰$ یا $y_۲ = ۲x$ و $y_۳ = x$ را به‌دست می‌آوریم :

$$\begin{cases} y_۱ = x^۳ \\ y_۲ = ۲x \end{cases} \Rightarrow x^۳ = ۲x \Rightarrow x(x^۲ - ۲) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \ , \ x = \pm\sqrt{۲}$$

$$\begin{cases} y_۱ = x^۳ \\ y_۳ = x \end{cases} \Rightarrow x^۳ = x \Rightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰ \ , \ x = \pm۱$$



با توجه به قرینه بودن دو قسمت سطح واقع در ناحیهٔ اوّل و سوّم (سطحهای سایه‌خورده)، کافی است سطح واقع در ناحیهٔ اوّل را محاسبه کنیم و حاصل را دو برابر کنیم :

$$S_۱ = \int_۰^{\sqrt{۲}} (y_۲ - y_۱) \, dx$$

$$= \int_۰^{\sqrt{۲}} (۲x - x^۳) \, dx = \left[x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴\right]_۰^{\sqrt{۲}}$$

$$= ۲ - \frac{۱}{۴} \times ۴ = ۱ \Rightarrow S_۱ = ۱$$

(سطح محصور به منحنی و خط $y_۲$)

$$S_۲ = \int_۰^۱ (y_۳ - y_۱)dx = \int_۰^۱ (x - x^۳)dx$$

$$= \left[\frac{۱}{۲}x^۲ - \frac{۱}{۴}x^۴\right]_۰^۱ = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow S_۲ = \frac{۱}{۴}$$ (سطح محصور به منحنی و خط $y_۳$)

$$\Rightarrow S = ۲(S_۱ - S_۲) = ۲(۱ - \frac{۱}{۴}) = \frac{۳}{۲}$$ (تمام سطح) (واحد سطح)



تفریح اندیشه ۱

در یک کنفرانس بین‌المللی ۱۵ نماینده از قاره‌های افریقا، آسیا، امریکا و اروپا جمع شده‌اند. تعداد نمایندگان هر قاره با هم متفاوت است، ولی هر قاره لااقل یک نماینده فرستاده است. امریکا و آسیا جمعاً ۶ نماینده، آسیا و اروپا جمعاً ۷ نماینده دارند.

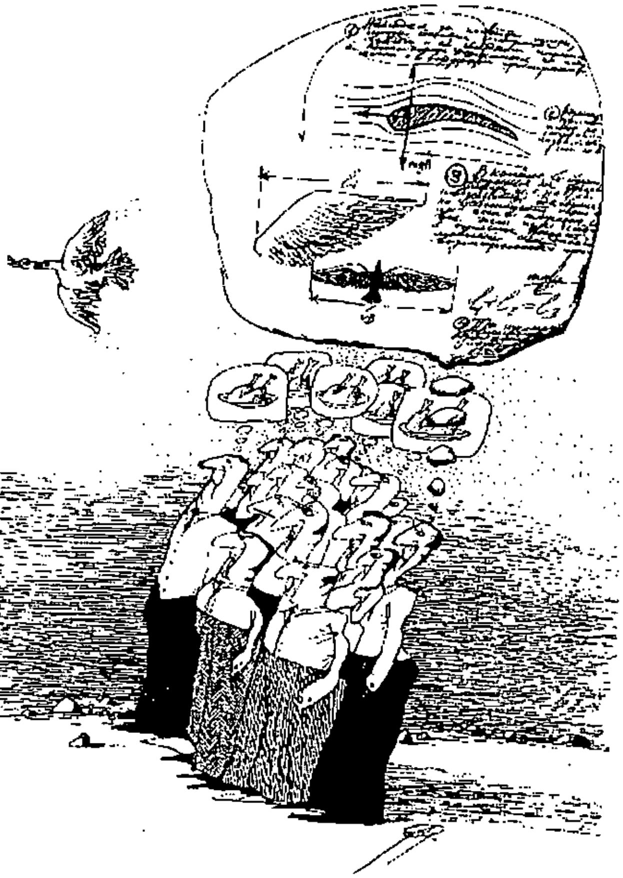
کدام قاره ۴ نماینده دارد؟

جواب در صفحهٔ ۸۸

نقش «شهود» در ریاضی دبیرستانی

● سیّدحسین سیّد موسوی

(ارائه شده در سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران)



کلمهٔ «شهود» که بارها در کتابهای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، از رازآمیزترین و مبهمترین مفاهیم ریاضیات است. در جاهای مختلف، کاربردهای کاملاً متفاوتی از آن دیده می‌شود.

۱ ـ کتابهای دبیرستان، «شهود» را دانشی غریزی یا احساس بدون استدلال می‌داند و معتقد است که با درک شهودی، درستی گزاره‌هایی را به‌طور سطحی می‌پذیریم و لذا ما را آماده می‌کند که به سوی اثبات واقعی آن خیز برداریم. این نوع برداشت از شهود، درجاهایی است که ما چند حالت خاص از یک حکم را ملاحظه می‌کنیم و بعد می‌گوییم «بنابراین انتظار می‌رود که براساس این تجربیات، فلان‌چیز درست باشد». در بسیاری از حکمهایی که با استقرای ریاضی سروکار داریم، چنین برداشتی از شهود داریم.

۲ ـ برخی کتابها، «شهود» را به معنای عدم دقّت می‌گیرند و در این صورت، گاه جانشین خطرناک و غیر مشروعی برای اثبات دقیق است. به‌طور مثال، در موقع بیان مفهوم حد، می‌گوییم $\lim_{x\to a} f(x) = l$ هرگاه وقتی x در نزدیکیهای a هست، $f(x)$ در نزدیکیهای l قرار دارد. در صورتی که مفهوم مجاورت و نزدیک بودن را به‌طور دقیق، تعریف نکرده‌ایم.

۳ ـ در بعضی کتابها، «شهود» را به معنای اتکا کردن به یک مدل فیزیکی، برای بیان اثبات یک مسأله یا یک قضیه می‌گیرند؛ یعنی ابتدا با نگاه یا لمس کردن یک مدل فیزیکی، خواص یک شیء را بفهمیم.

به عنوان مثال، شاید شما متوجه شده‌اید که دانش‌آموزان در تشخیص نقطهٔ تقاطع سه صفحه دچار اشتباه می‌شوند و اغلب باور کردن این مطلب که سه صفحه می‌توانند فقط در یک نقطه متقاطع باشند، برایشان مشکل است. در این صورت، نشان دادن گوشهٔ اتاق، در باوراندن این مطلب کمک می‌کند.

البته اتکا کردن به یک مدل فیزیکی، اشکالاتی دارد که حتماً شما با آن آشنا هستید. می‌دانید اشیای ریاضی، اشیای ذهنی

هستند. به‌طور مثال، صفحه، یک شیء، ایده‌آل و ذهنی است و هیچ شیء فیزیکی، نمی‌تواند در شرایط تعریف صفحه صدق کند؛ زیرا هر شیء صافی را که به عنوان صفحه اختیار کنیم، متناهی و سه بعدی است و نمی‌تواند به مثابهٔ یک صفحهٔ هندسی باشد. اما بعضی دانش‌آموزان فکر می‌کنند سطح یک میز یا یک صفحه، واقعاً یک صفحه به مفهوم ریاضی است؛ در این صورت، گاهی فکر می‌کنند امکان این که دو صفحه فقط در یک نقطه متقاطع باشند، وجود دارد.

۴ ـ شهود، پرتو غیرقابل بیانی است که افراد کمی به‌وسیلهٔ آن، بخشهایی از دانش ریاضی را ادراک می‌کنند، که دیگران فقط پس از سعی و تلاش فراوان، به آن دست می‌یابند. می‌دانید که بعضی از ریاضیدانان بر این عقیده‌اند که اشیای ریاضی، چیزهایی نیستند که ما آنها را می‌سازیم، بلکه چیزهایی هستند که وجود دارند و ما تنها آنها را کشف می‌کنیم؛ یعنی اشیای ریاضی، در دسترس همگان نیستند، بلکه باید در پشت دیواری در انتظار بمانند تا توسط ریاضیدانی که مورد رحمت خداوندی قرار گرفته و از شهود کافی برخوردار است، مشاهده شوند و یکی از آنها انتخاب شود.

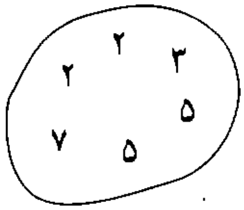
شهود، همان چیزی است که پیشینیان ما، که در جهل و تاریکی به‌سر می‌بردند، می‌توانستند قضایای درستی را با استدلالهای نادرست بیان کنند.

اکنون به بیان چند مثال می‌پردازیم که چگونه می‌توان مفاهیم و قضایای مجرّد را به‌طور شهودی، در دبیرستان توضیح داد.

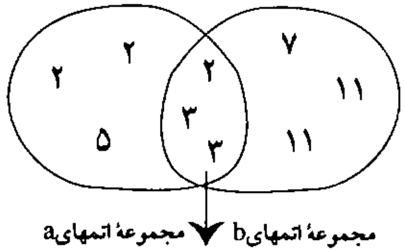
مثال ۱: همان‌طور که می‌دانید، نظریهٔ اعداد، یکی از مجرّدترین شاخه‌های ریاضی است، که سرتاسر آن، اثبات قضیه است. مهمترین خصوصیت نظریهٔ اعداد، این است که اشخاص آماتور را خیلی خوب جذب می‌کند؛ زیرا آنها با اطلاعات اندکی، ناگهان با مسائل بزرگ و حل نشدهٔ ریاضی مواجه می‌شوند و روح کاوشگر و ستیزه‌جوی آنان را تحریک می‌کند. با این اوصاف، نظریهٔ اعداد مقدماتی در دبیرستانها تدریس می‌شود و جز تعداد معدودی علاقه‌مند به ریاضیات، دانش‌آموزان با این درس، راحت کنار نمی‌آیند. بنابراین، به ذهنم رسید که چگونه می‌توان کاری کرد که آنان اثباتها را ببینند. از این ایده که ب.م.م و ک.م.م مانند اشتراک و اجتماع در مجموعه‌ها رفتار می‌کنند، استفاده کردم. برای این کار، ابتدا قضیهٔ اساسی حساب را که می‌گوید، هر عدد $n>1$ حاصلضرب چند عدد اوّل است، بیان می‌کنیم و عوامل اوّل عدد n را اتمهای آن می‌نامیم. به‌طور مثال:

$$2100 = 2\times2\times3\times5\times5\times7$$

و نموداری مانند نمودار «ون» برای مجموعهٔ اتمهای n درنظر می‌گیریم و در مورد $n = 2100$ داریم:



البته توجه دارید که این مجموعه، با مجموعهٔ معمولی تفاوت دارد. بعد، اجتماع و اشتراک مجموعهٔ اتمها را تقریباً مشابه اجتماع و اشتراک معمولی تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال:

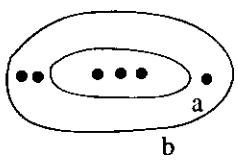


ب.م.م = اشتراک

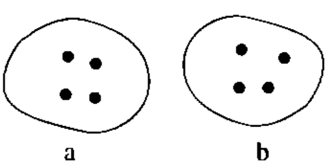
ک.م.م = اجتماع

حال، با این اوصاف، از نظر نموداری، می‌توان $a|b$ و $(a,b)=1$ را نشان داد.

$a|b$:



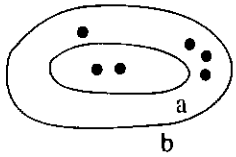
$(a,b)=1$:



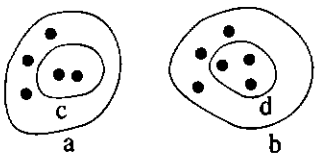
حال، بسیاری از گزاره‌های نظریهٔ اعداد را می‌توان با این

نمودارها نشان داد.

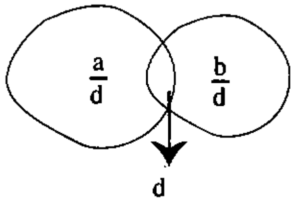
$$a|b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=a\\ [a,b]=b\end{cases}$$



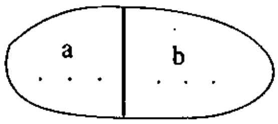
$$(a,b)=1\ ,\ c|a\ ,\ d|b \Rightarrow (c,d)=1$$



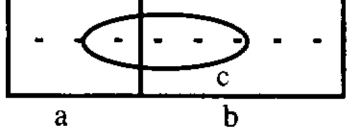
$$(a,b)=d \Rightarrow \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$$



$$c|ab\ ,\ (c,a)=1 \Rightarrow c|b$$

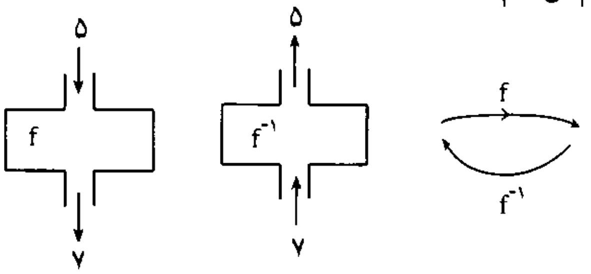


آوردن مثال برای حالتی که $(c,a)\neq 1$. با شکل زیر



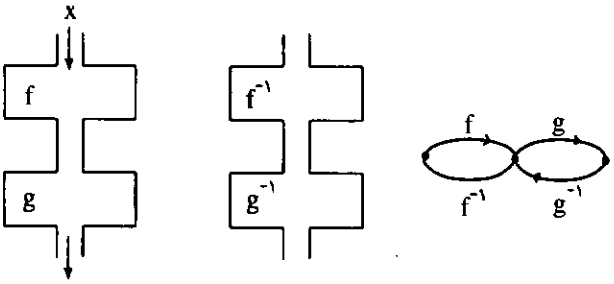
در این شکل $c|ab$، ولی $c\nmid a$ و $c\nmid b$

مثال ۲: هر تابع حقیقی f را می‌توان به منزلهٔ ماشینی تصور کرد که روی عددی عمل کرده و عددی را به دست می‌دهد. به عنوان مثال، عمل تابع $f(x)=x+2$، افزودن ۲ واحد به هر عدد است. با این تعبیر از تابع، وارون f تابعی است که عمل f را خنثی کند؛ (یعنی عکس عمل f را انجام دهد.) یعنی تابع f که به هر عددی ۲ واحد اضافه می‌کند، f^{-1}، ۲ واحد از هر عددی کم می‌کند. پس $f^{-1}(x)=x-2$. بعد نمودارهایی به صورت زیر رسم می‌کنیم:



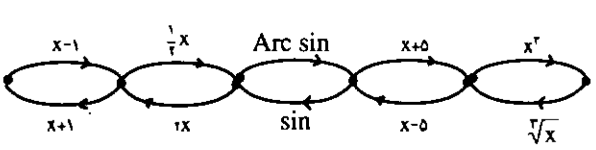
حالا فرض کنید می‌خواهیم قضیهٔ زیر را برای دانش‌آموزان بیان کنیم.

قضیه: اگر f و g وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ اثبات این قضیه را دانش‌آموز به سادگی می‌فهمد؛ ولی نمی‌داند چرا جای f و g در وارون عوض می‌شود؟ در این‌جا نمودارهایی به صورت زیر، علت را روشن می‌کند:



مسأله: وارون تابع $f(x)=(\operatorname{Arcsin}(\frac{x-1}{2})+5)^3$ را به دست آورید.

حل: ابتدا تابع f را به صورت ترکیب چند تابع می‌نویسیم:



پس: $f^{-1}(x)=2\sin(\sqrt[3]{x}-5)+1$

هدف ما از استفاده از شهود در تدریس ریاضیات، کنارگذاشتن استدلال دقیق نیست؛ بلکه معتقدیم در کنار استدلال و اثباتهای دقیق، سعی کنیم که دانش‌آموزان با مشاهدهٔ این نوع مثالها و

نمودارها توانایی رسوخ به باطن این فرمولها و اشیا را به دست آورند.

من گاهی که دانش‌آموزان مفهوم حد را بدرستی درک نمی‌کنند، می‌گویم نگران نباشید؛ زیرا آفرینندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، بدون آن که مفهوم حد را به روش ε و δ بدانند، این مفاهیم را به کار می‌برده‌اند؛ چرا که آنان درک شهودی و احساس ریاضی را در حدّ اعلای خود داشتند. آنان گاهی اثبات درستی از یک قضیه را می‌دانستند، بی‌آن که هیچ یک از این اصطلاحات منطقی و دقیق امروزی را بدانند.

بنابراین، دبیرستان باید سرزمین ریاضیات شهودی باشد؛ زیرا در ذهن دانش‌آموز، روانتر و آشناتر است. اگر می‌خواهید نسل سالم و شادابی در آینده داشته باشیم، یکی از راه‌های آن، تأکید روی درک و استدلال شهودی در کتابهای درسی است. ما با اتکای بیش از حد به اثباتهای دقیق، نسلهایی را از دست داده‌ایم.

روش صوری محض، از نظر روانی برای مبتدیان مناسب نیست. حتی ریاضیدانی که یک مقالهٔ بسیار فنی و پیچیده را می‌نویسد، هرگز مانند نوشته‌اش رسمی و منطقی فکر نمی‌کند.

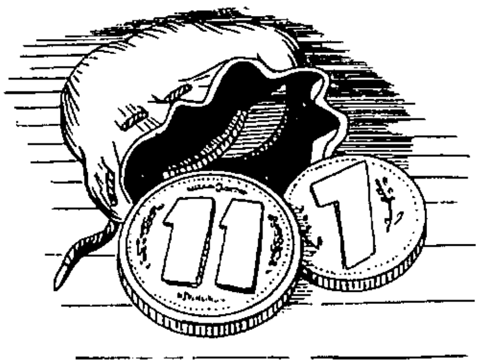
اکنون باید ریاضیاتی شهودی و قابل فهم، و آشنا و همسایه‌وار در دبیرستانها تدریس شود. ریاضیات باید درسی لذتبخش برای بچه‌های ما باشد، چرا باید مردمی که می‌توانند از ریاضیات استفاده و لذت ببرند، از آن متنفر باشند.

بیایید با همکاری همه استادان ریاضی دبیرستانها و دانشگاه‌هایی که مسؤولیت آماده کردن معلمان را دارند، نگذاریم نسل جوان ما که در دوران جوانی‌اش باید زندگی مفرّح و شادی‌آوری داشته باشد، با ارائهٔ ریاضیاتی خشک، صوری، زندگی برکام آنها تلخ شود.

بنابراین، همهٔ ما وظیفه داریم که سعی کنیم در دبیرستان ریاضیاتی دوست‌داشتنی‌تر، روانتر، دلپذیرتر و شهودی‌تر عرضه شود.



تفریح اندیشه ۲



کشوری تصمیم می‌گیرد بیش از دو نوع سکه نداشته باشد، یک سکهٔ ۷ واحدی و یک سکه ۱۱ واحدی، در این صورت بعضی پرداختها مانند ۱۵ واحد را نمی‌توان با این دو سکه انجام داد.

تعیین کنید بزرگترین مقداری که نمی‌توان با ترکیبی از این دو سکه پرداخت کرد، کدام است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب درصفحهٔ ۸۸

تابعهای صعودی و نزولی

(کاربرد قضیه مقدار میانگین)

(قسمت پنجم)

• محمد صادق عسگری

تعریف:

تابع f را روی بازهٔ I صعودی (اکیداً صعودی) نامند، اگر برای هر $x_1 , x_2 \in I$ که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \le f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2)\right)$. f را نزولی (اکیداً نزولی) نامند، اگر $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) \ge f(x_2)$ $\left(f(x_1) > f(x_2)\right)$.

تذکر: توابع صعودی یا نزولی را توابع یکنوا می‌نامند.

قضیه (رابطهٔ بین مشتق و توابع یکنوا)

فرض کنیم تابع حقیقی f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر باشد.

الف ـ اگر برای هر $a < x < b$، داشته باشیم $f'(x) > 0$، آن‌گاه f اکیداً صعودی است.

ب ـ اگر برای هر $a < x < b$، داشته باشیم $f'(x) < 0$، آن‌گاه f اکیداً نزولی است.

اثبات: الف ـ فرض کنیم $a < x_1 < x_2 < b$، در این صورت تابع f روی بازهٔ $[x_1,x_2]$ در شرایط قضیهٔ مقدارمیانگین، صدق می‌کند. پس عدد c وجود دارد؛ به‌طوری که

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \quad , \quad x_1 < c < x_2$$

چون $f'(c) > 0$ و $x_2 - x_1 > 0$، درنتیجه $f(x_2)-f(x_1) > 0$ یا $f(x_1) < f(x_2)$ ؛ یعنی f اکیداً صعودی است.

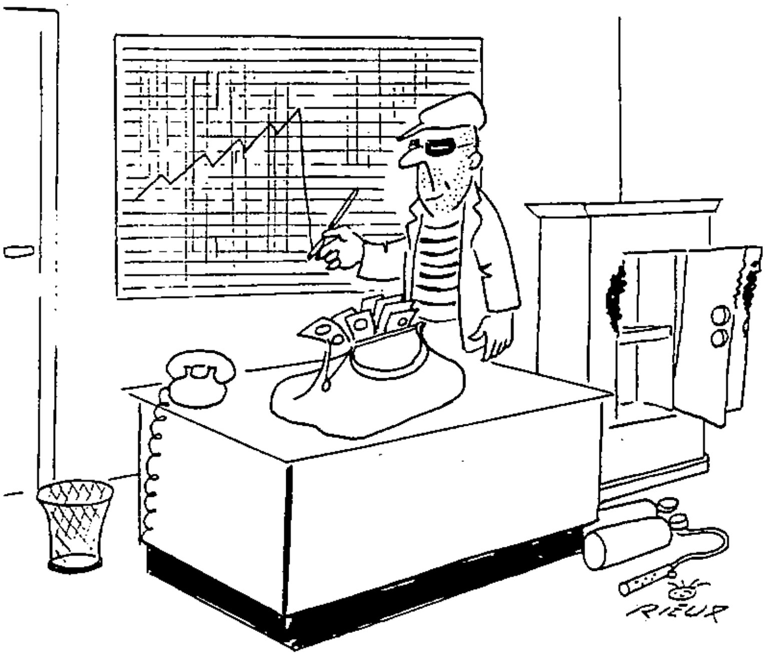
ب ـ به طور مشابه در قسمت (ب) نیز داریم:

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c')(x_2-x_1) \quad , \quad x_1 < c' < x_2$$

چون $f'(c') < 0$ و $x_2 - x_1 > 0$ درنتیجه $f(x_2)-f(x_1) < 0$ یا $f(x_1) > f(x_2)$ ؛ یعنی f اکیداً نزولی است.

نکته ۱: در قضیهٔ بالا اگر داشته باشیم $f'(x) \ge 0$ $\left(f'(x) \le 0\right)$، در این صورت، حکم قضیه وقتی برقرار است که تعداد ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ متناهی باشد.

نکته ۲: برای تعیین فواصل یکنوایی تابع حقیقی f، باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. جدول تعیین علامت مشتق را جدول تغییرات نمودار تابع f می‌گویند. همچنین نقطه‌ای به‌طول $x = c$ از دامنهٔ تابع f را نقطهٔ اکسترمم نسبی f می‌گویند، هرگاه مشتق f در این نقطه، تغییر علامت دهد.



x	D_f	C	
$f'(x)$	−	|	+
$f(x)$	↘	$f(c)$ Min	↗

x	D_f	C	
$f'(x)$	+	|	−
$f(x)$	↗	$f(c)$ Max	↘

مثال ۳۷: حدود a را بیابید ؛ به‌طوری که تابع $f(x)=\frac{ax-۲}{x+۲}$ همواره نزولی باشد.

حل: طبق قضیه، باید برای هر $x\neq -۲$ داشته باشیم $f'(x)<۰$ ، درنتیجه داریم :

$$f(x)=\frac{ax-۲}{x+۲}\Rightarrow f'(x)=\frac{۲a+۲}{(x+۲)^۲}<۰$$

$$\Rightarrow ۲a+۲<۰ \;\Rightarrow\; ۲a<-۲$$

$$\Rightarrow a<-۱$$

مثال ۳۸: جهت تغییرات و نقاط ماکزیمم و می‌نیمم نسبی توابع زیر را تعیین کنید.

الف ـ $f(x)=\sqrt[۳]{x^۳-۶x^۲}$

$$D_f=\mathbb{R}\;,\; f'(x)=\frac{۳x^۲-۱۲x}{۳\sqrt[۳]{(x^۳-۶x^۲)^۲}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x-۴}{\sqrt[۳]{x}\;\sqrt[۳]{(x-۶)^۲}}$$

x	−∞		۰		۴		۶		+∞
$f'(x)$		+	۰	−	|	+	۰	+	
$f(x)$	−∞	↗	۰ Max	↘	$-۲\sqrt[۳]{۴}$ Min	↗	۰	↗	+∞

x	y
±∞	±∞
۰	۰
۴	$-۲\sqrt[۳]{۴}$
۶	۰

ب ـ $f(x)=۲x-\sqrt{۱-x}$

$$D_f=]-\infty,۱] \quad f'(x)=۲+\frac{۱}{۲\sqrt{۱-x}}>۰$$

تابع همواره صعودی است.

x	−∞				۱
$f'(x)$		+	+	+	
$f(x)$	−∞	↗	↗	↗	۲

x	y
−∞	−∞
۱	۲

ج ـ $f(x)=\frac{۲x^۲}{x^۲-۸x+۱۲}$

$$D_f=\mathbb{R}-\{۲,۶\}$$

برای مشتق‌گیری از توابع کسری به‌صورت $y=\frac{ax^۲+bx+c}{a'x^۲+b'x+c'}$ ، می‌توان از فرمول

$$y'=\frac{\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}x^۲+۲\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b & c\\ b' & c'\end{vmatrix}}{(a'x^۲+b'x+c')^۲}$$

استفاده کرد. $\left(\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc\right)$ بنابراین داریم :

$$f'(x)=\frac{-۱۶x^۲+۴۸x}{(x^۲-۸x+۱۲)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow -۱۶x^۲+۴۸x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=۳\end{cases}$$

x	y
±∞	۲
۰	۰
۳	−۶

x	−∞		۰		۲		۳		۶		+∞
$f'(x)$		−	۰	+	||	+	۰	−	||	−	
$f(x)$	۲	↘	۰ Min	↗ +∞	||	−∞ ↗	−۶ Max	↘ −∞	||	+∞ ↘	۲

د ـ $f(x)=\frac{۱}{\sin x+\cos x}$ و $۰\le x\le ۲\pi$

$$D_f=[۰,۲\pi]-\left\{\frac{۳\pi}{۴},\frac{۷\pi}{۴}\right\}\;,\; f'(x)=\frac{-(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^۲}$$

$$f'(x)=۰\Rightarrow \cos x-\sin x=۰\Rightarrow \sin x=\cos x$$

$$\Rightarrow tgx=۱\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{۴}\\ x=\frac{۵\pi}{۴}\end{cases}$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
$f'(x)$		$-$		$+$	$\Vert$	$+$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$ Min	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ Max	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	1

x	y
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	1

مثال ۳۹: m را بیابید به‌طوری که برای هر x مثبت داشته باشیم، $mx-1+\frac{1}{x}\geq 0$.

حل: تابع مشتق‌پذیر $f(x)=mx-1+\frac{1}{x}$ را روی بازهٔ $]0,+\infty[$ در نظر می‌گیریم. بنا به فرض، باید داشته باشیم $y_{Min}=0$،

$$y=mx-1+\frac{1}{x}\Rightarrow y'=m-\frac{1}{x^2}$$

$$y'=0\Rightarrow m-\frac{1}{x^2}=0\Rightarrow x^2=\frac{1}{m}$$

اولاً $m>0$ ؛ زیرا اگر m منفی باشد، آن‌گاه f می‌نیمم نخواهد داشت.

$$x^2=\frac{1}{m}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{m}}$$

ثانیاً نقطهٔ $\left|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{m}}\\ 0\end{matrix}\right.$ نقطهٔ می‌نیمم f است. درنتیجه داریم :

$$f(\frac{1}{\sqrt{m}})=0\Rightarrow m\times\frac{1}{\sqrt{m}}-1+\sqrt{m}=0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{m}-1=0\Rightarrow\sqrt{m}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{4}$$

مثال ۴۰: حدود x را بیابید ؛ به‌طوری که تابع با ضابطهٔ $f(x)=x-\sqrt{x-1}$ صعودی باشد.

حل: باید داشته باشیم $f'(x)\geq 0$، درنتیجه داریم :

$$f(x)=x-\sqrt{x-1}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2\sqrt{x-1}}\leq 1\ \Rightarrow 2\sqrt{x-1}\geq 1$$

$$\Rightarrow\sqrt{x-1}\geq\frac{1}{2}\ \Rightarrow x-1\geq\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x\geq\frac{5}{4}$$

قضیه (رابطهٔ بین نامساویها و مشتق)

اگر تابعهای f و g روی بازه‌های $[a,b[$ پیوسته و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر باشند و $f(a)=g(a)$ و نیز برای هر x، $a<x<b$ ، $f'(x)<g'(x)$ ، آن‌گاه برای هر x، $a<x<b$ ، $f(x)<g(x)$.

اثبات: تابع $h(x)=f(x)-g(x)$ را روی بازهٔ $[a,b[$ در نظر می‌گیریم. h پیوسته است و روی بازهٔ $]a,b[$ مشتق‌پذیر است. و $h(a)=0$ و برای هر x، $a<x<b$ ، $h'(x)=f'(x)-g'(x)<0$. پس طبق قضیه، h تابعی اکیداً نزولی است. درنتیجه داریم :

$$a<x<b\Rightarrow h(a)>h(x)\Rightarrow 0>h(x)$$

$$\Rightarrow 0>f(x)-g(x)\Rightarrow f(x)<g(x)$$

مثال ۴۱: نشان دهید اگر $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ ، آن‌گاه برای هر x حقیقی مثبت ، $(1+x)^n>1+nx$.

حل: اگر $f(x)=1+nx$ و $g(x)=(1+x)^n$ اختیار شوند، در این صورت این توابع روی بازهٔ $[0,+\infty)$ پیوسته و روی $]0,+\infty[$ مشتق‌پذیرند و $f(0)=g(0)=1$ و $f'(x)=n$ و $g'(x)=n(1+x)^{n-1}$. همچنین برای هر $x>0$ داریم :

$$x>0\Rightarrow 1+x>1\Rightarrow(1+x)^{n-1}>1$$

$$\Rightarrow n<n(1+x)^{n-1}\Rightarrow f'(x)<g'(x)$$

پس طبق قضیه برای هر $x>0$ ، باید داشته باشیم $f(x)<g(x)$ یا $(x+1)^n>1+nx$.

مثال ۴۲: نشان دهید اگر $n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2$ ، آن‌گاه برای هر x حقیقی مثبت داریم : $\sqrt[n]{1+x^n}<1+x$.

حل: اگر $f(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$ و $g(x)=1+x$ اختیار شوند، در این صورت، این توابع روی بازهٔ $[0,+\infty[$ پیوسته و روی $]0,+\infty[$ مشتق‌پذیرند و $f(0)=g(0)=1$ و $f'(x)=\frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{(1+x^n)^{n-1}}}$ و

$g'(x) = ۱$. همچنین برای هر $x > ۰$ داریم:

$$x > ۰ \Rightarrow \frac{x^n}{۱+x^n} < ۱ \Rightarrow \left(\frac{x^n}{۱+x^n}\right)^{\frac{n-۱}{n}} < ۱$$

$$\Rightarrow \frac{x^{n-۱}}{\sqrt[n]{(۱+x^n)^{n-۱}}} < ۱ \Rightarrow f'(x) < g'(x)$$

پس طبق قضیه، برای هر $x > ۰$، باید داشته باشیم: $f(x) < g(x)$ یا $\sqrt[n]{۱+x^n} < ۱+x$.

مثال ۴۳: ثابت کنید برای هر $۰ < x < \pi$،

$x - \frac{x^۳}{۶} < \sin x < x$.

حل: ابتدا ثابت می‌کنیم برای هر $۰ < x < \pi$، $\sin x < x$. توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = x$ را روی بازهٔ $[۰, \pi]$ در نظر می‌گیریم. این توابع روی بازهٔ $[۰, \pi]$ پیوسته و روی بازهٔ $]۰, \pi[$ مشتق‌پذیرند و $f(۰) = g(۰) = ۰$ و $f'(x) = \cos x$ و $g'(x) = ۱$. چون برای هر $۰ < x < \pi$، داریم $\cos x < ۱$، درنتیجه $f'(x) < g'(x)$. پس طبق قضیه برای هر $۰ < x < \pi$، داریم $f(x) < g(x)$؛ یعنی $\sin x < x$.

در قسمت دوم نشان می‌دهیم برای هر $۰ < x < \pi$، $x - \frac{x^۳}{۶} < \sin x$ (*)، اگر $f(x) = x - \frac{x^۳}{۶}$ و $g(x) = \sin x$ اختیار شوند.

این تابعها روی بازهٔ $[۰, \pi]$ پیوسته و روی $]۰, \pi[$ مشتق‌پذیرند و $f(۰) = g(۰) = ۰$ و $f'(x) = ۱ - \frac{x^۲}{۲}$ و $g'(x) = \cos x$.

بنابر قسمت اوّل، برای هر $۰ < x < \pi$ داریم:

$$\sin\left(\frac{x}{۲}\right) < \frac{x}{۲} \Rightarrow \sin^۲\left(\frac{x}{۲}\right) < \frac{x^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱ - \cos x}{۲} < \frac{x^۲}{۴} \Rightarrow ۱ - \cos x < \frac{x^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۱ - \frac{x^۲}{۲} < \cos x \Rightarrow f'(x) < g'(x)$$

پس طبق قضیه، برای هر $۰ < x < \pi$، باید داشته باشیم $f(x) < g(x)$؛ یعنی $x - \frac{x^۳}{۶} < \sin x$ (**).

با توجه به روابط (*) و (**) برای هر x، $۰ < x < \pi$ داریم:

$$x - \frac{x^۳}{۶} < \sin x < x$$

مثال ۴۴: ثابت کنید: برای هر x، $۰ < x < \pi$،

$x^۲ - \frac{x^۴}{۶} - ۱ < x\sin x + \cos x < x^۲ + ۱$.

حل: بنابر مثال ۴۳ داریم:

$$\begin{cases} -۱ < \cos x < ۱ \\ x - \frac{x^۳}{۶} < \sin x < x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -۱ < \cos x < ۱ \\ x^۲ - \frac{x^۴}{۶} < x\sin x < x^۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۲ - \frac{x^۴}{۶} - ۱ < x\sin x + \cos x < x^۲ + ۱$$



اعمال جالب ریاضی

به این دو عمل ریاضی توجه کنید که توجه به آنها خالی از تعجب نیست.

$$۲۷۲ + ۱۶ = (۲+۷) \times ۲ \times ۱۶$$

$$\sqrt{۳۲۴} = ۳ \times (۲+۴)$$

• **هاردی** (Hardy) ریاضیدان انگلیسی، یکی از برجستگان ریاضی اوایل قرن بیستم است. هاردی می‌گوید : **رامانوجان** هندی نیم تحصیل کرده‌ای است، ولی به‌علت ارزش کارش، او را ریاضیدان می‌دانم.

رامانوجان در سال ۱۸۸۷ در **ارود** واقع در نزدیکی شهر کوچکی به‌نام «**کامباکونام**» از توابع ایالت «**مدرس**» در خانوادهٔ فقیری متولد شده است.

مدت نُه سال در مدرسه درس خواند. معلّمهای مدرسه او را متفاوت از دیگران به‌شمار می‌آوردند. از داستانهای عجیبی که دربارهٔ او نقل می‌کنند، یکی این است که، پس از آن‌که در مدرسه با مثلثات آشنا شد، دستور اولر در رابطهٔ بین سینوس و کسینوس، توابع مجهول‌القوّه را پیدا کرد.

نخستین کتاب ریاضی قابل توجّهی که در دسترس رامانوجان قرار گرفت، کتاب Carr تألیف «جورج شو بریج کار»، معلّم سابق در کمبریج است. «وی پس از تألیف اوّلین جلد از کتاب خود، وارد دانشگاه کمبریج جهت اخذ لیسانس شده است.» همین کتاب توانست نبوغ رامانوجان را بیدار کند، از آن‌جایی که کتاب دیگری در دسترس نداشت، شخصاً درصدد برآمد که تمام دستورهای موجود در کتاب را ثابت کند. در سال ۱۹۰۳ از مدرسه دیپلم گرفت و در ژانویهٔ سال بعد، وارد کالج دولتی **کامباکونام** شد و کمک هزینه‌ای هم دریافت می‌کرد. به‌دلیل اشتیاق فراوان به ریاضیات، در تمام کلاسهای درس، مشغول مطالعهٔ ریاضی بود، در نتیجه نتوانست در امتحانات خود توفیق بیابد.

در سال ۱۹۰۹ ازدواج کرد و به کمک دوستانش، توانست در سال ۱۹۱۲ به‌عنوان محاسب در دفتر کمپانی بندری مدرس به‌کار مشغول شود و سالیانه، حقوقی معادل ۳۰ لیر دریافت کند.

در سال ۱۹۱۱ اوّلین اثر او منتشر شد و یک‌سال بعد، قدرت غیرعادی او در ریاضی، مورد شناسایی قرار گرفت. در سال ۱۹۱۴ به کمک چند دانشمند، از جمله هاردی، به انگلستان رفت و سه سال تمام بدون وقفه در زمینهٔ ریاضی فعالیت کرد که نتایج آن، در آثار او منعکس است و بالأخره در سال ۱۹۲۰ با نهایت تأسّف در سنّ ۳۴ سالگی درگذشت.

گرچه مرگ زودرس او برای ریاضیات تأسّف‌بار است ؛ ولی تراژدی بزرگ زندگی او، این بود که مدت پنج سال عدم توفیق در امتحانات کالج، نبوغ بزرگ او را منحرف کرد.

هاردی می‌گوید، در همهٔ فرمولهای او، چیزی خیلی بیشتر از آنچه که در ابتدا به‌نظر می‌رسد، وجود دارد. در واقع، اگر ریشه‌های منطقی حتی ساده‌ترین دستورهای رامانوجان را جست‌وجو کنیم، می‌توان بستگیها و زیباییهای بسیار جالبی را پیدا کرد. جا دارد که این‌جا

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+\ldots}}}}}}} = 2$$

رامانوجان
Ramanujan

• احمد قندهاری

اشاره‌ای به یکی از دستورهای او بکنیم.

بسط عددهای طبیعی $n \in N$، رامانوجان :

$$n+1=\sqrt{(n+1)^2}=\sqrt{n^2+2n+1}=\sqrt{1+n(n+2)}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}=\sqrt{1+n\sqrt{n^2+4n+4}}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}}}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{(n+4)^2}}}}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)(n+5)}}}}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{(n+5)^2}}}}}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)(n+6)}}}}}$$

$$=\sqrt{1+n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+(n+4)\sqrt{1+\ldots}}}}}}$$

اگر $n=1 \Rightarrow 2=\sqrt{1+1\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}}$

اگر $n=2 \Rightarrow 3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots}}}}}$

اگر $n=3 \Rightarrow 4=\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+\ldots}}}}}$

نتایج جالبی از این بسطها به‌دست می‌آید که از حوصلهٔ این مقاله خارج است.

منابع

۱ـ تاریخ ریاضیدانان نامی اریک تمبل بل، ترجمهٔ حسن صفاری.

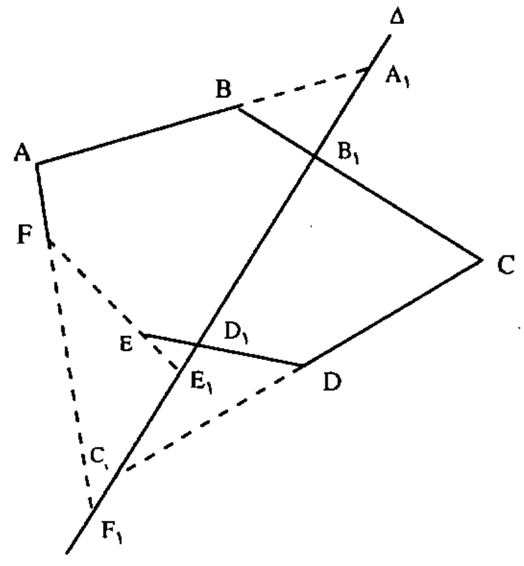
۲ـ آشنتی با ریاضیات نوشتهٔ پرویز شهریاری، خرداد و تیر ۵۷، شمارهٔ ۲.

مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۳۲

چندضلعی مسطح دلخواهی به عنوان مثال، شش ضلعی ABCDEF و قاطع Δ که ضلعهای AB، BC، CD، DE، EF و FA از این چندضلعی را بترتیب در نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1، E_1 و F_1 قطع می‌کند، در نظر می‌گیریم. ثابت کنید :

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}}\times\frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}}\times\frac{\overline{C_1D}}{\overline{C_1E}}\times\frac{\overline{D_1E}}{\overline{D_1F}}\times\frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}}=1$$

آیا عکس این قضیه درست است؟



درک شهودی

● بررسی و تنظیم: علیرضا عین‌اللهی (مدرس مراکز تربیت‌معلم)

شناخت در مورد فضا یا دنیای اطراف ما به دو طریق گسترش می‌یابد: ابتدا به واسطهٔ آنچه ما مشاهده می‌کنیم یا آنچه که احساسمان به ما می‌گوید. «پیاژه» به این مفهوم، به‌عنوان فضای ادراک حسی اشاره می‌کند؛ اما ذهن انسان مانند یک دوربین فیلمبرداری عمل نمی‌کند. به این معنا که ذهن تنها از آنچه چشمانمان می‌بیند، فیلمبرداری نمی‌کند؛ بلکه چنین داده‌های حسی را، که توسط دیدن یا لمس کردن به‌دست آورده است، باید به‌صورت ذهنی، بازسازی کرده یا نمایش دهد.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال (۱)

اگر در چند صد سال پیش، به شما می‌گفتند که «زمین گرد است» یا «زمین به دور خورشید در گردش است» یا «زمین دارای نیروی جاذبه است»، آیا با توجه به مشاهدات آن زمانتان، می‌توانستید درستی این جمله‌ها را باور کنید؟ چرا؟

مثال (۲)

فرض کنید به یک کودک سه ساله، با نشان دادن وسایل رنگی، رنگهای آبی، قرمز، سبز و زرد را یاد داده باشیم. به‌عنوان مثال، به او بگوییم که «این توپ آبی است»، «این میز زرد است»، «این کفش قرمز است» و... . حال اگر پس از مدتی، برای این کودک یک شلوار سبز بخریم و از او بپرسیم که «این شلوار چه رنگی است؟» او در پاسخ می‌گوید که سبز است؛ زیرا او با مشاهدهٔ شلوار و منطبق کردن رنگ آن با یکی از رنگهایی که قبلاً درک کرده است، به این واقعیت که «رنگ این شلوار سبز است» پی می‌برد.

مثال (۳)

جعبه‌ای بزرگ را تهیه کنید. قسمتی از دیوارهٔ جعبه را سوراخ کنید؛ به‌طوری که دست یک دانش‌آموز اوّل دبستان، براحتی از این سوراخ، وارد جعبه شود. بدون آن‌که دانش‌آموز ببیند، مجموعه‌ای از اشیایی که کودک با آنها آشنایی دارد، مانند توپ، شانه، قاشق، مداد، تراش و... را درون جعبه گذاشته و در آن را ببندید. اکنون از دانش‌آموز بخواهید که دستش را از سوراخ به داخل جعبه فرو برد و یکی از اشیا را بردارد، سپس نام آن شیء را بگوید و شما نیز می‌توانید با مشاهدهٔ درون جعبه، به درستی یا نادرستی گفتهٔ وی پی ببرید. به‌نظر شما دانش‌آموز فوق، می‌تواند درک درستی از شیئی که برداشته است، داشته باشد؟ چرا؟

شهود «Intuitive» مترادف با شواهد، جمع کلمهٔ شاهد به معنای دیدن و مشاهده کردن است؛ اما همان‌طورکه در ابتدای این بخش گفته شد، مقصود از درک شهودی، بازسازی ذهنی یا



نمایش ذهنی است که شخص می‌تواند توسط دیدن یا لمس کردن به‌دست آورد. پس وقتی که از درک شهودی خود استفاده می‌کنیم، هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان کامل در زمینهٔ درستی نتیجه‌گیریهای خود بحث کنیم. بنابراین، می‌توانیم بگوییم که درک شهودی، یک دانش فطری یا غریزی است که استدلال در آن نقشی ندارد.

در پاسخ به این سؤال که «مطالعه و استفاده از درک شهودی چه ضرورتی دارد؟» باید بگوییم که درک شهودی، به ما کمک می‌کند که مفاهیم علم ریاضی را بهتر بفهمیم.

همچنین درک شهودی می‌تواند جرقه‌ای برای اثبات قسمتهای مختلف یک مسأله باشد. به عبارت دیگر، هنگامی که یک شیء خاصی را لمس می‌کنیم، می‌توانیم درکی هر چند مختصر از آن شیء خاص داشته باشیم. اگرچه کافی نباشد؛ ولی می‌تواند برای شناختهای بعدی ما راهگشا باشد. امّا برای رسیدن به شناخت کامل، به ابزاری قویتر نیازمندیم که همان «استدلال» است. بنابراین، باید آگاه باشید که درک شهودی، تنها یک فعالیت ادراک حسی نیست؛ بلکه فعالیتهای ادراک حسی، نقطهٔ شروع می‌باشد و کافی نیست. برای نمونه:

مثال (٤)

اگر کودک سه یا چهار ساله‌ای بتواند از بین چند شکل هندسی، شکل یک مثلث را تشخیص داده و نشان بدهد، ابداً این اطمینان را ایجاد نمی‌کند که او مفهوم یک مثلث را به‌صورت ذهنی نمایش داده و آن را درک کرده باشد.

مثال (۵)

اگر کودک سه یا چهار ساله‌ای بتواند مثلاً عدد (۵) را روی کاغذ بنویسد، این به آن معنا نیست که وی مفهوم عدد (۵) را درک کرده است. به‌نظر شما چه موقع می‌توانیم دریابیم که کودک دارای درک کاملی از عدد (۵) شده است؟

مثال (۶)

همان‌طور که مولوی می‌گوید:

آن یکی را کف به خرطوم اوفتاد
گفت همچون ناودان است این نهاد
آن یکی را دست بر گوشش رسید
آن بروچون بادبیزن شد پدید

پس آنچه که از فیل در ذهن اشخاص نمایش داده شده، درک دقیقی نیست و برای رسیدن به این درک دقیق، نیاز به روشن کردن شمع است، که شمع روشن، همان استدلال است که باید خالی از ابهام باشد.

اکنون سعی کنید با پاسخ دادن به سؤالهای زیر، این بخش را به‌طور دقیق مرور کنید:

۱ـ۱ـ سؤالهای دوره ای

۱ـ شناخت فضای فیزیکی ما به چند طریق گسترش می‌یابد؟

۲ـ پیاژه به مشاهدات و احساسات ما از فضای فیزیکی چه عنوانی را نسبت می‌دهد؟

۳ـ آیا ذهن ما فقط از آنچه که چشمانمان می‌بیند، فیلمبرداری می‌کند؟

۴ـ اگر چند صد سال پیش به شما می‌گفتند که «انسان می‌تواند به کرهٔ ماه سفر کند.» آیا شما آن را می‌پذیرفتید؟ چرا؟

۵ـ عددی را انتخاب کنید، آن را دو برابر کنید، به حاصل، عدد چهار را بیفزایید، نتیجه را بر دو تقسیم کنید و عدد انتخابیتان را از حاصل نهایی کم کنید؛ چه عددی به‌دست آورده‌اید؟ این اعمال را با انتخاب اعداد دیگر، دوباره تکرار کنید. از مشاهدات خود، چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶ـ آیا شهود، همان درک شهودی است؟

۷ـ هرگاه که از ادراک شهودی خود استفاده می‌کنیم، آیا می‌توانیم اطمینان کامل در زمینهٔ درستی نتیجه‌گیریهای خود داشته باشیم؟

۸ـ آیا جملهٔ زیر درست است؟

«درک شهودی، یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال است.»

۹ـ آیا مطالعه و استفاده از ادراک شهودی لازم است؟ چرا؟

۱۰ـ معلم پسرم محمدحسین، از او خواسته است که مسألهٔ ریاضی زیر را حل کند:

«کودکی از درخت منزلشان هشت سیب چید، تا آن را برای معلم و دوستانش ببرد. در بین راه، سبد سیبها از دست کودک افتاد. سه عدد از سیبها، قل خوردند و داخل درّه افتادند. حال این کودک چند سیب دارد؟»

محمدحسین، که اعداد ۱، ۲،... و ۹ را می‌شناسد برای حلّ این مسأله، از یخچال هشت سیب برمی‌دارد. سه عدد از سیبها را کنار می‌گذارد و با خوشحالی جواب مسأله را اعلام می‌کند.

الف) آیا مثال فوق، می‌تواند بیانگر جملهٔ زیر باشد؟

«درک شهودی به ما کمک می‌کند که مفاهیم علم ریاضی را

بهتر بفهمیم.»

ب) آیا محمدحسین در حلّ این مسألهٔ ریاضی، از درک شهودی استفاده کرده است؟

۱۱ـ من از دوستم خواستم که ثابت کند:

«اگر دو واحد از دو برابر یک عدد دلخواه کم کنیم و حاصل را بر دو تقسیم کنیم و سپس یک واحد به نتیجه اضافه کنیم، باز همان عدد به‌دست می‌آید.»

دوست من ابتدا با انتخاب چند عدد به‌صورت زیر عمل کرد:

$۲\times۹-۲=۱۶$ و $۱۶\div۲=۸$ و $۸+۱=(۹)$

$۲\times(۵)-۲=۸$ و $۸\div۲=۴$ و $۴+۱=(۵)$ و ...

سپس او گفت که این مسأله درست است و... .

الف) آیا دوست من، از درک شهودی برای پاسخ خود استفاده کرده است؟

ب) آیا با فعالیتهای ادراکی بالا، که دوست من انجام داده است، می‌توانیم بگوییم که مسأله اثبات شده است؟ چرا؟

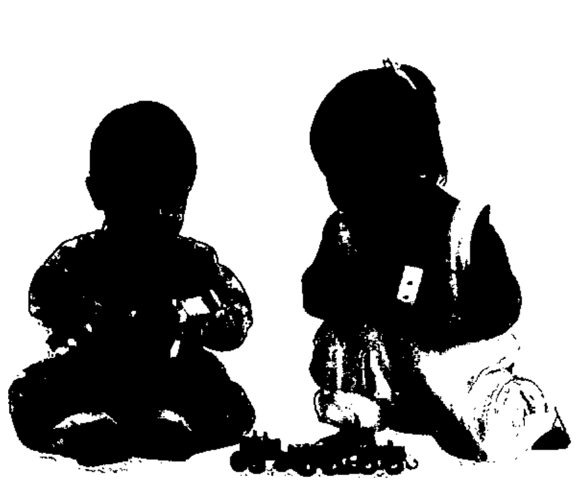
ج) آیا مثال فوق، می‌تواند بیانگر جملهٔ زیر باشد؟

«درک شهودی تنها یک فعالیت ادراک حسی نیست؛ بلکه، فعالیتهای ادراک حسی، نقطهٔ شروع حلّ مسائل می‌باشند و کافی نیستند.»

منابع مورد استفاده

۱ـ ریچارد کوپلند: فعالیتهای تشخیصی و یادگیری در ریاضیات کودکان، ترجمهٔ مصطفی کریمی، انتشارات آموزش، ۱۳۶۳.

۲ـ کتب جبر و احتمال و ریاضیات پایهٔ دورهٔ متوسطه.



حل مسأله مسابقه ای برهان ۳۰

طبق قضیهٔ تقسیم با تقسیم n بر m داریم:

$$\exists q,r\in \mathbb{Z} \mid n=mq+r\ ,\ ۰\le r<m$$

واضح است که $m\le n$ است؛ زیرا در غیر این صورت خواهیم داشت:

$$m>n\ ,\ b>۱\rightarrow b^m>b^n\rightarrow b^m-۱>b^n-۱$$

که با فرض، یعنی $b^m-۱ \mid b^n-۱$ تناقض دارد.

حال با توجه به فرض و این‌که $n=mq+r$، داریم:

$$b^n-۱=b^{mq+r}-۱=\underline{b^{mq}.b^r}+b^r-\underline{b^r}-۱$$

$$=(b^{mq}b^r-b^r)+b^r-۱$$

$$=b^r(b^{mq}-۱)+b^r-۱=b^r((b^m)^q-۱)+b^r-۱$$

$$=b^r(b^m-۱)\left[\underbrace{(b^m)^{q-۱}+(b^m)^{q-۲}+\ldots+۱}_{F(b)}\right]+b^r-۱$$

$$=(b^m-۱)\left[b^rF(b)\right]+b^r-۱$$

و چون طبق فرض $b^n-۱$ بر $b^m-۱$ بخش‌پذیر است، باید باقی‌مانده صفر باشد.

$$\Rightarrow b^r-۱=۰\rightarrow b^r=۱\Rightarrow \boxed{r=۰}$$

$$\Rightarrow n=mq\Rightarrow \boxed{m\mid n}$$

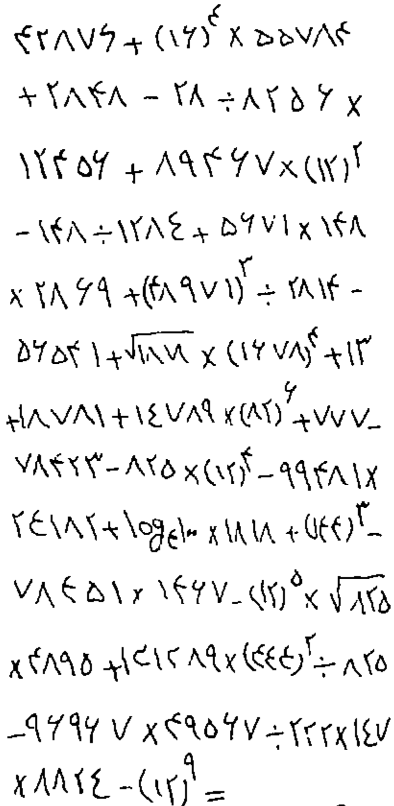
حل از آقای عادل طاهرخانی (تاکستان)

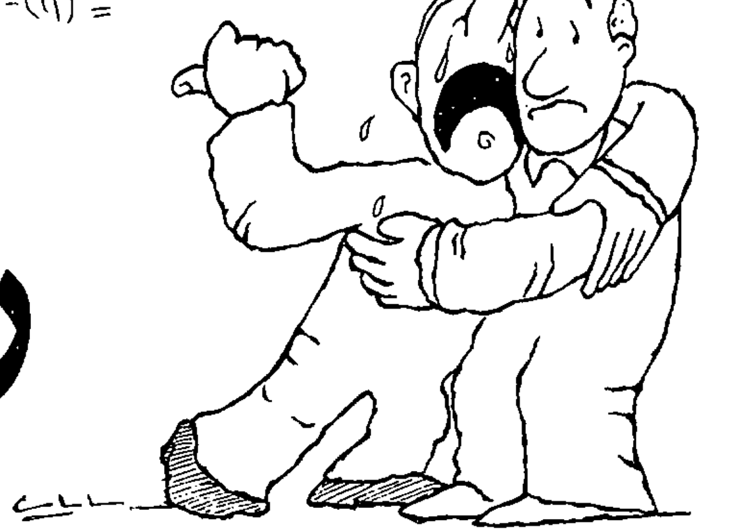
معماهایی با ماهیت ریاضی

(ادامهٔ بحث معادله‌های سیّاله)

● هوشنگ شرقی

قسمت چهارم





در شمارهٔ پیش، معادله‌های سیّالهٔ درجهٔ اول و معماهایی بر اساس آن بررسی شد. اینک دنبالهٔ بحث :

ب ـ سایر معادله‌های سیّاله : در بند الف این قسمت، معماهایی که پاسخ آنها با حلّ معادله‌های سیّالهٔ درجهٔ اول به دست می‌آید، بررسی شد. اینک به انواع دیگری از معادله‌های سیّاله و معماهایی در ارتباط با آنها می‌پردازیم.

ـ معادلهٔ سیّالهٔ هموگرافیک : فرم کلی این معادله، به صورت $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ می‌باشد. همان‌طور که می‌دانید، نمودار این تابع، با دامنهٔ تعریف اعداد حقیقی یک هذلولی می‌باشد ؛ در این جا منظور ما به دست آوردن مختصات نقاطی از این هذلولی است که مختصات آنها با عدد صحیح (در بیشتر معماها با اعداد طبیعی) بیان شده باشد. با یک مثال ساده شروع کنیم.

مثال: تعداد نقاط با مختصات صحیح روی منحنی تابع با ضابطهٔ $y = \frac{۳}{x-۱}$ را به دست آورید.

حل: روشن است برای آن که y عدد صحیح باشد، لازم است که $۳|x-۱$ ، یعنی ۳ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد. اما تنها مقسوم‌علیه‌های ۳، عددهای ±۱ و ±۳ می‌باشند و بنابراین معادله،

چهار جواب دارد که به صورت زیر به‌دست می‌آیند :

$x-۱=۱ \Rightarrow x=۲ \quad , \quad y=۳$

$x-۱=-۱ \Rightarrow x=۰ \quad , \quad y=-۳$

$x-۱=۳ \Rightarrow x=۴ \quad , \quad y=۱$

$x-۱=-۳ \Rightarrow x=-۲ \quad , \quad y=-۱$

یعنی چهار نقطهٔ $A(۲,۳)$ ، $B(۰,-۳)$ ، $C(۴,۱)$ و $D(-۲,-۱)$ با مختصات صحیح، روی منحنی $y=\frac{۳}{x-۱}$ وجود دارد. در حالت کلی، برای حلّ معادلهٔ $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ ابتدا دوطرف معادله را در C ضرب نموده و آن‌گاه، صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم و به کمک خارج‌قسمت و باقیمانده، کسر را به صورت تفکیک شده می‌نویسیم و جوابهای صحیح آن را به دست می‌آوریم. به‌مثال زیر توجه کنید :

مثال: حلّ معادلهٔ سیّالهٔ $y=\frac{۲x-۳}{۳x-۲}$: دوطرف تساوی را در ۳ ضرب می‌کنیم :

$$۳y=\frac{۶x-۹}{۳x-۲}=\frac{۲(۳x-۲)-۵}{۳x-۲}=۲-\frac{۵}{۳x-۲}$$

(از تقسیم $۶x-۹$ بر $۳x-۲$ ، خارج قسمت ۲ و باقیمانده ۵- به‌دست می‌آید.)

از برابری $۳y=۲-\frac{۵}{۳x-۲}$ بر می‌آید که $(۳x-۲)|۵$ وتنهامقسوم‌علیه‌های عدد ۵، ۱± و ۵± می‌باشند و بنابراین، حالتهای زیر بررسی می‌شوند :

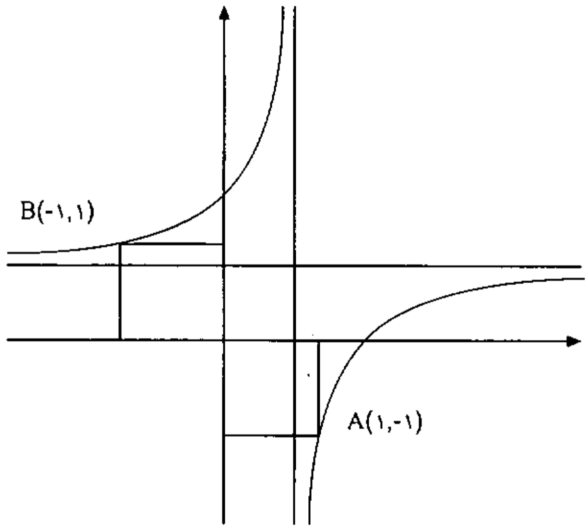
$۳x-۲=۱ \Rightarrow x=۱ \quad , \quad y=-۱$

$۳x-۲=-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۳}$ غیر قابل قبول

$۳x-۲=۵ \Rightarrow x=\frac{۷}{۳}$ غیر قابل قبول

$۳x-۲=-۵ \Rightarrow x=-۱ \quad , \quad y=۱$

یعنی تنها دو نقطهٔ $A(۱,-۱)$ و $B(-۱,۱)$ با مختصات صحیح روی منحنی تابع $y=\frac{۲x-۳}{۳x-۲}$ وجود دارد که در شکل نیز مشخص شده‌اند.



مثال: تعداد نقاط با مختصات صحیح را روی منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^۲+x-۱}{x-۲}$ را بیابید.

حل:

صورت این کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنیم :

$$\begin{array}{l|l} x^۲+x-۱ & x-۲ \\ \cline{2-2} -x^۲\pm۲x & x+۳ \\ \hline ۳x-۱ & \\ -۳x\pm۶ & \\ \hline ۵ & \end{array}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$y=\frac{x^۲+x-۱}{x-۲}=x+۳+\frac{۵}{x-۲}$$

و چون x و y اعداد صحیح می‌باشند، لازم است که $(x-۲)|۵$ و لذا تنها یکی از حالتهای زیر می‌تواند وجود داشته باشد :

$x-۲=۱ \Rightarrow x=۳ \quad , \quad y=۱۱$

$x-۲=-۱ \Rightarrow x=۱ \quad , \quad y=-۱$

$x-۲=۵ \Rightarrow x=۷ \quad , \quad y=۱۱$

$x-۲=-۵ \Rightarrow x=-۳ \quad , \quad y=۱$

و بنابراین چهار نقطهٔ $A(۳,۱۱)$ ، $B(۱,-۱)$ ، $C(۷,۱۱)$ و $D(-۳,۱)$ روی منحنی تابع $y=\frac{x^۲+x-۱}{x-۲}$ با مختصات صحیح

وجود دارند و جالب است که این چهار نقطه رئوس یک متوازی‌الاضلاع نیز هستند که AB و CD قطرهای آن هستند.

اینک به مثال کاربردی زیر توجه کنید :

مثال: چند مستطیل وجود دارد که طولهای اضلاع آنها، اعداد طبیعی بوده و عدد مساحت آن، ۲۰ واحد از عدد محیطشان بیشتر باشد؟

حل: اگر طول و عرض این مستطیلها را x و y فرض کنیم، بر اساس فرض مسأله می‌نویسیم :

$$xy = ۲۰ + ۲x + ۲y$$

و اگر از این برابری، y را برحسب x به‌دست آوریم، به تساوی زیر می‌رسیم :

$$y = \frac{۲x + ۲۰}{x - ۲}$$

که یک معادلهٔ سیّالهٔ هموگرافیک می‌باشد و با روش حلّ مسائل قبل، به صورت زیر حل می‌شود :

$$y = \frac{۲(x - ۲) + ۲۴}{x - ۲} = ۲ + \frac{۲۴}{x - ۲} \Rightarrow x - ۲ | ۲۴$$

مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۴ عبارت است از : ۱±، ۲±، ۳±، ۴±، ۶±، ۱۲± و ۲۴± و با توجه به این که x و y اعدادی طبیعی هستند، تنها جوابهای قابل قبول، جوابهای زیر می‌باشند :

$$\begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲۶ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۴ \\ y = ۱۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۵ \\ y = ۱۰ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۸ \end{cases}$$

یعنی چهار جواب متمایز برای مسأله وجود دارد.

معادله‌های سیّالهٔ دومجذوری

معادله‌های سیّاله به فرم $x^۲ \pm y^۲ = k$ را که در آن k عددی حقیقی می‌باشد، معادلهٔ سیّالهٔ دومجذوری می‌نامیم. هرگاه علامت بین $x^۲$ و $y^۲$، منفی باشد، حلّ این معادله بسادگی و با تجزیهٔ $x^۲ - y^۲$ به حاصلضرب $(x - y)(x + y)$ حل می‌شود. به یک مثال توجه کنید :

مثال: پاسخهای صحیح معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۸$ را به دست آورید.

حل: می‌نویسیم : $(x - y)(x + y) = ۸$

چون x و y عددهای صحیح هستند، بنابراین x+y و x − y نیز صحیح می‌باشند و تنها جفت عددهای صحیح که حاصلضرب آنها مساوی ۸ می‌باشد، عبارت است از (۲,۴)، (۴,۲) ، (۲-,۴-)، (۴-,۲-)، (۱,۸)، (۸,۱)، (۱-,۸-) و (۸-,۱-)، از طرفی اگر $x + y = a$ و $x - y = b$ فرض شوند، واضح است که $a + b = ۲x$ ، یعنی a+b باید زوج باشد ؛ پس فقط چهار زوج اوّل، قابل قبول می‌باشند که به دستگاه‌های معادله‌های زیر می‌انجامند :

$$\begin{cases} x + y = ۴ \\ x - y = ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = ۲ \\ x - y = ۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -۴ \\ x - y = -۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = -۲ \\ x - y = -۴ \end{cases}$$

از حلّ این دستگاه‌های به زوجهای (۳,۱)، (۳,۱-)، (۱-,۳-) و (۳-,۱) برای (x,y) می‌رسیم که تنها جوابهای قابل قبول برای معادله در مجموعهٔ اعداد صحیح می‌باشند.

مثال: پاسخهای صحیح معادلهٔ زیر را به دست آورید :

$$x^۲ - y^۲ + ۴x - ۶y + ۲ = ۰$$

حل: به ترتیب زیر، عمل می‌کنیم :

$$(x^۲ + ۴x) - (y^۲ + ۶y) + ۲ = ۰$$

و با مربع نمودن عبارتهای داخل پرانتزها به دست می‌آید :

$$(x + ۲)^۲ - ۴ - (y + ۳)^۲ + ۹ + ۲ = ۰$$

$$(x + ۲)^۲ - (y + ۳)^۲ = -۷$$

$$(x + ۲ - y - ۳)(x + ۲ + y + ۳) = -۷$$

$$(x - y - ۱)(x + y + ۵) = -۷$$

اکنون با توجه به این‌که تنها جفت عددهایی که حاصلضرب آنها ۷- شود، (۱,۷-)، (۷-,۱)، (۷,۱-) و (۱-,۷) می‌باشند، به دستگاه‌های معادله‌های زیر می‌رسیم :

$$\begin{cases} x - y - ۱ = -۷ \\ x + y + ۵ = ۱ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - ۱ = ۱ \\ x + y + ۵ = -۷ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y - ۱ = -۱ \\ x + y + ۵ = ۷ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y - ۱ = ۷ \\ x + y + ۵ = -۱ \end{cases}$$

که معادل با دستگاه‌های زیر می‌باشند :

$$\begin{cases} x - y = -۶ \\ x + y = -۴ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = ۲ \\ x + y = -۱۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = ۰ \\ x + y = ۲ \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = ۸ \\ x + y = -۶ \end{cases}$$

که از حلّ آنها جوابهای زیر برای x و y به دست می‌آیند :

$$\begin{cases} x = -۱ \\ y = -۳ \end{cases} \quad \begin{cases} x = -۵ \\ y = -۷ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۱ \\ y = ۱ \end{cases} \quad \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۷ \end{cases}$$

اینک به حلّ یک معمّا می‌پردازیم :

معمّا: چند مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع به طول درست (طبیعی) داریم که طول یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ آنها مساوی ۵ سانتیمتر باشد؟

حل: اگر طول وتر این مثلث را a و طولهای اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن را b و c فرض کنیم، با توجه به قضیهٔ فیثاغورس، می‌توان نوشت : $a^۲ = b^۲ + c^۲$

می‌توان فرض کرد $c = ۵$ و در نتیجه :

$$a^۲ = b^۲ + ۲۵ \Rightarrow a^۲ - b^۲ = ۲۵ \Rightarrow (a-b)(a+b) = ۲۵$$

اکنون می‌توان یکی از حالتهای زیر را درنظر گرفت :

$$\begin{cases} a+b=۵ \\ a-b=۵ \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-۵ \\ a-b=-۵ \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=۲۵ \\ a-b=۱ \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-۲۵ \\ a-b=-۱ \end{cases}$$

از حلّ این دستگاه‌ها، جوابهای صحیح زیر برای a و b به دست می‌آیند :

$$\begin{cases} a=۵ \\ b=۰ \end{cases} \quad \begin{cases} a=-۵ \\ b=۰ \end{cases} \quad \begin{cases} a=۱۳ \\ b=۱۲ \end{cases} \quad \begin{cases} a=-۱۳ \\ b=-۱۲ \end{cases}$$

و چون a و b اعداد طبیعی هستند، تنها جواب قابل قبول $a = ۱۳$ و $b = ۱۲$ است ؛ یعنی تنها یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر ۱۳ و اضلاع زاویهٔ قائمهٔ ۵ و ۱۲ وجود دارد.

ـ معادلهٔ سیّالهٔ $x^۲ + y^۲ = k$: برای حلّ این معادلهٔ سیّاله، ملاحظات زیر الزامی است :

الف ـ در ریاضیات عالی، ثابت می‌کنند که این معادله به ازای مقادیری از k که دارای مقسوم‌علیه‌های اوّل به فرم $۴m + ۳$ (یعنی اعدادی که باقیماندهٔ تقسیم آنها بر ۴ مساوی ۳ باشد) باشند، جواب ندارد.

ب ـ همچنین ثابت می‌شود که اگر دو عامل اوّل $p_۱$ و $p_۲$ از k بتوانند به صورت مجموع دو مربع کامل نوشته شوند، حاصلضرب آنها نیز می‌تواند به صورت مجموع دو مربع کامل نوشته شود. برای این منظور، به اتحاد جبری زیر مراجعه می‌کنیم :

$$(a^۲ + b^۲)(c^۲ + d^۲) = (ac + bd)^۲ + (ad - bc)^۲$$

که در مورد درستی آن، می‌توانید بسادگی تحقیق کنید.

اکنون به کمک ملاحظات بالا می‌توانیم به سادگی جوابهای معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = k$ را با تجزیهٔ k به حاصلضرب عوامل اوّل به‌دست آوریم.

اگر k دارای عامل اوّلی به صورت $۴m + ۳$ باشد، مسأله جواب ندارد و اگر دارای چنین عاملی نباشد، مسأله جواب دارد و پاسخ آن را با تبدیل یک‌یک عوامل اوّل به صورت مجموع دو مربع کامل و سپس ضرب آنها به کمک اتحاد جبری گفته شده، به‌دست می‌آوریم.

با یک مثال ساده، مسأله روشن می‌شود.

مثال: پاسخهای صحیح معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۳۷۷$ را به دست آورید.

حل: از تجزیهٔ ۳۷۷ به حاصلضرب عوامل اوّل، نتیجه می‌شود :

$$۳۷۷ = ۲۹ \times ۱۳$$

چون ۱۳ و ۲۹ هیچ یک به فرم $۴m + ۳$ نمی‌باشند (چرا؟)، پس مسأله جواب دارد. در واقع، با کمی دقت می‌توان نوشت :

$$۲۹ = ۲^۲ + ۵^۲ \ , \ ۱۳ = ۳^۲ + ۲^۲$$

و اکنون به کمک اتحاد جبری گفته شده، نتیجه می‌گیریم :

$$\begin{aligned} ۳۷۷ = ۲۹ \times ۱۳ &= (۲^۲ + ۵^۲)(۳^۲ + ۲^۲) \\ &= (۲\times۳ + ۵\times۲)^۲ + (۲\times۲ - ۵\times۳)^۲ \\ &= (۱۶)^۲ + (-۱۱)^۲ = (-۱۶)^۲ + (۱۱)^۲ \\ &= ۱۶^۲ + ۱۱^۲ = (-۱۶)^۲ + (-۱۱)^۲ \end{aligned}$$

و اگر عددها را جابه‌جا کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\begin{aligned} ۳۷۷ &= (۲^۲ + ۵^۲)(۲^۲ + ۳^۲) \\ &= (۲\times۲ + ۵\times۳)^۲ + (۲\times۳ - ۵\times۲)^۲ = \\ &= ۱۹^۲ + (-۴)^۲ = (-۱۹)^۲ + ۴^۲ \\ &= (-۱۹)^۲ + (-۴)^۲ = ۱۹^۲ + ۴^۲ \end{aligned}$$

یعنی برای x و y هشت دسته جواب به صورت زوجهای زیر وجود دارد :

$(۱۶,-۱۱)$, $(-۱۶,۱۱)$, $(۱۶,۱۱)$, $(-۱۶,-۱۱)$

$(۱۹,-۴)$, $(-۱۹,۴)$, $(-۱۹,-۴)$, $(۱۹,۴)$

و چون عبارت ما نسبت به x و y متقارن می‌باشد، لذا معکوس این زوجها نیز جواب می‌باشد و معادلهٔ سیّاله، جمعاً ۱۶ دسته جواب در مجموعهٔ اعداد صحیح دارد و به عبارت دیگر، روی دایره به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع $\sqrt{۳۷۷}$ که معادلهٔ آن $x^۲ + y^۲ = ۳۷۷$ می‌باشد، ۱۶ نقطه با مختصات صحیح وجود دارد. اینک به حلّ یک معمّای تاریخی

می‌پردازیم :

معمّای اعداد فیثاغورسی

یافتن سه‌تایی‌هایی که در رابطهٔ معروف $x^2+y^2=z^2$ صدق کنند، از معمّاهای قدیمی ریاضی می‌باشد. یکی از معروفترین این سه‌تایی‌ها که در ذهن اکثر دانش‌آموزان نقش بسته است، (۳،۴،۵) می‌باشد. یعنی ۳، ۴ و ۵ می‌توانند طولهای اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشند که بدیهی است طول وتر آن ۵ می‌باشد. ($5^2=4^2+3^2$) یکی از حالتهای خاص حلّ این معادله، آن است که با معلوم بودن طول وتر مثلث قائم الزاویه، طولهای اضلاع زاویهٔ قائمه را به شرط طبیعی بودن آنها، بیابیم. طول وتر می‌تواند عددی طبیعی یا جذر یک عدد طبیعی باشد.

مثال: چند مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که طول وتر آن مساوی $\sqrt{26}$ باشد؟

حل: در واقع، منظور مسأله، یافتن جوابهای طبیعی معادلهٔ سیّالهٔ $x^2+y^2=26$ می‌باشد و چون عدد ۲۶ به فرم $4m+3$ نمی‌باشد، بنابراین قابل تبدیل به صورت مجموع دو مربع کامل می‌باشد که با کمی دقت، نتیجه می‌شود $1^2+5^2=26$ ؛ یعنی یک مثلث قائم‌الزاویه (و تنها یکی) با اضلاع زاویهٔ قائمهٔ ۵ و ۱ وجود دارد که طول وتر آن $\sqrt{26}$ باشد. اگر در مثال قبل، طول وتر $\sqrt{27}$ می‌بود، با توجه به این که $27=4m+3$ $(m=6)$ لذا مطابق قضیهٔ گفته شده، معادلهٔ سیّالهٔ $x^2+y^2=27$ جواب صحیح (طبیعی) ندارد و لذا هیچ مثلث قائم‌الزاویه با وتر $\sqrt{27}$ وجود ندارد که طولهای اضلاع آن اعدادی طبیعی باشند.

تمرین: طولهای اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را به دست آورید که طولهای اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آنها عددهایی طبیعی بوده و طول وتر آنها مساوی ۱۳ یا ۱۵ یا ۱۷ یا $\sqrt{47}$ باشد.

اکنون حالت عام معادلهٔ سیّالهٔ $x^2+y^2=z^2$ را بررسی می‌کنیم و می‌خواهیم سه‌تایی‌های صحیح (یا طبیعی) را به دست آوریم که در رابطهٔ فوق صدق می‌کنند. طی قرنها این معادله و شکل تعمیم‌یافتهٔ آن، ذهن ریاضیدانان بسیاری از ملل مختلف را به خود مشغول داشته است. برای حلّ این معادله، راه حلهای بسیاری ارائه شده است. یکی از این راه حلها چنین است :

می‌نویسیم : $y^2=z^2-x^2$ و در نتیجه :

$$y^2=(z-x)(z+x)$$

اکنون اگر فرض کنیم $z+x=ty$ ، به دست می‌آید :

$$z-x=\frac{y}{t}$$

و از حلّ دستگاه دو مجهولی زیر، z و x به دست می‌آیند :

$$\begin{cases} z+x=ty\\ z-x=\frac{y}{t}\Rightarrow 2z=ty+\frac{y}{t}\Rightarrow z=\frac{(t^2+1)y}{2t}\end{cases}$$

$$2x=ty-\frac{y}{t}\Rightarrow x=\frac{(t^2-1)y}{2t}$$

اما برای آن که x و z عددهای طبیعی باشند، لازم است که y مضرب $2t$ باشد ؛ یعنی $y=2kt$ و از آن‌جا به دست می‌آید : $x=k(t^2-1)$ و $z=k(t^2+1)$ ، به ازای جمیع مقادیر k و مقادیر مختلف t، سه‌تایی‌های مختلف x، y و z به دست می‌آیند. یکی از این سه‌تایی‌ها که به ازای $k=1$ حاصل می‌شود، سه تایی معروف، $x=t^2-1$ ، $z=t^2+1$ و $y=2t$ می‌باشد که تساوی معروف زیر را به دست می‌دهد :

$$(t^2+1)^2=(t^2-1)^2+(2t)^2$$

که به ازای $t=2$ سه‌تایی معروف (۳،۴،۵) را به ما می‌دهد. کشف سه‌تایی اخیر را به شاگردان فیثاغورس نسبت داده‌اند. با کمی محاسبه، می‌توان فرمولهای پیش گفته را کلیت بیشتری بخشید و به سه‌تایی $z=m^2+n^2$ ، $x=m^2-n^2$ و $y=2mn$ رسید که به ازای اعداد صحیح m و n ، اعداد صحیح مختلفی برای x، y و z به ما می‌دهند و در واقع، **حالت کلی‌تر به شکل** $\mathbf{z=k(m^2+n^2)}$ ، $\mathbf{x=k(m^2-n^2)}$ و $\mathbf{y=2kmn}$ می‌باشد.

از دستورهای بالا، بلافاصله نتیجه می‌شود که هیچ مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع به طول اعداد طبیعی وجود ندارد که طول وتر آن، به فرم $4m+3$ باشد ؛ مثلاً هیچ مثلث قائم‌الزاویه‌ای وجود ندارد که طولهای اضلاع آن، اعدادی طبیعی بوده و وتر آن به طول ۳۹ باشد.

تعمیم معادلهٔ سیّالهٔ فیثاغورسی به صورت حلّ معادلهٔ سیّالهٔ $x^n+y^n=z^n$ در حالت کلی می‌باشد، و این، مسأله‌ای بسیار جالبتر و تاریخی‌تر از مسألهٔ قبل می‌باشد. پی‌یر دو فرما، ریاضیدان بنام فرانسوی که در سالهای ۱۶۰۱ تا ۱۶۶۵ میلادی می‌زیسته است و آثار و قضایای بسیاری منسوب به او می‌باشد، در حاشیهٔ نسخه‌ای از کتاب دیوفانتوس، در کنار یکی از مسائل، نوشته‌ای

چنین به جای گذاشت : «تجزیهٔ یک مربع مفروض به مجموع دو مربع» حاشیه‌ای که فرما بر آن نوشت، این بود : «تجزیهٔ یک مکعب به مجموع دو مکعب یک توان چهارم به مجموع دو توان چهارم، یا به‌طورکلی هر توان دلخواه به مجموع دو توان با قوّه‌های همانند، ولی بزرگتر از دو غیرممکن است، و من یقیناً برهان تحسین‌آمیزی برای آن یافته‌ام ؛ اما این حاشیه، تنگتر از آن است که گنجایش درج آن را داشته باشد.» به زبان ساده‌تر و با بیان ریاضی، معادلهٔ سیّالهٔ $x^n + y^n = z^n$ به شرط $n > 2$ هیچ جواب غیرصفر صحیح برای z ، y و x ندارد. این که آیا فرما به راستی، اثبات درستی از این قضیه در اختیار داشته است یا خیر، معمّایی لاینحل می‌باشد ؛ ولی تنگی حاشیهٔ کتاب (!) باعث گردید که در طی بیش از سه قرن متمادی، ریاضیدانان و ریاضی‌خوانان بسیاری، به اثبات این قضیه ترغیب شوند که تلاشهای همهٔ آنها اگر به حلّ کامل این قضیه منجر نشد ؛ اما باعث کشف یافته‌های بسیاری در نظریهٔ اعداد شد.

در حالتهای خاص $n=3,4,5,7$ برهانهای مختلفی در همان سالهای نخست (تا سال ۱۸۳۹) ارائه گردید ؛ ولی اثبات قضیه در حالت کلی، مشتاقان دانش ریاضی و نظریهٔ اعداد را تا سال ۱۹۹۳ میلادی (۱۳۷۲ شمسی) چشم‌انتظار باقی گذاشت. طی این سالها از ریاضیدانان نامی تا ریاضی‌خوانان مبتدی، بسیاری در چهار گوشهٔ عالم، برای اثبات قضیه تلاش نمودند، تا این که در این سال، آندرو وایلز راه حلّی برای آن ارائه نمود که در همان زمان رخنه‌ای در آن پیدا شد و این رخنه نیز در سال ۱۹۹۴ (شهریور ۱۳۷۳) توسط وایلز و یکی از شاگردان او به نام تیلر، برطرف شده و اثبات قضیه کامل شد و به این ترتیب، به افسانهٔ نفوذناپذیری آخرین قضیهٔ فرما پایان داده شد. در پایان، این بخش و با هدف کار بیشتر روی مباحث ارائه شده، چند تمرین ارائه می‌شود :

تمرین

۱ـ تعداد نقاط با مختصات صحیح را روی منحنی هریک از روابط زیر به دست آورید :

۱) $y = \dfrac{2x-1}{3x+4}$

۲) $y = \dfrac{x^2+4x+1}{x+1}$

۳) $2xy + 3x + 4y - 1 = 0$

۴) $4x^2 - 9y^2 = -5$

۵) $x^2 - y^2 + 4x - 2y - 2 = 0$

۶) $x^2 + y^2 = 250$

۷) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 67 = 0$

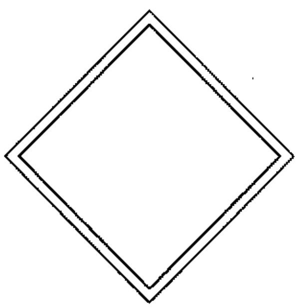
۲ـ چند مستطیل با اضلاع به طولهای عدد طبیعی وجود دارد که عدد مساحت آنها ۲۰ واحد از عدد محیط آنها بیشتر باشد؟

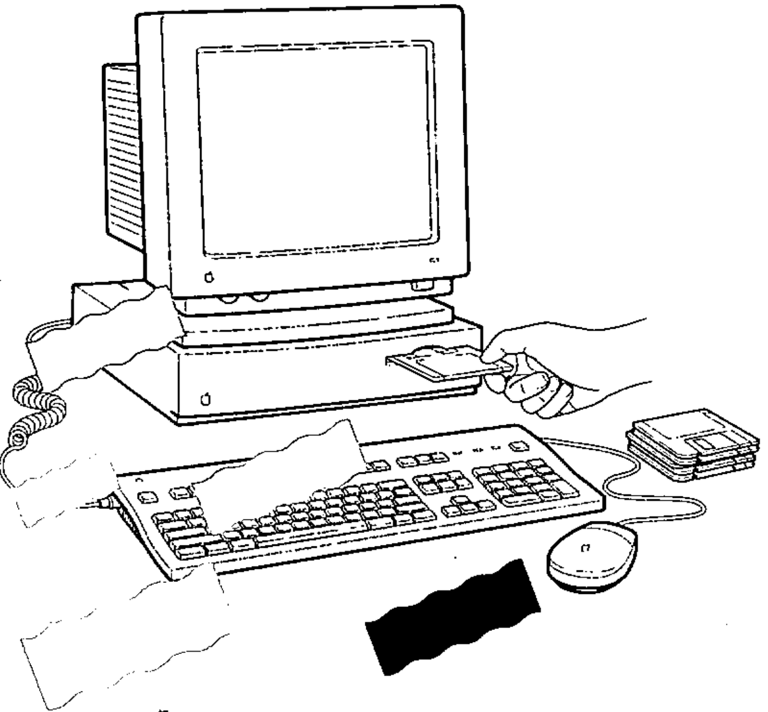
۳ـ ثابت کنید در دایره‌ای به شعاع ۱۳۷۹ نمی‌توان هیچ مستطیلی با اضلاع به طولهای عدد طبیعی، محاط کرد.

۴ـ با کنار هم قرار دادن تعدادی مربع کوچک به ضلع واحد، یک مربع بزرگ ساخته‌ایم. اکنون با چیدن ۱۳۷۵ مربع دیگر به دور این مربع بزرگ (به طریق مناسب) مربع دیگری حاصل شده است. مربع اولّیه، شامل چند مربع کوچک بوده است؟ آیا ممکن است با چیدن ۱۳۷۸ مربع کوچک به دور یک مربع، مربع دیگری ایجاد شود؟

۵ـ چند مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که طولهای اضلاع آنها اعدادی طبیعی بوده و طول یک ضلع زاویهٔ قائمهٔ آنها مساوی ۲۴ باشد؟

۶ـ در یک میهمانی، صاحبخانه اعلام می‌کند که با چند نوع نوشیدنی و چند نوع بستنی از میهمانان پذیرایی می‌کند ؛ به‌طوری که تعداد انتخابهای کسی که می‌خواهد یک نوشابه و یک بستنی صرف کند، ۷ انتخاب بیش از تعداد انتخابهای کسی است که می‌خواهد تنها یک نوشابه یا یک بستنی صرف کند. تعداد نوع بستنی و نوشابه‌ای که در این میهمانی سرو می‌شود، چند تا است؟





آموزش برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (۶)

● محمّد رحیم

مقدمه

در شمارهٔ پیش، مبحث ساختارهای کنترلی را شروع کردیم و به دستور IF پرداختیم. در این شماره، دستور IF را کامل می‌کنیم. قبل از پرداختن به دستورIF ، ابتدا چند تابع کتابخانه‌ای مترجم پاسکال را معرفی می کنیم تا بتوانید از قابلیتهای مترجم پاسکال بیشتر بهره‌مند شده و برنامه‌هایتان را ساده‌تر و آسانتر بنویسید.

معرفی چند تابع کتابخانه‌ای

مترجم پاسکال، دارای توابع کتابخانه‌ای متعددی است. برای جلوگیری از سردرگمی در نحوهٔ استفاده از این توابع، آنها دسته‌بندی شده‌اند. این دسته‌بندیها در قالبهایی به نام «یونیت[1]» شکل گرفته‌اند. در واقع، یونیتها متشکّل از توابعی هستند که دارای عملکرد و جهت‌گیریهای مشابه هستند. برای مثال، یونیت Crt، شامل توابعی است که به نحوی به صفحهٔ نمایش مربوط می‌شوند و نیز یونیت Graph شامل توابع گرافیکی است و به کمک آنها می‌توان از قابلیتهای گرافیکی سیستم استفاده کرد. با مراجعه به کتابهای راهنمای مترجم پاسکال یا منوی Help مترجم پاسکال، می‌توانید به کلیهٔ یونیتها و توابع موجود در آنها دسترسی پیدا کرده و توضیحات مربوط به هریک را به همراه مثال ببینید.

توابع محاسباتی:

ABS(x) : محاسبهٔ قدر مطلق

sin(x) : تابع سینوس

cos(x) : تابع کسینوس

exp(x) : تابع نمایی e^x

SQR(x) : تابع مجذور

SQRT(x) : تابع جذر

Arc tan(x): تابع آرک تانژانت

Ln(x) : تابع لگاریتم طبیعی Lnx

PI : تابع محاسبهٔ عدد π (3.1415)

یادآوری: درمترجم پاسکال، تابع توان یا عملگر[2] آن وجود ندارد؛ ولی می‌توان برای محاسبهٔ a^x از توابع exp(x) و Ln(x) به طریق زیر استفاده کرد:

$$y = a^x \Rightarrow Lny = xLna$$

$$\Rightarrow y = e^{xLna} \quad , \quad a > 0$$

بنابراین، برای محاسبهٔ a^x کافی است که Exp(x * Ln(a)) را محاسبه کنیم.

توابع مربوط به کارکتر، کد اسکی[3] و رشته[4]:

ord(x) : این تابع یک کارکتر را به عنوان ورودی می‌گیرد و خروجی آن کد اسکی آن کارکتر است.

chr(x) : این تابع، کد اسکی یک کارکتر را به عنوان ورودی گرفته و خروجی آن کارکتر است.

length(x) : ورودی این تابع، یک رشته است و خروجی آن طول رشته می‌باشد.

به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال(۱):

```
var
   x, y: real;
BEGIN
   x:= 2;
   y:= SQR(x);
   write ln(' y =', y);
   y:= SQRT(x);
   write ln(' y =', y);
   y:= ABS(cos(3*PI / 4));
   write ln(' y =', y);
END.
```

خروجی برنامهٔ فوق چنین است :

```
y = 4
y = 1·41
y = 0·707
```

مثال (۲):

```
var
  Acode:byte;
  Ch: char
  S:string;
BEGIN
  Acode:=ord('a');
  Ch:=chr(65);
  S:='pascal';
  writeln('ASCII code of "a"
  is ',Acode);
  writeln('65 is ASCII code
  of ',ch);
  writeln(s,'has a length of',
  length(s));
END.
```

خروجی برنامهٔ فوق چنین است :

```
ASCII code of'a'is 97

65 is ASCII code of A
pascal has a length of 6
```

در شماره‌های بعد، تعداد دیگری از توابع کتابخانه‌ای را معرفی خواهیم کرد.

دستور Else

در شمارهٔ گذشته، دستور IF را توضیح دادیم. حال این دستور را با Else کامل می‌کنیم. گفتیم که در دستور IF، جواب شرط هنگامی اجرا می‌شود که شرط برقرار باشد. اگر دستور IF شامل Else هم باشد، در صورت عدم برقراری شرط، جواب شرط اجرا نمی‌شود، ولی درعوض، دستور (یا دستورهایی) که در ذیل Else آمده‌اند، اجرا خواهند شد و پس از آن، برنامه روال عادی خود را طی خواهد کرد.

دردستور IF می‌توانیم بیش از یک شرط داشته باشیم. برای مقایسهٔ شرطها ازعملگرهای <>، <، <=، >، >= و = و برای ترکیب شرطها از عملگرهای and، or، xor و not استفاده می‌کنیم.

شکل کلی دستور IF...Else چنین است :

```
IF شرط then
  دستور
else
  دستور ;
```

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در صورت وجود Else، دستور ماقبل آن (که متعلّق به IF است) باید بدون ; بیاید.

Else همانند IF، می‌تواند یک دستور را تحت پوشش قــرار دهد. برای تحت پوشش قراردادن بیش از یک دستور، باید بلوک فرعی تشکیل داد ؛ یعنی :

```
IF شرط then
Begin
      دستور ۱ ;
      دستور ۲ ;
        :
      دستور n ;
end
else
begin
      دستور ۱ ;
      دستور ۲ ;
        :
end;
```

همان‌طور که در بالا مشاهده می‌شود، پیش از Else، end بدون ; آمده است.

توجه داشته باشید که در الگوی فوق، یا دستورهای تحت IF اجرا می‌شوند و یا دستورهای تحت else، و اجرای همزمان دستورهایIF و else ممکن نیست. پس از اجرای دستورهای تحت IF یا else، برنامه به سراغ خطوط بعدی برنامه خواهد رفت.

به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال(۳):

```
var
  x:Integer;
BEGIN
  write('Enter a number:');
  Readln(x);
  IF x mod 2=0 then
    writeln('number is even.')
  else
    writeln ('number is odd.');
END.
```

برنامهٔ فوق، زوج[5] یا فرد[6] بودن عدد را بررسی می‌کند. اگر عدد زوج باشد، پیغام مــی‌دهــد کــه .number is even و در غیراین‌صورت (یعنی اگر فرد باشد) پیغام number is odd را صادر می‌کند. زوج یا فرد بودن عدد توسط شرط xmod 2=0 کنترل می‌شود. توجه داشته باشید که در دستور ماقبل else علامت ; نیامده است.

مثال (۴): برنامه‌ای بنویسید که ضرایب معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ و $(a>0)$ را از ورودی بگیرد و ریشه‌های حقیقی آن را (در صورت وجود) محاسبه کرده و در خروجی چاپ کند.

```
var
  a,b,c: Integer;
  d,x1,x2: Real;
BEGIN
```

```
    write('Enter a,b,c:');
    Readln(a,b,c);
    d:=b*b-4*a*c;
    IFd>=0 then
BEGIN
    x1:=(-b+SQRT(d))/(2*a);
    x2:=(-b-SQRT(d))/(2*a);
    writeln('x1=',x1:7:2);
    writeln('x2=',x2:7:2);
END
else
    writeln('Equation has no
    Root');
END.
```

در برنامهٔ فوق، پس از گرفتن ضرایب، دلتا محاسبه می‌شود. اگر شرط مثبت یا صفر بودن دلتا برقرارباشد (d>=0) ریشه‌ها محاسبه شده و سپس در خروجی چاپ می‌شوند ؛ در غیر این‌صورت، برنامه پیغام می‌دهد که معادله دارای ریشه نیست. در برنامهٔ فوق، خط پیش از else (یعنی END) بدون علامت ; آمده است.

همان طور که قبلاً گفته شد، در دستور IF، می‌توان ترکیبی از شرطها را مورد استفاده قرار داد. در این‌صورت، هریک از شرطها باید داخل پرانتز قرار گیرند. به مثال زیر توجه کنید.

مثال(۵): برنامه‌ای بنویسید که اعداد a، b و c را بگیرد و معین کنند این سه عدد می‌توانند طول ضلعهای یک مثلث باشند یا نه.

```
var
   a,b,c: Real;
BEGIN
   write('Enter a,b,c:');
   Readln (a,b,c);
   IF (a<b+c) and (b<a+c)
   and (c<a+b) then
   writeln('a,b,c are sides of a
   triangle');
END.
```

همان‌طور که در مثال فوق مشاهده می‌شود، دستور IF لزوماً با else همراه نیست ؛ گرچه می‌توانست آن را هم داشته باشد ؛ برای مثال :

```
   else
   writeln('This is not  triangle.');
```

در این‌صورت، علامت ; باید از انتهای دستور writeln درIF حذف شود.

در پاسکال می‌توانیم IF تودرتو[۷] یا متداخل ایجاد کنیم. در این صورت، هر دستور IF (به همراه کلیهٔ متعلقات آن) حکم یک دستور را برای IF بالاتر از خود دارد.

مثال (۵) را می‌توان به صورت IF تودرتو نوشت.

مثال (۶):

```
var
   a,b,c:Real;
BEGIN
   write('Enter a,b,c:');
   Readln(a,b,c)'
   IF a<b+c then
      IF b<a+c then
         IF  c<a+b then
            writeln('a,b,c are
            sides of a triangle');

END
```

برنامهٔ فوق می‌تواند دارای else باشد. در این مثال، به دلیل ماهیت صورت مسأله، فرقی نمی‌کند که else برای کدام IF بیاید. اگرelse را برای اوّلین IF درنظر بگیریم، داریم :

مثال (۷):

```
var
   a,b,c:Real;
BEGIN
   write('Enter a,b,c:');
   Readln(a,b,c);
   IF a<b+c then
   begin
      IF b<a+c then
         IF  c<a+b then
            writeln('a,b,c are
            sides of a triangle');
   end
   else
      writeln('This is not
      triangle.');
END.
```

توجه داشته باشید که اگر درمثال فوق، بلوک فرعی حذف شود، else به آخرین IF تعلق خواهد داشت. درواقع، قاعدهٔ کلی این است که در مجموعه‌ای از IFها و elseهای تودرتو، هر else متعلق به نزدیکترین IF است.

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

۱. Unit واحد، یونیت
۲. Operator عملگر
۳. ASCII code کداسکی
۴. String رشته
۵. Even زوج
۶. Odd فرد
۷. Nested IF تودرتو یا متداخل IF

آنچه از دوست رسد...

با عرض سلام خدمت دانش‌آموزان و خوانندگان مجلهٔ ریاضی برهان

دوستان گرامی! هر روز، نامه‌های پرمحتوا و مقاله‌ها و مسأله‌های شما در دفتر مجله به دستمان می‌رسد. خداوند بزرگ را سپاسگزاریم که توفیق خدمت به شما عزیزان را به ما ارزانی داشته است. از همگی شما عزیزان تقاضا داریم که مجله را نقّادانه بررسی کنید و پیشنهادات و انتقادات خود را به این منظور که مجلّه برای دانش‌آموزان مفیدتر باشد برای ما ارسال نمایید. در این شماره مجلّه مسائل درسهایی که در ترم اوّل به دانش‌آموزان مقاطع مختلف تحصیلی ارائه می گردد با حلّ تشریحی آمده است.

نام تعدادی از خوانندگان محترم مجله که برای ما نامه ارسال کرده‌اند:

آقایان: علی‌اکبر فرزام (خرم‌آباد)، داریوش وحدت (بجنورد)، امین صدری (اصفهان)، علی شفیعی (رشت)، محمدرضا ملاخلیلی میبدی (دانشگاه شهید بهشتی تهران)، همکار محترم آقای علی‌اصغر قبدیان (نیشابور)، علی باقری (شهر مقدس قم)، بهمن افسری (تهران)، عبدالرضا حسین‌پور (بندر کیان‌شهر)، هادی آفرینش (آذربایجان‌شرقی)، عمار جاهد عین‌الدین (تبریز)، سیدضیاءالدین حسینی (نور)، یاسین اسماعیلی (مشهد مقدس)، حسین صالحی کیاسری (ساری)، رضا خواجوی‌نیا (اصفهان)، جواد عبادپور (تهران)، محمدحسین قزلسفلو (مینودشت)، مجتبی دهقانی (فارسان)، سامان جهانی (تهران)، همکار ارجمند آقای میرزا مهدی ابراهیمی (مشهدمقدس)، ضرغام منفرد (نورآباد ممسنی)، ایمان یوسفی، سعید مرادی هزارآبادی و علی مشهدی رمضان (تهران)، همکار ارجمند آقای علیرضا معتمدی (مینودشت)، همکار ارجمند آقای مراد کریمی شهماروند (شهرکرد)، آرش دبیرزاده (اصفهان) و **خانم‌ها**: سروناز سرایی‌پور (تبریز)، نسیم قدمی (سنندج)، مرتضی‌نژاد (قاین)، معصومه پناهی (تهران)، مهسا بخشایی (کرج)، سودابه کلبادی‌نژاد (کلوگاه)، نگین پاکدل و شیما حسن‌پور (مشهد مقدس) و خانم فریدونی (دانشگاه خواجه نصیر طوسی). از همهٔ شما عزیزان به پاس ارسال مقاله، مسائل همراه با حل، حلّ مسأله مسابقه‌ای و انتقادات و پیشنهادات سازنده سپاسگزاریم. در صورت امکان از این مسأله‌ها در قسمت مسأله برای حل و مسائل مسابقه‌ای مجله استفاده خواهیم کرد و مقاله‌های شما را پس از تصویب در هیأت تحریریه، چاپ خواهیم کرد.

جناب آقای محمد مولایی (دیواندره) و سرکار خانم مریم حسین‌زاده (فومن) به شما عزیزان توصیه می‌کنیم ارتباط خود را با مجله برهان حفظ کرده و سری کتابهای کوچک ریاضی انتشارات مدرسه را که تاکنون ۲۳ عنوان آن چاپ شده است، از نمایندگی انتشارات مدرسه در شهر خودتان بخواهید که این کتابها در هر زمینه‌ای برای شما مطلب دارد و در زمینه هندسه، دائرةالمعارفهای هندسه، تألیف آقای محمدهاشم رستمی را از همان نمایندگی تهیه فرمایید، ان‌شاءا... که مفید واقع شود.

همکار محترم جناب آقای علیرضا معتمدی (مینودشت)، از آن جا که مسائل ارسالی جنابعالی می‌تواند برای دانش‌آموزان مفید واقع شود، دو مسأله از آن را در زیر می‌آوریم :

۱. ثابت کنید اگر $P(A)=1$، آن‌گاه $P(A\cap B)=P(B)$.

حل. چون $A \cap B \subseteq B$ بنابراین $P(A \cap B) \le P(B)$. (۱)

از طرفی می‌دانیم : $0 \le P(A \cup B) \le 1$، بنابراین داریم :

$$P(A)+P(B)-P(A \cap B) \le 1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \ge P(A)+P(B)-1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \ge 1+P(B)-1$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) \ge P(B) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow P(A \cap B) = P(B)$$

۲. چند جمله‌ای ناصفر $f(x)$ را چنان بیابید که داشته باشیم :

$f(2x) = f'(x)f''(x)$.

حل. فرض کنیم $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$،

چون $f(x)$ ، $f'(x)$ و $f''(x)$ به ترتیب از درجه‌های n ، $(n-1)$ و $(n-2)$ هستند و $f(2x) = f'(x)f''(x)$ بنابراین داریم :

$$n = (n-1)+(n-2) \Rightarrow n = 3$$

پس $f(x)$ چندجمله‌ای درجه سوم است، $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، با توجه به رابطهٔ $f(2x) = f'(x)f''(x)$ داریم :

$$8ax^3 + 4bx^2 + 2cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(6ax + 2b)$$

با توجه به برابری بالا نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ 8a = 18a^2 \\ 4b = 6ab + 12ab \\ 2c = 4b^2 + 6ac \\ d = 2bc \end{cases}$$

پس از حلّ دستگاه داریم : $f(x) = \frac{4}{9}x^3$.

جناب آقای مجتبی دهقانی (فارسان)، از آن‌جا که مقاله ارسالی شما حاوی مسائل قابل‌استفاده برای دانش‌آموزان است، یک مسأله از آن در زیر آمده است :

مسأله. ثابت کنید، اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند، همواره داریم : $P(A-B)+P(A-B') = P(A)$

حل. چون $(A-B')$ و $(A-B)$ دو پیشامد ناسازگار هستند، بنابراین داریم :

$$P(A-B)+P(A-B') = P[(A-B) \cup (A-B')]$$
$$= P[(A \cap B') \cup (A \cap B)]$$
$$= P[A \cap (B' \cup B)] = P(A)$$



از یک محصول به دو صورت مایع و پودر استفاده می‌شود. در یک تحقیق نتایج زیر به دست آمده است :

- $\frac{1}{3}$ اشخاصی که از آنان سؤال شده پودر مصرف نمی‌کنند ؛
- $\frac{2}{7}$ اشخاصی که از آنان سؤال شده مایع به کار نمی‌برند ؛
- ۴۲۷ نفر مایع و پودر را توأماً مورد استفاده قرار می‌دهند ؛
- $\frac{1}{5}$ اشخاصی که از آنان سؤال شده از این محصول استفاده نمی‌کنند. در این تحقیق از چند نفر سؤال شده است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸

احمد قندهاری
محمد هاشم رستمی
حمیدرضا امیری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

مسائل برای حل

ریاضیات ۱

۱ـ اگر $A=\{x|x\in Z\ ،\ x\geq 2\}$ و $B=\{x|x\in \mathbb{R}\ ،\ x<-4\}$ ، حاصل $A'-B$ و $A'\cap B'$ را باهم مقایسه کنید.

۲ـ کوچکترین عددی را بیابید که اگر در عبارت $a=5^{13}\times 3^{7}\times 2^{9}$ ضرب شود : حاصل، مربع کامل می‌شود.

۳ـ حاصل عبارت تواندار $N=\frac{11\times 63\times 5^{7}\times 3^{5}\times 2^{3}}{7\times 5^{4}\times 3^{3}\times 2^{2}}$ را بیابید.

۴ـ حاصلضرب دو عدد متوالی برابر ۹۳۰ می‌باشد، تعیین کنید که مجموع آن دو عدد، اوّل است یا مرکب؟

۵ـ حاصل عبارت زیر را تعیین کنید :

$$K=\frac{5^{-2}+5\times 3^{-2}}{15\times 3^{-1}+5^{-2}\times 3^{2}}$$

۶ـ کسر متعارفی مولّد عدد اعشاری $4/12\overline{34}$ را بیابید.

۷ـ عبارت $T=\frac{x^{2}-1}{x+1}+\frac{x^{3}+1}{x+1}-\frac{x^{3}-1}{x-1}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف شده است؟ سپس در حوزهٔ تعریف، حاصل T را بیابید. در آخر، معادلهٔ $T=0$ را حل کنید.

۸ـ ثابت کنید که عبارت $27x^{132}+8$ بر $3x^{44}+2$ بخش‌پذیر است.

۹ـ معادلهٔ توانی زیر را حل کنید :

$$2^{x+3}+3\times 4^{x}=44$$

۱۰ـ اگر $a^{2}+b^{2}=ab+2(a+b)-4$ ، حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{2ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}+2}$ را تعیین کنید.

ریاضیات ۳

۱ـ به ازای چه مقادیر m ، سه جمله‌ای درجه دوم $(m+5)x^{2}+(m-5)x+m-11$ به ازای جمیع مقادیر x، همواره منفی است؟

۲ـ حدود k را طوری تعیین کنید که معادلهٔ $\frac{k}{x+7}=\frac{5-x}{k}$ دارای جوابهای حقیقی باشد.

۳ـ یک‌به یک و پوشایی تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=3x-|x| \end{cases}$ را بررسی کنید.

۴ـ اولاً، ثابت کنید تابع $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^{3}-3x^{2}+3x \end{cases}$ وارون‌پذیر است و ثانیاً، ضابطهٔ وارون آن را به‌دست آورید.

۵ـ اگر قرینهٔ نقطهٔ $A(2\alpha-\beta\ ،\ \alpha+2)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اوّل و سوّم، نقطهٔ $B(3\alpha+\beta\ ،\ \beta+2)$ باشد، مقادیر α و β را مشخص کنید.

۶ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|[x]-x+1$ را وقتی $x\in[-2,2)$ باشد، رسم کنید.

۷ـ اگر $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس دو در دوی مجهول X را طوری تعیین کنید که داشته باشیم : $A^{2}-3AX+I=\bar{O}$ (I ماتریس واحد مرتبهٔ ۲ است.)

۸ـ اگر $A=\begin{bmatrix}a & 1\\ -1 & -a\end{bmatrix}$ باشد و $a\neq\pm 1$ ، a را طوری به‌دست آورید که داشته باشیم :

$$(A^{2})^{-1}=2I$$

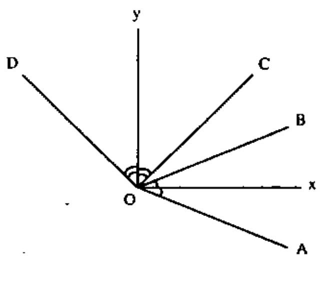
۹ـ ثابت کنید اگر $a>0$ و $4a^{2}+9b^{2}=4ab$ باشد، آن‌گاه :

$$\log\frac{2a+3b}{4}=\frac{\log a+\log b}{2}$$

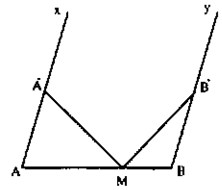
۱۰ـ معادلهٔ $2\log 2+\log(x^{2}-1)-\log(4x-1)=0$ را حل کنید.

هندسهٔ ۱

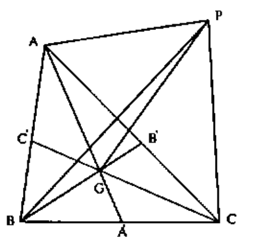
۱ـ اگر Ox نیمساز زاویهٔ AOB، Oy نیمساز زاویهٔ COD و $x\hat{O}y=90^{\circ}$ باشد، ثابت کنید دو زاویهٔ AOC و BOD مکمّل یکدیگرند.



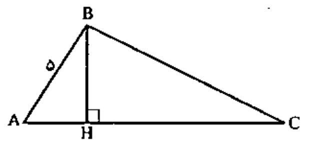
۲ـ پاره‌خط AB داده شده است. از A و B دو نیمخط موازی دلخواه Ax و By را رسم می‌کنیم. نقطه‌ای مانند M روی پاره‌خط AB درنظر می‌گیریم. روی Ax ، طول $AA'=AM$ و روی By ، طول $BB'=BM$ را جدا می‌کنیم و از A' و B' به M وصل می‌کنیم. ثابت کنید $A'\hat{M}B'=90^{\circ}$ است.



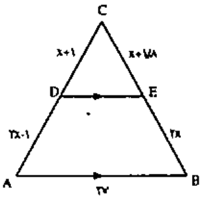
۳ـ اگر نقطهٔ G محلّ تلاقی سه میانهٔ مثلث ABC را به نقطه‌ای مانند P واقع در خارج این مثلث وصل کنیم، ثابت کنید یکی از سه مثلث PGA، PGB و PGC ، معادل مجموع دو مثلث دیگر است.



۴ـ در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{B}=90^{\circ}$) ، ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. اگر $AB=5cm$ و $CH=\frac{144}{13}Cm$ باشد، اندازهٔ محیط این مثلث را تعیین کنید.



۵ـ در شکل، $DE \parallel AB$ است. اندازهٔ محیط مثلث CDE را به دست آورید.



۶ـ اندازهٔ ضلع مربع و هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۱۲ سانتیمتر را تعیین کنید.

۷ـ ثابت کنید مثلث میانه‌ای هر مثلث، با آن مثلث متشابه است. نسبت تشابه را تعیین کنید (مثلث میانه‌ای هر مثلث، مثلثی است که رأسهایش وسطهای ضلعهای آن مثلث می‌باشد. این مثلث را مثلث اولر نیز می‌نامند).

۸ـ نسبت حجم مکعب محاط در کره‌ای به شعاع R را به حجم آن کره، تعیین کنید.

۹ـ هرم مربع‌القاعده منتظمی داده شده است. اگر ضلع قاعدهٔ این هرم ۱۲cm و اندازهٔ هر یالش $2\sqrt{34}\,cm$ باشد، اندازهٔ سطح جانبی و حجم این هرم را بیابید.

ریاضیات ۵

۱ـ اگر $A=\{x|x\geq 2\}$ و $B=\{x|-1<x\leq 3\}$ باشد، $A\cup B$ را به صورت فاصله نشان دهید.

۲ـ در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>2\\ -x+4, & x<2\\ 5, & x=2\end{cases}$ ، مقادیر $f(3)$ ، $f(1+\sqrt{2})$ و $f(-\sqrt{2})\times f(0)$ را محاسبه کنید.

۳ـ دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt{-x^2-2x-1}+\sqrt{x^2+1}$ را به‌دست آورید.

۴ـ اگر $g(x)=\frac{1}{x^2}$ و $(f\circ g)(x)=\frac{1}{x^3}+1$ باشد، تابع $f(x)$ را تعیین کنید.

۵ـ اگر $f(2x-1)=4x^2-4x+1$ باشد، حدّ $f(x)$ را وقتی $x\to\sqrt{2}$ تعیین کنید.

۶ـ اندازهٔ a و b را چنان بیابید که $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^a+x^2+1}{(b-1)x^6+x^3+2}=-1$ باشد.

۷ـ مطلوب است محاسبهٔ:

الف. $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{x^2-\frac{\pi^2}{36}}$

ب. $\lim_{x\to 5}\frac{3-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{7x+1}-6}$

۸ـ مقدار a را در تابع $f(x)=\begin{cases}x^3+ax, & x>-1\\ 3, & x=-1\\ -x+1, & x<-1\end{cases}$ طوری تعیین کنید که این تابع در $x=-1$ پیوستگی راست داشته باشد.

۹ـ مشتق هریک از تابعهای زیر را محاسبه کنید.

الف. $y=(\sqrt{3x^2+1}-x+1)^3$

ب. $y=\sin x^3\cos^3 x$

۱۰ـ اگر $U=(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})^{12}$ و $V=(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})^{12}$ باشد، $U'.V+V'.U$ را محاسبه کنید.

۱۱ـ در تابع $y=ax^2+bx-3$ ضریبهای a و b را چنان بیابید که این تابع در ازاء $x=-1$ دارای ماکزیمم یا می‌نیممی برابر ۴− باشد.

۱۲ـ جدول تغییرات و نمودار تابع $y=x(3-x^2)$ را رسم کنید.

۱۳ـ معادلهٔ خط قائم بر منحنی تابع $y=\frac{2x-1}{x+1}$ را در نقطه‌ای به عرض ۲ واقع بر آن بنویسید.

حسابان ۱

۱ـ تابع به معادلهٔ

$$f(x)=(a-1)x^3+(a-2)x^2$$
$$+(ab-8)x+(a-b+4)$$

مفروض است. a و b را چنان بیابید تا اولاً، تابع f فرد باشد. ثانیاً، تابع f زوج باشد.

۲ـ ثابت کنید عبارت $(x^3+x^2-4x+1)^5-(x^3-2x)^5$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است.

۳ـ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2-3x-1=0$ باشند و $\alpha^5+\beta^5=k$ ، آن‌گاه $\alpha^{15}+\beta^{15}$ را برحسب k بیابید.

۴ـ اگر صفرهای دو تابع به معادله‌های $f(x)=x^2+5x+4$ و $g(x)=ax^2+bx+6$ مساوی باشند، مقدار عددی $(a+b)$ را بیابید.

۵ـ اگر منحنی تابع به معادلهٔ $f(x)=x^3+mx^2-4$ درنقطهٔ ماکزیمم نسبی بر محور xها مماس باشد، مقدار m را بیابید.

۶ـ ثابت کنید:

$$\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{3\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=\frac{1}{2}$$

۷ـ حاصل $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}+x-5}{\sqrt{x+6}-3}$ را بیابید.

۸ـ تابع به معادلهٔ

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b|x|, & x<1\\ \left\lfloor x-\frac{7}{2}\right\rfloor, & x=1\\ a\sin(x-1)+b\lfloor x+1\rfloor, & x>1\end{cases}$$

مفروض است، a و b را چنان بیابید تا این تابع در $x=1$ پیوسته باشد.

۹ـ اگر f تابعی یک‌به یک و داشته باشیم: $g(x)=\frac{2+f(x)}{2-f(x)}$ ، $g^{-1}(x)$ را بیابید.

۱۰ـ در تابع به معادلهٔ $f(x)=\sin^3\sqrt[3]{x^2}+\cos^2\frac{1}{x}$ ، $f'(x)$ را بیابید.

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱ـ به کمک تعریف حدّ دنباله ثابت کنید حدّ دنبالهٔ $n>2$ ، $\left\{\frac{2n+1}{n-2}\right\}$ ، عدد ۲ است.

۲ـ مقدار سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+4)(k+6)}$ را بیابید.

۳ـ با استفاده از تعریف حدّ تابع، ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-1}{|x-1|}=-3$$

۴ـ اگر $\lim_{x\to-\infty}(ax+b+\sqrt{16x^2-128x+1})=5$ ، a و b را بیابید.

۵ـ تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-9x^2+5x+1, & x\notin Z\\ 1, & x\in Z\end{cases}$$

مفروض است، مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابع f را بیابید.

۶ـ ثابت کنید معادلهٔ $x^3+x+1=0$ دقیقاً یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۷ـ معادله‌های مجانبهای قائم تابع به معادلهٔ $y=\frac{(x^2-4x+3)\sqrt{x}}{x(x^2-4)(x-1)^2(x+20)}$ را بیابید.

۸ـ اگر در تابع به معادلهٔ $y=\frac{(a-2)x^2-2(b-4)x}{x-5}$ ، $y=2$ مجانب افقی باشد، a و b را بیابید.

۹ـ تابع به معادلهٔ $n\in N$ ، $f(x)=\begin{cases}x^n.\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ در ۰ مشتق‌پذیر است، مقدار n را بیابید.

۱۰ـ در تابع به معادلهٔ $x>1$ ، $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ ، $(f^{-1})'(\frac{2}{5})$ را بیابید.

هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی پیش دانشگاهی

۱ـ تصویر قائم بردار $a=3i-j+k$ را بر $b=-i+j+k$ بیابید.

۲ـ نقطهٔ $P(-1,2,1)$ و خط $L:\ \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$ مفروضند، معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ P عبور کرده و در محلّ تلاقی‌اش با خط L، بر آن عمود باشد.

۳ـ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $P(2,-1,0)$ گذشته و بر دو صفحه به معادله‌های $x-y-z=1$ و $2x+y+z=-1$ عمود باشد.

۴ـ بر خط D به معادلهٔ $\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{2}=z-1$ نقاطی را به‌دست آورید که از صفحه به معادلهٔ $4x-3y=1$ ، به فاصلهٔ ۳ باشند.

۵ـ اگر A و B دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند و $M=AA^T-BB^T$ ، ثابت کنید M متقارن است.

۶ـ اگر $x+y+z=0$ ، بدون بسط و با استفاده از ویژگیهای دترمینان ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix}a+x & y & z\\ x & a+y & z\\ x & y & a+z\end{vmatrix}=a^3$$

۷ـ اگر A ماتریسی $n\times n$ و وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید:

$$|A^*|=|A|^{n-1}$$

۸ـ اگر بردارهای $(2,1,3)$ ، $(1,a,2)$ و $(3,2,4)$ بستگی خطی داشته باشند، مقدار a را بیابید.

۹ـ اگر $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$ و $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$ نگاشتهایی خطی باشند، ثابت کنید fog نگاشتی خطی است.

۱۰ـ منحنی به معادلهٔ $x^2-y^2=1$ مفروض است. معادلهٔ منحنی تبدیل‌یافته توسط ماتریس $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ را بیابید.

۱۱ـ نگاشت خطی f با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x-y,2y+z)$ مفروض است، هسته و بُرد آن را مشخص کنید.

۱۲ـ نگاشت خطی f با ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ مفروض است، آیا f یک‌به یک است؟ ثابت کنید.

۱۳ـ خاصیت پوشایی را برای نگاشت خطی f با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x,y-z)$ بررسی کنید.

۱۴ـ خاصیت یک‌به یکی و پوشایی را برای نگاشت خطی f با ضابطهٔ

$f(x,y,z)=(x,2y,y+z)$ بررسی کنید.

۱۵ـ نگاشت خطی f با ضابطهٔ $f(x,y)=(2x-y,x+2y)$ مفروض است، ضابطهٔ f^{-1} را بیابید.

۱۶ـ دستگاه معادلات زیر را به روش گوس حل کنید.

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-z=1 \\ x+3y-2z=1 \end{cases}$$

۱۷ـ مقادیر ویژه و بردارهای ویژهٔ نگاشت خطی f با ضابطهٔ $f(x,y)=(5x-2y,4x-y)$ را به‌دست آورید.

ریاضی عمومی ۱

۱ـ فرض کنید برای نمرات درس ریاضی ۲۰ نفر دانش‌آموز دبیرستانی، داده‌های زیر به دست آمده باشد :

۱۸/۵	۱۵	۱۹/۵	۱۲	۱۵
۱۱	۱۰	۲۰	۱۷	۹
۱۵	۱۱/۵	۱۳	۱۴	۱۸
۱۷	۱۶	۱۱	۷	۱۰/۵

الف. جدول فراوانی داده‌های بالا را تشکیل دهید.

ب. میانگین، انحراف معیار و ضریب تغییرات داده‌های بالا را به‌دست آورید.

ج. چندبر فراوانی و نمودار دایره‌ای را برای نمونهٔ بالا به‌دست آورید.

۲ـ می‌خواهیم از بین ۱۰ نفر کوهنورد که ۲ نفر آنها برادر هستند، یک گروه پیشرو ۵ نفری تشکیل دهیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که :

الف. ۲ برادر در گروه باشند.

ب. فقط یکی از برادرها در گروه باشند.

۳ـ ۴۰٪ مردم حداقل دارای تحصیلات تا دیپلم هستند و ۳۰٪ آنها شغل دولتی دارند. ۲۰٪ افراد با تحصیلات کمتر از دیپلم نیز دارای شغل دولتی هستند. چند درصد مردم شغل دولتی دارند؟

۴ـ مقدار m را به قسمی تعیین کنید که سه خط به معادله‌های $y=(m+1)x$ و $y=2x-1$ و $y=mx-m+2$ از یک نقطه بگذرند.

۵ـ با استفاده از اصل استقرای ریاضی، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید :

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

۶ـ جملهٔ مستقل از x را در بسط دو جمله‌ای $(x^2+\frac{1}{2x})^{15}$ بیابید.

۷ـ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، معادلهٔ درجه دومی بیابید که ریشه‌هایش α^2 و β^2 باشند.

۸ـ نمودار سهمی $y=x^3+3x^2+3x$ را رسم کنید، سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطهٔ $y=|x^3+3x^2+3x|$ را رسم کنید.

۹ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2(\frac{3}{2})^{x-1}$ را رسم کنید.

۱۰ـ همهٔ مجانبهای منحنی به معادلهٔ $y=\frac{3x^3+2x^2}{x^3-3x^2+2x}$ را به‌دست آورید.

حل تشریحی مسائل

ریاضیات ۱

۱ـ

$$A=\{x|x\in Z\ ,\ x\ge 2\}=\{2,3,4,\dots\}\ ,$$

$$A'=\{x|x\in Z\ ,\ x<2\}$$

$$B=\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ x<-4\}.$$

$$B'=\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ x\ge -4\}$$

$$\left.\begin{array}{l} A'-B=\{-4,-3,-2,-1,0,1\} \\ A'\cap B'=\{-4,-3,-2,-1,0,1\} \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$A'-B=A'\cap B'$$

۲ـ کوچکترین عدد برابر $b=5\times 3\times 2$ است، زیرا :

$$b.a=(5\times 3\times 2)(5^{13}\times 3^7\times 2^9)$$

$$=5^{14}\times 3^8\times 2^{10}=(5^7\times 3^4\times 2^5)^2=k^2$$

۳ـ

$$N=\frac{11\times 63\times 5^7\times 3^5\times 2^3}{7\times 5^4\times 3^3\times 2^2}$$

$$=11\times 9\times 5^{7-4}\times 3^{5-3}\times 2^{3-2}$$

$$=11\times 3^2\times 5^3\times 3^2\times 2$$

$$=11\times 3^4\times 5^3\times 2$$

۴ـ دو عدد متوالی را x و x+1 درنظر می‌گیریم، پس :

$$x(x+1)=930\ ,\ x(x+1)=30\times 31\Rightarrow x=30$$

$$x+(x+1)=2x+1=2(30)+1=61\ \text{(عدد اول)}$$

مجموع دو عدد، $30+31=61$ است که عددی اول می‌باشد.

۵ـ

$$K=\frac{5^{-2}+5\times 3^{-2}}{15\times 3^{-1}+5^{-2}\times 3^2}$$

$$=\frac{\frac{1}{5^2}+\frac{5}{3^2}}{\frac{15}{3}+\frac{3^2}{5^2}}=\frac{\frac{3^2+5^3}{5^2\times 3^2}}{5+\frac{3^2}{5^2}}=\frac{\frac{5^3+3^2}{5^2\times 3^2}}{\frac{5^3+3^2}{5^2}}$$

$$=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

۶ـ کسر متعارفی مولد عدد اعشاری $4/12\overline{34}$ را به x نشان می‌دهیم ؛ پس :

$$x=4/12\overline{34}\ ;\ 100x=412/\overline{34}\ ,$$

$$10000x=41234/\overline{34}$$

$$10000x-100x=41234/\overline{34}-412/\overline{34}$$

$$=41234-412=40822$$

$$9900x=40822\ ;$$

$$x=\frac{40822}{9900}=\frac{20411}{4950}\qquad \text{(کسر مولد)}$$

۷ـ مقدار T به ازای ریشهٔ مخرج کسرها نامعین است ؛ یعنی T به ازای $x=\pm 1$ تعریف نشده است. با فرض $x\ne\pm 1$ ، حاصل T را به‌دست می‌آوریم :

$$x\ne\pm 1:\ T=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$-\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}+\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}\ ;$$

$$T=x^2+x+1-(x^2-x+1)+x-1$$

$$=x^2+x+1-x^2+x-1+x-1=3x-1$$

$$T=0:\ 3x-1=0\ ;\ 3x=1\ ;\ x=\frac{1}{3}$$

۸ـ عبارت $(27x^{132}+8)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$27x^{132}+8=3^3x^{3\times 44}+2^3$$

$$=(3x^{44})^3+2^3$$

$$=(3x^{44}+2)\left((3x^{44})^2-2(3x^{44})+4\right)$$

چون عبارت $(27x^{132}+8)$ دارای عامل $(3x^{44}+2)$ می‌باشد ؛ پس، بر آن بخش‌پذیر است.

۹ـ با فرض $a=2^x$ ، معادله به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$2^x\times 2^4+3\times 2^{2x}=44\ ;\ 16a+3a^2=44$$

پس :

$$3a^2+16a-44=0\ ;\ (3a+22)(a-2)=0\ ;$$

$$a-2=0\ ;\ a=2$$

$$2^x=2\ ;\ \boxed{x=1}$$

۱۰ـ از فرض $a^2+b^2=ab+2(a+b)-4$ ، خواهیم داشت :

$$a^2+b^2+4=ab+2a+2b\ ;$$

$$2a^2+2b^2+8=2ab+4a+4b$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(a^2-4a+4)$$

$$+(b^2-4b+4)=0\ ;$$

$$(a-b)^2+(a-2)^2+(b-2)^2=0\ ;$$

$$(a-b=0\ ,\ a-2=0\ ,\ b-2=0)$$

پس :

$$a=b=2:\ \frac{\sqrt[3]{2ab}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}+2}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2\times 2\times 2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{2}+2}=\frac{2}{2}=1$$

ریاضیات ۳

۱ـ برای آن که سه جمله‌ای درجه دوم ax^2+bx+c ، همواره منفی باشد، کافی است $\Delta<0$ و $a<0$ باشد ؛ بنابراین می‌توان نوشت :

$$\Delta=(m-5)^2-4(m+5)(m-11)$$

$$=m^2-10m+25-4m^2+44m-20m+220$$

$$=-3m^2+14m+245$$

$$\Rightarrow -3m^2+14m+245<0$$

و برای حلّ نامعادلهٔ درجه دوم فوق ریشه‌های آن را به‌دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم :

$$-3m^2+14m+245=0$$

$$\Rightarrow \Delta=14^2-4(-3)(245)=3136$$

$$m=\frac{-12\pm\sqrt{3136}}{-6}=\frac{-12\pm 56}{-6}$$

$$\Rightarrow m=\frac{35}{3}\ ,\ -7$$

m	$-\infty$	-7		$\frac{35}{3}$	$+\infty$
$-3m^2+14m+245$	$-$	0	$+$	0	$-$

و با توجه به جدول تعیین علامت فوق، لازم است که $m>\frac{35}{3}$ یا $m<-7$

و باتوجه به آن که باید $a<0$ باشد، $m+5<0$ و $m<-5$ است و از اشتراک این دو مجموعهٔ جواب، مجموعهٔ مقادیر m به‌دست می‌آید :

$$\boxed{m<-7}$$

۲ـ
$$\frac{5-x}{k}=\frac{k}{x+7}\Rightarrow (x+7)(5-x)=k^2$$

$$\Rightarrow 5x-x^2+35-7x=k^2$$

$$\Rightarrow x^2+2x+k^2-35=0$$

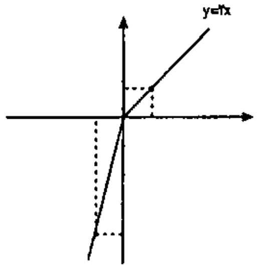
$$\Delta=4-4(k^2-35)=4-4k^2+140$$

$$=144-4k^2\geq 0\Rightarrow 4k^2\leq 144$$

$$\Rightarrow k^2\leq 36\Rightarrow -6\leq k\leq 6$$

۳ـ با رسم نمودار تابع، به سادگی می‌توان یک‌به‌یک و پوشایی آن را تحقیق کرد.

$$f(x)=\begin{cases}3x-x\ ,\ x\geq 0\\ 3x+x\ ,\ x<0\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2x\ ,\ x\geq 0\\ 4x\ ,\ x<0\end{cases}$$



و با توجه به نمودار، روشن است که تابع f، هم یک به یک و هم پوشاست.

۴ـ ابتدا ثابت می‌کنیم که f یک‌به‌یک است و بنابراین معکوس‌پذیر است.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^3-3x_1^2+3x_1$$

$$=x_2^3-3x_2^2+3x_2$$

$$\Rightarrow x_1^3-3x_1^2+3x_1-1$$

$$=x_2^3-3x_2^2+3x_2-1$$

$$\Rightarrow (x_1-1)^3=(x_2-1)^3$$

$$\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$

برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس، x را از ضابطهٔ تابع برحسب y به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را باهم تعویض می‌کنیم.

$$y=x^3-3x^2+3x$$

$$\Rightarrow y-1=x^3-3x^2+3x-1$$

$$\Rightarrow y-1=(x-1)^3\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{y-1}$$

$$\Rightarrow x=1+\sqrt[3]{y-1}\Rightarrow\begin{cases}f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ f^{-1}(x)=1+\sqrt[3]{x-1}\end{cases}$$

۵ـ قرینهٔ نقطهٔ $A(x,y)$ نسبت به نیمساز ناحیهٔ اوّل و سوّم نقطهٔ $B(y,x)$ است. بنابراین با توجه به فرض مسأله، می‌توان نوشت :

$$\begin{cases}2\alpha-\beta=\beta+2\\ \alpha+2=3\alpha+\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\alpha-2\beta=2\\ 2\alpha+\beta=2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\beta=0\ ,\ \alpha=1$$

۶ـ
$$-2\leq x<-1\Rightarrow [x]=-2\ ,\ |x|=-x$$

$$\Rightarrow y=2x-x+1\Rightarrow y=x+1$$

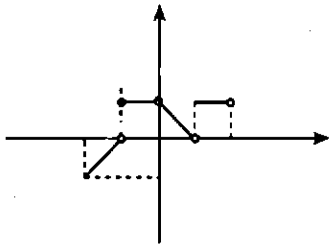
$$-1\leq x<0\Rightarrow [x]=-1\ ,\ |x|=-x$$

$$\Rightarrow y=2x-x+1\Rightarrow y=1$$

$$0\leq x<1\Rightarrow [x]=0\ ,\ |x|=x\Rightarrow y=-x+1$$

$$1\leq x<2\Rightarrow [x]=1\ ,\ |x|=x$$

$$\Rightarrow y=x-x+1\Rightarrow y=1$$



۷ـ

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&8\\-8&5\end{bmatrix}$$

$$AX=\begin{bmatrix}1&2\\-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a+2c&b+2d\\-2a+3c&-2b+3d\end{bmatrix}$$

$$A^2-3AX+I=\begin{bmatrix}-3&8\\-8&5\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}3(a+2c)&3(b+2d)\\3(-2a+3c)&3(-2b+3d)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3(a+2c)-2&3(b+2d)+8\\3(-2a+3c)-8&3(-2b+3d)+6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2c=\frac{2}{3}\\ -2a+3c=\frac{8}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}b+2d=-\frac{8}{3}\\ -2b+3d=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=\frac{-10}{21}\ ,\ c=\frac{4}{7}\\ b=\frac{-4}{7}\ ,\ d=\frac{-22}{21}\end{matrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{bmatrix}\frac{-10}{21}&\frac{-4}{7}\\ \frac{4}{7}&\frac{-22}{21}\end{bmatrix}$$

۸ـ
$$A^2=\begin{bmatrix}a&1\\-1&-a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&1\\-1&-a\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a^2-1&0\\0&a^2-1\end{bmatrix}$$

$$(A^2)^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}a^2-1&0\\0&a^2-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(a^2-1)^2}\begin{bmatrix}a^2-1&0\\0&a^2-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2-1}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=(\frac{1}{a^2-1})I\Rightarrow\frac{1}{a^2-1}=2$$

$$\Rightarrow a^2-1=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2=\frac{3}{2}\Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

۹ـ
$$4a^2+9b^2=4ab$$

$$\Rightarrow (2a+3b)^2-12ab=4ab$$

$$\Rightarrow (2a+3b)^2=16ab$$

$$\Rightarrow (\frac{2a+3b}{4})^2=ab$$

$$\Rightarrow \log(\frac{2a+3b}{4})^2=\log ab$$

$$\Rightarrow 2\log(\frac{2a+3b}{4})=\log a+\log b$$

$$\Rightarrow \log(\frac{2a+3b}{4})=\frac{\log a+\log b}{2}$$

۱۰ـ
$$2\log 2+\log(x^2-1)=\log(4x-1)$$

$$\Rightarrow \log 4(x^2-1)=\log(4x-1)$$

$$\Rightarrow 4x^2-4=4x-1\Rightarrow 4x^2-4x-3=0$$

$$\Delta=16-4(4)(-3)=64\ ,\ x=\frac{4\pm 8}{8}$$

$$\Rightarrow x_1=+\frac{3}{2}\ ,\ x_2=-\frac{1}{2}$$

تنها پاسخ قابل قبول $x=\frac{3}{2}$ است ؛ زیرا به ازای $x=-\frac{1}{2}$ ، $x^2-1<0$ و $4x-1<0$ و در نتیجه $\log(x^2-1)$ و $\log(4x-1)$ هر دو بی‌معنا می‌شوند.

هندسهٔ ۱

۱ـ با توجه به فرض مسأله داریم :

$$A\hat{O}C+B\hat{O}D=A\hat{O}B+B\hat{O}C+B\hat{O}C+C\hat{O}D$$

$$=2x\hat{O}B+2B\hat{O}C+2C\hat{O}y$$

$$=2(x\hat{O}B+B\hat{O}C+C\hat{O}y)$$

$$=2x\hat{O}y=2\times 90^\circ=180^\circ$$

۲ـ مثلثهای AMA' و BMB' در رأسهای A و B متساوی‌الساقین هستند و $\hat{A}+\hat{B}=180^\circ$ است. بنابراین داریم :

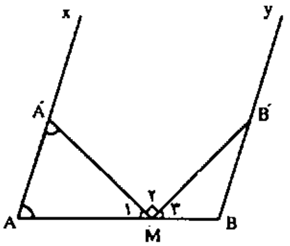
$$\hat{A}+2\hat{M}_1+\hat{B}+2\hat{M}_3=360^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\hat{M}_1+\hat{M}_3)+180^\circ=360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M}_1+\hat{M}_3=90^\circ\ ,\ \hat{M}_1+\hat{M}_2+\hat{M}_3=180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M}_2+90^\circ=180^\circ$$

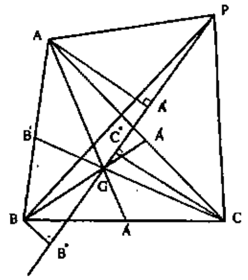
$$\Rightarrow \hat{M}_2=180^\circ-90^\circ=90^\circ$$



۳ـ می‌دانیم اگر خطی از محلّ برخورد میانه‌های یک مثلث بگذرد، فاصلهٔ یک رأس مثلث از آن خط مساوی مجموع فاصله‌های دو رأس دیگر از آن خط است ؛ یعنی درشکل زیر داریم :

$CC'' = BB'' + AA''$

از آن‌جا خواهیم داشت :



$$\frac{1}{2}PG.CC'' = \frac{1}{2}PG.BB'' + \frac{1}{2}PG.AA''$$

$$\Rightarrow S_{PGC} = S_{PBG} + S_{PAG}$$

۴ـ با استفاده از رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه داریم :

$$AB^2 = AH.AC$$

$$\Rightarrow 5^2 = AH(AH + \frac{144}{13})$$

$$\Rightarrow AH^2 + \frac{144}{13}AH - 25 = 0 \Rightarrow AH = \frac{25}{13}$$

$$\Rightarrow AC = AH + HC = \frac{25}{13} + \frac{144}{13} = 13$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{169 - 25} = 12$$

$$\text{محیط مثلث} = AB + AC + BC = 5 + 13 + 12 = 30$$

۵ـ نخست اندازهٔ x و سپس اندازهٔ ضلعهای مثلث CDE را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta ABC : DE \parallel AB \Rightarrow \frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB}$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = \frac{x+1/8}{2x}$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x = 2x^2 + 2/6x - 1/8$$

$$\Rightarrow 0/6x = 1/8 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow CD = x+1 = 4\ ,\ DA = 2x-1 = 5\ ,$$

$$CE = x + 1/8 = 4/8$$

$$EB = 2x = 6\ ,\ CA = CD + DA = 4 + 5 = 9$$

از طرفی داریم $\frac{CD}{CA} = \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB}$ ؛ یعنی :

$$\frac{4}{9} = \frac{DE}{27}$$

$\Rightarrow DE = 12 \Rightarrow$ محیط مثلث CDE

$= CD + DE + CE \Rightarrow$ محیط مثلث CDE

$$= 4 + 12 + 4/8 = 20/8$$

۶ـ در دایره‌ای به شعاع R ، اندازهٔ ضلع هر nضلعی منتظم محاطی، برابر است با :

$$C_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}$$

بنابراین داریم :

$$C_4 = 2 \times 12 \times \sin\frac{180^\circ}{4} = 24\sin 45^\circ$$

$$= 24 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

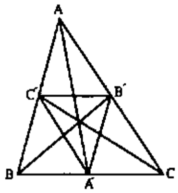
$$C_8 = 2 \times 12 \times \sin\frac{180^\circ}{8} = 24\sin 22^\circ/30'$$

$$= 24 \times \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = 12\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

نکته. به روش دیگر نیز مسأله را می‌توان حل کرد.

۷ـ مثلث ABC را درنظر گرفته، میانه‌های AA' ، BB' و CC' را رسم می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ ، مثلث میانه‌ای مثلث ABC نامیده می‌شود. می‌دانیم پاره‌خط واصل بین وسطهای دو ضلع هر مثلث، برابر نصف اندازهٔ ضلع سوم مثلث است ؛ بنابراین داریم :

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{2}$$



بنابراین دو مثلث $A'B'C'$ و ABC متشابه و نسبت تشابه آنها برابر $\frac{1}{2}$ است.

نکته. مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC نسبت به مرکز تجانس G (محل برخورد میانه‌های مثلث ABC) و نسبت تجانس $-\frac{1}{2}$ است : زیرا داریم :

$$\frac{\overline{GA'}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GB'}}{\overline{GB}} = \frac{\overline{GC'}}{\overline{GC}} = -\frac{1}{2}$$

بنابراین این دو مثلث متشابه‌اند.

۸ـ شعاع کره را R ، ضلع مکعب را a و قطر مکعب را d فرض می‌کنیم. می‌دانیم که $d = 2R$ و $d = a\sqrt{3}$ است : بنابراین داریم :

$$a\sqrt{3} = 2R \Rightarrow a = \frac{2R}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

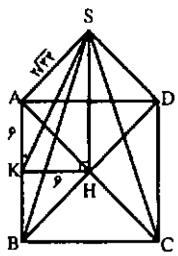
$$\text{حجم مکعب} = a^3 = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow \frac{\text{حجم مکعب}}{\text{حجم کره}} = \frac{8R^3}{3\sqrt{3}} : \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}\pi}$$

۹ـ هرم SABCD را درنظر می‌گیریم : SH ارتفاع هرم و SK یک سهم هرم را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ SAK داریم :



$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{136 - 36} = 10\,cm$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ SKH داریم :

$$SH = \sqrt{SK^2 - HK^2} = \sqrt{100 - 36}$$

$$\text{ارتفاع هرم} = 8cm$$

از آن‌جا خواهیم داشت :

$$\text{سطح جانبی هرم} = \frac{1}{2} \times \text{محیط قاعده} \times \text{سهم هرم}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 12 \times 10 = 240\,cm^2$$

$$\text{حجم هرم} = \frac{1}{3} \times \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{1}{3} \times 12^2 \times 8 = 384\,cm^3$$

ریاضیات ۵

۱ـ با توجه به تعریف فاصله داریم :

$$A = [2, +\infty[\ ,\ B =]-1, 3]$$

$$\Rightarrow A \cup B = [2, +\infty[\cup]-1, 3] =]-1, +\infty[$$

۲ـ داریم :

$$f(3) = (3)^2 + 1 = 10\ ,$$

$$f(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$$

$$f(0) = -0 + 4 = +4\ ,\ f(-\sqrt{2}) = +\sqrt{2} + 4$$

$$\Rightarrow f(-\sqrt{2}) \times f(0) = (\sqrt{2}+4) \times 4 = 16 + 4\sqrt{2}$$

۳ـ دامنهٔ تعریف این تابع، اشتراک دامنهٔ تعریف دو تابع $f_1(x) = \sqrt{x^2+1}$ و $f_2(x) = \sqrt{-x^2-2x-1}$ است : بنابراین داریم :

$$\begin{matrix} D_{f_1} : \\ D_{f_2} : \end{matrix} \begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \\ -x^2 - 2x - 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq 0 \\ -(x+1)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{f_1} = R \\ D_{f_2} = \{-1\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$$

$$= R \cap \{-1\} = \{-1\}$$

۴ـ داریم :

$$f(g(x)) = \frac{1}{x^3} + 1 = (\frac{1}{x^2})^{\frac{3}{2}} + 1$$

$$= (g(x))^{\frac{3}{2}} + 1 \Rightarrow f(x) = x^{\frac{3}{2}} + 1$$

$$= x\sqrt{x} + 1\ ,\ x \geq 0$$

۵ـ داریم :

$$f(2x-1) = (2x-1)^2 \Rightarrow f(x) = x^2 \Rightarrow$$

$$\text{حد}_{x \to \sqrt{2}} f(x) = \text{حد}_{x \to \sqrt{2}} (x^2) = (\sqrt{2})^2 = 2$$

۶ـ چون حدّ سر داده شده، عدد معین شده است، پس صورت و مخرج کسر، هم درجه‌اند ؛ یعنی $a = 6$ است. از طرفی داریم :

$$\frac{2}{b-1} = -1 \Rightarrow b - 1 = -2 \Rightarrow b = -1$$

۷ـ الف. با توجه به $\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ ، داریم :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{(x - \frac{\pi}{6})(x + \frac{\pi}{6})} =$$

$$\lim_{x - \frac{\pi}{6} \to 0} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{(x - \frac{\pi}{6})(x + \frac{\pi}{6})} = \frac{1}{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}} = \frac{3}{\pi}$$

ب. داریم :

$$\lim_{x \to 5} \frac{3 - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{7x+1} - 6} = \frac{3 - \sqrt{9}}{\sqrt{36} - 6} = \frac{3-3}{6-6} = \frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 5} \frac{3 - \sqrt{2x-1}}{\sqrt{7x+1} - 6}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(9 - 2x + 1)(\sqrt{7x+1} + 6)}{(\sqrt{7x+1} - 36)(3 + \sqrt{2x-1})}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{-2(x-5)(\sqrt{7x+1} + 6)}{7(x-5)(3 + \sqrt{2x-1})}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{36} + 6)}{7(3 + \sqrt{9})} = \frac{-24}{42} = \frac{-4}{7}$$

۸ـ شرط آن که تابع f در $x = -1$ پیوستگی راست داشته باشد، آن

است که $\lim_{x\to -1^{-}} f(x)=f(-1)$ باشد. بنابراین باید داشته باشیم:

$$(-1)^3+a(-1)=3 \Rightarrow -1-a=3 \Rightarrow a=-4$$

۹ـ با استفاده از دستورهای محاسبهٔ مشتق داریم:

الف) $y=(\sqrt{3x^2+1}-x+1)^3$

$$\Rightarrow y'=3\left(\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}-1\right)(\sqrt{3x^2+1}-x+1)^2$$

ب) $y=\sin x^3 . \cos^3 x$

$$y'=(\sin x^3)'.\cos^3 x+(\cos^3 x)'.\sin x^3$$

$$\Rightarrow y'=(3x^2\cos x^3).\cos^3 x$$

$$+3(-\sin x)\cos^2 x \times \sin x^3$$

$$\Rightarrow y'=3x^2\cos x^3.\cos^3 x$$

$$-3\sin x\cos^2 x\sin x^3$$

۱۰ـ با توجه به این که $U'.V+V'.U$، مشتق $U.V$ است، تابع $U.V$ را تعیین می‌کنیم.

$$U.V=(\sqrt{x}-\sqrt{x-3})^{11}(\sqrt{x}+\sqrt{x-3})^{11}$$

$$=(x-x+3)^{11}=3^{11}$$

$$\Rightarrow (U.V)'=U'.V+V'.U=0$$

۱۱ـ نقطهٔ $S(-1,-4)$ نقطهٔ Max یا Min تابع داده شده است؛ بنابراین داریم:

$$y'=2ax+b \Rightarrow 0=2a(-1)+b \Rightarrow b=2a \quad (1)$$

$$-4=a(-1)^2+b(-1)-3 \Rightarrow a-b=-1 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=2a \\ a-b=-1 \end{cases} \Rightarrow a-2a=-1$$

$$\Rightarrow a=1 ,\ b=2 \Rightarrow y=x^2+2x-3$$

۱۲ـ داریم:

$$y=x(3-x^2)=3x-x^3$$

$$y'=3-3x^2 ,\ y'=0 \Rightarrow 3-3x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 ,\ x=1$$

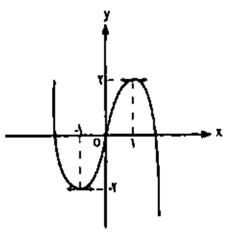
$$\Rightarrow y=2 ,\ x=-1 \Rightarrow -2$$

$$x\to \pm\infty \Rightarrow y\to \mp\infty ,\ x=0 \Rightarrow y=0$$

$$y=0 \Rightarrow x(3-x^2)=0 \Rightarrow x=0 ,\ 3-x^2=0$$

$$\Rightarrow x=0 ,\ x=+\sqrt{3} ,\ x=-\sqrt{3}$$

x	y
$y'=0\begin{cases}+1\\-1\end{cases}$	2 -2
0	0
$0,-\sqrt{3},\sqrt{3}$	0
$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$



x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	$-$		0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘	0 ↘	-2 Min	↗ 0 ↗	2 Max	↘ 0 ↘	$-\infty$

۱۳ـ مختصات پای قائم و ضریب زاویهٔ خط قائم را محاسبه می‌کنیم.

$$y=\frac{2x-1}{x+1} ,\ y=3 \Rightarrow 3=\frac{2x-1}{x+1}$$

$$\Rightarrow 3x+3=2x-1 \Rightarrow x=-4$$

$$\Rightarrow N(-4,3) \text{ پای قائم}$$

$$y'=\frac{2(x+1)-1(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow N \text{ مماس در } m=\frac{3}{(-4+1)^2}=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow N \text{ قائم در } m=-3 ,$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \Rightarrow y-3$$

$$=-3(x+4) \Rightarrow y=-3x-9 \quad \text{معادلهٔ خط قائم}$$

حسابان ۱

۱ـ یک تابع کثیرالجمله به معادلهٔ $n\in N$، $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...$، وقتی فرد است که ضرایب توانهای زوج x و عدد ثابت معادلهٔ تابع، مساوی صفر باشد. و وقتی این تابع زوج است که ضرایب توانهای فرد x، مساوی صفر باشد.

حل اولاً: $f(x)=(a-1)x^3+(a-2)x^2$

$$+(ab-8)x+(a-b+4)$$

f فرد باشد: $\begin{cases} a-2=0 \\ a-b+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=6 \end{cases}$

حل ثانیاً: f زوج باشد: $\begin{cases} a-1=0 \\ ab-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=8 \end{cases}$

۲ـ می‌دانیم a^n-b^n همواره بر $a-b$ بخش‌پذیر است؛ پس عبارت:

$$(x^3+x^2-4x+1)-(x^3-2x)$$

بر

$$(x^3+x^2-4x+1)^5-(x^3-2x)^5$$

بخش‌پذیر است:

$$x^3+x^2-4x+1-x^3+2x$$

$$=x^2-2x+1=(x-1)^2$$

۳ـ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ β و α

$$x^2-3x-1=0$$

دوطرف را به‌توان ۳ می‌رسانیم: $\alpha^5+\beta^5=k$

$$\alpha^{15}+\beta^{15}+3\alpha^5\beta^5(\alpha^5+\beta^5)=k^3$$

$$\alpha^{15}+\beta^{15}+3(\alpha\beta)^5(k)=k^3 ,\ \alpha.\beta=\frac{c}{a}=-1$$

$$\alpha^{15}+\beta^{15}+3(-1)^5k=k^3$$

$$\Rightarrow \alpha^{15}+\beta^{15}=k^3+3k$$

۴ـ اگر صفرهای دو تابع هم‌درجه، مساوی باشند، باید ضرایب آنها متناسب باشند؛ یعنی:

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{5}=\frac{6}{4}$$

$$\frac{a}{1}=\frac{b}{5}=\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=\frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow a+b=9$$

۵ـ طولهای ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی در حالت کلی ریشه‌های ساده مشتق است.

$$f(x)=x^3+mx^2-4$$

$$f'(x)=3x^2+2mx=0$$

$$\Rightarrow x(3x+2m)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{2m}{3} \end{cases}$$

$$x=0 \Rightarrow y=-4$$

$x=0$ نمی‌تواند طول ماکزیمم نسبی باشد؛ زیرا عرض ماکزیمم نسبی ۰ است؛ پس $x=-\frac{2m}{3}$ طول ماکزیمم نسبی است و عرض آن ۰ است.

$$M\left|\begin{matrix}-\frac{2m}{3}\\0\end{matrix}\right. \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} 0=-\frac{8m^3}{27}+\frac{4m^3}{9}-4$$

دوطرف را در ۲۷ ضرب می‌کنیم:

$$-8m^3+12m^3-4\times 27=0$$

$$\Rightarrow 4m^3=4\times 27 \Rightarrow m^3=27 \Rightarrow m=3$$

۶ـ فرض می‌کنیم $x=\frac{\pi}{9}$ و حاصل عبارت برابر A باشد؛ یعنی:

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cos 7x=A$$

دوطرف را در $2\sin x$ ضرب می‌کنیم:

$$2\cos x\sin x+2\cos 3x\sin x$$

$$+2\cos 5x\sin x+2\cos 7x\sin x=2A\sin x$$

هر جملهٔ سمت چپ را بنابه فرمول $2\cos a\sin b=\sin(a+b)-\sin(a-b)$: به حاصل جمع تبدیل می‌کنیم.

$$\sin 2x-\sin 0+\sin 4x-\sin 2x+\sin 6x$$

$$-\sin 4x+\sin 8x-\sin 6x=2A\sin x$$

$$\sin 8x=2A\sin x$$

$$\Rightarrow A=\frac{\sin 8x}{2\sin x}=\frac{\sin\frac{8\pi}{9}}{2\sin\frac{\pi}{9}}=\frac{1}{2}$$

$\sin\frac{8\pi}{9}$ برابر $\sin\frac{\pi}{9}$ است؛ زیرا:

$$\frac{8\pi}{9}+\frac{\pi}{9}=\pi$$

۷ـ $$\lim_{x\to 3}\frac{(x-5)+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-3}=\frac{0}{0}$$

صورت و مخرج را هم در مزدوج صورت و هم در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم:

$$A=\lim_{x\to 3}\frac{(x-5)+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+6}-3}\times\frac{(x-5)-\sqrt{x+1}}{(x-5)-\sqrt{x+1}}$$

$$\times\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3}$$

$$A=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-10x+25-x-1)(\sqrt{x+6}+3)}{(x+6-9)(x-5-\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2-11x+24)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(x-5-\sqrt{x+1})}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-8)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(x-5-\sqrt{x+1})}$$

$$=\frac{-5(3+3)}{-2-2}=\frac{30}{4}=\frac{15}{2}$$

۸ـ حد راست $\{\lim_{x\to 1^+} f(x)=a+b$

حد چپ $\{\lim_{x\to 1^-} f(x)=a\sin 0+b(2)=2b$

مقدار تابع $f(1)=\left[1-\frac{7}{2}\right]=\left[-\frac{5}{2}\right]=-3$

$$2b=-3 \Rightarrow b=-\frac{3}{2} \ , \ a+b=-3$$

$$\Rightarrow a-\frac{3}{2}=-3 \Rightarrow a=-\frac{3}{2}$$

۹ـ $f(x)=y \Rightarrow f^{-1}(y)=x$

$$g(x)=\frac{2+y}{2-y} \Rightarrow g^{-1}\left(\frac{2+y}{2-y}\right)=x$$

$$g^{-1}\left(\frac{2+y}{2-y}\right)=f^{-1}(y)$$

$$\frac{2+y}{2-y}=x \Rightarrow 2x-yx=2+y$$

$$\Rightarrow y(1+x)=2x-2$$

$$y=\frac{2x-2}{1+x}$$

$$g^{-1}(x)=f^{-1}\left(\frac{2x-2}{1+x}\right)$$

۱۰ـ $f(x)=\sin^3\sqrt[3]{x^2}+\cos^2\frac{1}{x}$

$$u=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow u'_x=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$v=\frac{1}{x} \Rightarrow v'_x=-\frac{1}{x^2}$$

$$f(x)=\sin^3 u+\cos^2 v$$

$$f'(x)=3(u'_x\cos u)\sin^2 u +2(-v'_x\sin v).\cos v$$

$$f'(x)=3\left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.\cos\sqrt[3]{x^2}\right)\sin^2\sqrt[3]{x^2} +2\left(\frac{1}{x^2}.\sin\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱ـ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-2}=2$

باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists M\in N \ \ni n\geq M$$

$$\Rightarrow\left|\frac{2n+1}{n-2}-2\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{2n+1-2n+4}{n-2}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{5}{n-2}\right|<\varepsilon$$

$$|n-2|=n-2 \ , \ n\in N \ , \ n>2$$

$$\frac{5}{n-2}<\varepsilon \Rightarrow \frac{n-2}{5}>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow n-2>\frac{5}{\varepsilon} \Rightarrow n>\frac{5}{\varepsilon}+2$$

$$M\geq\left[\frac{5}{\varepsilon}+2\right]+1$$

۲ـ

$$\frac{2}{(k+4)(k+6)}=\frac{a}{k+4}+\frac{b}{k+6} \Rightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-1\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(k+4)(k+6)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+6}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)+\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right)$$

الف) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)$:

$$f(k)=\frac{1}{k+4} \ , \ S_n=\sum_{k=1}^{n}\big(f(k)-f(k+1)\big)$$

$$\xrightarrow{\text{قاعدهٔ ادغام}} =f(1)-f(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{5}-\frac{1}{n+5}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$$

ب) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right)$:

$$f(k)=\frac{1}{k+5} \ , \ S_n=\sum_{k=1}^{n}\big(f(k)-f(k+1)\big)$$

$$\xrightarrow{\text{قاعدهٔ ادغام}} =f(1)-f(n+1)$$

$$\Rightarrow S_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+6} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+5}-\frac{1}{k+6}\right)=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}$$

تعداد کل $=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{11}{30}$

۳ـ $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{|x-1|}=-3$

باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0 \ \ni \ 0<1-x<\delta$$

$$\Rightarrow\left|\frac{x^3-1}{|x-1|}+3\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^3-1}{|x-1|}+3\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)}+3\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow\left|x^2+x-2\right|<\varepsilon \Rightarrow |(x-1)(x+2)|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow|(x-1)|\times|(x+2)|<\varepsilon$$

حال یک همسایگی یک‌طرفه به مرکز ۱ و به شعاع ۱ را درنظر می‌گیریم.

$$\begin{cases}x\to1^-\\ r=1\end{cases} \Rightarrow 0<x<1 \Rightarrow |x+2|<3$$

$$|x-1|\times3<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times|x+2|<\varepsilon$$

$$\underset{x\to1^-}{|(x-1)|}<\frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow 0<1-x<\frac{\varepsilon}{3}$$

$$\delta\leq\text{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

۴ـ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax+b+\sqrt{16x^2-128x+1}\right)=5$

$$ax+b-4\left(x+\frac{-128}{32}\right)\equiv5$$

$$ax+b-4x+16\equiv5$$

$$(a-4)x+(b+16)\equiv5$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a-4=0\Rightarrow a=4\\ b+16=5\Rightarrow b=-11\end{cases}$$

۵ـ $f(x)=\begin{cases}4x^3-9x^2+5x+1 & x\in Z\\ 1 & x\in Z\end{cases}$

اوّل پیوستگی تابع را در Z بررسی می‌کنیم.

مقدار تابع دراعداد صحیح = حدّ تابع دراعداد صحیح

$$4x^3-9x^2+5x+1=1$$

$$\Rightarrow4x^3-9x^2+5x=0$$

$$x(4x^2-9x+5)=0$$

$$\Rightarrow x=0 \ , \ 1,\frac{5}{4}$$

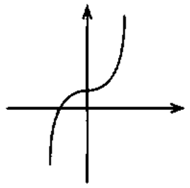
پس این تابع در $x=1$ و $x=0$، در مجموعه Z پیوسته است. از طرفی این تابع در $(\mathbb{R}-Z)$ پیوسته است؛ پس مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابع $Z-\{0,1\}$

است.

۶ـ اگر $f(x)=x^3+x+1$، آن‌گاه $f'(x)=3x^2+1>0$؛ چون تابع f پیوسته است و $f'(x)>0$، پس این تابع در $\mathbb{R}$ صعودی اکید است.

$\begin{cases}x\to-\infty\\ y\to-\infty\end{cases}$؛ یعنی شروع نمودار تابع از ربع سوم است و $\begin{cases}x\to+\infty\\ y\to+\infty\end{cases}$؛ یعنی پایان منحنی در ربع اوّل است. بنابراین، نمودار تابع چنین است:

$$\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$$



به‌طوری که ملاحظه می‌شود، نمودار تابع، محور x ها را فقط و فقط در یک نقطه قطع می‌کند. پس معادلهٔ $x^3+x+1=0$، فقط و فقط یک ریشه حقیقی دارد.

۷ـ $y=\frac{(x-1)(x-3)\sqrt{x}}{x(x^2-4)(x-1)^2(x+20)}$

$$x(x^2-4)(x-1)^2(x+20)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=+2\\ x=-2\\ x=1\\ x=-20\end{cases}$$

$x=-2$ و $x=-20$ غیرقابل قبول‌اند؛ زیرا داخل رادیکال صورت را منفی می‌کنند $x=0$، $x=2$ و $x=1$ قابل قبول‌اند، زیرا:

$$\lim_{x\to0}y=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to0}y=\frac{(x-1)(x-3)\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x}(x^2-4)(x-1)^2(x+20)}=\infty$$

$$\lim_{x\to1}y=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to1}y=\frac{(x-1)(x-3)\sqrt{x}}{x(x^2-4)(x-1)(x-1)(x+20)}=\infty$$

$$\lim_{x\to2}y=\infty$$

پس خطوط مجانبهای قائم، عبارتند از: $x=0$، $x=2$ و $x=1$.

۸ـ $y=\frac{(a-2)x^2-2(b-4)x}{x-5}$

یک تابع کسری گویا، وقتی مجانب افقی دارد که درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج بیشتر نباشد.

$$a-2=0\Rightarrow a=2$$

$$y=\frac{-2(b-4)x}{x-5}$$

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\lim y=\frac{-2(b-4)}{1}=2$$

$$-b+4=1\Rightarrow b=3$$

۹ـ $f(x)=\begin{cases}x^n.\cos\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^n.\cos\frac{1}{x}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}x^{n-1}.\cos\frac{1}{x}=0\times(\text{تابع کراندار})=0$$

پس: $|n-1| \geq 1$ یا $n \geq 2$.

۱۰ـ $f(x)=\frac{x}{1+x^2}\quad x>1\quad (f^{-1})'(\frac{2}{5})=?$

$$\frac{2}{5}=\frac{x}{1+x^2}\Rightarrow 2+2x^2=5x\Rightarrow 2x^2-5x+2=0$$

$x=2\ ,\ \frac{1}{2}$ ‏ $x=\frac{1}{2}$ غیرقابل قبول است $:x=2$

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow f'(2)=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$$

داریم $A\Big|^{a}_{b}$ روی منحنی f باشد: $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$ پس:

$$(f^{-1})'(\frac{2}{5})=\frac{1}{f'(2)}$$

$$(f^{-1})'(\frac{2}{5})=\frac{1}{-\frac{3}{5}}=-\frac{5}{3}$$

هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

۱ـ $u=\frac{a.b}{|b|^2}b=\frac{-3-1+1}{1+1+1}(-i+j+k)$

$$=i-j-k$$

۲ـ $\begin{cases}x=2t\\y=-t\\z=t\end{cases}$: معادلهٔ پارامتری خط l

$u=(2,-1,1)$: بردار هادی خط

فرض کنیم $p_t(2t,-t,t)$ پای عمود و بردار هادی خط l به صورت $u=(2,-1,1)$ باید بر p_tp عمود باشد: پس باید $\vec{u}.\vec{p_tp}=0$

$$u.p_tp=0\Rightarrow(2,-1,1).(-1-2t,2+t,1-t)=0$$

$$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\Rightarrow p_t(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$$

۳ـ بردار نرمال صفحهٔ خواسته شده، از ضرب خارجی بردارهای نرمال صفحه‌های داده شده به‌دست می‌آید.

$$N=N_1\times N_2=(i-j-k)\times(2i+j+k)$$

$$=-3j+3k$$

$$N=(0,-3,3)\ ,\ P\Big|\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\end{smallmatrix}$$

$\Rightarrow$ معادلهٔ صفحه $-3(y+1)+3(z-0)=0$

$$\Rightarrow -3y+3z=3$$

۴ـ $\begin{cases}x=-t-1\\y=2t\\z=t+1\end{cases}$

نقطهٔ دلخواه از خط $\Rightarrow p(-t-1,2t,t+1)$

$$\frac{|4(-t-1)-3(2t)+0(t+1)-1|}{\sqrt{16+9}}=3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=-1\rightarrow p_1\Big|\begin{smallmatrix}-2\\2\\2\end{smallmatrix}\\ t=-2\rightarrow p_2\Big|\begin{smallmatrix}1\\-4\\-1\end{smallmatrix}\end{cases}$$

۵ـ کافی است ثابت کنیم $M^T=M$

$$M^T=(AA^T-BB^T)^T$$

$$\Rightarrow M^T=(AA^T)^T-(BB^T)^T$$

$$=(A^T)^TA^T-(B^T)^TB^T$$

$$=AA^T-BB^T=M$$

۶ـ $\begin{vmatrix}a+x+y+z & y & z\\a+x+y+z & a+y & z\\a+x+y+z & y & a+z\end{vmatrix}\xrightarrow{(C_2+C_3)+C_1}$

$$\xrightarrow{x+y+z=0}\begin{vmatrix}a & y & z\\a & a+y & z\\a & y & a+z\end{vmatrix}\xrightarrow{-R_1+R_2,-R_1+R_3}$$

$$\begin{vmatrix}a & y & z\\0 & a & 0\\0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^3$$

۷ـ می‌دانیم $|A^{-1}|=|A|^{-1}$، از طرفی داریم:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}\Rightarrow |A|A^{-1}=A^*$$

$$\Rightarrow \big||A|A^{-1}\big|=|A^*|\Rightarrow |A|^n|A^{-1}|=|A^*|$$

$$\Rightarrow |A|^n\times|A|^{-1}=|A^*|\Rightarrow |A^*|=|A|^{n-1}$$

۸ـ $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\1 & a & 2\\3 & 2 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=0$

۹ـ الف) $(fog)(x+y)=f(g(x+y))$

$$\overset{\text{g خطی}}{=}f[g(x)+g(y)]$$

$$\overset{\text{f خطی}}{=}f(g(x))+f(g(y))$$

$$=fog(x)+fog(y)$$

ب) $fog(rx)=f(g(rx))\overset{\text{g خطی}}{=}f(rg(x))$

$$\overset{\text{f خطی}}{=}rf(g(x))=rfog(x)$$

۱۰ـ $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}-y=X\\x=Y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=Y\\y=-X\end{cases}$$

$$x^2-y^2=1\xrightarrow[y=-X]{x=Y}(Y)^2-(-X)^2=1$$

$$\Rightarrow Y^2-X^2=1$$

۱۱ـ $f(x,y,z)=(x-y,2y+z)\Rightarrow f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$

$$k_f=\{(x,y,z)|f(x,y,z)=(0,0)\}$$

$$=\{(x,y,z)|(x-y\ ,\ 2y+z)=(0,0)\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=0\\2y+z=0\end{cases}$$

$x-y=0$ و $2y+z=0$ هرکدام در $\mathbb{R}^3$ یک صفحه بوده و محلّ برخورد دو صفحه، یک خط است؛ پس k_f یک خط بوده و بُعد آن ۱ است.

۱۲ـ کافی است هستهٔ f را مشخص کنیم و اگر $k_f=\{\vec{0}\}$، نگاشت ۱ـ۱ است.

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x+y=0\\x-2y=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=y=0\Rightarrow k_f=\{(x,y)|x=y=0\}$$

f یک به یک است: $\Rightarrow k_f=\{(0,0)\}$

۱۳ـ برای پوشا بودن $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^2$، باید $3-2=1$ = بُعد هسته باشد.

$$k_f=\{(x,y,z)|(x,y-z)=(0,0)\}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y-z=0\end{cases}$$

و چون محلّ برخورد دو صفحهٔ متقاطع درفضا، یک خط و بُعد آن ۱ است؛ پس نگاشت پوشاست.

۱۴ـ نگاشت $f:\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}^3$ یک به‌یک است، اگر پوشا باشد و بعکس؛ پس:

$$k_f=\{(x,y,z)|(x,2y,y+z)=(0,0,0)\}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\2y=0\\y+z=0\end{cases}\Rightarrow k_f=\{(x,y,z)|x=y=z=0\}$$

$$=\{(0,0,0)\}$$

پس نگاشت یک به یک و در نتیجه پوشاست.

۱۵ـ $f(x,y)=(2x-y\ ,\ x+2y)\Rightarrow A=\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times A^*=\frac{1}{5}\times\begin{bmatrix}2 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\-\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x,y)=(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y\ ,\ \frac{1}{5}x+\frac{2}{5}y)$$

۱۶ـ $\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 0\\2 & 1 & -1 & 1\\1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{-R_2+R_1}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & -1\\2 & 1 & -1 & 1\\1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3+R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 0 & -1\\\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\1 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]$$

$$\rightarrow\begin{cases}-x=-1\Rightarrow x=1\\\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}\Rightarrow y=2\\x+3y-2z=1\Rightarrow z=3\end{cases}$$

۱۷ـ $f(x,y)=(5x-2y,4x-y)$

$$\Rightarrow A=\begin{bmatrix}5 & -2\\4 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow|A-\lambda I|=0$$

$$\Rightarrow\lambda^2-4\lambda+3=0\Rightarrow\lambda_1=1\ ,\ \lambda_2=3$$

راستای ویژه: $(a-\lambda)x+by=0$

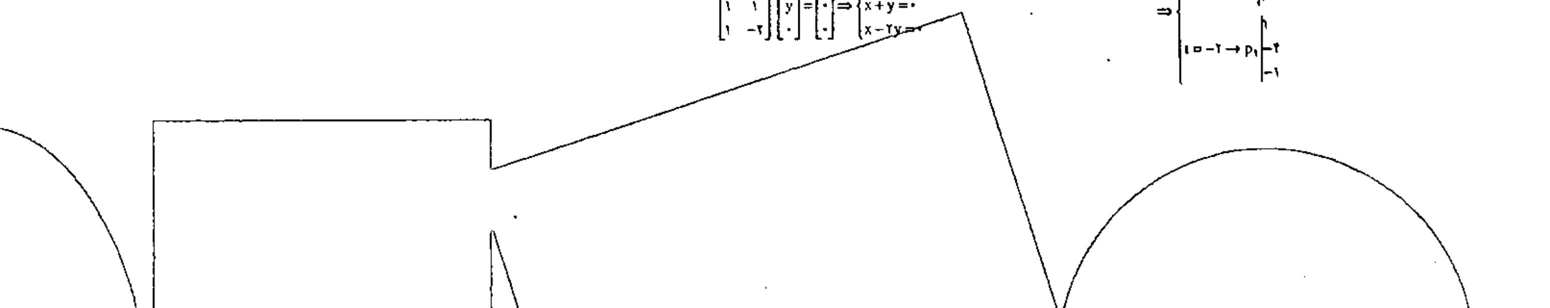
$$\Rightarrow(5-\lambda)x-2y=0$$

$$\lambda_1=1\Rightarrow(5-1)x-2y=0$$

راستای ویژهٔ متناظر با $\Rightarrow 4x=2y$

$$\lambda_2=3\Rightarrow(5-3)x-2y=0$$

راستای ویژهٔ متناظر با $\Rightarrow y=x$



ریاضی عمومی ۱

۱ـ الف. اگر بخواهیم داده‌ها را در ۵ دسته طبقه‌بندی کنیم :

$$\text{طول دسته‌ها} = \frac{\text{دامنه تغییرات}}{\text{تعداد دسته‌ها}} = \frac{20-7}{5}$$

$$= \frac{13}{5} = 2/6$$

دسته‌ها	x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
۷ـ۹/۶	۸/۳	۲	۱۶/۶	۶۵/۴۴
۹/۶ـ۱۲/۲	۱۰/۹	۶	۶۵/۴	۵۸/۴۱
۱۲/۲ـ۱۴/۸	۱۳/۵	۲	۲۷	۰/۵۴
۱۴/۸ـ۱۷/۴	۱۶/۱	۶	۹۶/۶	۲۶
۱۷/۴ـ۲۰	۱۸/۷	۴	۷۴/۸	۸۷/۶۱
		n=۲۰	۲۸۰/۴	۲۳۸

ب.

میانگین $\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{n} = \frac{280/4}{20} = 14/02$

واریانس $\delta^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{238}{20} = 11/9$

انحراف معیار $\delta = \sqrt{11/9} = 3/45$

ضریب تغییرات $CV = \frac{\delta}{\bar{X}} = \frac{3/45}{14/02} = 0/25$

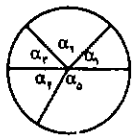
ج. $\alpha_1 = \frac{f_1}{n} \times 360^\circ = \frac{2}{20} \times 360^\circ = 36^\circ$

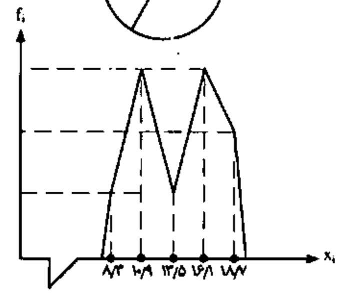
$\alpha_2 = \frac{f_2}{n} \times 360^\circ = \frac{6}{20} \times 360^\circ = 108^\circ$

$\alpha_3 = \frac{f_3}{n} \times 360^\circ = \frac{2}{20} \times 360^\circ = 36^\circ$

$\alpha_4 = \frac{f_4}{n} \times 360^\circ = \frac{6}{20} \times 360^\circ = 108^\circ$

$\alpha_5 = \frac{f_5}{n} \times 360^\circ = \frac{4}{20} \times 360^\circ = 72^\circ$





۲ـ الف.

$n(A) = \binom{2}{2} \times \binom{8}{3} = 56 ; \; n(S) = \binom{10}{5} = 252$

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{56}{252} = \frac{2}{9}$

ب. $n(B) = \binom{2}{1}\binom{8}{4} = 140 ;$

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{140}{252}$

۳ـ فرد دارای شغل دولتی است : E

فرد دارای تحصیل بالاتر از دیپلم است : E_1

فرد دارای تحصیل کمتر از دیپلم است : E_2

$P(E_1) = 0/4 \; , \; P(E|E_1) = 0/3$

$P(E_2) = 0/6 \; , \; P(E|E_2) = 0/2$

$P(E) = P(E_1)P(E|E_1) + P(E_2)P(E|E_2)$

$P(E) = 0/4 \times 0/3 + 0/6 \times 0/2 = 0/24$

۴ـ
$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{cases} y = mx + x \\ y = mx - m + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1),(2) \Rightarrow x = -m + 2$$

اگر $x = -m + 2$ را در معادله‌های (۲) و (۳) جایگزین کنیم، خواهیم داشت :

$$\begin{cases} y = m(-m+2) - m + 2 \\ y = 2(-m+2) - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -m^2 + m + 2 \\ y = -2m + 3 \end{cases} \Rightarrow m^2 - 3m + 1 = 0$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

۵ـ $n = 1 : 1^3 = (\frac{1(1+1)}{2})^2 \Rightarrow 1 = 1$

$n = k : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3$

$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

$n = k+1 : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$

$= \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

به‌دوطرف فرض استقراء $(k+1)^3$ را اضافه می‌کنیم :

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3$

$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$

$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$

$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$

$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

پس حکم استقراء برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

۶ـ جمله‌عمومی $t_p = \binom{n}{p-1} a^{n-(p-1)} b^{p-1}$

$t_p = \binom{15}{p-1} (x^2)^{15-(p-1)} (\frac{1}{2x^3})^{p-1}$

$t_p = \binom{15}{p-1} x^{32-2p} (\frac{1}{2})^{p-1} x^{-3p+3}$

$t_p = (\frac{1}{2})^{p-1} \binom{15}{p-1} x^{35-5p}$

اگر جمله pام مستقل از x باشد، آن‌گاه توان x در آن برابر صفر است، درنتیجه داریم :

$35 - 5p = 0 \Rightarrow p = 7$

جمله هفتم مستقل از x است ؛ بنابراین :

$t_7 = (\frac{1}{2})^{7-1} \binom{15}{6} = (\frac{1}{2})^6 \binom{15}{6}$

۷ـ اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم جدید باشند، پس $x_1 = \alpha^2$ و $x_2 = \beta^2$. از طرفی می‌دانیم : $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ در نتیجه :

$x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= (\frac{-b}{a})^2 - 2(\frac{c}{a}) = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

$x_1 x_2 = \alpha^2 \beta^2 = (\frac{c}{a})^2 = \frac{c^2}{a^2}$

بنابراین، معادله جدید با توجه به $x_1 + x_2$ و $x_1 x_2$ به‌صورت زیر است :

$x^2 - (\frac{b^2 - 2ac}{a^2})x + \frac{c^2}{a^2} = 0$

$a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$

۸ـ $y = (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1$

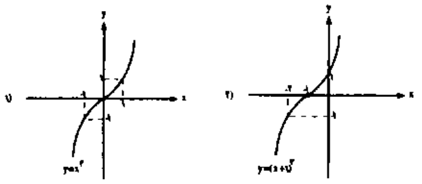
$\Rightarrow y = (x+1)^3 - 1$

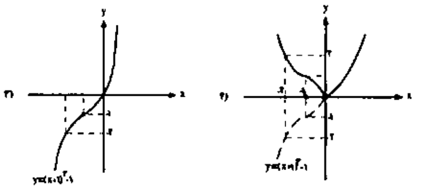
نکته. برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (x + \alpha)^3 + \beta$ ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

۱ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = x^3$ را رسم می‌کنیم.

۲ـ اگر $\alpha > 0$ آن‌گاه نمودار را به اندازه α واحد در جهت محور xها به‌سمت چپ و اگر $\alpha < 0$ نمودار را به اندازه α واحد در جهت محور xها به سمت راست انتقال می‌دهیم.

۳ـ اگر $\beta > 0$ آن‌گاه نمودار حاصل از مرحله ۲ را در جهت محور yها به اندازه β واحد به سمت بالا و اگر $\beta < 0$ آن‌گاه نمودار حاصل از مرحله ۲ را در جهت محور yها به اندازه β واحد به سمت پایین انتقال می‌دهیم.

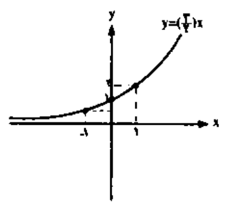




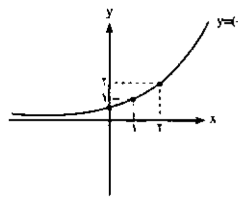
۹ـ برای رسم نمودار تابع باضابطهٔ $y = 2(\frac{3}{2})^{x-1}$ ، مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

۱ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (\frac{3}{2})^x$ را به کمک نقطه‌یابی رسم می‌کنیم :

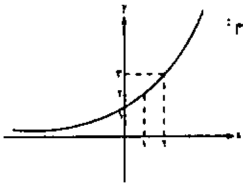
x	$-\infty$	-1	۰	۱	$+\infty$
y	۰	$\frac{2}{3}$	۱	$\frac{3}{2}$	$+\infty$



۲ـ برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = (\frac{3}{2})^{x-1}$ کافی است نمودار مرحله را در جهت محور xها به سمت راست یک واحد منتقل کنیم.



۳ـ برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۲(\frac{۳}{۲})^{x-۱}$ ، نقاط روی نمودار مرحله ۲ را در ۲ ضرب می‌کنیم :



۱۰ـ $\begin{cases} y \to \pm\infty \\ x^۳-۳x^۲+۳x=۰ \end{cases}$ مجانب قائم

معادله مجانب قائم: $x(x^۲-۳x+۳)=۰ \Rightarrow x=۰$

$\begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$ مجانب مایل وجود دارد

$$\begin{array}{l|l} x^۳-۳x^۲+۳x & ۳x+۹ \\ \hline ۳x^۲+۲x^۲ & \\ -۳x^۲+۹x^۳-۹x^۲ & \\ \hline ۹x^۳-۷x^۲ & \\ -۹x^۳+۲۷x^۲-۲۷x & \\ \hline ۲۰x^۲-۲۷x & \end{array}$$

معادله مجانب مایل $y=۳x+۹$



جوابهای تفریح اندیشه

○ پاسخ ۱ :

نمایندگان آسیا را در نظر می‌گیریم. چون مجموع نمایندگان دو قارهٔ امریکا و آسیا جمعاً ۶ نفر است، اگر به فرض امریکا لااقل یک نماینده فرستاده باشد، آسیا می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ نماینده داشته باشد. برای آسیا عدد ۳ غیرممکن است، چون در این صورت تعداد نمایندگان امریکا و آسیا یکسان می‌شود. ۶=۳+۳ بنابراین چهار مورد ممکن است اتفاق بیفتد :

۱ـ اگر نمایندهٔ آسیا یک نفر باشد به ناچار نماینده امریکا ۵ نفر و نماینده اروپا ۶ نفر خواهند بود، پس ۳ نفر برای افریقا می‌ماند و این هم غیرممکن است زیرا یک قاره ۴ نماینده فرستاده است.

۲ـ اگر ۲ نفر از آسیا آمده باشند، از امریکا ۴ نفر و از اروپا ۵ نفر باید شرکت کرده باشند و همین‌طور ۴ نفر از افریقا که این هم غیرممکن است زیرا یک عدد دو بار تکرار می‌شود.

۳ـ اگر از آسیا ۵ نفر و از امریکا یک نفر و از اروپا ۲ نفر و از افریقا ۷ نفر باشند باز این امر غیرممکن است، چون نمایندهٔ هیچ قاره‌ای ۴ نفر نخواهد بود.

۴ـ بالاخره، ۴ نفر از آسیا ۲ نفر از امریکا ۳ نفر از اروپا و ۶ نفر از افریقا باید آمده باشند که این، تنها مورد ممکن است.

○ پاسخ ۲ :

با سکهٔ ۱۱ واحدی می‌توانیم مقادیر زیر را به طور کامل پرداخت کنیم :

۱۱،۲۲،۳۳،۴۴،۵۵،۶۶،......

با اضافه کردن یک سکهٔ ۷ واحدی پرداختهای زیر ممکن است :

۷،۱۸،۲۹،۴۰،۵۱،۶۲،۷۳،......

و با دو سکهٔ ۷ واحدی :

۱۴،۲۵،۳۶،۴۷،۵۸،۶۹،۸۰،......

و غیره...

بالاخره با ده سکهٔ ۷ واحدی :

۷۰،۸۱،۹۲،......

و با ۱۱ سکهٔ ۷ واحدی بخشی از حالت اوّل تکرار می‌شود، مانند :

۷۷،۸۸،۹۹،......

عددهای حاصل از این یازده دنباله کاملاً با هم متفاوتند زیرا دو عدد ۷ و ۱۱ نسبت به هم اوّل می‌باشند.

همچنین یازده دنباله بالا که قدر نسبتشان ۱۱ می‌باشد، همهٔ عددهای صحیح بعد از ۷۰ را دربردارند.

اما عددهای یازدهمین دنباله در مکانهایی قرار می‌گیرند که به وسیلهٔ ۱۰ دنباله قبلی خالی مانده‌اند، و اوّلین جای خالی نزدیک به ۷۰ که به وسیله این دنباله پر نمی‌شود ۱۱ واحد کمتر از ۷۰ یعنی ۵۹=۱۱−۷۰ است.

بنابراین بزرگترین مبلغ غیرقابل پرداخت، ۵۹ می‌باشد.

○ پاسخ ۳ :

اشخاص مورد سؤال به چهار دسته تقسیم می‌شوند :

آنهایی که از محصول استفاده نمی‌کنند A:

عده‌ای که آن را فقط به صورت مایع به کار می‌برند B

تعدادی که از محصول به هر دو صورت استفاده می‌کنند:C

عده‌ای که آن را فقط به صورت پودر به کار می‌برند:D

برحسب داده‌ها داریم :

$A+D=\frac{۲}{۷}$ کل افراد مورد سؤال، و $A+B=\frac{۱}{۳}$ کل افراد مورد سؤال و $A=\frac{۱}{۵}$ کل افراد مورد سؤال و $C=۴۲۷$.

از آنجا :

$B=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۵}=\frac{۲}{۱۵}$ و $D=\frac{۲}{۷}-\frac{۱}{۵}=\frac{۳}{۳۵}$ و

$$A+B+D=\frac{۴۴}{۱۰۵} \Rightarrow C=\frac{۶۱}{۱۰۵}$$

$$۴۲۷:\frac{۶۱}{۱۰۵}=\frac{۴۲۷\times۱۰۵}{۶۱}=۷۳۵$$

پس تمام افراد مورد سؤال ۷۳۵ نفر می‌باشند.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

دایرةالمعارفهای هندسه

این سری کتاب مجموعهٔ کاملی است از تعریفها، قضیه ها، مسأله ها و تاریخ هندسه که با بهره گیری از منابع متعدد ایرانی و خارجی تدوین و تألیف شده است.



دایرةالمعارف هندسه جلد ۵

مؤلف: محمدهاشم رستمی / ناشر: انتشارات مدرسه

جلد پنجم دایرةالمعارف هندسه رابطه های متری در مثلث، مثلث و دایره های: محیطی، محاطی و دایره های دیگر است که ۵ بخش دارد: رابطه های متری در مثلث، رابطه های متری در مثلث و دایرهٔ محیطی، رابطه های متری در مثلث و دایره های محاطی، رابطه های متری در مثلث و دایره های محیطی و محاطی، رابطه های متری در مثلث و دایره های دیگر.



دایرةالمعارف هندسه جلد ۶

مؤلف: محمدهاشم رستمی / ناشر: انتشارات مدرسه

جلد ششم دایرةالمعارف هندسه، رابطه های متری در مثلثهای ویژه شامل ۸ بخش است: مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین، مثلث قائم الزاویه، مثلث با زاویهٔ منفرجه؛ و دایره های محیطی، محاطی و دایره های دیگر.

مطالعه این کتابها را به همه دبیران، دانشجویان و دانش آموزان رشته ریاضی توصیه می کنیم.



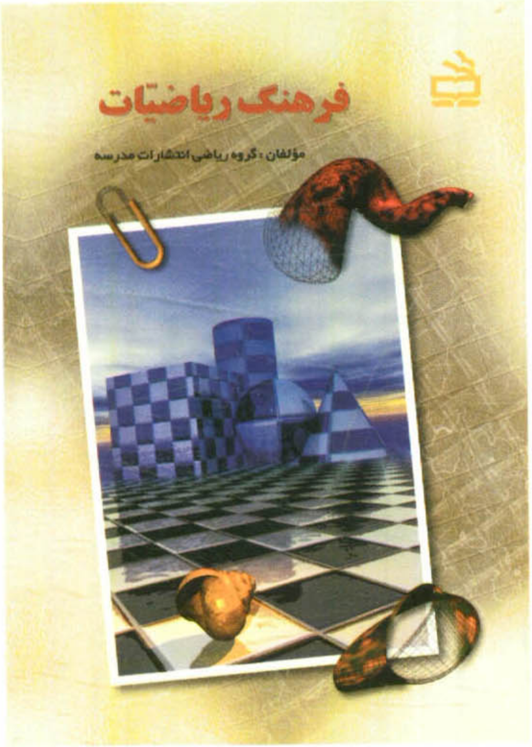
ورودی به نظریهٔ اعداد

مؤلف: حمیدرضا امیری / ناشر: انتشارات مدرسه

این کتاب که بیست و سومین کتاب از سری کتابهای کوچک ریاضی است به موضوع نظریه اعداد پرداخته و این شاخه از ریاضیات که از قدیمی ترین شاخه های ریاضی محسوب می شود در این کتاب به شکل ساده و قابل فهمی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. دراین کتاب از مسائل حل شدهٔ کلیدی و دو مجموعهٔ پرسشهای چهارگزینه ای با حل تشریحی استفاده شده است.

توجه: از سری کتابهای گروه ریاضی انتشارات مدرسه، کتابهای زیر در دست چاپ است:

۱ ـ ورودی به آمار / دکتر عین الله پاشا ۲ ـ هندسهٔ تحلیلی / محمد هاشم رستمی
۳ ـ ترکیبیات / حمید رضا امیری ـ میر شهرام صدر ۴ ـ سری کتابهای ریاضی از مدرسه تا دانشگاه
ـ ریاضی سال اول (۱ و ۲) / ریاضی سال دوم (۳ و ۴) / جبر و احتمال / حسابان ۱ و ۲ / ریاضی ۵ / ریاضی عمومی ۱ و ۲ پیش دانشگاهی / حساب دیفرانسیل ۱ و ۲ پیش دانشگاهی / ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی / هندسه تحلیلی و جبر خطی پیش دانشگاهی


فرهنگ ریاضیات
مؤلفان: گروه ریاضی انتشارات مدرسه

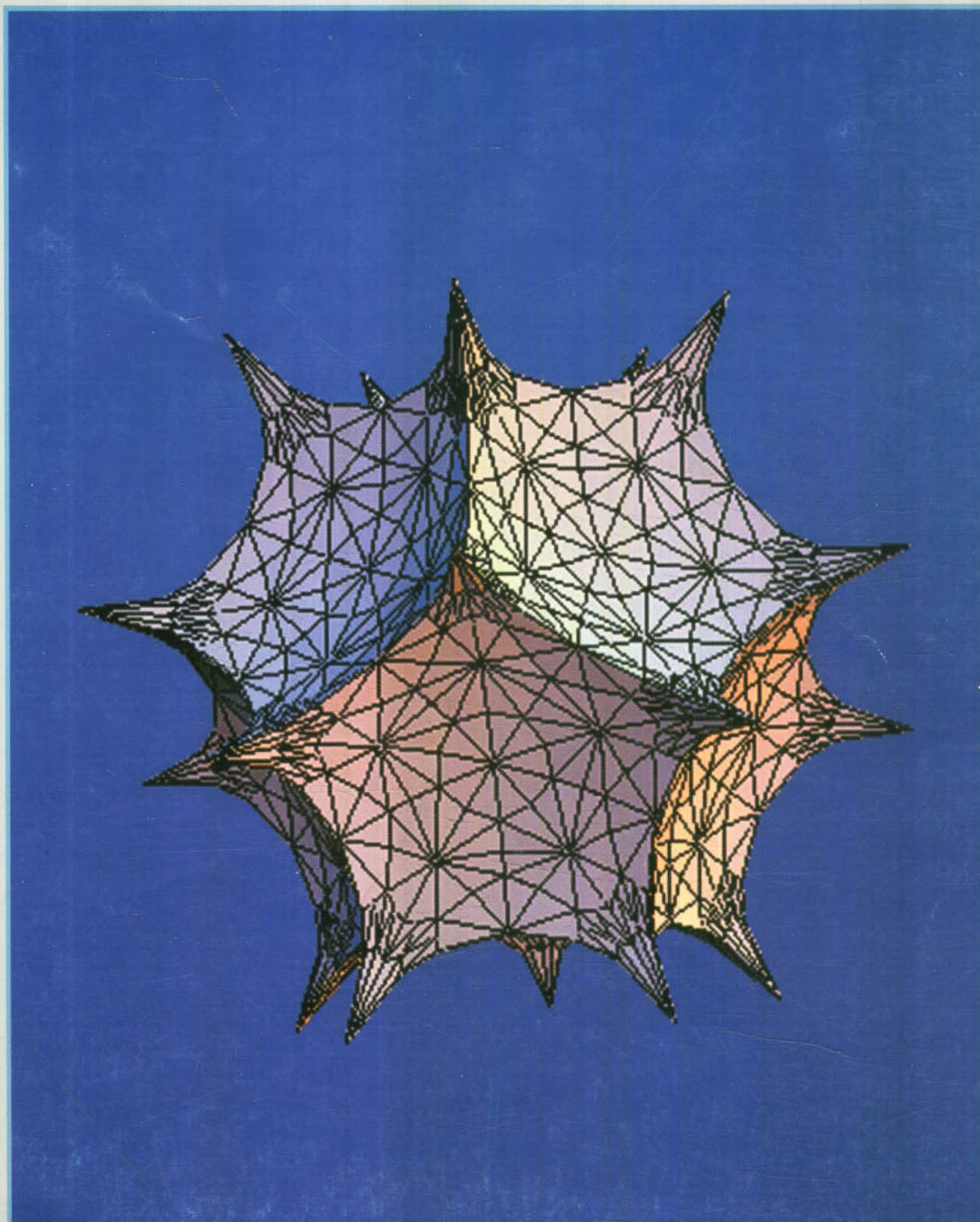
مجلّه ریاضی

برهان

۳۳

برای دانش آموزان دبیرستان

سال دهم، شماره دوم، پاییز ۱۳۷۹، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

سال دهم، پاییز ۱۳۷۹، شمارهٔ دوم

صاحب امتیاز: انتشارات مدرسه

مدیر مسؤول: عبدالعظیم فریدون

سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی: میرشهرام صدر

طراح و صفحه آرا: فرشید پیمان پو

طراح جلد: مرضیه رضایی

مدیر فنی: هوشنگ آشتیانی

چاپ و صحافی: چاپخانه مدرسه

برهان

● حرف اوّل /سخن سر دبیر	۱
● از تاریخ بیاموزیم(۷)/ پرویز شهریاری	۲
● هم ارزی رادیکالها/ احمد قندهاری	۷
● مجموعه‌ها/ حمیدرضا امیری	۱۰
● مکان هندسی(۲۲)/ محمد هاشم رستمی	۱۶
● آنالیز ترکیبی(۲)/ میر شهرام صدر	۱۹
● گشت و گذاری درریاضیات معاصر/ محمد علی فریبرزی عراقی	۲۴
● عدم وجود حد/ مجتبی معارف وند	۲۶
● نشستی با هیأت تحریریه مجله برهان و گروه ریاضی انتشارات مدرسه	۳۱
● معادله درجه اوّل(۱)/ هوشنگ شرقی	۳۹
● آیا استدلال تمثیلی، یک استدلال ریاضی است؟/ علیرضا عین اللهی	۴۵
● برنامه نویسی به زبان پاسکال/ محمد رحیم	۴۸
● مسائل برای حل	۵۱
● حل تشریحی مسائل	۵۴
● مسأله مسابقه‌ای	۶۴
● جواب تفریح اندیشه	۶۴
● حل مسأله مسابقه‌ای برهان ۳۱	۶۴

◀ نشانی: خیابان سپهبدقرنی ،خیابان سپند شرقی ، پلاک ۳۸

◀ تلفن ۶ـ ۸۸۹۶۷۶۵، ۷۱ـ ۸۸۰۴۵۶۸ ، دور نویس(فاکس) : ۸۸۲۰۵۹۹ ، صندوق پستی : ۱۹۴۹/ ۱۳۱۵۵

◀ تلفن امور مشترکین: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴

انتشارات مدرسه
وابسته به وزارت آموزش و پرورش

برهان تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

● نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان) ● طرح مسائل کلیدی (برای دانش آموزان) به همراه حل آنها ● طرح مسائل مسابقه ای (برای دانش‌آموزان) به همراه حل آنها ● طرح معماهای ریاضی ● نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

برهان هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود

■ هیات تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.

■ مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.

■ مقاله های وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

■ مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.

■ استفاده از مطالب مجلّه در کتابها یا مجلّه های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اوّل

فصل زمستان همیشه، زمستان سال ۵۷ را به یاد می آورد، زمستانی که بهار پیروزی را زودتر از بهار طبیعت به ارمغان آورد. یاد فداکاریها، ایثارها، یکدلی ملّتی که از ظلم و ستم رژیم منفور پهلوی به ستوه آمده و دست به دست هم با مشتهای گره شده در مقابل آتش دژخیمان چون کوه ایستادگی می کردند. راستی شما در آن سال هنوز متولد نشده بودید. ای کاش بودید و قدرت عظیم رهبری امام خمینی و اتحاد و اطاعت مردم از رهبری را می دیدید. مردم حال و هوای عجیبی داشتند هیچ کس فقط به فکر خودش نبود، دست به دست یکدیگر مشکلات هم را برطرف می کردند و اعلامیه های امام خمینی دست به دست می شد و هر روز در مقابل حیله های رژیم تدابیر جدیدی پی ریزی می شد. احساس می کردیم همواره امام (ره) مراقب اوضاع است و اعتماد و توکّل قویی سراپای مردم را فراگرفته بود. همین اتحاد و یکپارچگی در زمان جنگ تحمیلی و دفاع مقدس به وجود آمد و ملّت، سراپا مقاومت شد و ایثار، سراپا گوش به فرمان امام خمینی و همان مشتها این بار نارنجک و تفنگ در دست گرفتند و از انقلاب خود دفاع کردند، امروز هم باید این اتحاد و اطاعت از رهبری **حرف اول** را بزند.

باید دستهایمان علاوه بر قلم و کتاب با سلاح نیز آشنا باشد و گوش به فرمان رهبرمان در سازندگی و حفظ ارزشهای انقلاب اسلامیمان کوشا باشیم. باید دست در دست یکدیگر نهیم و نگذاریم انقلاب به دست نااهلان و بیگانگان تضعیف شود. باید هشیار باشیم، خیلی بیشتر از گذشته، دشمن می خواهد از راه فرهنگ به ما ضربه بزند، این بار این راه را پیش گرفته ولی نمی تواند عزم و اراده و ایمان ملت ما را بشکند. فرهنگ اسلامی و ایرانی ما اجازهٔ ورود فرهنگ سراپا فساد و تباهی غرب را نداده و نخواهد داد. جوان ایرانی اصالت خود را از دست نمی دهد و این بار هم با یاری خداوند و عنایت حضرت ولی عصر (عج) دشمن شکست خورده است.

شما جوانان برومند در خط مقدم این جبهه قرار دارید، بیایید با بینشی صحیح، با مطالعه، با مشورت، با امر به معروف و نهی از منکر و ارشاد یکدیگر و با ایمان و پیروی از رهنمودهای رهبر حکیم انقلاب، سپری محکم و قوی در این جبهه باشیم.

پیشاپیش فرا رسیدن سال نو را به همهٔ شما عزیزان دانش آموز و جامعهٔ فرهنگی ایران اسلامی تبریک و تهنیت می گوییم و سرافرازی و موفقیت شما را خواهانیم.

والسلام - سردبیر

● پرویز شهریاری



آگاهیهایی دربارهٔ ریاضیات محاسبه‌ای در چین باستان (از: ای. برزکینا)

در دهه‌های اخیر، آگاهیهای تازه و جالبی دربارهٔ تاریخ کسرهای دهدهی به‌دست آمده است. ضمن بررسی یکی از رساله‌های کهن چینی، یعنی «رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی» که به نزدیکیهای سدهٔ سوم میلادی مربوط می‌شود، روشن شده است که در آن زمان، کسرهای دهدهی را می‌شناخته‌اند. و این خیلی دیرتر از زمانی است که به‌طور معمول از کاربرد کسرهای دهدهی سخن می‌گویند.

از نویسندهٔ این رساله اطلاعی نداریم. رساله یک بخش از ده بخش کتابی است که در مجموعهٔ «ده کتاب ریاضی» در عصر «تان» (سده‌های هفتم تا نهم میلادی) وارد شده است. این مجموعه به‌عنوان کتاب درسی تنظیم شده بود. در کتابهای تاریخ ریاضیات، اغلب سال پدید آمدن کسرهای دهدهی را ۱۵۸۵ میلادی، یعنی سالی که «سیمون سته وَن» (۱۵۴۸ ــ ۱۶۲۰)، کتاب خود را منتشر کرد، می‌دانند. از این زمان، کسرهای دهدهی به طور جدّی وارد ریاضیات شد و در دسترس هر کسی که به تحصیل مدرسه‌ای مشغول بود، قرار گرفت.

با بررسی تاریخ، این هم روشن شده است که پیش از سته وَن، در کشورهای خاور، از کسرهای دهدهی استفاده می‌کرده‌اند. جمشید کاشانی، ریاضیدان ایرانی، در کتاب «رازگشای شمار» (مفتاح‌الحساب) خود، در ۱۴۲۷ میلادی، شرح کاملی از عمل با کسرهای دهدهی را می‌دهد.

مقایسهٔ روش ساختن کسرهای دهدهی در چین، با روشی که کاشانی و ریاضیدانان اروپایی به‌کار برده‌اند، روشن می‌کند که سندهای چینی برای تاریخ دانش، برتری ویژه‌ای دارد. کاشانی و ریاضیدانان اروپایی، کسرهای دهدهی شبیه عددنویسی شصت‌شصتی ساختند؛ در حالی که در چین، به‌طور مستقل و بدون استفاده از کسرهای شصت شصتی (که هرگز در چین به‌کار

نمی‌بردند) پدید آمد. از مدتها پیش از آن هم، دستگاه عددشماری دهدهی در چین به‌وجود آمده بود. بنابراین، مسیر پدید آمدن کسرهای دهدهی در تاریخ ریاضیات چین، به‌صورت «خاص» خود بوده است.

کشف دستگاه عددنویسی موضعی شصت شصتی، مربوط به بابلی‌هاست. آنها در آغاز، نمادی برای صفر نداشتند و عددی را که می‌نوشتند، می‌شد به‌عنوان عددی درست یا عددی کسری خواند. بعدها اخترشناسان دورهٔ الینی، از نوعی عددنویسی استفاده می‌کردند که آمیزه‌ای از عددنویسی دهدهی و عددنویسی شصت شصتی بود؛ بخش درست عدد را با دستگاه غیرموضعی دهدهی و بخش کسری آن را با دستگاه شصت شصتی. در هند، ایران و اروپای غربی سده‌های میانه، با این کسرها آشنا بودند؛ ولی از آن‌جا که در همهٔ جهان، دستگاه عددنویسی موضعی دهدهی بتدریج عمومی شده بود، ریاضیدانان به این سمت کشیده شدند که به‌جای کسرهای بابلی، از کسرهای در مبنای ۱۰ استفاده کنند. چینی‌ها، در آغاز، تعداد واحدهای یک مرتبه را با رقمهای هیروگلیفی و سپس خود مرتبه را با همان رقمها می‌نوشتند. این روش، ساده و راحت بود و به دستگاه عددنویسی موضعی امروزی بسیار نزدیک است. کافی است در عددنویسی چینی، نام مرتبه را حذف و نماد صفر را وارد کنیم، تا همان عددنویسی امروزی به‌دست آید.

«رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی» که آن را در این‌جا بررسی می‌کنیم، به ما امکان می‌دهد مرحله‌های اساسی راه پرپیچ و خم پیدایش این مفهوم تازهٔ ریاضی را روشن کنیم؛ درست مثل دیرین‌شناسی که با بررسی حیوان فسیل شده، مرحله‌های سنگ شدن آن را مطالعه می‌کند، به تجدید ساختمان مفهوم کسر دهدهی در دوره‌های مختلف تکامل آن می‌پردازیم. درک چینی، با توجه به منحصر بودن آن، اهمیت زیادی دارد.

پیش از همه، پرسشی طرح می‌کنیم؛ در حالی که کسرهای متعارفی را می‌شناختند، چه نیازی به کسرهای دهدهی بود؟ چه اختلافی بین کسر متعارفی و کسر دهدهی وجود دارد؟ آیا این اختلاف مربوط به نوع نوشتن آنهاست یا اختلاف را باید در مضمون این دو مفهوم جست‌وجو کرد؟

کسر متعارفی، عدد گویایی است که می‌تواند به‌صورت کسر دهدهی محدود یا دوره‌ای و نامحدود نوشته شود. ولی هر کسر دهدهی را نمی‌توان به‌صورت کسر متعارفی نوشت. برای نمونه، می‌توان از عدد $\sqrt{2}$ نام برد که با هیچ کسر متعارفی گویایی قابل بیان نیست؛ در حالی که هر عدد گنگی را می‌توان با کسر دهدهی بی‌پایان و غیر دوره‌ای نشان داد. روشن است که دو مفهوم متعارفی و دهدهی، هم‌ارز نیستند. عضوهای دو مجموعه کسرهای متعارفی و کسرهای دهدهی را نمی‌توان در تناظر یک به یک قرار داد.

اما در این جا، این مطلب برای ما مهم است که اختلاف بین دو نوع نوشتن عدد را، نه از دیدگاه نظریهٔ مجموعه‌ها، بلکه بیشتر از نظر گستردگی و استحکام مفهوم خود عدد، تا آن‌جا که به شکل نوشتن آن مربوط می‌شود، بررسی کنیم. کسر متعارفی در ماهیت خود، وسیلهٔ مناسبی است برای نشان دادن عددهای گویا (و تنها عددهای گویا). به یاری کسرهای دهدهی هم می‌توان عددهای گویا را بیان کرد؛ ولی بجز آنها، هر عدد دیگری را هم می‌توان با کسر دهدهی نشان داد. کسر متعارفی معرّف عددهای گویاست؛ در حالی که کسر دهدهی معرّف همهٔ عددهای حقیقی است و این، به آن دلیل است که در نمایش عددها به یاری کسرهای دهدهی، اختلافی بین عددهای گویا با عددهای گنگ وجود ندارد؛ چه در حالت تقسیم و چه در حالت ریشه گرفتن. باید بنابر قانونی که وجود دارد، عمل را به اندازهٔ لازم ادامه داد و رقمهای مربوط به یکدهم، یکصدم، یکهزارم و غیره را به‌دست آورد.

به این ترتیب که، پرسشی که طرح کردیم، می‌توان این طور پاسخ داد: کسرهای دهدهی در حوزهٔ عددهای حقیقی عمل می‌کنند و بنابراین، با پیدایش کسرهای دهدهی، حوزهٔ عددهای حقیقی مطرح شد و سرچشمهٔ چینی کسرهای دهدهی، می‌تواند گواهی بر این مطلب باشد.

بررسی «ریاضیات در نُه کتاب» نشان می‌دهد که دانشمندان چینی دورهٔ هان (سدهٔ دوم پیش از میلاد تا سدهٔ دوم بعد از میلاد)، به‌طور کامل، با مجموعهٔ عددهای گویا کار می‌کردند. در این رساله، قانونهای عمل با کسرهای متعارفی، تقریباً شبیه آن چه امروز معمول است، آمده است. در همین زمان، مفهوم کوچکترین مضرب مشترک و قاعدهٔ امروزی تقسیم کسرها هم وجود دارد که تنها در سدهٔ شانزدهم میلادی، در کتابهای درسی اروپا وارد شد. در چین، آن زمان، عددهای منفی هم کشف شده بود.

با در اختیار داشتن عددهای گویا، ریاضیدان چینی، از عهدهٔ بیان هر کمیتی که با اندازه‌گیری مستقیم یا از راه محاسبهٔ حاصل می‌شد، برمی‌آمد. آنها پاسخ مسأله را، در حالتهایی هم که بی‌معنا به‌نظر می‌رسید، پیدا می‌کردند، برای نمونه، انجام یک کار، نیاز به $۲۵۸\frac{۳۷۲۶}{۱۰۰۶۳}$ نفر دارد (مسألهٔ ۲۲ از کتاب پنجم)، یا حرکت دادن

یک وزنه، در یک فاصلهٔ زمانی، به تعداد $57\frac{1629}{2603}$ مرتبه (مسألهٔ ۸ از کتاب ششم).

دربارهٔ عددهایی مثل π یا ریشه‌های گنگ چه می‌کردند؟ در این حالتها، از مقدارهای تقریبی استفاده می‌کردند؛ مساحت دایره یا حجم کره را با فرض ۳ = π به‌دست می‌آوردند و ریشه گرفتن را تنها دربارهٔ ریشه‌های دوم و سوم عددهای گویا انجام می‌دادند.

در دو متنی که تاریخ نوشتن آنها به ما نزدیکتر است و نزدیک به پنج سدهٔ بعد نوشته شده‌اند، مطلب به گونهٔ دیگری بیان می‌شود. این دو متن، شامل حاشیه‌های مستقلی است که «لیوهوئه» بر «ریاضیات در نُه کتاب» نوشته است و همین بررسی او (و رسالهٔ «سون تسه‌زی») به ما رسیده است.

لیوهوئه، نارضایتی خود را از قاعدهٔ ریشه گرفتن ـ که محدود به حالت مقدارهای گویاست ـ و همچنین مقدار تقریبی عدد ۳ = π بیان می‌کند و در یادداشتهای خود، این دستورهای تقریبی را برای ریشهٔ دوم عددهای گنگ

$$a+\frac{1}{2b+1}<\sqrt{a^2+b}<a+\frac{1}{2b}$$

و مقدار دقیقتر ۳/۱۴ = π را به یاری چندضلعیهای منتظم محاطی به‌دست می‌آورد. برای ریشه گرفتن سفارش می‌کند، وقتی ریشه منجر به مقدار درست نمی‌شود، از مرتبه‌های دهدهی استفاده کنیم. او نمادهای دهدهی را «وی» (یعنی کوچکترین) می‌نامد؛ ولی مثالی نمی‌آورد.

از بخشی که لیوهوئه دربارهٔ محاسبهٔ عدد π کرده است، می‌توان متوجه شد، چگونه کسرهای دهدهی را نمایش داده است. در این‌جا، او پاره‌خطهای راست را به یاری بخش‌بندی دهدهی بیان می‌کند؛ واحدهایی که برای طول (چی) به‌کار می‌برد، چنین هستند: تسون، فن، لی، هااو، میااو، هو؛ و اگر عددی در حدّ این واحد قابل بیان نباشد، باقیمانده را با کسر متعارفی نشان می‌دهد. مثال:

۹ تسون، ۷ فن، ۷ لی، ۸ هااو، ۵ میااو، ۸ هو و $\frac{9}{10}$ هو

و این، کسری است شبیه دستگاه متری، که در آن، هر بخش نام خاصی دارد. در ضمن، در هر حالت، نوع اندازه‌گیری ذکر می‌شود؛ طول، وزن یا گنجایش. بسته به نوع انتخاب واحد درست، نامهای بعدی پشت سر هم، بخشهای یکدهم، یکصدم، یکهزارم و غیره، از این واحد درست را معرفی می‌کنند. به این ترتیب، واحد یکدهم، درحالتی ممکن است واحد عدد درست یا واحد یکصدم باشد و نماد ممیّز می‌تواند جای خود را تغییر دهد: اگر در عبارت لیوهوئه، واحد اصلی را «چی» بگیریم، کسر برابر ۰/۹۷۷۸۵۸۹ و اگر «تسون» را واحد اصلی بگیریم، برابر ۹/۷۷۸۵۸۹ می‌شود.

از این گونه کسرها، در رسالهٔ سون‌تسه زی فراوان است. ولی در آن‌جا، کسرهای پیچیده‌ای از نوع آن چه از رسالهٔ «ریاضیات در نُه کتاب» آوردیم، دیده نمی‌شود. در رسالهٔ سون تسه‌زی، عددهای ساده‌ای برای مسأله‌ها انتخاب شده است و چنان هستند که منجر به پاسخهای کوچک و ساده می‌شوند. مقدارهای این دستگاه «شبه متری» به یاری دستگاه گسترده‌ای از واحدها بیان می‌شود؛ به نحوی که کسرهای متعارفی، در حالتی که رقمهای دهدهی ناشی از تقسیم محدود است، بتواند به آنها تبدیل شود. مثالی می‌آوریم:

مسأله‌ای وجود دارد که در هر دو رسالهٔ «ریاضیات در نُه کتاب» و «رسالهٔ ریاضی سون تسه‌زی» آمده است. مسأله مربوط به داد و ستد غلّه است:

۷ «دوی» و ۹ «شه نو» ارزن داریم. آنها را با چه مقدار گندم می‌توانیم عوض کنیم؟

حلّ مسأله ساده است؛ در جدول ویژه‌ای (که در آغاز بخش دوم کتاب «ریاضیات» آمده است) سه رابطه بین گونه‌های مختلف غلّه، از نظر هم‌ارزی قیمت داده شده است (رابطهٔ مربوط به مسأله ما، با عددهای ۵۰ و ۲۱ داده شده است). مقدار گندم به این ترتیب محاسبه می‌شود:

$$\frac{\text{۷ «دوی» و ۹ «شه نو»}}{50}\times 21$$

از محاسبه معلوم می‌شود:

۱ «هو» = ۱۰ «دوی»

۱ «دوی» = ۱۰ «شه نو»

واحد اصلی چینیها «دوی» است که تقریباً برابر ۱۰/۳۵ لیتر است. با توجه به این واحدها، پاسخ مسأله چنین است:

۳ «دوی»، ۳ «شه نو» و $\frac{9}{50}$ «شه نو»

در «ریاضیات در نُه کتاب» هم، همین پاسخ داده شده است. کسرهای لیوهوئه، با بیانی مشابه، ولی کوتاهتر است. او تنها از سه واحدی که در عمل به‌کار می‌رود، استفاده کرده است؛ البته بخشهای کوچکتری را هم وارد کرده است. این بخشها در محاسبه‌های اقتصادی، کاربرد نداشتند؛ اما به این دلیل درست شده بودند که بتوان مقدارهای کمتر از واحد را در دستگاه دهدهی بیان کرد.

به این ترتیب، به نظر می‌رسد که لیوهوئه، از کسرهایی با منطق

دستگاه متری استفاده می‌کرد؛ در حالی که در «ریاضیات» هنوز خبری از این کسرها نیست. در «رسالهٔ ریاضی سون تسه زی»، کاربرد منطقی‌تری از کسرهای دهدهی وجود دارد. به نظر می‌رسد، سون‌تسه‌زی، با برداشتن مسأله‌ای از «ریاضیات در نُه کتاب» تلاش می‌کند، بویژه ثابت کند، مقدار مجهول را می‌توان به‌صورت کسر کامل دهدهی نشان داد: ۳ «دوی»، ۳ «شه نو»، ۱ «که» و ۸ «شائو».

و برای این کسر متعارفی را به کار نبرد، از واحدهای کوچکتر از «شه‌نو» ـ که خودش یکدهم واحد گنجایش است ـ استفاده می‌کند.

این مسأله را می‌توان، به‌عنوان مسألهٔ ویژه‌ای که سون‌تسه‌زی را به کسرهای دهدهی (با نظم دستگاه متری) هدایت می‌کند، بررسی کرد. برای این منظور، او برخلاف لیوهوئه، از روش کلی پیدا کردن جواب پیروی نمی‌کند؛ بلکه از روش کلی تقسیم استفاده می‌کند؛ یعنی مفهوم مرتبه‌های کسرهای دهدهی را به همان صورتی که امروز معمول است، مطرح می‌کند.

برای این منظور، به دنبال این مسأله، سه مسأله دیگر را می‌آورد. این سه مسأله هم، از «ریاضیات در نُه کتاب» برداشته شده است که در آن‌جا هم با همین ردیف آمده‌اند. با این مسأله‌ها، حالتهای مختلف تقسیم عددهای درست مطرح شده است؛ به نحوی که جواب در یک حالت عددی درست، در حالت دوم کسر مرکب ساده نشدنی و در حالت سوم کسر مرکب ساده شدنی به‌دست می‌آید. در حالت چهارم، تقسیم دارای باقیمانده است و به بهانهٔ آن، کسر دهدهی را معرفی می‌کند که، از دید منطقی، منجر به موضوع تازه‌ای در ریاضیات می‌شود.

کسرهای دهدهی در مسأله‌های سون‌تسه‌زی، تنها برای بیان مقدارهای مجهول به‌کار نمی‌رود (یعنی حالتهایی که ضمن محاسبه به دست می‌آید، آن‌طور که در مسأله مشخص قبل دیدیم)؛ بلکه در داده‌های مسأله‌ها هم وارد می‌شود. به یاری آنها، ضریب تبدیل واحدها هم شرح داده شده است. این ضریب، عبارت است از ۱ «چی»، ۶ «تسون» و ۲ «فن» (این اندازه‌ها در متنهای کهنتر چینی وجود ندارد. این عددها به معنای حجم ۱ «دوی» از مایعی است که ظرف مکعب مستطیل شکل به قاعدهٔ ۱ «چیِ مربع» و ارتفاع ۱/۶۲ «چی» را پر کرده باشد).

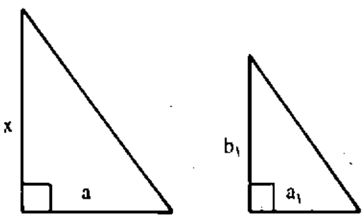
در «ریاضیات در نُه کتاب»، که در آن‌جا تنها از سه واحد طول، یعنی ۱ «چژان» = ۱۰ «چی» و ۱ «چی» = ۱۰ «تسون»، استفاده شده، این ضریبها با کسر متعارفی داده شده است: ۱«چی»، ۶ «تسون» و $\frac{۱}{۵}$ «تسون».

گونهٔ محاسبه‌ای که از مسأله‌های سون تسه‌زی استنباط می‌شود، نشان می‌دهد که می‌توانستند روی این کسرهای دهدهی عملهای مربوط را انجام دهند. عملهای پیچیده‌ای مثل ضرب و تقسیم را با روشی انجام می‌دادند که در اساس، همان روش امروزی ماست. اختلاف، تنها مربوط به شکل نوشتن این عددهاست. یک مثال می‌آوریم.

مسألهٔ ۲۵ از کتاب آخر سون‌تسه‌زی را، که برای هدف ما مناسب است، انتخاب می‌کنیم (سون‌تسه‌زی، سه کتاب داشته است: کتاب نخست، کتاب میانه و کتاب آخر):

دیرکی با اندازهٔ نامعلوم وجود دارد. سایهٔ آن را اندازه گرفته‌ایم، ۱ «چژان» و ۵ «چی» شده است. جدا از این یک دیرک ستونی وجود دارد که طول آن ۱ «چی» و ۵ «تسون» است. سایهٔ این ستون ۵ «تسون» شده است. طول دیرک اوّل چه‌قدر است؟

پاسخ: ۴ «چژان» و ۵ «چی».



مقدار مجهول، جملهٔ چهارم تناسبی است که سه جملهٔ معلوم آن، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه دو مثلث متشابه قائم‌الزاویه را تشکیل می‌دهند:

$$x = \frac{a.b_1}{a_1}$$

در این جا، راه‌حلّ مسأله که ساده است، برای ما جالب نیست؛ آن چه جالب است، روشهای محاسبه است. اگر واحد درست را «چژان» بگیریم، حلّ چینی مسأله، با نوع نوشتن امروزی، چنین است:

$$x = \frac{۱/۵ \times ۰/۱۵}{۰/۰۵} = \frac{۰/۲۲۵}{۰/۰۵} = \frac{۲۲/۵}{۵} = ۴/۵$$

در واقع در نوشتهٔ چینی گفته شده است:

برقرار می‌کنم سایهٔ دیرک را به ۱ «چژان» و ۵ «چی». این مقدار را در طول ستون، یعنی در ۱ «چی» و ۵ «تسون» ضرب می‌کنم. به مرتبهٔ سمت چپ حرکت می‌دهم، به‌دست می‌آید: ۲۲ «چژان» و ۵ «چی»، این مقدار را بر سایهٔ ستون، یعنی بر ۵ «تسون» تقسیم می‌کنم و مجهول را به‌دست می‌آورم.

پیش از آن که، به روشن کردن قانونهایی بپردازیم که با جمله‌هایی مثل «برقرار می‌کنم» و «حرکت می‌دهم» بیان شده است، با وسیله‌ای آشنا شویم که در چین باستان، برای محاسبه از آن استفاده می‌کرده‌اند. این وسیله، نوعی تخته یا جُرتکه محاسبه‌ای بود که در پیشرفت روشهای محاسبه‌ای در ریاضیات چینی، نقش اساسی داشته است. از ساختمان این وسیله، آگاهی دقیقی نداریم؛ ولی عددها روی آن، به‌وسیلهٔ چوب خطهای محاسبه‌ای در دستگاه عددشماری به مبنای ۵ نشان داده می‌شد. تا عدد ۵ را، به‌طور ساده، با کنار هم گذاشتن چوب خطها نشان می‌دادند (برای نمونه، عدد ۴ به‌صورت |||| نشان داده می‌شد)؛ ولی برای نشان دادن عددهای از ۶ تا ۹، چوب خطی عمود بر دیگران و در بالای آنها می‌گذاشتند و مقدار آن را ۵ به‌حساب می‌آوردند (برای نمونه، عدد ۸ به صورت $\overline{|||}$ نشان داده می‌شد). روی تخته، چوب خطها را به‌صورت افقی و قائم و با استفاده از ویژگی موضعی بودن رقمها منظم می‌کردند؛ جای خالی بین رقمها، به معنای این بود که در آن مرتبه، رقمی وجود ندارد. صفر را روی تخته لازم نداشتند. به این ترتیب، دست‌کم در چهار سده پیش از میلاد، چینیها از همان دستگاه دهدهی موضعی، که ما امروز به‌کار می‌بریم، استفاده می‌کرده‌اند؛ یعنی روش مشخص کردن عددهای درست و کسری را، تقریباً بدون تفاوت با روش امروزی، انجام می‌دادند. دربارهٔ حلّ یک مسأله، برنامه‌ای کلی برای عملهای لازم روی تختهٔ محاسبه طرح می‌کردند که می‌توان آن را با برنامه‌ای که امروز برای حلّ مسأله‌ها به رایانه می‌دهند، مقایسه کرد.

طرح عملهای لازم روی تختهٔ محاسبه را در این‌جا روشن می‌کنیم. عمل از ردیفهای بزرگتر به طرف ردیفهای کوچکتر انجام می‌شد:

۱) ۱ چژان × ۱ چی = ۱ چی

۲) ۵ چی × ۱ چی = ۵ تسون

۳) ۱ چژان × ۵ تسون = ۵ تسون

۴) ۵ چی × ۵ تسون = ۲۵ دهم تسون = ۲ تسون و ۵ فن

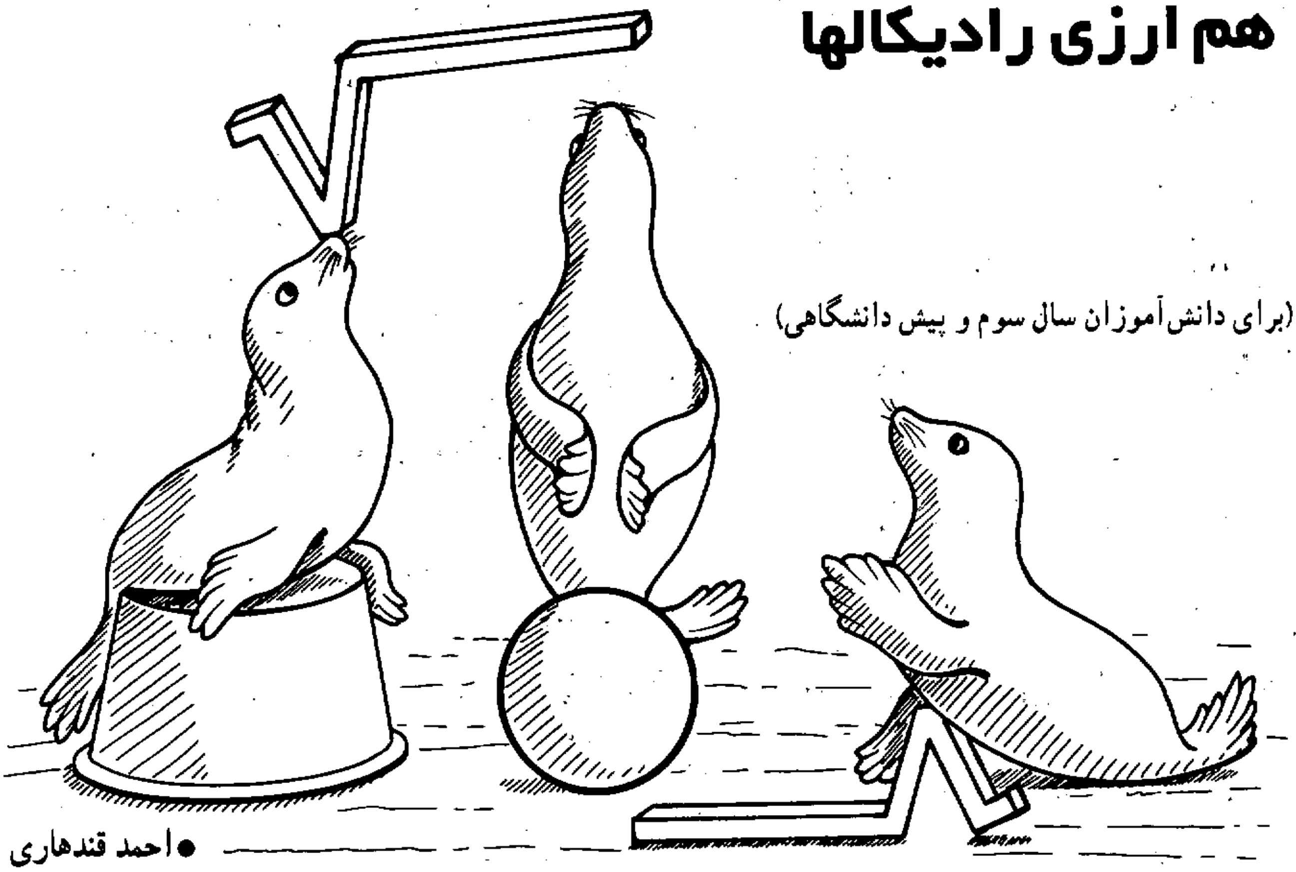
در این‌جا بخشهای یکدهم تسون وارد شده است (فن)، ولی قاعدهٔ آن را شرح نداده‌اند (قاعده‌های چینی، بدون توضیح داده می‌شد و اغلب یا بعضی بسیار کوتاه).

به این ترتیب می‌بینیم، ریاضیدانان چینی، با قاعدهٔ ضرب ردیفهای دهدهی آشنا بوده‌اند: «چژان» را در «چی» ضرب می‌کردند و «چی» به‌دست می‌آوردند و غیره:

		تسون	چی	چژان	
عامل اول ضرب			۵	۱	
عامل دوم ضرب		۵	۱		
حاصلضربهای جزئی	۵	۵ ۵ ۲	۱		
حاصلضرب	۵	۲	۲		
خارج قسمت			۵	۴	
بخشی			۵	۲	۲
بخشیاب				۵	

نتیجه ضرب که برابر ۲ چی، ۲ تسون و ۵ فن است، به سمت چپ برده شده است؛ مثل این که آن را در ۱۰۰ ضرب کرده باشند. روشن است، این عمل برای تقسیمی لازم است که بعد باید انجام شود؛ تقسیم ۲۲ چژان و ۵ چی بر ۵ تسون (در واقع باید گفت بر ۵ چژان؛ زیرا مخرج هم در ۱۰۰ ضرب شده است. در تختهٔ حساب حرکت بخشیاب انجام شده است؛ ولی ضمن بیان قاعده، دربارهٔ تبدیل بخشیاب، صحبتی به میان نیامده است). خارج قسمت برابر ۴ چژان و ۵ چی می‌شود.

هم ارزی رادیکالها



(برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش دانشگاهی)

● احمد قندهاری

دو تابع هم‌ارز

اگر حد دو تابع حقیقی f و g، وقتی $x \to a$، برابر ۰ یا ∞ شود، چنانچه $g(x) \neq 0$ و $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=1$، آن‌گاه دو تابع f و g را هم‌ارز گویند. a می‌تواند هر عدد حقیقی یا ∞+ یا ∞− باشد.

می‌دانیم اگر $n \in N$ و ضرایب a و b و c و c′ و... اعداد حقیقی باشند، داریم:

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim ax^n \\ x \to \pm\infty \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + c'x^{n-2} + \cdots + L \sim ax^n \\ x \to \pm\infty \end{cases} \qquad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim ax^n \\ +bx^{n-1} + c'x^{n-2} + \cdots + L \\ x \to \pm\infty \end{cases} \qquad (3)$$

توجه داشته باشیم، دو جمله از بزرگترین درجات عبارت سمت چپ با دو جمله از بزرگترین درجات عبارت سمت راست برابر است.

هم‌ارزی (۳) اساس هم‌ارزی رادیکالهاست.

هم ارزی رادیکالها

$$\sqrt[n]{ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k} \sim \pm\sqrt[n]{a}\left(x + \frac{b}{an}\right), a > 0 \quad \text{(زوج)}$$

اگر n فرد باشد، برای هر $a \in \mathbb{R}$ هم‌ارزی بالا برقرار است؛ ولی سمت راست (±) لازم نیست.

اثبات: دو طرف را به توان n می‌رسانیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim a\left(x + \frac{b}{an}\right)^n \\ x \to \pm\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim a\left(x^n + \frac{b}{a}x^{n-1} + \cdots\right) \\ x \to \pm\infty \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots + k \sim ax^n \\ +bx^{n-1} + c'x^{n-2} + \cdots + L \\ x \to \pm\infty \end{cases}$$

این هم‌ارزی بنا به (۳) برقرار است.

مثال:

$$1)\ \sqrt{4x^2 - 24x + 3} \sim \pm\sqrt{4}\left(x + \frac{-24}{4\times 2}\right) = \pm 2(x-3) \quad x \to \pm\infty$$

$$2)\ \sqrt{9x^2 + 18x + 1} \sim \pm\sqrt{9}\left(x + \frac{18}{9\times 2}\right) = \pm 3(x+1) \quad x \to \pm\infty$$

$$3)\ \sqrt[3]{8x^3 - 48x^2 + 27x + 4} \sim \sqrt[3]{8}\left(x + \frac{-48}{8\times 3}\right) = 2(x-2) \quad x \to \pm\infty$$

$$4)\ \sqrt[4]{16x^4 + 128x^3 + x + 2} \sim \pm\sqrt[4]{16}\left(x + \frac{128}{4\times 16}\right) \quad x \to \pm\infty$$

$$= \pm 2(x+2)$$

$$5)\ \sqrt{x^2 - 7x + 5} \sim \pm\left(x - \frac{7}{2}\right) \quad x \to \pm\infty$$

کاربرد هم‌ارزی رادیکالها

هم‌ارزی رادیکالها کاربردهای فراوانی در تعیین حد تابع وقتی $x \to \pm\infty$ و ابهام مسأله به‌صورت $(+\infty, -\infty)$ است، دارد.

همچنین در تعیین مجانبهای افقی و مایل بسیاری از تابعها به‌کار می‌رود.

مثال: حدّ عبارتهای زیر را بیابید.

$$1)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2 - 4x + 1} - x + 5\right)$$

$$\sim \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{4}{2} - x + 5\right) = -2 + 5 = 3$$

$$2)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3 - 9x^2 + 5x - 1} + \sqrt{4x^2 - 12x} + x + 1\right)$$

$$\sim \lim_{x\to-\infty}\left(x - \frac{9}{3} - \sqrt{4}\left(x - \frac{12}{8}\right) + x + 1\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(x - 3 - 2x + 3 + x + 1) = 1$$

$$3)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16x^4 - 64x^3 + x} - \sqrt{x^3 + 6x^2 + 1}\right.$$

$$\left. - \sqrt{x^2 - 8x}\right)$$

$$\sim \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{16}\left(x + \frac{-64}{64}\right) - \left(x - \frac{6}{3}\right) - \left(x - \frac{8}{2}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(2x - 2 - x + 2 - x + 4) = 4$$

$$4)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[8]{x^8 + 8x} + \sqrt[6]{x^6 + 6x} + \sqrt[5]{x^5 + 10x^4}\right.$$

$$\left. + \sqrt[3]{x^3 + 6x} + \sqrt{x^2 - 2x} - x + 10\right)$$

$$\sim \lim_{x\to-\infty}\left(-\left(x + \frac{8}{8}\right) - \left(x + \frac{6}{6}\right) + \left(x + \frac{10}{5}\right) +\right.$$

$$\left.(x + 0) - \left(x - \frac{2}{2}\right) - x + 10\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-x - 1 - x - 1 + x + 2 + x - x + 1 - x + 10) = 11$$

$$5)\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[250]{x^{250} + 500x^{249} + 1} - x + 7\right)$$

$$\sim \lim_{x\to+\infty}\left(x + \frac{500}{250} - x + 7\right) = 2 + 7 = 9$$

مسأله: اگر $\left\{\lim_{x\to-\infty}\left(ax + b + \sqrt{4x^2 - 24x + 1}\right) = 3\right.$، آن‌گاه a و b را بیابید.

حل:

$$\left\{\lim_{x\to-\infty}\left[ax + b - 2\left(x + \frac{-24}{8}\right)\right]\right.$$

$$= \left\{\lim_{x\to-\infty}[(a-2)x + b + 6] \equiv 3\right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \\ b + 6 = 3 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

کاربرد در تعیین مجانبهای افقی و مایل

معادله‌های مجانبهای افقی و مایل هر یک از تابعهای به معادله‌های زیر را بیابید.

$$1)\ y = 2x + 1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$x \to +\infty \Rightarrow y = \lim(2x+1+\frac{x^2}{+x})$

معادلهٔ مجانب مایل $y = 3x+1$

$x \to -\infty \Rightarrow y = \lim(2x+1+\frac{x^2}{-x})$

معادلهٔ مجانب مایل $y = x+1$

۲) $y = 2x-1+\sqrt{4x^2-8x+5}$

$x \to +\infty \Rightarrow y = \lim(2x-1+2(x-\frac{8}{8}))$

معادلهٔ مجانب مایل $y = 4x-3$

$x \to -\infty \Rightarrow y = \lim(2x-1-2(x-\frac{8}{8}))$

معادلهٔ مجانب افقی $y = 1$

مثال ۵۴ (صفحهٔ ۹۳ کتاب درسی):

$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y = \frac{x^2}{\pm x} \Rightarrow y = \pm x$ معادله‌های مجانبهای مایل

معادله‌های مجانبهای افقی و مایل تابع به معادلهٔ

$y = \frac{2x+\sqrt{4x^2-16x}}{3x-\sqrt{9x^2+8x}}$

$x \to +\infty \Rightarrow y = \frac{2x+2(x-2)}{3x-3(x+1)} = \frac{4x-2}{-3}$

مجانب مایل $y = -\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

$x \to -\infty \Rightarrow y = \frac{2x-2(x-2)}{3x+3(x+1)} = \frac{+4}{6x+3} = 0$

$\boxed{y=0}$ مجانب افقی.

مسأله: اگر منحنی تابع به معادلهٔ

$y = 2x+1+\sqrt{ax^2-24x+3}$

مجانب افقی داشته باشد، معادلهٔ مجانب مایل آن را بیابید.

حل: منحنی این تابع وقتی مجانب افقی دارد که $x \to -\infty$:

$\lim_{x\to-\infty}(2x+1+\sqrt{ax^2-24x+3})$

$\sim \lim_{x\to-\infty}(2x+1-\sqrt{a}(x+\frac{-24}{2a}))$

$= \lim_{x\to-\infty}((2-\sqrt{a})x+1+\frac{24}{2\sqrt{a}})$

معادلهٔ مجانب $y = (\underbrace{2-\sqrt{a}})x+1+\frac{24}{2\sqrt{a}}$

$2-\sqrt{a} = 0 \Rightarrow a = 4$

معادلهٔ تابع: $y = 2x+1+\sqrt{4x^2-24x+3}$

$x \to +\infty \Rightarrow y = 2x+1+2(x-\frac{24}{8})$

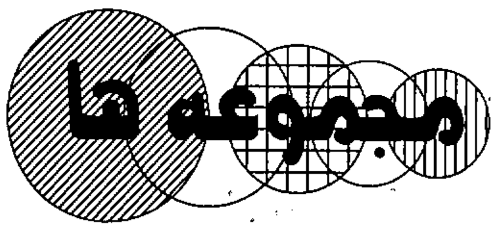
$\Rightarrow$ معادلهٔ مجانب مایل $y = 4x-2$

ادب ریاضی

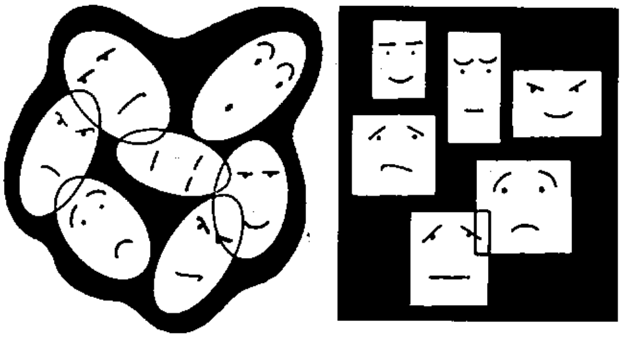
«فرما» پس از آن‌که قسمت مهمی از اوقات خود را مصروف هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال کرد و در عین حال، زندگی شرافتمندانه و روش پر کوششی را برای امرار معاش خویش گذرانید، باز هم فرصت یافت که مابقی انرژی و فعالیت خویش را در بهترین سرگرمی که به آن علاقه داشت، به‌کار برد و آن، ریاضیات خالص بوده است و بزرگترین اثر جاودان خویش را در این زمینه باقی گذاشت و آن عبارت از بنای «تئوری اعداد» یا حساب عالی است، که حقّ مطلق و غیرقابل بحث او در این مورد منکری ندارد، و نام وی را برای ابد، جاویدان ساخته است.

داستان واقعی فرما، داستان اکتشافات وی است که در حقیقت، تفریحات او بوده‌اند و داستان عشق خالصی است که به ریاضیات داشته است. این اکتشافات، چنان ساده است (اشتباه نشود، فقط بیان آن ساده است؛ ولی نه ایجاد آن) که هر شاگرد مدرسه‌ای که دارای استعداد متوسط باشد، درخور آن است که از مفهوم آنها آگاه شود و زیبایی آنها را بشناسد و بستاید.

(ریاضیدانان نامی، اثر اریک تمپل‌بل، ترجمهٔ حسن صفاری)



(برای دانش‌آموزان سال اوّل)



● حمیدرضا امیری

وقتی کلمهٔ مجموعه را می‌شنویم، بلافاصله در ذهنمان دسته‌ای از اشیا تصور می‌شود، و اگر بخواهیم تعبیری برای مجموعه بیان کنیم، تقریباً با تصور ذهنی خودمان مطابقت دارد و می‌گوییم:

«**مجموعه**، به دسته‌ای از اشیای دو به دو متمایز و کاملاً مشخص، گفته می‌شود».

در این تعبیر، منظور از شیء، هر موجودی می‌تواند باشد و در واقع، در هر مبحث، موجودات آن بحث، اشیای آن بحث را تشکیل می‌دهند: یعنی وقتی بحث اعداد است، هر عدد، یک شیء ریاضی محسوب می‌شود. وقتی بحث انسانهاست، هر انسان یک شیء است و در بحث مجموعه‌ها هر مجموعه می‌تواند یک شیء باشد و...

جملهٔ دو به دو متمایز، به معنای تکراری نبودن اشیاست و کاملاً مشخص به معنای آن است که باید دقیقاً و بدون هیچ شبهه‌ای معین و شناخته شده باشند. معمولاً مجموعه‌ها را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش داده و *اعضای* یک مجموعه را با دو آکلاد محصور می‌کنند.

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱: مجموعهٔ اعداد طبیعیِ زوج و کمتر از ۸:

$A = \{۲,۴,۶\}$

مثال ۲: مجموعهٔ اعداد زوج و اوّل: $B = \{۲\}$

مثال ۳: چهار عدد طبیعی و زوج که متوالی باشند، مجموعه‌ای تشکیل نمی‌دهند؛ زیرا اعضای آن مشخص نیستند؛ یعنی این اعداد می‌توانند ۲، ۴، ۶ و ۸ یا ۴، ۶، ۸ و ۱۰ یا ۱۰، ۱۲، ۱۴ و ۱۶ یا ... باشند.

مثال ۴: مجموعهٔ حروف صدادار در زبان انگلیسی:

$D = \{a,e,i,o,u\}$

مثال ۵: مجموعهٔ اعداد طبیعی زوج: $E = \{۲,۴,۶,...\}$

همان‌طور که در مثال ۵ مشاهده گردید، نوشتن همهٔ اعضای مجموعه E میسّر نبوده و از سه نقطه، به معنای ادامهٔ اعضای مجموعه استفاده کردیم. به چنین مجموعه‌هایی که برای آنها پایانی نمی‌توانیم در نظر بگیریم، **مجموعه‌های نامتناهی** گفته می‌شود؛ مثلاً مجموعهٔ اعداد صحیح منفی؛ یعنی $\{-۱,-۲,-۳,...\}$ نیز نامتناهی است.

قرارداد: مجموعه‌ای که فاقد عضو باشد، مجموعه تُهی نامیده می‌شود و مجموعهٔ تهی را با نماد { } یا $\varnothing$ نمایش می‌دهند.

هر مجموعه که نامتناهی نباشد، متناهی است؛ یعنی اگر مجموعه‌ای تعداد اعضای مشخصی داشته باشد و مثلاً n عضو داشته باشد یا تُهی باشد، **متناهی** نامیده می‌شود. (n هر عدد صحیح و غیرمنفی می‌تواند باشد.)

به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱: مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۵- و ۲-، تُهی است.

مثال ۲: اگر A مجموعهٔ اعداد اوّل و منفی باشد، در این صورت $A = \varnothing$.

مثال ۳: اگر C مجموعهٔ اعداد حقیقی بین صفر و یک باشد، در این صورت C مجموعه‌ای نامتناهی است. (ثابت می‌شود بین هر دو عدد حقیقی، بی‌نهایت عدد حقیقی وجود دارد.)

مفهوم عضویت

اگر A یک مجموعه و a عضوی از مجموعهٔ A باشد، می‌نویسیم $a \in A$، یعنی a متعلق به مجموعهٔ A است و اگر مثلاً b متعلق به A نباشد یا b عضوی از A نباشد، می‌نویسیم $b \notin A$.

در مثال قبل دیدیم که $\sqrt{۲} \notin Z$ و $-\sqrt{۲} \notin Z$.

تذکر مهم: اعضای یک مجموعه، خودشان می‌توانند مجموعه باشند؛ مثلاً مجموعهٔ دبیرستان که از کلاسها تشکیل شده است و هر کلاس خودش مجموعه‌ای است از دانش‌آموزان. به مثال زیر توجه کنید:

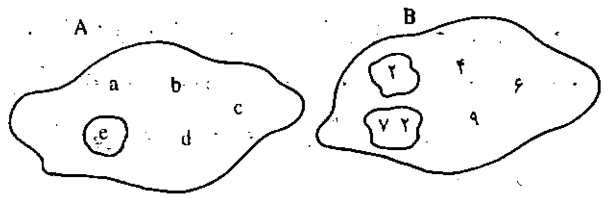
مثال ۱: اگر فرض کنیم $A = \{a,\{a\},\{a,b\},\{b\}\}$ در این

صورت خواهیم داشت :

$a\in A$, $\{a\}\in A$, $\{a,\{a\}\}\notin A$; $b\notin A$

$\{a,\{b\}\}\notin A$, $\{a,b\}\in A$, $\{b\}\in A$, $\{\{a\}\}\notin A$

مثال ۲: با توجه به نمایش مجموعه‌ها به‌صورت نموداری (نمودار ون) خواهیم داشت :



$a\in A$, $c\in A$, ⓔ$\in A$, ②$\in B$,
(۷ ۲)$\in B$, ۴$\in B$, ۸$\notin B$, $k\notin A$

تست: کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $\{a\}\in\{a,\{a\}\}$

۲) $\{a\}\in\{a,\{a\},\{a\}\}$

۳) $\{a\}\notin\{a,\{a,\{a\}\}\}$

۴) $\{\{a\}\}\in\{a,\{a\}\}$

حل: گزینهٔ (۴) ؛ زیرا شیء $\{\{a\}\}$ به این صورت، در مجموعهٔ موردنظر وجود ندارد.

تست: کدام گزینه درست است؟

۱) ۵ $\notin$ {۲,۴,۶,۵}

۲) ۲ $\notin$ {۱,۲,۳,۵,۷}

۳) $\varnothing\in\{a,\{b\},\{\ \}\}$

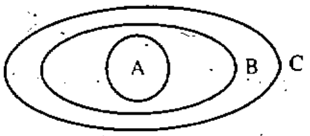
۴) $\varnothing\in\{a,b,\{\varnothing\},\{a\}\}$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا مجموعهٔ { } همان مجموعهٔ تهی است که به عنوان یک عضو در مجموعهٔ موردنظر وجود دارد.

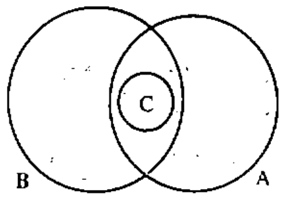
مفهوم زیرمجموعه (جزئیت)

اگر A و B دو مجموعه باشند و هر عضو مجموعهٔ A، عضوی از مجموعهٔ B باشند، در این صورت می‌گوییم A زیرمجموعهٔ B است یا A جزئی از B است و می‌نویسیم $A\subset B$ [1]. به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال ۱: در شکلهای زیر داریم :



شکل (۱)



شکل (۲)

در شکل (۱) داریم :

$A\subset B$, $A\subset C$, $B\subset C$, $C\not\subset A$, $B\not\subset A$

و در شکل (۲) داریم :

$A\not\subset B$, $B\not\subset A$, $C\subset A$, $C\subset B$

مثال ۲: اگر فرض کنیم A = {۱,۲,۳,۵} ، B = {۲,۳,۴} و C = {۳,۴,۵,۲} در این صورت خواهیم داشت :

$B\not\subset A$ (۴ $\in B$, ۴ $\notin A$)

$A\not\subset B$ (۱ $\in A$, ۱ $\notin B$)

$C\not\subset B$ (۵ $\in C$, ۵ $\notin B$)

$B\subset C$ (همهٔ اعضای B در C نیز هستند)

$A\not\subset C$ (۱ $\in A$, ۱ $\notin C$)

مثال ۳: مجموعه، $A=\{a,\{a,\{a\}\},\{a\},\{b\}\}$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت :

$\{a\}\subset A$ $(a\in A)$

$\{a,\{a\}\}\subset A(a\in A , \{a\}\in A)$

$\{b\}\not\subset A$ $(b\notin A)$

$\{a,\{b\}\}\subset A(a\in A , \{b\}\in A)$

$\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}\not\subset A$ $(\{a,b\}\notin A)$

تست: اگر $A=\{b,\{b\},\{b,\{b\}\}\}$ کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $b\subset A$

۲) $\{\{b\}\}\subset A$

۳) $\{b,\{b\}\}\subset A$

۴) $\{b,\{b\}\}\in A$

۱ـ نماد $\subseteq$ نیز برای نمایش زیر مجموعه بودن به‌کار می‌رود ؛ یعنی می‌توان نوشت، $A\subseteq B$.

حل: گزینهٔ (۱) ؛ زیرا علامت زیرمجموعه، همواره بین دو مجموعه به کار می‌رود. در بقیهٔ گزینه‌ها هر عضو مجموعهٔ سمت چپ عضو مجموعهٔ A نیز می‌باشد.

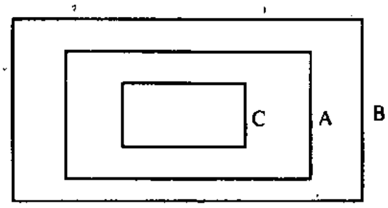
نکات مهم

نکتهٔ ۱: اگر مجموعهٔ A زیر مجموعهٔ B نباشد ؛ یعنی $A \not\subset B$ ، باید حداقل یک عضو در A باشد که آن عضو در B نباشد. مثلاً اگر فرض کنیم $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $B = \{۴,۶,۸,۱۰\}$ در این صورت $A \not\subset B$ ؛ زیرا $۲ \in A$ و $۲ \notin B$.

نکتهٔ ۲: با توجه به تعریف زیرمجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیرمجموعهٔ خودش می‌باشد ؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره $A \subset A$.

نکتهٔ ۳: مجموعهٔ تُهی، زیرمجموعهٔ هر مجموعه می‌باشد ؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره $\varnothing \subset A$. (زیرا طبق نکتهٔ ۱ در صورتی می‌توان ادعا کرد که $\varnothing \not\subset A$ که عضوی در $\varnothing$ بتوان یافت و آن عضو، عضوی از A نباشد و چون $\varnothing$ اصلاً عضوی ندارد، چنین عضوی یافت نمی‌شود.)

نکتهٔ ۴: اگر $A \subset B$ و $C \subset A$ ، در این صورت $C \subset B$. مثلاً اگر فرض کنیم $A = \{۱,۲,۳\}$ ، $B = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $C = \{۱,۲\}$ واضح است که $A \subset B$ و $C \subset A$ ، و همان‌طور که مشاهده می‌کنید $C \subset B$. این نکته در شکل زیر نیز، نمایش داده شده است :



تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

در حالت کلّی، ثابت می‌شود که «اگر مجموعهٔ A دارای k عضو باشد، تعداد همهٔ زیرمجموعه‌های آن، برابر است با ۲^k» که البته $\varnothing$ و A نیز جزو این زیرمجموعه‌ها می‌باشند.

مثال: اگر فرض کنیم $A = \{۲,۴,۶\}$ ، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A طبق رابطهٔ مذکور، باید $۸ = ۲^۳$ باشد، که این زیرمجموعه‌ها عبارت است از :

$$\underbrace{\{\ \}}_{\varnothing},\ \{۲\},\ \{۴\},\ \{۶\},\ \{۲,۴\},\ \{۲,۶\},\ \{۴,۶\},\ \underbrace{\{۲,۴,۶\}}_{A}$$

تست: اگر یک عضو به اعضای مجموعهٔ A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن چه تغییری می‌کند؟

۱) ۴ برابر می‌شود.
۲) ۲ واحد به آن اضافه می‌شود.
۳) ۱ واحد به آن اضافه می‌شود.
۴) دو برابر می‌شود.

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا اگر فرض کنیم مجموعهٔ A، ابتدا k عضو داشته است، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۲^k بوده و اگر یک عضو به اعضای آن اضافه شود، تعداد زیرمجموعه‌های آن به $۲^{k+۱}$ می‌رسد و با توجه به رابطهٔ زیر داریم :

$$۲^k \times ۲ = ۲^{k+۱}$$

تست: اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی، ۲۴ واحد کمتر از تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ $(k+۳)$ عضوی باشد، k کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا با توجه به فرض، اختلاف تعداد زیرمجموعه‌های دو مجموعه برابر با ۲۴ است ؛ یعنی :

$$۲^{k+۳} - ۲^{k+۱} = ۲۴ \Rightarrow ۲^k \times ۲^۳ - ۲^k \times ۲ = ۲۴ \overset{۲^k = x}{\Rightarrow}$$

$$۸x - ۲x = ۲۴ \Rightarrow ۶x = ۲۴ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow ۲^k = ۴ \Rightarrow k = ۲$$

تساوی بین دو مجموعه

دو مجموعهٔ A و B را مساوی می‌نامیم ؛ هرگاه تمام اعضای A عضو B بوده و تمام اعضای B عضو A باشند. به عبارت دیگر و با توجه به تعریف زیرمجموعه، «اگر $A \subset B$ و $B \subset A$ ، آن‌گاه $A = B$ و اگر $A = B$ ، آن‌گاه $A \subset B$ و $B \subset A$».

تذکر: وقتی می‌گوییم دو مجموعهٔ A و B با هم مساوی هستند، در واقع آنها یک مجموعه بوده و فقط به دو نام مختلف نامیده شده‌اند. مثلاً مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳\}$ فقط با مجموعهٔ $\{۱,۲,۳\}$ می‌تواند مساوی باشد، که اگر برای آن، نام دیگری چون B اختیار کنیم، می‌توانیم بنویسیم $A = B$.

تست: اگر $A = \{۲,(x+۲y),۴\}$ و $B = \{۴,\ ۵,\ (x-y)\}$ و $A = B$ در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $x = ۱\ ,\ y = ۲$ ۲) $x = -۱\ ,\ y = -۲$
۳) $x = ۳\ ,\ y = ۱$ ۴) $x = -۳\ ,\ y = ۱$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا با توجه به تعریف تساوی

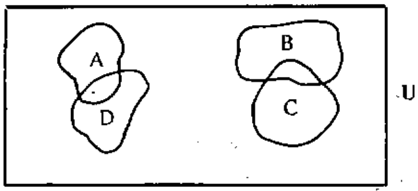
بین دو مجموعه داریم :

$$\{۲,\ (x+۲y),\ ۴\} = \{۴,۵,\ (x-y)\} \Rightarrow \begin{cases} x+۲y=۵ \\ x-y=۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=۳\ ,\ y=۱$$

مجموعهٔ مرجع

در هر مبحث، مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مطرح شده در آن بحث زیرمجموعه‌اش باشند، مجموعهٔ مرجع نامیده شده و با U نمایش داده می‌شود. مثلاً وقتی از اعداد طبیعی و کوچکتر از ۱۰۰ صحبت می‌کنیم، $U=\{۱,۲,...,۱۰۰\}$ مجموعهٔ مرجع است و یا مثلاً اگر A، B، C و D مجموعه‌هایی بوده و بخواهیم دربارهٔ آنها بحث کنیم، طبق شکل زیر، مجموعهٔ مرجع باید شامل همهٔ آنها باشد.



متمّم یک مجموعه

اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع A باشد ؛ یعنی $A \subset U$، در این صورت، اعضایی از U که در A نباشند، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که متمّم مجموعهٔ A نامیده می‌شود و آن را با A' نمایش می‌دهند.

مثال: اگر $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$، $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ در این صورت A' و B' را بیابید.

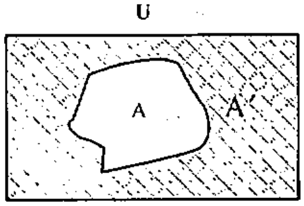
$$A'=\{x\in U | x \notin A\}=\{۱,۳,۵,۷,۸\}$$

(برای مشخص کردن A'، کافی است اعضای A را از U برداریم.)

$$B'=\{x\in U | x \notin B\}=\{۱,۷,۸\}$$

با استفاده از نمودار نیز می‌توان یک مجموعه و متمّم آن را نمایش داد. به نمودار زیر توجه کنید :

(A' هاشورخورده است.)



تست: اگر $U=\{۱,۲,۳,...,k\}$، $(k>۵)$ در این صورت متمّم مجموعهٔ $A=\{۳,۴,...,(k-۳)\}$ کدام است؟

۱) $\{۱,۲,...,k-۴\}$

۲) $\{۱,\ (k-۴),\ (k-۵),...,k\}$

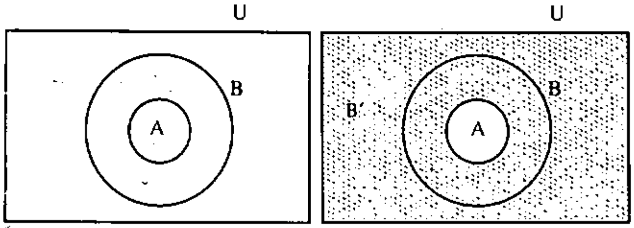
۳) $\{۳,۴,...,(k-۴)\}$

۴) $\{۱,۲,\ (k-۲),\ (k-۱),\ k\}$

حل: گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا مجموعهٔ U را می‌توان به‌صورت $U=\{۱,۲,...,k-۴,k-۳,k-۲,k-۱,k\}$ نوشت، که با برداشتن اعضای A از U، مجموعهٔ ذکر شده در گزینهٔ (۴) به‌دست می‌آید.

نکتهٔ مهم: اگر A و B دو مجموعه و A' و B' به ترتیب متمّم A و B باشند، در این صورت داریم :

$$A\subset B \Leftrightarrow B'\subset A'$$



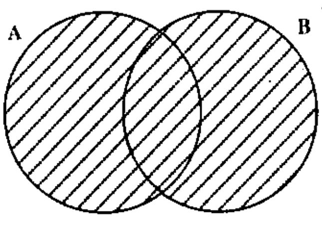
اعمال بین مجموعه‌ها

الف) اجتماع دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، اجتماع دو مجموعهٔ A و B با نماد $(A\cup B)$ نمایش داده می‌شود و آن، مجموعه‌ای است که اعضای آن، یا متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو می‌باشد.

به مثالها و شکل زیر توجه کنید :

(قسمتهای هاشورخورده، $(A\cup B)$ را تشکیل می‌دهند.)



مثال: اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۳,۴,۵,۶,۷\}$

در این صورت : $A\cup B=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$

توجه دارید که :

$$۵\in B\ ,\ ۵\notin A \Rightarrow ۵\in (A\cup B)$$

$$۷\notin A\ ,\ ۷\in B \Rightarrow ۷\in (A\cup B)$$

$$۳\in A\ ,\ ۳\in B \Rightarrow ۳\in (A\cup B)$$

نکات مهم

نکتهٔ ۱: همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید و با استفاده از تعریف اجتماع دو مجموعه داریم:

$A \subset (A \cup B)$, $B \subset (A \cup B)$

نکتهٔ ۲: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره داریم:

$\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$

(مجموعهٔ تُهی برای عمل اجتماع، عضو خنثی محسوب می‌شود.)

نکتهٔ ۳: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره داریم:

$A \cup A = A$

نکتهٔ ۴: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و A' متمّم آن باشد، همواره داریم:

$A \cup A' = A' \cup A = U$ (U مجموعهٔ مرجع است.)

نکتهٔ ۵: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، داریم:

$A \cup U = U \cup A = U$

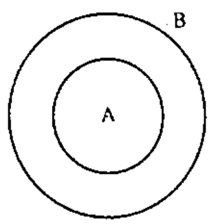
نکتهٔ ۶: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم:

$A \cup B = B \cup A$ (خاصیت جابه‌جایی)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

قضیهٔ مهم: اگر A و B دو مجموعه و داشته باشیم $A \subset B$، آن‌گاه همواره داریم: $A \cup B = B$.

(عکس قضیه نیز برقرار است: یعنی هرگاه $A \cup B = B$، آن‌گاه $A \subset B$.)



(قسمت هاشورخورده یعنی B، همان $(A \cup B)$ است.)

تست: اگر $A \subset B$ و $B \cup C = C$ کدام گزینه درست است؟

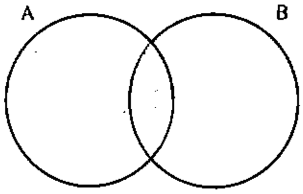
۱) $A \cup C = A$ ۲) $C \subset B$

۳) $A \cup C = C$ ۴) $A = C$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا از $B \cup C = C$. طبق عکس قضیهٔ قبل، نتیجه می‌گیریم که $B \subset C$ و طبق فرض داشتیم $A \subset B$؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم $A \subset C$ که بنابر قضیه از $A \subset C$ نیز نتیجه می‌شود $A \cup C = C$.

ب) اشتراک دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعه باشند، اشتراک دو مجموعهٔ A و B با نمادِ $(A \cap B)$ نمایش داده می‌شود و آن، مجموعه‌ای است که اعضای آن، هم متعلق به A و هم متعلق به B می‌باشد. به مثالها و شکل زیر توجه کنید:



(قسمت هاشورخورده، $(A \cap B)$ است.)

مثال: اگر $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۳,۴,۵,۶,۷\}$

در این صورت: $A \cap B = \{۳,۴\}$

توجه دارید که: $۳ \in A,\ ۳ \in B \Rightarrow ۳ \in (A \cap B)$

$۴ \in A,\ ۴ \in B \Rightarrow ۴ \in (A \cap B)$

نکات مهم

نکتهٔ ۱: همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنید و با استفاده از تعریف اشتراک دو مجموعه داریم:

$(A \cap B) \subset A$, $(A \cap B) \subset B$

نکتهٔ ۲: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، همواره داریم:

$\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing$

نکتهٔ ۳: برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم:

$A \cap A = A$

نکتهٔ ۴: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و A' متمّم آن باشد، همواره داریم:

$A \cap A' = A' \cap A = \varnothing$

نکتهٔ ۵: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، داریم:

$A \cap U = U \cap A = A$

نکتهٔ ۶: برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم:

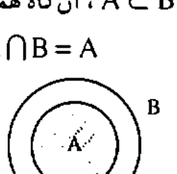
$(A \cap B) = (B \cap A)$ (خاصیت جابه‌جایی)

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (خاصیت شرکت‌پذیری)

قضیه مهم

اگر A و B دو مجموعه و داشته باشیم $A \subset B$، آن‌گاه همواره داریم: $A \cap B = A$

(عکس قضیه نیز برقرار است؛ یعنی هرگاه $A \cap B = A$، آن‌گاه $A \subset B$.)



(قسمت هاشورخورده $(A \cap B)$ است.)

تست: اگر $A \cap C = A$ و $B \cup C = B$ کدام گزینه **نادرست** است؟

۱) $A \cup C = C$ ۲) $B \cap C = C$

۳) $A \cup B = B$ ۴) $A \cap B = B$

حل: گزینهٔ (۴)؛ زیرا با توجه به قضیه‌های ذکر شده و عکس آنها داریم :

$A \cap C = A \Rightarrow A \subset C$ (۱)

$B \cup C = B \Rightarrow C \subset B$ (۲)

(بنابر خاصیت تعدی) (۳) $(۱) , (۲) \Rightarrow A \subset B$

گزینهٔ (۱) درست است. $(۱) \Rightarrow A \cup C = C$

گزینهٔ (۲) درست است. $(۲) \Rightarrow B \cap C = C$

گزینهٔ (۳) درست است. $(۳) \Rightarrow A \cup B = B$

یک خاصیت مشترک برای اجتماع و اشتراک (خاصیت توزیع‌پذیری یا پخشی)

برای هر سه مجموعهٔ دلخواه مانند A، B و C داریم :

I) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

II) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

تست: حاصل عبارت $(A \cap B') \cup (A \cap B)$ کدام است؟

۱) $\varnothing$ ۲) A ۳) B ۴) U

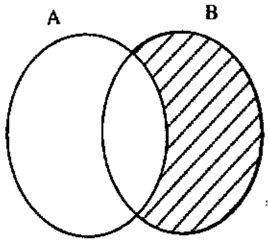
حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا طبق عکس خاصیت پخشی (فاکتورگیری) داریم :

$$[(A \cap B') \cup (A \cap B)] = [A \cap \underbrace{(B' \cup B)}_{U}] = (A \cap U) = A$$

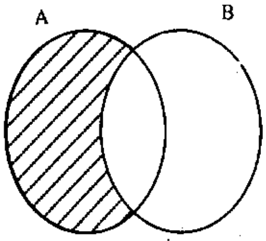
تذکر: اگر A و B دو مجموعه و $A \cap B = \varnothing$ ، می‌گوییم A و B دو مجموعهٔ جدا از هم هستند.

ج) تفاضل دو مجموعه

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $(A - B)$ مجموعه‌ای است شامل تمام اعضایی از A که متعلق به B نباشند. به شکل و مثالهای زیر توجه کنید :



(قسمت هاشور خورده (B-A) است.)



(قسمت هاشور خورده (A-B) است.)

مثال: اگر $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ ، $B = \{۱,۲,۷,۹\}$ و $C = \{۱,۲,۷,۹,۶\}$ در این صورت داریم :

$A - B = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} - \{۱,۲,۷,۹\} = \{۳,۴,۵,۶\}$

$B - A = \{۱,۲,۷,۹\} - \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = \{۷,۹\}$

$A - C = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} - \{۱,۲,۷,۹,۶\} = \{۳,۴,۵\}$

$C - A = \{۱,۲,۷,۹,۶\} - \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\} = \{۷,۹\}$

$B - C = \{۱,۲,۷,۹\} - \{۱,۲,۷,۹,۶\} = \{\ \} = \varnothing$

$C - B = \{۱,۲,۷,۹,۶\} - \{۱,۲,۷,۹\} = \{۶\}$

تذکر: برای محاسبهٔ $(A - B)$ کافی است اعضایی از B که در A نیز هستند، (در صورت وجود) از مجموعهٔ A حذف کنیم.

نکات مهم

نکتهٔ ۱: همان‌طور که از شکل، مشخص است و با استفاده از تعریف تفاضل داریم :

$(A - B) \subset A$, $(B - A) \subset B$

نکتهٔ ۲: اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم :

$A - \varnothing = A$, $\varnothing - A = \varnothing$

نکتهٔ ۳: برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A داریم :

$A - A = \varnothing$

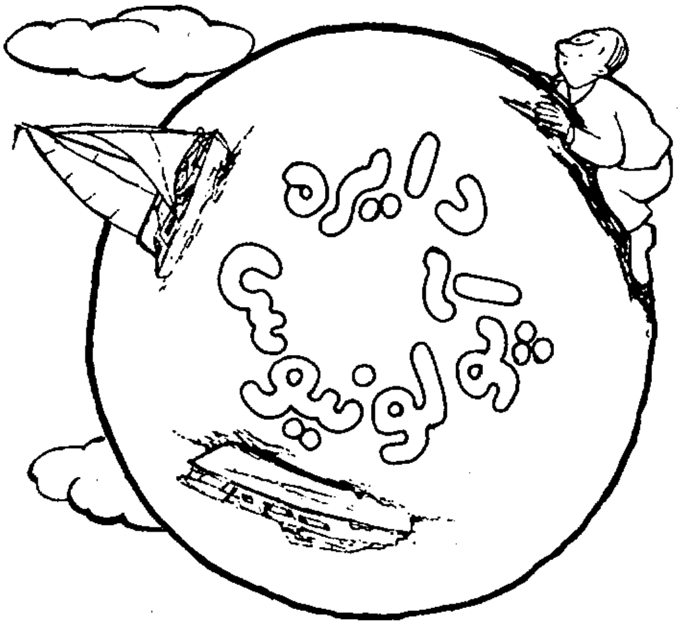
نکتهٔ ۴: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و A' متمّم آن باشد، داریم :

$A - A' = A$, $A' - A = A'$

نکتهٔ ۵: اگر A مجموعه‌ای دلخواه و U مجموعهٔ مرجع باشد، داریم :

$A - U = \varnothing$, $U - A = A'$

مکان هندسی

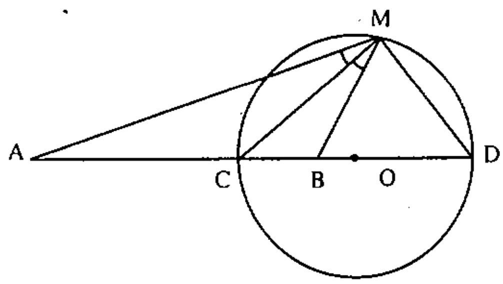


(قسمت بیست و دوم)

● محمدهاشم رستمی

دایرهٔ آپولونیوس. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k ($k \neq 0$ و $k \neq 1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی. دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P در نظر گرفته، خط راست AB را رسم می‌کنیم و روی این خط دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، یعنی، (۱) $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=k$ باشد. دایرهٔ به



قطر CD مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است.

زیرا :

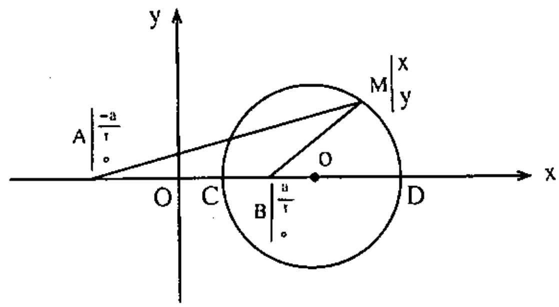
اولاً. هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر k است. زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است. پس دستگاه M−ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی یعنی MC و MD بر هم عمود می‌باشند (زاویهٔ $\hat{CMD}$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر 90° است)، پس این دو شعاع نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی زاویه‌های بین دو شعاع دیگر می‌باشند. یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم نیمسازهای هر زاویه ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=k$$

ثانیاً. هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k، یعنی (۲) $\frac{MA}{MB}=k$ باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد. زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=k$، اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD بترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس M از مثلث AMB می‌باشند که چون این دو نیمساز بر هم عمودند، پس $\hat{CMD}=90^\circ$ و در نتیجه نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس (Appolonieus of Perga) می‌نامند.

اثبات به روش تحلیلی. دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم. خط AB را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط



AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر M(x,y) نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت k است، با فرض AB = a داریم:

$$A(-\frac{a}{2},0)\ ,\ B(\frac{a}{2},0)\ ,\ M(x,y)$$

$$\Rightarrow MA=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}$$

$$MB=\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}\ ,$$

$$\frac{MA}{MB}=k\Rightarrow\sqrt{\frac{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}}=k$$

$$\Rightarrow(x+\frac{a}{2})^2+y^2=k^2(x-\frac{a}{2})^2+k^2y^2$$

$$\Rightarrow(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2-a(k^2+1)x+$$
$$(k^2-1)\frac{a^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{a(k^2+1)}{k^2-1}x+\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1(\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)},0)$ و شعاعش $R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$ است.

بعکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است.

قطر CD از این دایره، پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، زیرا داریم:

$$O_1A=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right|\ ,\ O_1B=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}-\frac{a}{2}\right|\ ,$$

$$O_1C=O_1D=R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$$

$$\Rightarrow O_1C^2=O_1D^2=\overline{O_1A}.\overline{O_1B}\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

$$=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right|.\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}.\frac{a}{2}\right|$$

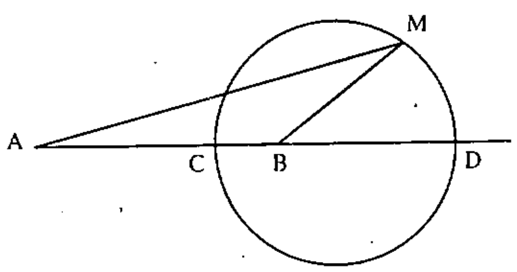
$$\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2}{4}(\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2}-1)$$

$$\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت k است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

مثال ۱. پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل. نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند.

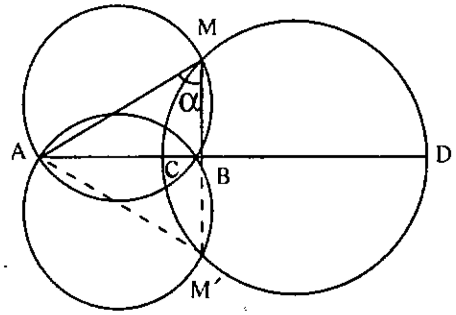


یعنی $2=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ باشد. دراین‌صورت CA = ۸، CB = ۴، DA = ۲۴ و DB = ۱۲ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره مکان هندسی مورد نظر است.

مثال ۲. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای

از این صفحه را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود، و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

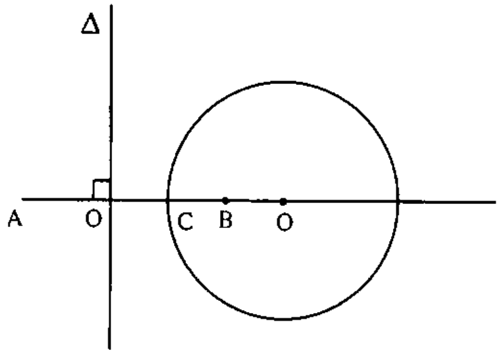
حل. کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، رسم می‌نماییم. نقطه‌های



برخورد این دو مکان هندسی جواب مسأله‌اند و مسأله همواره دو جواب دارد.

مثال ۳. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت k باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

حل. نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، سپس دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به



یک فاصله است، خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است O می‌نامیم. اما می‌دانیم بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند (ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند، پس مسأله دارای جواب نیست.

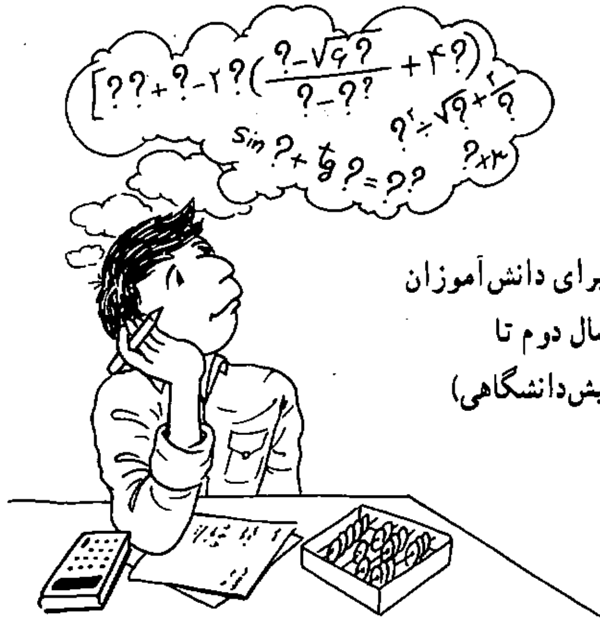
تفریح اندیشه



سعید که آدم عجولی است، از پلّه‌برقی متحرک واقع در مسیرش با نرخ یک پله در هر ثانیه بالا می‌رود و پس از بیست پله به آن می‌رسد. روز بعد، باز هم درحالی که پله‌برقی در حرکت است، با نرخ دو پله در ثانیه از آن بالا می‌رود و در سی‌ودو پله به بالای آن می‌رسد. درصورتی که پلکان برقی متوقف باشد، چند پله از پایین تا بالا دارد؟

آنالیز ترکیبی

(قسمت دوم)



(برای دانش‌آموزان سال دوم تا پیش‌دانشگاهی)

● میرشهرام صدر

جایگشت، تبدیل و ترکیب

جایگشت

فرض کنیم n شیء داریم، هر یک از حالتهای کنار هم قرار گرفتن این n شیء را یک جایگشت از آن n شیء گوییم. تعداد جایگشتهای n شیء را با نماد P_n نمایش می‌دهیم. برای مثال، جایگشتهای سه شیء a، b و c به صورت زیر است:

abc, acb, bca, bac, cab, cba

همچنین جایگشتهای دو شیء از سه شیء a، b و c عبارت است از:

ab, ba, ac, ca, bc, cb

فاکتوریل

فرض کنید n عددی حسابی باشد، n! (بخوانید n فاکتوریل) تابعی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f: \mathbb{N} \cup \{۰\} \to \mathbb{N}$$

$$f(n) = n! = \begin{cases} ۱ & n = ۰ \text{ یا } ۱ \\ ۱ \times ۲ \times \ldots \times n & n > ۱ \end{cases}$$

بنابراین، طبق این تعریف داریم:

$$۰! = ۱! = ۱ \ , \ ۶! = ۱ \times ۲ \times \ldots \times ۶ = ۷۲۰$$

محاسبهٔ تعداد تبدیلات

۱. اگر n شیء متمایز داشته باشیم، تعداد جایگشتهای این n شیء برابر با n! است؛ یعنی: $P_n = n!$

مثال. ۵ دانش‌آموز، به چند طریق می‌توانند روی یک ردیف نیمکت بنشینند.

حل.

$$n = ۵ \Rightarrow P_n = ۵! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$$

مثال. با حروف کلمهٔ flower چند کلمهٔ شش حرفی معنادار یا بی‌معنا، بدون تکرار حروف می‌توان ساخت؟

حل.

$$n = ۶ \Rightarrow P_n = ۶! = ۱ \times ۲ \times \ldots \times ۶ = ۷۲۰$$

۲. تعداد جایگشتهای (تبدیلهای) r شیء از n شیء $(r \le n)$

فرض کنیم n شیء متمایز داریم، هر جایگشت (تبدیل) r تایی از این n شیء که در آن $r \le n$، عبارت است از دسته‌هایی r تایی از این n شیء، به‌طوری که در هر دسته، ترتیب قرار گرفتن این r شیء دارای اهمیت باشد و با تعویض جای آنها، شیء جدیدی حاصل شود. تعداد تبدیلهای r تایی را با $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و مقدار آن را طبق فرمول زیر به‌دست می‌آوریم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \ ; \ (r \le n)$$

اثبات. چون r خانه و n شیء داریم، بنابراین خانهٔ اوّل با n شیء، خانهٔ دوم با $(n-۱)$ شیء، ... و خانهٔ rام با $(n-r)+۱$ شیء پُر می‌شود؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

خانه اول	خانه دوم	خانه سوم		خانه rام
n	n − ۱	n − ۲	...	(n − r) + ۱

$$P_n = n(n-۱)(n-۲) \times \ldots \times [(n-r)+۱]$$

با ضرب طرف راست برابری بالا در

$$\frac{(n-r)(n-r-۱) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱}{(n-r)(n-r-۱) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

داریم:

$$P_n = \frac{n(n-۱) \times \ldots \times [(n-r)+۱] \times (n-r)(n-r-۱) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱}{(n-r)(n-r-۱) \times \ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱}$$

$$P_n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال. با حروف کلمهٔ CHAIR، چند کلمهٔ سه حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

$$n=۵\ ,\ r=۳\ ;\ P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$$

تست. با رقمهای ۳، ۵، ۱، ۲، ۶ و ۸ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار رقمها)

۱) ۱۲۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۳۰۰

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

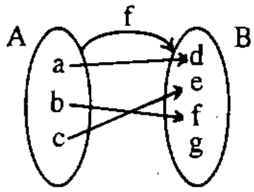
$$n=۶\ ,\ r=۴\ ;\ P(۶,۴)=\frac{۶!}{(۶-۴)!}=\frac{۶!}{۲!}=۳۶۰$$

مثال: با حروف کلمهٔ TRIANGLE چند کلمهٔ سه حرفی می‌توان نوشت؟ (بدون تکرار حروف)

حل.

$$n=۸,\ r=۳\ ;\ P(۸,۳)=\frac{۸!}{۵!}=۳۳۶$$

محاسبهٔ تعداد نگاشتهای یک به یک از یک مجموعهٔ n عضوی به یک مجموعهٔ m عضوی $(m \le n)$



نگاشت رو به رو را از مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به $B=\{d,e,f,h\}$ در نظر بگیرید.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، نگاشت $f:A \to B$ (مفهوم نگاشت را در شمارهٔ قبل بیان کرده‌ایم)، تابعی یک به یک است ؛ یعنی اگر نگاشت f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوجهای مرتّب بنویسیم، آن‌گاه مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتّب، با یکدیگر متمایزند.

$$f=\{(a,d),(b,f),(c,e)\}$$

تذکر. اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد و $n > m$ ، در این صورت، از A به B نگاشت یک‌به‌یک نمی‌توان تعریف کرد. بنابراین برای این که بتوان از مجموعهٔ n عضوی A به مجموعهٔ m عضوی B، نگاشت یک‌به‌یک تعریف کرد، باید داشته باشیم $n \le m$.

فرض کنید $A=\{a_۱,a_۲,\dots,a_n\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,\dots,b_m\}$ و $n \le m$ ، می‌خواهیم تعداد نگاشتهای یک به یک $f:A \to B$ را محاسبه کنیم. برای این منظور، ابتدا تابع f را روی $a_۱$ اثر می‌دهیم ؛ $f(a_۱)$ می‌تواند برابر $b_۱$ یا $b_۲$ یا ... یا b_m باشد ؛ یعنی برای $f(a_۱)$، m انتخاب داریم. فرض کنیم $f(a_۱)=b_j$ که $۱ \le j \le m$. در مرحلهٔ بعد، f را روی $a_۲$ اثر می‌دهیم. برای این که نگاشت f یک به یک باشد، باید $f(a_۲) \ne b_j$ ؛ یعنی برای $f(a_۲)$، $(m-۱)$ انتخاب داریم. به همین ترتیب، برای $f(a_۳)$، $(m-۲)$ انتخاب و ... و برای $f(a_n)$، $(m-n+۱)$ انتخاب داریم ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$f(a_۱)$	$f(a_۲)$	$f(a_۳)$	...	$f(a_n)$
m	$m-۱$	$m-۲$	...	$(m-n)+۱$

تعداد نگاشتها (یک به یک از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B)

$$=m(m-۱)(m-۲)\dots(m-n+۱)$$

$$=P(m,n)=\frac{m!}{(m-n)!}$$

مثال. از مجموعهٔ دو عضوی A به مجموعهٔ هفت عضوی B، چند نگاشت یک به یک می‌توان تعریف کرد؟

حل.

$$P(۷,۲)=\frac{۷!}{(۷-۲)!}=\frac{۷!}{۵!}=\frac{۷\times۶\times۵!}{۵!}=۴۲$$

۳. تعداد تبدیلهایی که شامل یک شیء مشخص هستند

n شیء متمایز $a_۱,a_۲,\dots,a_n$ را در نظر می‌گیریم، تعداد تبدیلهای r تایی از این n شیء که در همهٔ آنها $a_۱$ به‌کار رفته است، از فرمول زیر محاسبه می‌شود :

$$r\times P(n-۱,\ r-۱)=\frac{r(n-۱)!}{(n-r)!}$$

مثال. با حروف کلمهٔ CHAIR چند کلمهٔ ۳ حرفی می‌توان ساخت ؛ به‌طوری که شامل حرف A باشد؟

حل.

$$n=۵,\ r=۳;\ ۳\times P(۵-۱,\ ۳-۱)$$

$$=۳\times P(۴,۲)=\frac{۳\times۴!}{۲!}=۳۶$$

۴. تعداد تبدیلهایی که فاقد یک یا چند شیء مشخص هستند

n شیء متمایز $a_۱,a_۲,\dots,a_n$ را در نظر می‌گیریم، تعداد تبدیلهای r تایی از این n شیء که فاقد شیء $a_۱$ هستند، از فرمول زیر محاسبه می‌شود : $(r < n)$

$$P(n-۱,\ r)=\frac{(n-۱)!}{(n-۱-r)!}$$

همچنین تعداد تبدیلهای r تایی از n شیء که فاقد k شیء مشخص

باشند، برابر است با :

با شرط $(n > k + r)$ ، $P(n-k,\ r) = \frac{(n-k)!}{(n-k-r)!}$

۵. تعداد تبدیلهای یک در میان قرار دادن اشیا

الف: هرگاه دو دستهٔ n تایی از اشیای متمایز داشته باشیم و بخواهیم آنها را یک در میان قرار دهیم، تعداد تبدیلهای یک در میان آنها برابر است با :

$P_n = 2 \times n! \times n!$

مثال. سه کتاب ریاضی متمایز و سه کتاب فیزیک متفاوت داریم، به چند طریق می‌توان این کتابها را به‌صورت یک در میان در یک طبقه کتابخانه قرار داد؟

$n = 3;\ P_n = 2 \times 3! \times 3! = 72$

ب: در صورتی که بخواهیم اشیای دو دسته، یکی n تایی و دیگری $(n-1)$ تایی را یک در میان کنار هم قرار دهیم، تعداد تبدیلهای یک در میان برابر است با :

$P_n = n! \times (n-1)!$

مثال. سه سرباز و دو افسر، به چند طریق می‌توانند یک درمیان در یک ردیف بنشینند؟

حل. $P_n = 3! \times 2! = 12$

سرباز	افسر	سرباز	افسر	سرباز
۱	۱	۲	۲	۳

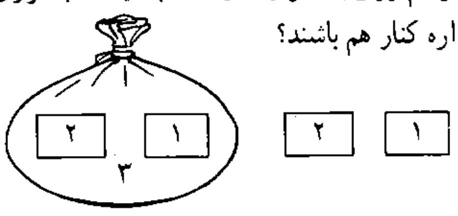
۶. تعداد تبدیلهایی که در آنها دو یا چند شیء کنار هم قرار دارند

برای یافتن تعداد تبدیلهای n شیء، به شرط آن که r تا از آنها کنار هم قرار گیرند، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم :

$P_n = (n - r + 1)! \times r!;(r \le n)$

مثال. به چند طریق می‌توانند سه دانش‌آموز که دو نفر آنها برادر هستند، کنار هم روی یک ردیف نیمکت بنشینند ؛ به‌طوری که دو برادر همواره کنار هم باشند؟

حل.



$P_n = (4 - 2 + 1)! \times 2! = 3! \times 2! = 12$

دو برادر به !۲ حالت کنار هم قرار می‌گیرند، اگر اکنون دو برادر را یک گروه، نفر سوم را یک گروه و نفر چهارم را یک گروه در نظر بگیریم، آن‌گاه این سه گروه به !۳ حالت کنار هم قرار می‌گیرند ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم : $P_n = 3! \times 2! = 12$

حالت کلی. اگر k دسته شیء داشته باشیم ؛ به‌طوری که دستهٔ اول شامل n_1 شیء متمایز، دستهٔ دوم شامل n_2 شیء متمایز، ... و دستهٔ kام شامل n_k شیء متمایز باشند، در این صورت، تعداد کلّ حالتهایی که این اشیا کنار هم قرار می‌گیرند ؛ به‌طوری که اشیای هر دسته کنار هم واقع باشند، برابر است با :

$P_n = n_1! \times n_2! \times ... \times n_k! \times k!$

مثال. ۴ مداد، ۵ خودکار و ۷ خودنویس، به چند طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند، به‌طوری که همواره مدادها، خودکارها و خودنویسها کنار هم باشند.

حل.

$P_n = 4! \times 5! \times 7! \times 3!$

زیرا ۴ مداد به !۴ حالت، ۵ خودکار به !۵ حالت و ۷ خودنویس به !۷ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند و اگر ۴ مداد را یک گروه، ۵ خودکار را یک گروه و ۷ خودنویس را یک گروه در نظر بگیریم، آن‌گاه این سه گروه به !۳ حالت می‌توانند کنار هم قرار گیرند ؛ بنابراین طبق اصل ضرب داریم :

$P_n = 4! \times 5! \times 7! \times 3!$

۷. تعداد تبدیلهایی که n شیء متمایز به صورت حلقه قرار می‌گیرند

n شیء متمایز با $(n-1)!$ حالت می‌توانند یک حلقه تشکیل دهند یا دور میز گردی قرار بگیرند.

مثال. به چند طریق ۵ دانش‌آموز می‌توانند دور میزگردی بنشینند یا به چند طریق ۵ دانش‌آموز می‌توانند دستهای یکدیگر را گرفته و تشکیل یک حلقه دهند؟

حل.

$P_n = (5-1)! = 4! = 24$

۸. تبدیل با تکرار

فرض کنیم n شیء داشته باشیم که در آنها k نوع شیء متمایز وجود داشته باشد ؛ به‌طوری که n_1 تا از آنها از نوع اول، n_2 تا از آنها نوع دوم، ... و n_k تا از آنها از نوع kام باشند و $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. در این صورت، تعداد تبدیلهای متمایز این n شیء برابر است با :

$$P_n = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$$

مثال. با حروف کلمهٔ MATHEMATICS چند کلمهٔ ۱۱ حرفی می‌توان ساخت؟

حل. چون در این کلمه، M دو بار، A دو بار و T دو بار تکرار شده است ؛ بنابراین داریم :

$$P_n = \frac{11!}{2! \times 2! \times 2!}$$

تست. ۷ نفر مسافر به چند طریق می‌توانند در یک اتاق سه تخته و دو اتاق دو تخته قرار گیرند؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۲۱۰ ۴) ۱۸۰

حل. گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$P_n = \frac{7!}{3! \times 2! \times 2!} = 210$$

ترکیب

سه شیء a، b و c را در نظر می‌گیریم، تعداد تبدیلهای دوتایی از این سه شیء، برابر ۶ است.

C(۳,۲) ; ترکیب دوتایی از سه شیء	تبدیل دوتایی از سه شیء P(۳,۲)
{a , b}	ab , ba
{a , c}	ac , ca
{b , c}	bc , cb

هرگاه در انتخاب دوتایی از این سه شیء، ترتیب قرار گرفتن اشیاء را در نظر نگیریم، به عبارت دیگر، زیرمجموعه‌های دو عضوی از این سه شیء را بنویسیم، طبق تعریف، یک ترکیب ۲تایی از ۳ شیء داریم و آن را با نماد C (۳,۲) نمایش می‌دهیم. همان‌طور که طبق جدول بالا ملاحظه می‌کنید، تعداد تبدیلها، !۲ برابر تعداد ترکیبهاست ؛ بنابراین :

$$2! \times C(3,2) = P(3,2) \Rightarrow C(3,2) = \frac{P(3,2)}{2!}$$

به‌طور کلی، هر ترکیب، انتخاب اشیایی از میان چند شیء، بدون در نظر گرفتن ترتیب برای آنهاست. به عبارت دیگر، هر زیرمجموعهٔ r عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی $(r \le n)$ را یک ترکیب rتایی از n شیء گوییم. تعداد این ترکیبها را با یکی از نمادهای $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و تعداد تبدیلهای r شیء از n شیء، !r برابر تعداد ترکیبهای r شیء از n شیء است ؛ بنابراین داریم :

$$r! \times C(n,r) = P(n,r)$$

$$\Rightarrow C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

در نتیجه داریم :

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

برای مثال، تعداد ترکیبهای سه حرفی از چهار حرف a، b، c و d یا تعداد زیرمجموعه‌های سه عضو از مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d\}$ برابر است با :

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

این چهار زیرمجموعه، عبارت است از : $\{a,b,c\}$ ، $\{a,b,d\}$ ، $\{a,c,d\}$ و $\{b,c,d\}$. ملاحظه می‌کنیم که اگر در هر یک از این زیرمجموعه‌ها، ترتیب عضوها را عوض کنیم، زیرمجموعهٔ جدیدی به‌دست نمی‌آید.

مثال. داخل جعبه‌ای ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ سبز وجود دارد. به چند طریق می‌توان تصادفی و یکجا ۴ مهره از این جعبه خارج کرد؟

حل. داخل جعبه ۸ مهره داریم و می‌خواهیم یک زیرمجموعهٔ ۴ عضوی انتخاب کنیم ؛ بنابراین داریم :

$$\binom{8}{4} = \frac{8!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

تست. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۳ نفری از بین ۷ دانشجو و ۵ دانش‌آموز انتخاب کرد؟

۱) ۱۱۰ ۲) ۳۳۰ ۳) ۴۴۰ ۴) ۲۲۰

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا می‌خواهیم از بین ۱۲ نفر، یک زیرمجموعهٔ ۳ عضوی انتخاب کنیم :

$$\binom{12}{3} = \frac{12!}{3! \times 9!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!} = 220$$

حاصل برخی از مقادیر $\binom{n}{r}$; $(r \le n)$

۱) $\binom{n}{0} = 1$ ۲) $\binom{n}{1} = n$

۳) $\binom{n}{n}=1$ ۴) $\binom{n}{n-1}=n$

۵) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ ۶) $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

مثال. به چند طریق می‌توان از بین ۳ دانش‌آموز، ۵ دانشجو و ۴ کارمند، کمیته‌ای سه نفری تشکیل داد ؛ به‌طوری که :

الف. سه نفر انتخاب شده دارای شغلهای متمایز باشند.

ب. از سه نفر انتخاب شده، دو نفر دانش‌آموز باشند.

ج. از سه نفر انتخاب شده، حداقل دو نفر دانش‌آموز باشند.

د. از سه نفر انتخاب شده، حداکثر دو نفر دانش‌آموز باشند.

حل. الف. برای این که سه نفر انتخاب شده، دارای شغلهای مختلف باشند ؛ بنابراین از هر کدام یک نفر انتخاب می‌کنیم :

کارمند دانشجو دانش‌آموز

$$T=\binom{3}{1}\times\binom{5}{1}\times\binom{4}{1}=3\times5\times4=60$$

ب. دو حالت پیش می‌آید ؛ حالت اوّل، دو دانش‌آموز و یک نفر دانشجو، حالت دوم، دو دانش‌آموز و یک نفر کارمند، جواب مسأله از مجموع جوابهای حالتهای اول و دوم به‌دست می‌آید :

کارمند دانش‌آموز دانشجو دانش‌آموز

$$T=\binom{3}{2}\times\binom{5}{1}+\binom{3}{2}\times\binom{4}{1}=3\times5+3\times4=27$$

ج. در صورتی که از سه نفر انتخاب شده، حداقل دو نفر آنها دانش‌آموز باشند، بنابراین می‌تواند دو نفر دانش‌آموز یا سه نفر دانش‌آموز انتخاب کنند ؛ بنابراین دو حالت پیش می‌آید، حالت اول، دو نفر دانش‌آموز و نفر سوم می‌تواند دانشجو یا کارمند باشد و حالت دوم، هر سه نفر دانش‌آموز هستند ؛ بنابراین :

$$T=\underbrace{\binom{3}{2}\times\binom{5}{1}+\binom{3}{2}\times\binom{4}{1}}_{\text{دو نفر دانش‌آموز هستند}}+\binom{3}{3}=15+12+1=28$$

د. در صورتی که از سه نفر انتخاب شده، حداکثر دو نفر آنها دانش‌آموز باشند، بنابراین می‌تواند دو نفر دانش‌آموز یا یک نفر دانش‌آموز یا اصلاً دانش‌آموز انتخاب نکند. در این قسمت، فقط حالتی که هر سه نفر دانش‌آموز باشند، در نظر گرفته نشده است ؛ بنابراین می‌توان نوشت :

تعداد ترکیبهایی که حداکثر ۲ نفر از سه نفر دانش‌آموز باشند برابر است با تعداد کل ترکیبهای ۳ عضوی از ۱۲ عضو، منهای تعداد ترکیبهایی که هر سه نفر دانش‌آموز باشند.

کارمند دانشجو دانش‌آموز کل

$$T=\binom{12}{3}-\binom{3}{3}\times\binom{5}{0}\times\binom{4}{0}=220-1=219$$

تعداد ترکیبهایی که فاقد k شیء مشخص هستند

تعداد ترکیبهای r تایی از n شیء متمایز که فاقد k شیء مشخص‌اند، برابر با $T=\binom{n-k}{r}$ است.

مثال. چند تا از زیرمجموعه‌های ۵ عضوی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,...,10\}$ فاقد عضوهای ۴، ۵ و ۶ هستند؟

حل.

$$n=10,\ r=5,\ k=3;\ \binom{10-3}{5}=\binom{7}{5}=\frac{7!}{5!\times2!}=21$$

تعداد ترکیبهایی که شامل k شیء مشخص هستند

تعداد ترکیبهای r تایی از n شیء متمایز که شامل k شیء مشخص‌اند، برابر با $\binom{n-k}{r-k}$ است. $(k\le r\le n)$

مثال. چند تا از زیرمجموعه‌های ۴ عضوی مجموعهٔ $A=\{1,2,3,...,10\}$ شامل عضوهای ۵ و ۷ هستند؟

حل.

$$n=10, r=4, k=2;\binom{10-2}{4-2}=\binom{8}{2}=\frac{8!}{2!\times6!}=28$$

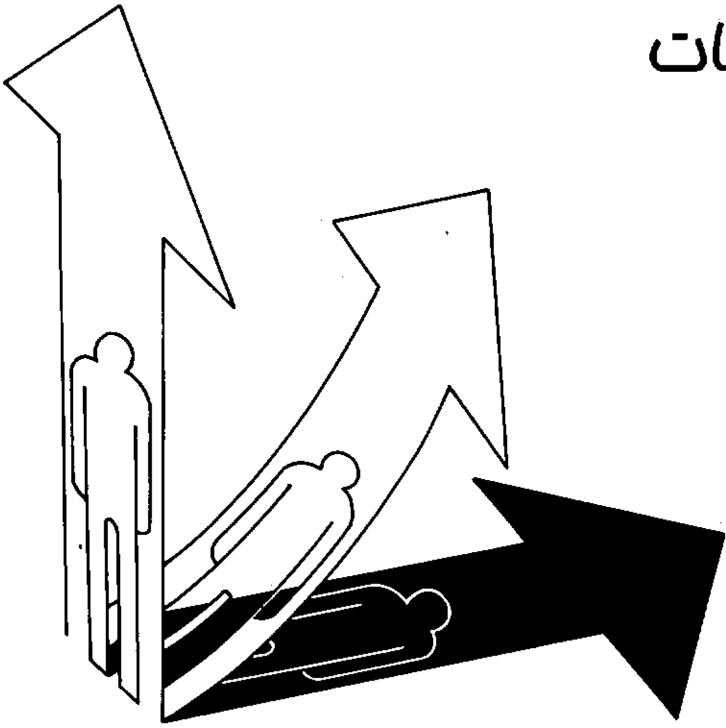
تست. از بین ۸ دانش‌آموز که ۲ نفر آنها برادر هستند، به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفری تشکیل داد که شامل هر دو برادر باشند.

۱) ۱۰ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۴۰

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$n=8,\ r=5,\ k=2;\binom{8-2}{5-2}=\binom{6}{3}=\frac{6!}{3!\times3!}=20$$

گشت و گذاری در ریاضیات معاصر



تاریخچه‌ای از نظریهٔ منطق فازی:
(Fuzzy Logic)

● تهیه و تنظیم: محمّدعلی فریبرزی عراقی
عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی
واحد تهران

مفهوم «فازی» بودن، به معنای چند ارزشی یا چند مقداری بودن است. در حالت فازی برای پاسخ به یک سؤال، فقط با دو انتخاب «درست» یا «نادرست» و «بلی» یا «خیر» مواجه نیستیم و حالت میانه نیز موردنظر است. در واقع، به جای حالت دودویی صفر ـ یک، با اعدادی از صفر تا یک سروکار داریم و به‌جای داشتن جهان سیاه و سفید، جهانی با سایه‌های خاکستری از سیاه تا سفید را داریم. «ارسطو»، فیلسوف بزرگ یونانی معتقد بود: «هر چیزی یا باید باشد یا نباشد، چه در حال حاضر و چه در آینده.» در این جهان‌بینی، همواره بین تضادها و بودن یا نبودنها تمایز قائل می‌شویم. در جهان دو ارزشی ارسطو، باید گفت یا «A» یا «نه A». «بودا» در هندوستان، پنج قرن پیش از میلاد مسیح و حدود دو قرن پیش از ارسطو، اولّین قدم در دوری از جهان سیاه و سفید را برداشت. هدف وی، نگریستن به جهان به‌صورتی که هست، بود. به نظر بودا، باید جهان را سراسر تناقض دید؛ جهانی که در آن هم «A» و هم «نه A» را داریم و این همان جدایی از جهان سیاه و سفید ارسطو و ورود به جهان خاکستری است و به عبارت دیگر، جدایی از فضای دو ارزشی و ورود به فضای چند ارزشی.

پدیده‌های واقعی تا اندازه‌ای مبهم و غیردقیق هستند و نوعی عدم قطعیت بر آنها حاکم است. در جهان فازی، همه چیز به‌طور نسبی درست یا نادرست است؛ نه به‌طور یقین. در اوایل دههٔ ۱۹۲۰، اولّین بار منطق چند ارزشی توسط «لوکاسیه ویچ» لهستانی در مقابل منطق ارسطویی مطرح شد. در همین زمان، یعنی اوایل قرن بیستم، «برتراند راسل» با ارائه پارادوکسهای خود، بنیانهای منطقی برای منطق ابهام یا فازی را نهاد؛ ولی موضوع را ادامه نداد. به عقیدهٔ راسل، هر چیزی درجه‌ای از ابهام را دارد و تا سعی در واضح و روشن کردن آن نکنید، آن را درک نخواهید کرد.

در اواخر دههٔ ۱۹۲۰، ورنر هایزنبرگ با ارائه اصل عدم قطعیت خود در «مکانیک کوانتمی» گامی در ارائه منطق چند ارزشی را برداشت. در این اصل، برای هر کمیّت فیزیکی، یک منحنی زنگی شکل که معرِّف تغییر در دانش یا اطمینان ماست، وجود دارد. هر چه این منحنی پهن‌تر باشد، ما کمتر می‌دانیم و به عبارت دیگر، قطعیت کمتر می‌شود، و بعکس، هر چه این منحنی باریکتر باشد، ما دانش بیشتری دربارهٔ آن کمیّت داریم و به عبارت دیگر، فازی بودن کمتر می‌شود. اصل عدم قطعیت می‌گوید که وقتی یک منحنی زنگ پهن‌تر می‌شود، منحنی زنگ دیگری نازکتر می‌شود؛ مانند منحنیهای زنگ مربوط به زمان و انرژی یا سرعت و مکان. در سال ۱۹۳۷ «ماکس بلَک» مقاله‌ای روی مجموعه‌های مبهم منتشر کرد و سرانجام در سال ۱۹۶۵ نظریهٔ مجموعه‌های فازی توسط پروفسور «لطفی عسگرزاده»، دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه «کالیفرنیا» در «برکلی» عرضه شد. لطفی نام فازی را روی این

مجموعه‌های چند ارزشی نهاد ؛ علت این نامگذاری، آن بود که مفهوم فازی را از منطق دودویی که در زمان وی مطرح بود، دور کند.

در نظریهٔ مجموعه‌های معمولی، اگر یک ویژگی خوش تعریف باشد یک مجموعهٔ متناظر آن وجود دارد که هر شیء از مجموعهٔ مرجع در آن مجموعه یا قرار دارد یا قرار ندارد. برای مثال، ویژگی «بزرگتر از ۵ بودن» در اعداد حقیقی، بیانگر مجموعه‌ای چون $A=\{x\in\mathbb{R}|\ x>5\}$ است که هر عدد حقیقی، یا به A تعلق دارد یا به A تعلق ندارد. برای مثال، $2\notin A$ و $8\in A$. ولی ویژگی «بزرگ بودن» در اعداد حقیقی، یک ویژگی مبهم است و این سؤال مطرح است : در مجموعهٔ اعداد بزرگ، عددی چون ۱۰۰ یا ۱۰۰۰ یا 10^6 قرار دارد یا ندارد؟ لطفی پیشنهاد کرد که به هر عدد از مجموعهٔ اعداد حقیقی، عددی از [۱ و ۰] را به‌عنوان درجهٔ بزرگی آن عدد نسبت دهیم. هر قدر عدد بزرگتر باشد، عدد متناظر برای عضویت آن در این مجموعه، به یک نزدیکتر باشد و هر قدر عدد کوچکتر باشد، عدد مربوط به عضویت آن در این مجموعه، به صفر نزدیکتر باشد. برای مثال، برای عدد ۱۰۰۰ گفته شود این عدد با درجهٔ عضویت ۰/۶، عضو مجموعهٔ اعداد بزرگ است. لازم به ذکر است، اعطای درجهٔ عضویت به یک شیء، فقط به نظر فرد بستگی دارد، لذا ما برای مفاهیم فازی چون «بزرگ بودن»، «جوان بودن» یا «بلند قد بودن» و امثالهم، می‌توانیم مجموعه‌های فازی مختلفی را بسازیم.

امروزه کشورهای صنعتی چون ژاپن، با استفاده از قوانین منطق فازی، دست به ساخت محصولات فازی نظیر ماشین لباسشویی، خشک‌کن، اجاقهای مایکروویو، دوربینهای عکاسی و فیلمبرداری، دستگاه کپی، تلویزیون، جاروبرقی، یخچال و ماشین ظرفشویی فازی کرده‌اند. برای مثال، در ماشین لباسشویی فازی، براساس نوع الیاف، بار، کثیفی و سطح آب، ماشین روش شستشو را تعیین می‌کند یا در دوربینهای عکاسی و فیلمبرداری فازی، دوربین نوسانات، دست فیلمبردار را حذف می‌کند و دوربین، عمل خودتنظیمی را براساس موضوع موجود در کادر انجام می‌دهد. همچنین تلویزیون فازی، نور و ساختار تصویر را بر اساس هر فریم و صدا را براساس فاصلهٔ تماشاچی تنظیم می‌کند.

در اوایل دههٔ ۱۹۹۰، کاربرد نظریهٔ فازی در صنعت، به پیشرفتهای شگرفی رسید. در ژاپن مهندسان منطق فازی را در افزایش ضریب هوشمندی ماشینی دستگاه‌های الکترونیکی استفاده کردند. امروزه، نظریهٔ فازی به حدّی پیشرفت نموده که سالیانه بیش از دویست کتاب و هزار مقالهٔ علمی در این زمینه به چاپ می‌رسد و جهان علم به اهمیت این شاخهٔ جدید علمی پی برده است.

مأخذ: «تفکر فازی»، نوشتهٔ بارت کاسکو، ترجمهٔ دکتر علی غفاری و دیگران.

تفریح اندیشه

چهار تیم هاکی زیر یک‌بار با هم مسابقه داده و نتایج زیر را به‌دست آورده‌اند :

تیم	بازیهای انجام‌شده	برد	باخت	تساوی	گل‌زده	گل‌خورده
M	۳	۳	۰	۰	۷	۱
B	۳	۱	۱	۱	۲	۳
T	۳	۱	۱	۱	۳	۳
N	۳	۰	۳	۰	۱	۶

درصورتی که تیم M تیم B را ۰-۳ شکست داده باشد، نتیجهٔ بازی تیم T و تیم B چیست؟

عدم وجود حد

(برای دانش آموزان پیش دانشگاهی)

● مجتبی معارف‌وند ـ
دبیر ریاضی اسلام شهر

مقدمه

در کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲) دورهٔ پیش‌دانشگاهی و اکثر کتابهای ریاضی عمومی، مبحث حدّ توابع با دقّت خاصی مطرح می‌شود ؛ اما در خصوص عدم وجود حد توابع، به اختصار اشاره‌ای شده و بدون ارائه راهکارهای مناسب برای اثبات و مثالهای کافی، از آن سهل و آسان می‌گذرند ؛ در حالی که در اثبات بسیاری از مسائل مربوط به ناپیوستگیهای رفع نشدنی، کاربرد فراوان دارد.

در این مقاله، سعی بر آن شده است که این راهکارها معرفی و با ارائهٔ مثالهای کافی، تا حدی حق مطلب ادا شود.

قرارداد: در این مقاله فرض بر آن است که $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$.

تعریف: فرض می‌کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، گوییم :

تابع f در نقطهٔ a حدی برابر L دارد ؛ اگر و تنها اگر :

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta\ \forall x (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon)$$

۱. همان‌طور که در تعریف می‌بینیم، اولّین و اساسی‌ترین شرط وجود حدّ تابع f در نقطهٔ a این است که تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد ؛ بنابراین اگر تابع f در هیچ همسایگی محذوف a تعریف نشده باشد، در آن نقطه حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-2x+3}$ وجود ندارد.

اثبات: با تعیین علامت چندجمله‌ای درجهٔ ۲ زیر رادیکال می‌بینیم که برای هر $0<\delta<1$، دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x^2-2x+3}$ ، شامل همسایگی $(1-\delta, 1+\delta)$ نمی‌باشد و درنتیجه $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2-2x+3}$ وجود ندارد.

x	−۱		۱		۳	
x^2-2x+3	+	⋮	−	⋮	+	

مثال (۲): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x}{2-[\frac{x}{2}]}$ وجود ندارد.

اثبات: با تعیین دامنهٔ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{x}{2-[\frac{x}{2}]}$

$$2-[\frac{x}{2}]=0 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=2 \Rightarrow 2 \le \frac{x}{2} < 3 \Rightarrow 4 \le x < 6$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{x | 4 \le x < 6\}$$

درمی‌یابیم که تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۵ تعریف نشده است و درنتیجه $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x}{2-[\frac{x}{2}]}$ وجود ندارد. ■

۲. اگر حد چپ یا راست تابع f در نقطهٔ a موجود نباشد، آن‌گاه f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ وجود ندارد.

اثبات: از آن‌جا که تابع $f(x)=\sqrt{x}$ برای مقادیر منفی تعریف نشده است، لذا حدّ چپ تابع f$(\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x})$ موجود نمی‌باشد، بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{[x]}$ موجود نیست.

اثبات: برای هر $0<\delta<1$ وقتی $x\to 0^+$، ناگزیریم از محدودهٔ $(0,\delta)$ گذر کنیم که در این صورت، چون برای هر $x\in(0,\delta)$ عامل $[x]$ صفر می‌شود، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x}{[x]}$ برای مقادیر $x\in(0,\delta)$ تعریف نشده و درنتیجه، حدّ راست تابع f ($\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{[x]}$) وجود ندارد؛ بنابراین $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{[x]}$ وجود ندارد. ■

۳. اگر حد چپ و راست تابع f در نقطهٔ a موجود باشند، ولی مقادیر آنها مساوی نباشد، آن‌گاه f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ وجود ندارد.

اثبات:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در همسایگی صفر تعریف شده و حد چپ و راست دارد؛ اما مقادیر آنها برابر نیستند. بنابراین f در نقطهٔ صفر حد ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to a}[x]$، $(a\in z)$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $I=(a-\delta,a+\delta)$، $0<\delta<1$، حال بنا بر قضیهٔ زیر که به قضیهٔ «تحدید» معروف است، داریم:

[**قضیه:** هرگاه قلمرو تابع f شامل یک همسایگی محذوف a مانند I باشد و $g=f|_I$، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$؛ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$.]

این قضیه را برای حدهای یک طرفه نیز داریم؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to a^+}[x]=\lim_{x\to a^+}[x]|_{I_1}=\lim_{x\to a^+}a=a\qquad I_1=(a,a+\delta)$$

$$\lim_{x\to a^-}[x]=\lim_{x\to a^-}[x]|_{I_2}=\lim_{x\to a^-}(a-1)$$

$$=a-1\qquad I_2=(a-\delta,a)$$

حدهای چپ و راست تابع $f(x)=[x]$ وجود دارند؛ ولی با هم برابر نیستند، بنابراین f در نقطهٔ a حد ندارد. ■

۴. قضیه: اگر تابع f در نقطهٔ a حد داشته باشد، آن‌گاه:

$$\exists M>0\ \exists\delta\,\forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|<M)$$

به‌عبارت دیگر، تابع f در یک همسایگی نقطهٔ a کراندار است.

اثبات: f در نقطهٔ a حد دارد؛ یعنی

$$\exists L\ \lim_{x\to a}f(x)=L$$

قرار می‌دهیم $\varepsilon=1$ و بنابر تعریف حد داریم:

$$\exists\delta\,\forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<1)$$

$$|f(x)|-|L|\le|f(x)-L|<1\Rightarrow|f(x)|<1+|L|$$

قرار می‌دهیم $M=1+|L|$، پس:

$$\exists M\,\exists\delta\,\forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)|<M)\ ■$$

بنابر قانون عکس نقیض ترکیب شرطی داریم:

نتیجه: اگر $\forall M\,\forall\delta\,\exists x(0<|x-a|<\delta\wedge|f(x)|\ge M)$ آن‌گاه تابع f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم M و δ به دلخواه و مثبت داده شده‌اند، قرار می‌دهیم: $x_0=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{M}\}$ و درنتیجه داریم:

$$|x_0|\le\frac{\delta}{2}<\delta$$

$$|x_0|\le\frac{1}{M}\Rightarrow\left|\frac{1}{x_0}\right|\ge M$$

پس داریم:

$$\forall M>0\,\forall\delta>0\,\exists x_0\left(0<|x_0|<\delta\wedge\left|\frac{1}{x_0}\right|\ge M\right)$$

و درنتیجه $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0}2^{\frac{1}{x}}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم M و δ به‌دلخواه و مثبت داده شده‌اند، قرار می‌دهیم: $x_0=\min\{\frac{\delta}{2},\frac{\ln 2}{|\ln M|}\}$ و درنتیجه داریم:

$$|x_0|\le\frac{\delta}{2}<\delta$$

$$|x_\circ| \le \frac{\text{Ln}\,۲}{|\text{Ln}M|} \Rightarrow x_\circ \le \frac{\text{Ln}\,۲}{|\text{Ln}M|} \Rightarrow \frac{۱}{x_\circ} \ge \frac{|\text{Ln}M|}{\text{Ln}\,۲}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{x_\circ}.\text{Ln}\,۲ \ge |\text{Ln}M|$$

$$\Rightarrow \text{Ln}\,۲^{\frac{۱}{x_\circ}} \ge |\text{Ln}M| \ge \text{Ln}M$$

$$\Rightarrow ۲^{\frac{۱}{x_\circ}} \ge M \Rightarrow |۲^{\frac{۱}{x_\circ}}| \ge M$$

پس داریم: $\forall M > \circ\, \forall \delta > \circ\, \exists x_\circ (\circ < |x_\circ| < \delta$ و $|۲^{\frac{۱}{x_\circ}}| \ge M)$

و در نتیجه $\lim\limits_{x\to\circ} ۲^{\frac{۱}{x}}$ وجود ندارد. ■

۵. استفاده از تعریف حد: فرض می‌کنیم f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، گوییم f در نقطهٔ a حد دارد؛ اگر و تنها اگر:

$$\exists L\, \forall \varepsilon\, \exists \delta\, \forall x (\circ < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

با توجه به عکس نقیض ترکیب دو شرطی و نقیض ترکیب شرطی داریم:

f در نقطهٔ a حد ندارد؛ اگر و تنها اگر:

$$\forall L\, \exists \varepsilon\, \forall \delta\, \exists x (\circ < |x - a| < \delta, |f(x) - L| \ge \varepsilon)$$

مثال: ثابت کنید $\lim\limits_{x\to\circ} \sin\frac{۱}{x}$ وجود ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم L به‌دلخواه داده شده باشد. دو حالت زیر را درنظر می‌گیریم.

الف) $L \ne \circ$. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{|L|}{۲}$. حال برای هر δ، بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، [هرگاه $x > \circ, y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$، آن‌گاه عدد طبیعی n یافت می‌شود؛ به‌طوری که $nx > y$.]

برای $y = ۱$ و $x = \delta$ عدد طبیعی n یافت می‌شود، به‌طوری که $\frac{۱}{n} < \delta$. با قرار دادن $x = \frac{۱}{۲n\pi}$ داریم: $\frac{۱}{۲n\pi} < \frac{۱}{n} < \delta$،

پس $\circ < |x| < \delta$ و:

$$\left|\sin\frac{۱}{x} - L\right| = |\sin(۲n\pi) - L| = |\circ - L| = |L| \ge \frac{|L|}{۲}$$

ب) $L = \circ$. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$. حال برای هر δ، بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی، عدد طبیعی n یافت می‌شود که $\frac{۱}{n} < \delta$. قرار می‌دهیم:

$$x = \frac{۱}{(۴n+۱)\frac{\pi}{۲}} < \frac{۱}{n} < \delta$$

در نتیجه:

$$\circ < |x| < \delta \wedge \left|\sin\frac{۱}{x} - \circ\right| = \left|\sin(۴n+۱)\frac{\pi}{۲}\right| = ۱ \ge \frac{۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\forall L\, \exists \varepsilon\, \forall \delta\, \exists x (\circ < |x| < \delta \wedge \left|\sin\frac{۱}{x} - L\right| \ge \varepsilon)$$

و در نتیجه $\lim\limits_{x\to\circ} \sin\frac{۱}{x}$ وجود ندارد. ■

۶. استفاده از برهان غیرمستقیم (برهان خُلف): در این روش، فرض می‌کنیم حد تابع موجود است و با توجه به نوع تابع، ε را به گونه‌ای اختیار می‌کنیم که در پایان به تناقضی آشکار برسیم و نتیجه بگیریم که فرض اولیه (وجود حد) نادرست بوده و موجب تناقض شده است.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim\limits_{x\to+\infty} (-۱)^{[x]}$ موجود نیست.

اثبات: فرض می‌کنیم: $\lim\limits_{x\to+\infty} (-۱)^{[x]} = L$

قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{۱}{۴}$ و بنابر تعریف حد، عدد طبیعی M وجود دارد؛ به‌طوری که:

$$x \ge M \Rightarrow |(-۱)^{[x]} - L| < \frac{۱}{۴}$$

اگر $x \ge M$ و $[x]$ زوج باشد، داریم:

$$|۱ - L| < \frac{۱}{۴} \Rightarrow -\frac{۱}{۴} < ۱ - L < \frac{۱}{۴} \Rightarrow -\frac{۵}{۴} < -L < -\frac{۳}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴} < L < \frac{۵}{۴} \qquad (۱)$$

اگر $x \ge M$ و $[x]$ فرد باشد، داریم:

$$|-۱ - L| < \frac{۱}{۴} \Rightarrow -\frac{۱}{۴} < -۱ - L < \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۴} < -L < \frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow -\frac{۵}{۴} < L < -\frac{۳}{۴} \qquad (۲)$$

آشکارا روابط ۱ و ۲ در تناقض‌اند پس نتیجه می‌گیریم که

$\lim_{x\to+\infty}(-1)^{[x]}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم

$$(a\in\mathbb{R})\exists L\lim_{x\to a}f(x)=L$$

قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{4}$ و بنابر تعریف حد، δ وجود دارد که:

$$\forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\frac{1}{4})$$

بنابر خاصیت اعداد حقیقی، x_1 گویا و x_2 گنگ متعلق به بازهٔ $(a-\delta,a+\delta)$ وجود دارد؛ پس:

$$|f(x_1)-L|=|1-L|<\frac{1}{4}$$ و

$$|f(x_2)-L|=|0-L|=|L|<\frac{1}{4}$$

و در نتیجه داریم:

$$1=|1-L+L|\le|1-L|+|L|<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\Rightarrow1<\frac{1}{2}$$

و این نابرابری، تناقضی آشکار می‌باشد، بنابراین $\lim_{x\to a}f(x)$ وجود ندارد. ■

۷. قضیه: فرض کنید $\lim_{x\to a}f(x)=L$، دنبالهٔ حقیقی $\{a_n\}$ به a همگرا باشد و برای هر n، $a_n\neq a$، آن‌گاه دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگراست.

اثبات: فرض ε دلخواه داده شده است. بنابر تعریف حد داریم:

$$\exists\delta\forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\varepsilon)\qquad(*)$$

حال برای همین δ یافت شده، بنابر همگرایی دنبالهٔ $\{a_n\}$ داریم:

$$\exists M\in N(n\ge M\Rightarrow|a_n-a|<\delta)\qquad(1)$$

بنابر رابطهٔ $(*)$ داریم:

$$|a_n-a|<\delta\Rightarrow|f(a_n)-L|<\varepsilon\qquad(2)$$

از روابط (۱) و (۲) و بنابر قانون قیاس داریم:

$$\forall\varepsilon\exists M\in N(n\ge M\Rightarrow|f(a_n)-L|<\varepsilon)$$

و درنتیجه $\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=L$. ■

نتیجه: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنبالهٔ همگرا به a باشند و برای هر n، $a_n\neq a$ و $b_n\neq a$؛ ولی دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به‌ترتیب به L_1 و L_2 همگرا شده و $L_1\neq L_2$، آن‌گاه f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\right]|x|$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $a_n=\frac{1}{n}$ و $b_n=\frac{-1}{n}$، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو به صفر همگرا بوده و شرایط نتیجه را دارند. برای $f(x)=[\frac{1}{x}]|x|$ داریم:

$$f(a_n)=f(\frac{1}{n})=\left[\frac{1}{\frac{1}{n}}\right]\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{[n]}{n}=\frac{n}{n}=1$$

دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ به ۱ همگراست.

$$f(b_n)=f(\frac{-1}{n})=\left[\frac{1}{\frac{-1}{n}}\right]\left|\frac{-1}{n}\right|=\frac{[-n]}{n}=\frac{-n}{n}=-1$$

دنبالهٔ $\{f(b_n)\}$ به ۱- همگراست.

از آن‌جا که $-1\neq1$ پس $\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}\right]|x|$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\in Q\\ x & x\notin Q\end{cases}$ و $\alpha\in\varnothing$ ثابت کنید f در نقطهٔ α حد ندارد.

اثبات: دنباله‌های $\left\{\alpha+\frac{1}{n}\right\}$ و $\left\{\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$ به‌ترتیب دنباله‌هایی از اعداد گویا و گنگ را درنظر می‌گیریم که هر دو به α همگرا هستند؛ ولی $f(\alpha+\frac{1}{n})=\alpha+\frac{1}{n}+1$ و دنبالهٔ $\left\{f(\alpha+\frac{1}{n})\right\}$ به $\alpha+1$ همگراست و $f(\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n})=\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n}$ و دنبالهٔ $\{f(\alpha+\frac{\sqrt{2}}{n})\}$ به α- همگراست. چون $\alpha\neq\alpha+1$؛ پس $\lim_{x\to\alpha}f(x)$ وجود ندارد. ■

۸. **قضیه:** اگر f در نقطهٔ a حد داشته باشد، آن‌گاه :

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x_1,x_2(0<|x_1-a|<\delta\wedge 0<|x_2-a|<\delta$$
$$\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$$

اثبات: چون f در نقطهٔ a حد دارد، پس $\exists L \lim_{x\to a} f(x)=L$

فرض ε به دلخواه داده شده است. بنا بر تعریف حد داریم :

بنابراین : $\exists\delta\forall x(0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2})$

$$\exists\delta\forall x_1,x_2(0<|x_1-a|<\delta\wedge 0<|x_2-a|<\delta$$
$$\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-L+L-f(x_2)|\le$$
$$|f(x_1)-L|+|L-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon)$$

پس نتیجه می‌گیریم که :

$$\forall\varepsilon\exists\delta\forall x_1,x_2(0<|x_1-a|<\delta, 0<|x_2-a|<\delta\Rightarrow$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)$$ ■

حال بنا بر قانون عکس نقیض ترکیب شرطی داریم :

نتیجه: اگر

$$\exists\varepsilon\forall\delta\exists x_1,x_2(0<|x_1-a|<\delta, 0<|x_2-a|<\delta\wedge$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|\ge\varepsilon)$$

آن‌گاه f در نقطهٔ a حد ندارد.

مثال (۱): ثابت کنید $\lim_{x\to 0}(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $\varepsilon=1$ و فرض می‌کنیم δ به‌دلخواه داده شده است. بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی nی یافت می‌شود که $\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2n}<\delta$. حال قرار می‌هیم :

$$x_1=\frac{1}{2n}, x_2=\frac{1}{2n+1}$$

$$0<|x_1|<\delta, 0<|x_2|<\delta, |f(x_1)-f(x_2)|=$$
$$|(-1)^{2n}-(-1)^{2n+1}|=|1-(-1)|=2>1$$

بنابراین $\lim_{x\to 0}(-1)^{\left[\frac{1}{x}\right]}$ وجود ندارد. ■

مثال (۲): ثابت کنید $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ وجود ندارد.

اثبات: قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{2}$ و δ به‌دلخواه داده شده است.

بنابر خاصیت ارشمیدسی اعداد حقیقی nی یافت می‌شود که :

$$\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}<\frac{1}{2n\pi}<\delta$$

قرار می‌دهیم $x_1=\frac{1}{2n\pi}$ و $x_2=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$

$$0<|x_1|<\delta\wedge 0<|x_2|<\delta\wedge|f(x_1)-f(x_2)|=$$
$$|1-0|=1>\frac{1}{2}$$

پس بنابر نتیجه $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ وجود ندارد. ■

مثال (۳): ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد.

اثبات: فرض می‌کنیم $a\in\mathbb{R}$ عددی دلخواه باشد. قرار می‌دهیم $\varepsilon=\frac{1}{2}$ و δ به‌دلخواه داده شده است. بنابر خواص اعداد حقیقی، عدد گویای x_1 و عدد گنگ x_2 یافت می‌شوند ؛ به قسمی که :

$$0<|x_1-a|<\delta\wedge 0<|x_2-a|<\delta\wedge$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|=|1-0|=1>\frac{1}{2}$$

پس بنابر نتیجه $\lim_{x\to a}f(x)$ وجود ندارد. ■

نشستی با هیأت تحریریهٔ مجله برهان و گروه ریاضی انتشارات مدرسه



● تهیه و تنظیم: میرشاهین صدر

گروه ریاضی انتشارات مدرسه در راستای اهداف سال جهانی ریاضیات، اقدام به تألیف و چاپ آثار برگزیدهٔ ریاضی برای مقطعهای دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی، و تألیف فرهنگ ریاضیات کرده است. همچنین به‌همین منظور، جلسه‌ای مشترک بین اعضای گروه ریاضی و هیأت تحریریهٔ مجله برهان تشکیل داده است که مشروح مذاکرات این جلسه، خدمت شما خوانندگان محترم مجلهٔ برهان و مسؤولان آموزش و پرورش تقدیم می‌شود.

در این جلسه، ابتدا آقای «امیری» موضوع بحث این جلسه را مطرح کرده و سپس گزارشی از آزمون «تیمز» و راهکارهایی برای رفع مشکلات و کمبودهایی که در این آزمون برای دانش‌آموزان ایرانی وجود داشت، توضیح دادند.

آقای امیری: جلسهٔ امروز دربارهٔ تهیهٔ مقاله‌ای برای سال جهانی ریاضیات، برای درج در مجلهٔ برهان است و در واقع، موضوع بحث روی دو محور است:

۱. بررسی هدفهای سال جهانی و این که جامعهٔ ریاضی، برنامه‌های درسی و آموزشی، نظام آموزش و پرورش و کتابهای درسی، تا چه اندازه به این هدفها نزدیک هستند.

۲. ارائه راهکارها و پیشنهادهایی برای نزدیکترکردن جامعهٔ ریاضی به این هدفها.

کشور ایران، شاید جزو کشورهایی باشد که مقداری با تأخیر، در برنامه‌های سال جهانی ۲۰۰۰ نسبت به کشورهای دیگر حرکت کرده است و کمی هم دیرتر اهمیت آن برای ما روشن شده است؛ امّا در این زمینه کارهایی در حال انجام است. اگر چه روند کُندی دارد؛ ولی به هر صورت، فعالیتهایی در این زمینه انجام می‌شود.

مدتی قبل در همایش آزمون تیمز شرکت کرده بودم؛ این آزمون، حرکت خوبی در بعضی از کشورها و ایران ایجاد کرده است. خلاصه‌ای از نتایج این آزمون چنین است: «سنگاپور» جزو پنج کشور اوّل است و دارای نظام آموزشی ۱۰۰ درصد متمرکز است. از طرف دیگر، انگلیس هم جزو پنج کشور اوّل است و دارای نظام آموزشی ۱۰۰ درصد غیرمتمرکز است؛ بنابراین دو کشور با نظامهای آموزشی متفاوت ـ یکی متمرکز و دیگری غیرمتمرکز ـ هر دو نتیجهٔ خوبی را کسب کرده‌اند. کشور ایران که نظام آموزشی ۱۰۰ درصد متمرکز دارد، جزو سه یا چهار کشور آخر است و امریکا که نظام آموزشی ۱۰۰ درصد غیرمتمرکز دارد، جزو پنج کشور اوّل نیست؛ ولی نتیجهٔ خوبی را کسب کرده است. درنتیجه، دو کشور با نظامهای آموزشی متمرکز و غیر متمرکز، یکی نتیجهٔ خوب و دیگری نتیجهٔ بد را کسب کرده‌اند.

در این همایش، کمیته‌هایی برای بررسی آزمون تیمز کشور ایران تشکیل و برگزار شد؛ بنده در کمیته‌ای شرکت کردم که هدف از تشکیل آن، یافتن راهکارهایی برای نتیجهٔ بهتر در چنین آزمونهایی بود. در این کمیته پیشنهادهای خود را از طرف گروه ریاضی انتشارات مدرسه به‌صورت زیر بیان کردم.

آزمون تیمز از استانداردهایی برخوردار نبود که بتوانیم دربارهٔ وضعیت دانش‌آموزان ایرانی، با توجه به استانداردهای این آزمون تصمیم بگیریم؛ زیرا همان‌طورکه گفته شد، کشوری با نظام آموزشی متمرکز و کشور دیگری با نظام آموزشی غیرمتمرکز، هر دو نتیجهٔ خوب یا بد را کسب کرده‌اند. از آن گذشته، آیا در آموزش یا به‌طورکلی، در چرخهٔ آموزش، فقط تخلیهٔ اطلاعاتی دانش‌آموز اهمیت دارد؟ یعنی در چرخهٔ آموزش، هرگز آمادگی اولّیه مهم نیست؟ نباید از آموزشگر، آزمون گرفته می‌شد؟ نباید فضاهای آموزشی و اقلیمی در نظر گرفته می‌شد؟



به نظر من در حال حاضر، نمی‌توانیم دربارهٔ مملکت خودمان روی این آزمون تصمیم بگیریم؛ چون این آزمون برای کشور ما، آزمونی استاندارد نبوده است. در ژاپن یا انگلیس که نتیجه خوب بوده است، آیا معلمان ریاضی آن کشورها، همان استانداردهای معلمان ریاضی کشور ما را با توجه به برنامه‌های درسی ایران دارا هستند؟ در ایران ما هنوز کلاسهای پنج‌پایه‌ای یا چندپایه‌ای داریم و اکنون براساس نتیجهٔ این آزمون، چگونه می‌توان تصمیم گرفت؟

آزمون تیمز جرقه‌ای بود که ما را به خودمان آورد؛ اما بهتر است در حال حاضر و در این کمیته، طرحها و پروژه هایی را برای تحقیق پیشنهاد دهیم؛ نه این که اولّ تحقیق کنیم، سپس راهبردهایی را پیشنهاد دهیم. باید براساس تحقیقی که در کشور خودمان انجام می‌دهیم، استانداردهایی را استخراج کنیم، سپس براساس آن استانداردها، در سطح استانهای کشور، هم برای دانش‌آموزان و هم برای معلّمان، آزمون برگزار کنیم. سپس نتیجهٔ این آزمون را با نتیجهٔ آزمون تیمز مقایسه کنیم و در آن مرحله، تصمیم‌گیری کنیم.

در جلسهٔ اختتامیهٔ این همایش، پروفسور «رویتال» از دانشگاه کلمبیا و مسؤول کلی طرح آزمون سخنرانی کردند. ایشان اظهار داشتند: «ما در کشور امریکا پس از آزمون تیمز، یک چنین آزمونی برای ایالتهای مختلف برگزار خواهیم کرد؛ چون می‌خواهیم آزمون طبق شرایط کشور خودمان باشد.» همچنین ایشان گفتند: «ژاپن در سال جهانی ۲۰۰۰، می‌خواهد تغییراتی را روی سیستم آموزشی کشورش انجام دهد و قرار است سال ۲۰۰۵، روزهای درسی در ژاپن که شش روز در هفته است، به پنج روز در هفته تقلیل یابد، و همچنین قرار است برنامه‌های ساعت درس، ۱۰ درصد کاهش یابد. از هم‌اکنون، روی این تغییر نظام، در حال تحقیق و آزمایش هستند که برای سال ۲۰۰۵ تغییراتی در برنامهٔ درسی و نظام آموزشی ایجاد کنند.

همچنین در این جلسه، پروفسور رویتال به دو نکته دربارهٔ دانش‌آموزان ایرانی اشاره کردند که عبارتند از:

۱. دانش‌آموزان ایرانی در این آزمون، به سؤالهایی پاسخ مثبت داده بودند که جزو برنامهٔ درسی آنها نبود. برای مثال، در مقطع راهنمایی، به سؤالهای آمار و احتمال پاسخ درست داده بودند و در این مباحث، جزو شش کشور اولّ جهان بودند؛ یعنی چیزی را که آموزش ندیده بودند و در کتابهای درسی با آن برخورد نداشته‌اند، از مطالب درسی و آموزش دیده، بهتر پاسخ داده بودند.

۲. دانش‌آموزان ایرانی از نظر تئوری، بسیار قوی هستند؛ ولی نمی‌توانند از آنها درست استفاده کنند.

در ادامهٔ بحث، از سروران گرامی تقاضا دارم نظرات خود را دربارهٔ موضوعات مطرح‌شده، اعلام فرمایند و ابتدا از استاد ارجمند، جناب آقای «پرویز شهریاری» خواهش می‌کنم که نظرات خود را بفرمایند.

استاد شهریاری: به نظر من، برنامه‌هایی که کمیتهٔ بین‌المللی ریاضیات برای سال ۲۰۰۰ تعیین کرده، خوب است و هیچ اشکالی در آنها نیست. مانند: عمومی کردن ریاضیات، تاریخ ریاضیات، به ریاضیات اهمیت‌دادن، که همگی خوب هستند، منتها به‌خاطر داشته باشیم که کمیتهٔ بین‌المللی سال ۲۰۰۰ براساس وجه مشترک تمام کشورها و احتمالاً براساس آنچه که در کشورهای جهان اولّ وجود دارد یا ندارد، این برنامه را تنظیم کرده است. همان‌طور که آقای امیری فرمودند، ما در داخل کشور خودمان، مشکلات خاص کشور خودمان را هم داریم. کمیتهٔ ملی برگزارکننده سال ۲۰۰۰،

برنامهٔ کارش را براساس همان هدفهایی قرار داده که کمیتهٔ جهانی تعیین کرده است، که این اشکالی ندارد و یک گام هم به پیش است. به هر حال، یک حرکتی ایجاد شده و کمیتهٔ ملی و در رأس آن هم انجمن ریاضی ایران، تلاشهایی کرده و تا حالا بی‌فایده هم نبوده است ؛ اما به نظر من، کمیتهٔ ملی برگزارکننده سال ۲۰۰۰،



باید یک برنامهٔ ملی هم در کنار برنامهٔ جهانی داشته باشد ؛ یعنی علاوه بر این که به آنها می‌پردازد باید کمیته‌هایی هم تشکیل دهند و در این زمینه‌ها کار کنند تا ببینیم دشواریهای داخل کشور خودمان از نظر آموزشی، چیست؟ چه بسا اگر درست بحث کنیم، متوجه می‌شویم که برخی زمینه‌ها هم هست که دامنگیر همهٔ کشورهاست و به آن توجهی نشده است ؛ یعنی نباید گمان کنیم که این قطعنامهٔ کمیتهٔ جهانی بدون تغییر است. آنچه که به نظر من می‌رسد و ما باید به کمیتهٔ ملی مراسم سال ۲۰۰۰ پیشنهاد کنیم، در درجهٔ اوّل این است که، تصور را بر این نگذارند که هر کاری را که می‌خواهند انجام دهند، در قبل یا در جریان سال ۲۰۰۰ باشد و زمانی که سال ۲۰۰۰ تمام شد، دیگر کاری نداشته باشند. همان طوری که آقای امیری گفتند، مثلاً ژاپن برنامه‌ای تنظیم کرده است که در سال ۲۰۰۵ به فلان هدف برسد، طبیعی هم همین است که بسیاری از چیزهایی که کمیتهٔ جهانی تعیین کرده یا ما می‌خواهیم تعیین کنیم، اینها چیزهایی نیست که بشود در ظرف چند ماه یا یک سال به نتیجه رسید. بنابراین باید سال ۲۰۰۰ را سال آغاز بسیاری از بحثها در زمینهٔ رفع دشواریهای آموزش ریاضی در ایران دانست.

کمیتهٔ ملی برگزارکننده سال ۲۰۰۰ که احتمالاً از سازمانهای مختلفی مانند وزارت علوم، انجمن ریاضی ایران و برخی سازمانهای دیگر تشکیل شده، نباید گمان کنند که سال ۲۰۰۰ به هر ترتیبی پایان می‌یابد و وظیفهٔ آنها هم تمام می‌شود. من هم این پیشنهادها را به انجمن ریاضی ایران می‌کنم ؛ انجمن ریاضی ایران در واقع باید سردمدار حلّ مشکلات ریاضی ایران باشد ؛ چه این مشکلات ریاضی در دبستان باشد یا در راهنمایی یا دبیرستان یا دانشگاه و یا در سطح عام. انجمن ریاضی ایران باید فعالتر شود و باید پیش از همه، کمیته یا کمیته‌هایی را تشکیل دهد که دشواریهای خاص مملکت ما را بررسی کند. به نظر من اگر این کار در سال ۲۰۰۰ به پایان برسد، موفقیت بزرگی خواهد بود، که ما اوّل درد را بشناسیم و بعد ببینیم که چطور می‌توان معالجه کرد، امّا آن دردهایی که ما در زمینهٔ آموزش داریم، به نظر من چند چیز است :

یکی این که در ایران تفکر نخبه‌پروری وجود دارد، چند هزار نفر شرکت می‌کنند و در آزمایش اوّل از بین آنها مثلاً هزار نفر را انتخاب می‌کنند. در آزمایش دوم، از بین آنها دویست نفر را انتخاب می‌کنند و در مرحلهٔ سوّم مثلاً صد نفر را انتخاب می‌کنند، سپس برای آنها کلاس می‌گذارند و دو ماه و نیم تا سه ماه به‌سختی با اینها کار می‌کنند، آن وقت از بین آنها شش نفر انتخاب می‌کنند و به مسابقه می‌فرستند و در المپیاد موفق می‌شوند. خیال می‌کنند وظیفهٔ ایران تمام شده است. اوّلاً باید توجه کنیم که در شرایط امروز جهان و روابطی که بین ریاضیات و سایر دانشها وجود دارد ما بیشتر از چهار، پنج یا حتی پنجاه نفر ریاضیدان احتیاج داریم ؛ در حقیقت ما به انبوه ریاضیدانان احتیاج داریم. اگر قرار باشد فاصلهٔ خودمان را با جهان کم کنیم یا از بین ببریم، ما به انبوه ریاضیدانان در ایران نیاز داریم ؛ نه چهار یا پنج‌تایی که در المپیاد موفّق می‌شوند. احتمالاً این افراد هم چون نباید کنکور بدهند، رشته‌های غیرریاضیات را انتخاب می‌کنند ؛ مثلاً پزشکی را انتخاب می‌کنند ؛ چون تصور می‌کنند در زمینهٔ ریاضی امکانات تحقیق وجود ندارد و زندگی‌شان اداره نمی‌شود. من از یکی از آنها که چهار سال پیش در المپیاد شرکت کرده بود، پرسیدم : «چرا رشتهٔ پزشکی را انتخاب کردی؟ تو که به ریاضی علاقه‌مند بودی؟» گفت : «اگر ریاضی را انتخاب کنم، باید معلم بشوم و اگر خیلی خوب باشم وضع من تازه مثل شما می‌شود، وگرنه زندگی‌ام لنگ است.» خوب این جا مسألهٔ دیگری مطرح می‌شود و آن وضع زندگی معلمان است.

آموزش، پایهٔ همهٔ پیشرفتها در مملکت می‌باشد. تا مسألهٔ آموزش و در کنارش وضع معلمان حل نشود، بقیهٔ مشکلات حل نمی‌شود. اکنون فرض کنید که ما بنا را بر پرورش انبوه ریاضیدانان هم گذاشتیم، این ریاضیدانان که پرورده می‌شوند، باید راهکارهای ارتباط با یکدیگر را بدانند. امروز دیگر نشستن در خانه، و در را به روی خود بستن و تحقیق کردن، به هیچ جا نمی‌رسد. ریاضیدانان جهان از کشورهای مختلف هم به‌طور دائم با هم تماس دارند که

کارها مخلوط نشود. کاری که دیگری کرده، دنباله‌اش را بگیرند؛ دیگر نمی‌شود افراد جدا از هم کار کنند.

بنابراین مشکل دومی که در مملکت ما مطرح می‌شود این است که ما به دانش‌آموزان خودمان راهکار گروهی و همکاری را یاد ندادیم. در حال حاضر، مدرسهٔ تیزهوشان داریم، معنای مخالفش این است که در کنارش مدرسهٔ کُندهوشان داشته باشیم. شما به بچه‌ای می‌گویید، در مدرسهٔ تیزهوشان پذیرفته نشدی! یعنی این که تو تیزهوش نیستی! کُندهوشی! از یک پسر یا دختر نوجوانی که به او می‌گوییم تو نمی‌توانی بفهمی! دیگر چه انتظاری از او داریم! با این برخورد گروهی و اجتماعی کارکردن را به کلی ویران کردیم. بچه‌ای که در مدرسهٔ تیزهوشان ثبت نام کرده است، خودش را یک سر و گردن بالاتر از همه می‌داند؛ واقعاً فکر می‌کند که بچه‌های دیگر اصلاً ارزشی ندارند. شیوهٔ آزمون و آزمایش ما هم بر ۰/۵ و ۰/۲۵ نمره‌هاست. در خانه هم مورد مؤاخذه قرار می‌گیرد که چرا ۱۸/۵ گرفتی؟ چرا ۲۰ نگرفتی؟ و او تمام تلاشش را می‌کند که حداقل ۰/۵ نمره از رقیبش بیشتر بگیرد. دانش‌آموز باید همان ساعتهایی که پشت میزهای دبستان نشسته، کار گروهی و همکاری و همفکری با همسالان خودش را یاد بگیرد، تنها از این راه است که اگر هم ریاضیدان شد در آخر می‌تواند دچار این توهم نشود که من هر کاری می‌کنم، از دیگران پنهان کنم تا به نام من ثبت شود. بنابراین این مسأله هم مطرح می‌شود که باید دربارهٔ تقسیم‌بندی مدارس به نوعهای مختلف بیشتر بیندیشیم، و ضررها و نفعها را با هم مقایسه کنیم. آیا واقعاً راه درستی می‌رویم؟ من محکوم نمی‌کنم؛ چون در این زمینه بحث نشده، که باید بحث شود.

به نظر من، مسألهٔ رقابت ناسالمی که به خاطر آزمونهای ناسالم کنکور به‌وجود آمده، در مدارس تشدید می‌شود و اصلاً این سیستم کنکور (راهیابی به دانشگاه)، دانش مملکت را به‌کلی ویران می‌کند. من روی این مسأله که آیا با تست می‌توان ارزشیابی کرد، بحث نمی‌کنم! فرض کنیم با تست، بهترینها انتخاب می‌شوند ـ که من تردید دارم! ـ اگر هم این طور باشد، ما در واقع، بچه‌ها و خانواده‌های آنها را از سالهای آخر دبستان و سالهای اوّل راهنمایی، درگیر تشویش و اضطراب کرده‌ایم و دانش‌آموز نمی‌خواهد به طور عمیق درسهای ریاضی را یاد بگیرد. از آن‌جا که کنکور تشریحی نیست، بلکه تستی است، او کاری خارج از کار مدرسه نمی‌کند. از این گذشته، اگر روی هنری کار می‌کرد مثلاً نقاشی کار می‌کرد، آن را هم رها می‌کند؛ برای این که از کنکور عقب می‌افتد. حتی به رغم میل باطنی‌اش، با خانواده‌اش به میهمانی نمی‌رود و در اتاقش را به روی خود می‌بندد تا از کنکور عقب نیفتد. به هرحال همهٔ آنچه که برای یک انسان و به خصوص یک جوان لازم است، رها می‌کند و فقط به صورت یک‌بُعدی درمی‌آید؛ که حالا این از دو حال خارج نیست، یا قبول می‌شود و وارد دانشگاه می‌شود که سرگردانی‌اش، چهار سال عقب می‌افتد؛ یا قبول نمی‌شود و از همین حالا سرگردانی‌اش چهار سال جلو می‌افتد!

بنده مسألهٔ کنکور را یک معضل در راه دانش مملکت و از جمله ریاضیات می‌دانم اما از این مسائل اساسی که تا حالا عرض کردم، بگذریم، بعضی دشواریهای جدّی دیگری در زمینهٔ آموزش وجود دارد. من بارها از زبان مسؤولان شنیده‌ام که باید دانش‌آموزان را وادار کرد که به کار تحقیقی عادت کنند؛ تحقیق کنند، پژوهش کنند و یاد بگیرند. حالا ببینیم اگر دانش‌آموز بخواهد در زمینهٔ ریاضیات (محدودش می‌کنیم) یا در زمینهٔ فقط تاریخ ریاضی (محدودترش می‌کنیم) در زمینهٔ تاریخ ریاضیات مملکت خودش پژوهش کند، از کجا و چه چیزی در اختیارش می‌گذاریم!

در حال حاضر، کتابهای ریاضیدانان ایرانی و جهانی را به‌صورت ترجمهٔ روان در اختیار نداریم؛ ولی از جوانان می‌خواهیم که پژوهش کنند؛ بر چه اساسی و از کجا؟ باید به رهبری انجمن ریاضی ایران، یک کمیتهٔ جدّی و فعال در این زمینه تشکیل شود که کتابهای ریاضیدانان ایرانی و جهانی را به زبان فارسی امروزی و قابل مطالعه در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند. از این مطلب هم بگذریم، آیا واقعاً برنامهٔ آموزشی ما از دبستان تا پایان دبیرستان (حالا حدّاقل، من در دانشگاه دخالت نمی‌کنم) صحیح است؟ به نظر بنده، باید یک کمیسیون در این زمینه تشکیل و معلوم شود که دانش‌آموزان چه چیزی نیاز دارند؟ یک انسان امروزی چه مقدار ریاضی احتیاج دارد؟ و کلاسهای خاص را برای کسانی بگذاریم که می‌خواهند در رشتهٔ ریاضی یا فنی ادامه تحصیل دهند.

آقای قندهاری: مسائلی را که جناب آقای شهریاری مطرح کردند، دقیقاً درست است. مسائل آموزشی و ابزارهای آموزشی به هم پیوسته است؛ یعنی کتاب، فضای آموزشی و معلم به هم پیوسته‌اند. در جامعه‌ای که زندگی می‌کنیم، نباید معلم مشکل مالی داشته باشد تا از او انتظار داشته باشیم خوب کار کند، تحقیق کند یا کارهای دیگری انجام دهد. معلم باید زندگی‌اش تأمین باشد، شما به معلمان حقوق خوب بدهید و شرایط خوب برای معلم ایجاد کنید! تا بهترین شاگردان مملکت رشتهٔ دبیری انتخاب کنند و دبیر شوند. در این صورت از نظر آموزش حداقل ضعف نخواهیم

داشت و بهترینها می‌آیند کتاب می‌نویسند، درنتیجه از نظر یک ابزار مهم آموزشی ما ضعف کمتری داریم.

سرمایه‌گذاری در آموزش و پرورش بیشترین بازدهی را برای مملکت دارد. ظاهر آن نشان نمی‌دهد؛ امّا بیشترین بهره را می‌تواند داشته باشد. تغییر نظام آموزشی، یک پهنهٔ خیلی گسترده‌ای دارد که تحقیقات زیادی باید دربارهٔ آن انجام شود؛ باید بررسیهای تطبیقی با کشورهای دیگر صورت بگیرد، مسائل درون جامعه را ببینیم و ابزارهای آموزشی کشور خودمان را هم در نظر بگیریم که چه هست؟ ما در کشوری زندگی می‌کنیم که بسیاری ازمدرّسان، دو وقته یا سه وقته کار می‌کنند. نظر «پولیا» ـ که یکی از بهترین کارشناسان آموزش و پرورش امریکاست ـ درست است؛ منتها نه برای جامعهٔ ایران ما؛ او برای جامعهٔ خودش حرف زده یا حداقل برای جامعه‌ای که مشکلات فعلی ما را ندارد. ما در این جا در کشوری زندگی می‌کنیم که یک وزیر تصمیم می‌گیرد نظام آموزشی را عوض کند. حالا پس از چند سال دیگر، معاون وزیر تصمیم می‌گیرد، کتابها را عوض کند! اصلاً چنین چیزی نداریم! هم کار اوّلی بدون برنامه‌ریزی و تحقیق خطاست و هم کار دومی.



در مورد کنکور، استاد شهریاری درست می‌گویند؛ منتها واقعیت این است که مشکلات آموزشی عدیده‌ای داریم و با شرایط فعلی، اصلاً قابل حل نیستند. از این گفتهٔ من، به این نتیجه نرسیم که خوب، پس ما هم دست روی دست بگذاریم؛ نه این درست نیست! ولی اگر مسألهٔ کنکور را به همین شکل بپذیریم باید اصلاحاتی در آن صورت بگیرد، که این مسألهٔ تست، حداقل با این شکل و قیافه از بین برود. چه ایرادی دارد به جای این که کنکور در یک روز برگزار شود، در سه روز برگزار شود. به جای این که مثلاً سؤالهای ریاضی ۶۰ تا باشد، ۱۲۰ تا باشد. بعد به جای این که سؤالها تستی باشد، سؤالهای تشریحی بگذارند؛ منتها پاسخهایش را در چهار گزینه قرار دهند که از نظر تصحیح، مشکلی نداشته باشند. مثلاً فرض کنید در درس ریاضی، از ۱۰۰ سرفصل آزمون به عمل بیاید، شما باید از همهٔ اینها سؤال بدهید! دانش‌آموز از این دو کتاب، ممکن است یکی را خوانده باشد و ازکتاب بعدی هم نصف آن را خوانده باشد، شما باید طوری سؤال بدهید که تمام کتاب را پوشش دهد، تا هر کسی هر چیزی را که خوانده، بتواند ارائه کند. ممکن است که بگویند ما هزینهٔ این کار را نداریم؛ وقتی ثبت‌نام می‌کنند، نفری پنج هزار تومان بگیرند. یک خانواده، از وقتی که بچه‌اش وارد مقطع راهنمایی می‌شود، در فکر کنکور است. بعد از این چند سال، می‌خواهد چهار یا پنج هزار تومان شهریه بدهد، مسأله‌ای نیست؛ واقعاً باید کنکور خوب و صحیح برگزار شود.

آقای دکتر پاشا: مطالبی که تا به حال گفته شد واقعاً مسائل اساسی بودند و ما هم استفاده کردیم؛ منتها می‌خواستم برگردم به آن مسألهٔ آزمون تیمز که اوّل صحبتها به آن اشاره کردید که مقایسه‌ای بود دربارهٔ کشورهایی با نظام آموزشی متمرکز و غیرمتمرکز. من نکته‌ای را در این جا عرض می‌کنم؛ مثلاً یک کشوری مانند سنگاپور و انگلیس که گفتید وضعیت آنها خوب است یا امریکا که انتظار داشتیم وضعیتش بهتر باشد. امریکا اگر وضعیتش خوب است، شاید به این خاطر است که وارث علم اروپا است؛ یعنی آن اوایل که شکل گرفت، خیلی از دانشمندان از سراسر اروپا به آن‌جا رفتند، یک چیزهایی را پی‌ریزی کردند، یک کارهای عمده‌ای را انجام دادند و بالاخره امریکا شهرتی را برای خود کسب کرد. ولی خود امریکاییان و آموزش آنها نبود که بتواند یک چنین محصولی را تحویل دهد. حالا کم کم دارند هویّتی برای خودشان تأسیس می‌کنند؛ اما اگر انگلیس و سنگاپور موفّق می‌شوند، به این دلیل است که آنها زمانی را برای خود اعلام کردند، که در عرض بیست سال مثلاً باید در علم و صنعت کامپیوتر سرآمد باشیم؛ برنامه‌ریزی کردند وموفّق هم شدند. الان تمام بازارهای دنیا پر از کامپیوترهای سنگاپوری است و نرم‌افزارهایشان به همین طریق تمام کارهای کامپیوتر را انجام می‌دهند. نمونهٔ دیگر ژاپن است، که توانسته برای خودش هویتی بسازد. من در سخنرانیهای گذشته‌ام که صحبت کردم، گفتم که ما هم باید سعی کنیم به نوعی، در یکی از جاهایی که زمینهٔ مساعد داریم، برای خودمان یک نوع هویت بسازیم. علوممان هویّت ایرانی پیدا کند. همه باید بدانند که ایرانیها دارند روی مسأله‌هایی کار می‌کنند.

از این رو اوّلین برنامه‌ای که پیشنهاد می‌شود، این است که

باید ریشه‌های ریاضی این مملکت روشن شود. همان طوری هم که آقای شهریاری در صحبتهایشان اشاره کردند، ما باید بدانیم تاریخ ریاضیات چیست و ثانیاً این ریشه‌ها اگر مشخص شود، باز هم رشد نخواهیم کرد؛ برای این که جامعهٔ ما و صنعت ما منطبق با علم و ریاضیات پیش نمی‌رود، یک صنعت مونتاژ است و در نهایت، صرفاً وارداتی است. تا زمانی که صنعت مونتاژ داریم علممان راه به جایی نمی‌برد. باید کارخانه‌دار نیازش را سفارش دهد و بیاید بگوید که مثلاً دانشگاه تهران، یک قطعه، با چنین ویژگیهایی نیاز دارد... در این صورت است که بخشهای مختلف مانند گروه‌های ریاضی، فیزیک، مهندسی و ... فعال می‌شوند.



نکتهٔ دیگری هم که در این‌جا به ذهن من می‌رسد، این است که علم ما عین صنعتمان است و به خاطر نداشتن هویت، علممان وارداتی است. در حال حاضر ما می‌بینیم مثلاً در خارج روی مجموعهٔ فازی کار می‌کنند ما هم می‌بینیم در هر گوشه کناری نشسته‌اند و درمورد مجموعه فازی حرف می‌زنند. در خارج می‌بینیم مثلاً دارند روی معادلات دیفرانسیل با ضرایب آن جوری کار می‌کنند. ما هم فردا کمیته‌هایی تشکیل می‌دهیم و شروع به بحث می‌کنیم و دنبال این طور کارها رفتن. علم وارداتی هم، مثل صنعت وارداتی است؛ نه تنها مشکل‌گشای کار ما نیست؛ بلکه ممکن است مزاحمت ایجاد کند.

ما انبوهی از مشکلات در یک گوشه‌ای داریم و انبوهی از دانش ریاضی در گوشه‌ای دیگر؛ اما ارتباط بین اینها را نمی‌توانیم برقرارکنیم. نمی‌توانیم بگوییم آقا برای این مشکل، یک فرم ریاضی بدهید. آن وقت می‌آییم و می‌خواهیم این مشکل را به کمک این دانش ریاضی که داریم، حل کنیم. همان‌طورکه آقای شهریاری گفتند، کار ما در این زمینه‌ها، فقط راه‌اندازی مسابقه است. به هر حال، چنین مسابقات بی‌پایانی را شروع می‌کنیم.

دربارهٔ آموزشمان صحبتی که آقایان قندهاری و شهریاری کردند، من فقط یک بیت از مولانا که در مقاله‌ای هم در آموزش ریاضی نوشتم، این جا عنوان می‌کنم. واقعاً ما داریم همین کار را می‌کنیم که مولانا در جلد دوم مثنوی می‌گوید: «ما که کورانه عصاها می‌زنیم/ لاجرم قندیلها را بشکنیم» آموزش ما به جای این که افراد را پرورش دهد و شکوفا کند، استعدادهای ما را زیر دست و پا له می‌کند؛ برای مثال، این مسابقاتی که می‌گذاریم تا پنج یا شش نفر را برای المپیاد انتخاب کنیم، می‌دانید چه جمع عظیمی را از نظر روحی و روانی از دست می‌دهیم. آنها را دلسرد و زده می‌کنیم. به چه قیمتی ما داریم همه این کارها را می‌کنیم و بعد چه استفاده‌ای می‌خواهیم از آن ببریم. بنابراین، مشکلات آموزشی ما فراوان است. هرگز بین جامعهٔ آموزگاران و صنعت ما، ارتباط منطقی ایجاد نمی‌شود. الان آموزشی را که ما می‌دهیم، به‌خاطر ناهماهنگ‌بودن جامعه با محیطهای علمی، گاهی اوقات نتایج معکوس هم می‌گیریم. من یک داستانی دارم، این را خیلی جاها هم گفته‌ام، حالا هم شما شاید یک طوری بتوانید بنویسید که ثبت شود و شاید هم شنیده باشید. داستان از این قرار است. دو تا شاگرد همکلاس بودند، که یکی از آنها به دلیل عدم توانایی در تحصیل، از مدرسه اخراج می‌شود. (در کلاس پنجم، ششم دبستان) و دیگری موفق به ادامه تحصیل می شود. بعد از بیست سال دوباره به هم می‌رسند. وقتی به هم رسیدند، یکی ازدیگری می‌پرسد: «تو کجا می‌روی؟» می‌گوید: «این جا یک سمینار است! (مثلاً جناب آقای قندهاری در مورد ریشه‌های معادله درجهٔ سوم صحبت می‌کنند.) من می روم آن‌جا بهره‌ای ببرم.» بعد یکی می‌پرسد: «تو چه کار می‌کنی؟» می‌گوید: «ما شرکتی داریم و اجناس را با یک قیمتی می‌خریم، بعد با چند درصدی سود می‌فروشیم.» وقتی کلمهٔ درصد را می‌شنود، به یاد می‌آورد که او در مدرسه، دربارهٔ درصد مشکل داشت، حالا چه قشنگ در مورد آن صحبت می‌کند. برای این که اطمینان حاصل کند، می‌گوید: «خوب شما بفرمایید این کالا را چند می‌خرید و چند می‌فروشید؟» حالا او با شگردهای خاص بازاری که دارد، مقدمه‌ای می‌چیند و بعد می‌گوید: «اینها را ما ۱۰۰ تومان می‌خریم، با ۳۰ درصد سود، می‌فروشیم ۳۰۰ تومان!»

آقای رستمی: از صحبتهای اساتید بزرگوار و دانشمند استفاده کردیم و مطالب لازم گفته شد. دو نکته است که من اضافه می‌کنم.

از نظر من، نقد کتابهای درسی، یک گوشه‌ای از آن هدفهایی است که مورد نظر ما و برای بهبود آموزش ریاضی در کشور است

و به آن نیاز داریم. در ابتدا همان‌طوری که گفته شد، باید اهداف مشخص شود؛ اهدافی که سال جهانی ریاضیات دارد، باید با سیستمی که در ایران قابل پیاده شدن است، منطبق شود. ممکن است تغییر نظام آموزشی یا اصلاح نظام آموزشی لازم باشد. به‌طور قطع، از آن موارد، اصلاح کتابهای درسی، روشهای آموزشی و ارزشیابی کتابها است. یکی دیگر، تهیهٔ مجله‌های ریاضی است.



از جمله مجله‌های ریاضی که برای مقطع دبیرستان منتشر می‌شود، یکی مجلهٔ «ریاضی برهان» است. آیا این مجله کافی است؟ یعنی نیاز معلم، دانش‌آموز و والدین را برآورده می‌کند؟ به نظر من، حتی همان نیاز دانش‌آموزان را هم در حدّی که لازم است، برآورده نمی‌کند. چه بسا لازم است یک مجله یا مجله‌های جدیدی وجود داشته باشد تا به هدفهایمان برسیم. نه تنها برای مقطع دبیرستان، بلکه حتی برای والدین، باید از پیش‌دبستان و دبستان مجله‌های ریاضی تهیه کرد. نکتهٔ دیگری که می‌خواستم بگویم، این است، همان‌طوری که استاد شهریاری هم در یک زمینهٔ کلی‌تری اشاره فرمودند، ما نباید به یک سال اکتفا بکنیم، خوب آن در بعد کلی است. حالا من در بعد دیگری می‌خواهم بگویم، ما نباید به یک ویژه‌نامه برای سال جهانی ۲۰۰۰ و اهداف آن اکتفا کنیم، به‌نظر من، اگر لازم است یک مجله در کنار این مجله، برای رسیدن به آن اهدافی که مورد نظر است، باید ایجاد شود.

آقای صدر: به نظر بنده دو نکته شایان ذکر است. اول این که کتابهای درسی باید با چه شیوه‌ها و مطالبی نوشته شود که با اهداف سال جهانی ریاضیات همسو باشد. همچنین کتابهای کمک‌آموزشی که هم‌اکنون وجود دارد، آیا این کتابها ویژگیهای همسو با اهداف سال جهانی ریاضی را دارد؟ اگر چنین است که ما ادّعا می‌کنیم این را انجام داده‌ایم؛ در غیر این صورت، راهبردهایی برای رسیدن به این اهداف باید پیدا کنیم. در حال حاضر، کتابهای درسی و کمک‌درسی که وجود دارد، از نظر مطالب مدل‌سازی و کاربرد ریاضی، ضعیف است؛ یعنی مطالب به گونه‌ای است که همیشه این سؤال برای دانش‌آموز به وجود می‌آید که مثلاً در جبر خطی فصل فضای برداری به چه دردی می‌خورد؟ حالا یا واقعاً به درد نمی‌خورد و یا اگر کاربردی دارد، حتماً ذکر شود. این‌گونه مطالب کاربردی، باید به مطالب مجله‌های ریاضی و کتابهای ریاضی افزوده گردد.

دومین مسألهٔ مهمی که به نظر من می‌رسد، البته نمی‌دانم در کمیتهٔ سال جهانی ریاضی مطرح شده است یا نه؟ هدف، پرورشی آموزش ریاضی است؛ یعنی کاری کنیم که دانش‌آموز قدرت اتکای به نفس پیدا کند و بتواند خودش مشکلاتش را حل کند. در حال حاضر، عمده‌ترین مشکلی که در مدارس داریم، مشکل کمبود وقت است و معلم در کلاس، فرصت حلّ همهٔ مسائل را پیدا نمی‌کند؛ بنابراین، دانش‌آموز در حلّ مسألهٔ دچار مشکل می‌شود. اکنون اگر دانش‌آموز قدرت اتکای به‌نفس در حلّ مسائل داشته باشد، تا حدّی این مشکل جبران می‌شود. البته وجود کتابهای کمک‌آموزشی استاندارد، می‌تواند در حلّ مسأله و تفکر برای حلّ مسأله، به دانش‌آموز کمک کند.



اما مشکل دیگری که وجود دارد، این است که دانش‌آموزان ما فرهنگ کتابخوانی ندارند. بنابراین چه باید کرد؟ باید کاری کرد که دانش‌آموز قدرت حلّ مسأله و خواندن کتاب را بیابد و مطالعه و تحقیق کند، تا چنین مشکلاتی به این صورت پیش نیاید.

آقای شرقی: چند مطلب را خدمتتان عرض می‌کنم. البته اکثر موضوعات در صحبتهای اساتید گفته شد؛ به خصوص عمدهٔ موضوعات را آقای شهریاری مطرح کردند. اما یک بخش و یک فراز از صحبتهای ایشان را من روی آن تأکید دارم و آن، مسألهٔ اطلاع‌رسانی و جریان داشتن اطلاعات و رسیدن این صحبتها به





گوش مسؤولان و پاسخگو بودن آنهاست. اکنون یک مجموعهٔ نظرات ویک سری انتقادات داریم. اینها را مطرح می‌کنیم ؛ مثل همان مطلبی که آقای شهریاری در رابطه با کنکور سراسری گفتند. خوب آنها مطالب کوچکی نیستند. ایشان قویاً می‌گویند که کنکور سراسری، ویران‌کننده است. حالا من نمی‌گویم حتماً این مطلب صددرصد صحیح است ؛ ولی می‌گویم اقلاً قابل بحث است. همان‌طوری که ایشان گفتند، اگر این مطلب واقعیت داشته باشد ـ که من هم معتقد هستم واقعیت دارد ـ ببینید هزینهٔ آن برای یک ملّت چه‌قدر زیاد است، خوب این باید یک طوری به گوش مسؤولان برسد. آنها خودشان را موظّف بدانند که پاسخگو باشند و حدّاقل ازکاری که انجام می‌دهند دفاع کنند. من مجبور هستم یک کتاب درسی را در مدت کوتاهی (حالا فعلاً که نظام ترمی است) در مدت سه ماه تمام کنم ؛ آن هم موضوعی که می‌دانم حجم و زمانی که در اختیار دارم، تکاپوی نصف آن بحث را هم نمی‌کند. مجبورم نصف موضوعات را یک طوری سریع بگویم و تمرینات را کم کنم. در نتیجه مطالب خوب جا نمی‌افتد. بنابراین دانش‌آموزانی ممکن است حد بگیرند، مشتق بگیرند و منحنی رسم کنند ؛ آن وقت یک معادله درجهٔ دوم را نمی‌توانند حل کنند. چرا این گونه شده؟ به دلیل همین موضوع ؛ یعنی فشرده‌بودن مباحث و نبودن زمان به اندازهٔ کافی. آقای امیری ابتدای جلسه فرمودند که برای عمومی‌کردن ریاضیات کار کنیم ؛ خوب عمومی‌کردن ریاضیات یعنی چه؟ یعنی دانش‌آموز کاربردهای ریاضیات را عملاً ببیند و حس کند و زیباییها و خلاقیتهای در ریاضی را تجربه کند.

آقای عابدی: عمومی‌کردن ریاضیات، یعنی این که به مردم فکر ریاضی بدهیم. اگر ما به مردم فکر ریاضی بدهیم، خیلی از مشکلات حل می‌شود. ولی با وجود کنکور، امکان ندارد ؛ چون وقتی که من در کلاس مدرسه‌ای درس می‌دهم، هنوز قضیه نگفته‌ام، می‌گویند آقا روش تستی آن‌را بگو ؛ یعنی می‌خواهند ریاضی فکر نکنند. علت آن هم، این است که فکر می‌کنم بیشتر یک جنبهٔ مدرک‌گرایی دارد ؛ یعنی الان مُد شده، با وجودی که همه می‌دانند واقعاً اگر در رشتهٔ پزشکی فارغ‌التحصیل شوند، کار ندارند ؛ ولی می‌خواهد پُز بدهد و بگوید من خانم یا آقای دکتر هستم. من چون که در سیستم اقتصادی کار می‌کنم ؛ یعنی دست‌اندرکار هستم، خیلی وقتها می‌بینم یک بازاری که می‌نشیند و صحبت می‌کند، او فکر ریاضی دارد، یک وقت مثلاً وقتی قیمت تمام شدهٔ یک کالا را که حساب می‌کند، می‌بینم در مدت دو یا سه دقیقه، خیلی خوب حساب می‌کند. این، یعنی او فکر ریاضی دارد.

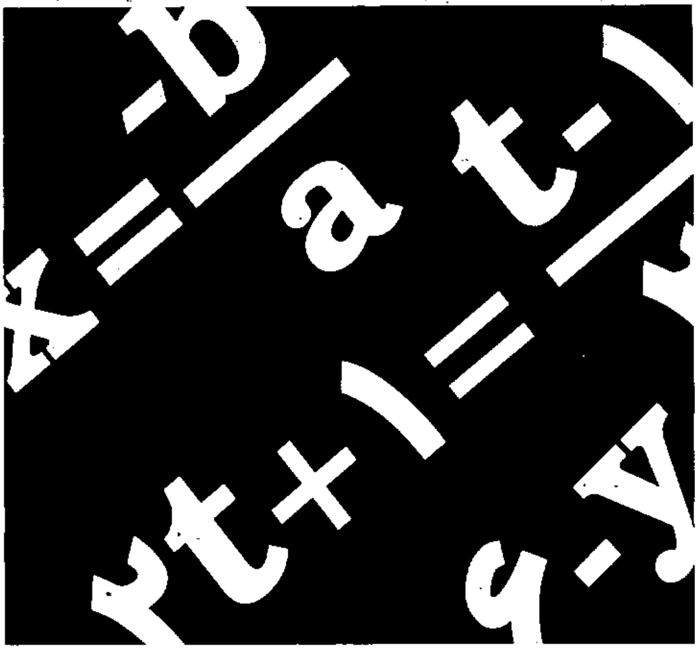
عیب اساسی دیگر این است که مسألهٔ معیشت معلمان باید حل شود. من از خود شما جناب شهریاری سؤال می‌کنم، شما واقعاً معلم شدید، به خاطر پولش بوده یا به معلمی علاقه داشتید! ولی الان این طور نیست. در حال حاضر شما نگاه کنید، هر کس از هر کجا که فارغ‌التحصیل می‌شود، می‌رود معلم می‌شود. نظامی در کار نیست. ما نظام پزشکی داریم! ولی نظام معلّمی نداریم! می‌بینیم برخی از معلمها مهندس یا دکترند. این گونه افراد دورهٔ کلاس تربیت معلّمی و تدریس را ندیده‌اند و کارآموزی نکرده‌اند. هر طوری خوششان می‌آید، درس می‌دهند. همین مهندسان و ... هستند که می‌روند درس می‌دهند و روشهای تستی بدون پشتوانهٔ ریاضی را به خورد بچه‌های مردم می‌دهند. متأسفانه هیچ جایی در این مملکت نیست که جلوی اینها را بگیرد، که آقا شما چطوری معلم شدید؟ مدرک شما چیست؟ کار شما چیست؟ شاید ۸۰ تا ۹۰ درصد معلمان کلاسهای کنکور، اشخاصی هستند که اصلاً کار معلمی نکرده‌اند ؛ ولی حُقّه‌بازیها و روش تست‌زنی را می‌دانند. تا وقتی که مسألهٔ کنکور در ایران حل نشود و این مدرک‌گرایی ـ آقای دکتر، آقای مهندس و ... ـ حل نشود، ریاضیات را نمی‌توانیم عمومی کنیم. بنابراین اوّلاً باید روش کنکور را در مملکت عوض کنند، ثانیاً باید انتخاب معلم درست باشد. الان شما می‌دانید، هر کسی از هر جایی آمده، برای خودش معلمی می‌کند و هیچ کس هم نیست که جلوی آنها را بگیرد.

معادله درجه اول

(قسمت اول)

(برای دانش آموزان سال اول)

● هوشنگ شرقی



معادله چیست؟

یکی از مفاهیم بسیار رایج در شاخه‌های مختلف ریاضی، مفهومی به نام معادله است. آشنایی دقیق با مفاهیم ریاضی، از ضرورتهای آموزش آن می‌باشد. بدون اطلاع از مفهوم دقیق و عمیق یک واژهٔ ریاضی، نمی‌توان مسائل مربوط به آن را بدرستی حل نمود. بنابراین، در این بحث ابتدا باید ببینیم معادله چیست و تفاوت آن با اتحاد چه می‌باشد.

معادله: هر تساوی جبری که به‌ازای بعضی مقادیر متغیرها (مجهولها) برقرار (درست) باشد، معادله نامیده می‌شود. معادله ممکن است یک یا چند مجهول داشته باشد؛ مثلاً تساوی $a+b=۲$ یک معادله با دو مجهول می باشد و هرچند این تساوی، به‌ازای بی‌شمار جفت عددهای حقیقی a و b برقرار می‌باشد؛ ولی چون به‌ازای همهٔ عددهای حقیقی a و b درست نیست، بنابراین یک اتحاد نمی‌باشد. مجموعهٔ مقادیری را که به‌ازای آنها معادله برقرار می‌باشد، مجموعهٔ جوابها یا ریشه‌های معادله می‌گوییم. مثلاً مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ $x^۲=۱$ برابر با $\{-۱,۱\}$ می‌باشد؛ چرا که تنها مربع این دو عدد، مساوی یک است. بنابراین اتحاد، معادله‌ای است که مجموعهٔ جوابهای آن، مجموعهٔ اعداد حقیقی، یعنی $\mathbb{R}$ باشد؛ مانند اتحاد $x+۱=۱+x$ که به‌ازای هر عدد حقیقی x برقرار می‌باشد. منظور از حل معادله، پیدا کردن مجموعهٔ جوابها یا ریشه‌های معادله می‌باشد؛ یعنی مجموعهٔ مقادیری را که به‌ازای آنها معادله برقرار می‌باشد، به‌دست می‌آوریم.

درجهٔ یک معادله: بزرگترین درجهٔ مجهول (مجهولهای) معادله را درجهٔ معادله می‌گوییم. مثلاً معادلهٔ $x^۴-x-۲=۰$، معادله‌ای از درجهٔ ۴ با یک مجهول (x) می‌باشد.

در این بحث، هدف ما ارائه راه‌حلهایی برای حل معادله‌های یک مجهولی درجهٔ اول و دوم می‌باشد.

معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ اول

در این نوع معادله، بزرگترین درجهٔ مجهول معادله یک می‌باشد. هریک از معادله‌های زیر، معادله‌ای از این نوع هستند:

$$\frac{y+۴}{۳}-\frac{y-۱}{۲}=y+۳ \qquad \frac{x+۲}{۳}-\frac{x-۱}{۴}=x+۱$$

$$۲t+۱=\frac{t-۱}{۲}-۱$$

برای حل این نوع معادله‌ها چه باید کرد؟

بیایید با یک مثال شروع کنیم.

مثال: حل معادله درجهٔ اول $۲x+۱=۰$.

برای حل این معادله، درواقع باید به این سؤال پاسخ دهیم: دو برابر کدام عدد حقیقی به‌اضافهٔ ۱، مساوی صفر می‌شود؟

مثل این که قدری مشکل است! مثال را از این هم ساده‌تر می‌کنیم.

مثال: حل معادلهٔ درجهٔ اول $x+۱=۰$.

حل: در این‌جا با سؤال ساده‌تری مواجه هستیم: مجموع کدام

عدد حقیقی با ۱، مساوی صفر می‌شود؟ یعنی یک عدد حقیقی بگویید که با ۱ جمع شده و حاصل مساوی صفر شود. پاسخ ساده است: $x = -1$ ؛ زیرا می‌دانیم: $0 = 1 + (-1)$.

اکنون می‌توانیم حل مثال اوّل را نیز انجام دهیم: اگر $2x$ را یک مجهول درنظر بگیریم، با همین روش نتیجه می‌شود: $2x = -1$، حال باید به این سؤال پاسخ دهیم: دو برابر کدام عدد حقیقی، مساوی -1 است؟ این نیز با قدری فکر به‌دست می‌آید: $x = -\frac{1}{2}$ (زیرا می‌دانیم $2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$).

حال می‌خواهیم معادلهٔ $ax + b = 0$ را در حالت کلی حل کنیم: بدیهی است که در این معادله، a و b اعدادی حقیقی بوده و $a \neq 0$ می‌باشد. اگر ax را به‌عنوان یک مجهول درنظر بگیریم، باید به این سؤال پاسخ دهیم: کدام عدد حقیقی به اضافهٔ b، مساوی صفر می‌شود؟ با کمی جست‌وجو و توجه به برابری $b + (-b) = 0$ نتیجه می‌شود که $ax = -b$. اکنون برای یافتن x باید به این سؤال پاسخ دهیم: حاصلضرب کدام عدد حقیقی در a، می‌شود $-b$، که این نیز با توجه به تساوی $a(-\frac{b}{a}) = -b$، نتیجه می‌دهد: $x = \frac{-b}{a}$ ؛ بنابراین جواب معادلهٔ $ax + b = 0$ برابر است با $x = \frac{-b}{a}$. مثلاً جواب معادلهٔ $2x + 3 = 0$ می‌شود: $x = -\frac{3}{2}$. اکنون یک نوع بیان سنتی برای رسیدن به جواب معادله را به‌کار می‌بریم: همان‌طور که دیدیم از تساوی $ax + b = 0$ به تساوی $ax = -b$ رسیدیم. در این‌جا می‌گوییم، b را به‌طرف دوم تساوی می‌بریم و با این کار، علامت آن عوض می‌شود. پس از این، قرارداد می‌کنیم که هر عبارت جبری یا عدد حقیقی که از یک طرف معادله، به‌طرف دیگر آن برود، علامت آن قرینه بشود. حال از تساوی $ax = -b$ نتیجه گرفتیم که: $x = -\frac{b}{a}$، یعنی عدد ثابت را بر ضریب مجهول (a) تقسیم کردیم و مجهول x را پیدا کردیم. پس از این نیز همین کار را می‌کنیم: یعنی هروقت به تساوی $ax = k$ رسیدیم، بلافاصله می‌نویسیم $x = \frac{k}{a}$. مثلاً از تساوی $2x = 5$، نتیجه می‌شود: $x = \frac{5}{2}$ یا از تساوی $3x = -6$، نتیجه می‌گیریم: $x = -\frac{6}{3} = -2$. به این ترتیب، یک راه حل کلی برای حل معادله‌های یک مجهولی درجهٔ اول پیدا می‌شود؛ ابتدا همهٔ مجهولها را به یک طرف معادله و معلومها را به‌طرف دیگر می‌بریم. با این شرط که، هر عبارتی که از یک طرف به‌طرف دیگر برود، تغییر علامت می‌دهد؛ پس، از جمع و تفریق مجهولها با هم و معلومها نیز با هم، به تساوی مانند $ax = k$ می‌رسیم و از آن جا مقدار x به‌صورت $x = \frac{k}{a}$ به‌دست می‌آید.

مثال: حل معادلهٔ $3x + 7 - 5x = 4 + 2x$.

حل: همهٔ مجهولها را به‌سمت راست و همهٔ عددها (معلومها) را به سمت چپ تساوی می‌بریم (این کار اختیاری است و می‌توانستیم بعکس عمل کنیم): $7 - 4 = 2x + 5x - 3x$

چون $-5x$ و $3x$ و عدد ۴ تغییر مکان داده‌اند، پس تغییر علامت داده‌اند؛ ولی $2x$ و ۷ تغییر علامت نداده‌اند؛ زیرا تغییر مکان نداشته‌اند. اکنون از جمع جبری عبارتهای سمت راست و چپ تساوی، نتیجه می‌شود: $3 = 4x$

و براساس دستور گفته شده: $\boxed{x = \frac{3}{4}}$

مثال: حل معادلهٔ $4y - 14 = -2y + 2 - y + 5$.

حل: به همان روش عمل می‌کنیم (به‌ترتیب اعمال زیر دقت کنید):

$$4y + 2y + y = 14 + 2 + 5$$

$$\Rightarrow 7y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

تمرین: اکنون شما نیز با همین روش، هریک از معادله‌های زیر را حل نموده و مجهول معادله را به‌دست آورید:

۱) $4x + 3x - 11 = 2x - 1$

۲) $5t - 2t - 1 = 3t + t - 3$

۳) $5y - 2 = 4y - 3$

حال، معادله را قدری پیچیده‌تر کنیم.

مثال: معادلهٔ $\frac{x+1}{4} = \frac{4x-1}{3}$ را حل کنید.

حل: به کمک خاصیت «طرفین ـ وسطین» نمودن تناسبها که می‌گوید از تساوی $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ برابری $ad = bc$ نتیجه می‌شود

می‌توان معادلهٔ حاصل را به‌صورت زیر $(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc)$ تغییر داد:

$$\frac{۴x-۱}{۳}=\frac{x+۱}{۴}\Rightarrow ۴(۴x-۱)=۳(x+۱)$$

حال با ضرب ضرایب ۴ و ۳ در پرانتزها به‌دست می‌آید:

$$۱۶x-۴=۳x+۳$$

و این، معادله‌ای از همان نوع قبل می‌باشد که بسادگی حل می‌شود:

$$۱۶x-۳x=۴+۳\Rightarrow ۱۳x=۷\Rightarrow x=\frac{۷}{۱۳}$$

مثال: حل معادلهٔ درجهٔ اول: $\frac{۳x-۲}{۵}=\frac{۲x+۱}{۳}$.

حل: به همان روش، بترتیب می‌نویسیم:

$$۳(۳x-۲)=۵(۲x+۱)\Rightarrow ۹x-۶=۱۰x+۵$$

$$\Rightarrow ۹x-۱۰x=۶+۵\Rightarrow -x=۱۱\Rightarrow \boxed{x=-۱۱}$$

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۴x-۱}{۳}=\frac{۲x+۵}{۲}$　　۲) $\frac{۵x+۱}{۲}=\frac{۳x-۱}{۴}$

۳) $\frac{x+۱}{۷}=\frac{۴x-۱}{۳}$　　۴) $\frac{۲t+۳}{۳}=\frac{۳t+۲}{۲}$

۵) $\frac{۷y-۱}{۶}=\frac{۶y-۱}{۷}$

اکنون مسأله را قدری جلوتر می‌بریم.

مثال: حل معادلهٔ $\frac{x+۱}{۲}+\frac{x-۱}{۳}=\frac{۳x-۱}{۴}-\frac{x-۲}{۵}$.

حل: ابتدا با جمع و تفریق کسرهای دو طرف تساوی، هر طرف را به یک کسر تبدیل می‌کنیم (در دو طرف، با مخرج مشترک‌گیری، عمل جمع یا تفریق را انجام می‌دهیم):

$$\frac{۳(x+۱)+۲(x-۱)}{۶}=\frac{۵(۳x-۱)-۴(x-۲)}{۲۰}$$

حال، اعمال جبری را در صورتهای دو کسر انجام داده و مخرج دو کسر را نیز به عدد ۲ ساده می‌کنیم:

$$\frac{۳x+۳+۲x-۲}{۳}=\frac{۱۵x-۵-۴x+۸}{۱۰}$$

$$\Rightarrow\frac{۵x+۱}{۳}=\frac{۱۱x+۳}{۱۰}$$

حال مسألهٔ ما به مسأله‌ای مشابه حالت پیش تبدیل می‌شود:

$$۱۰(۵x+۱)=۳(۱۱x+۳)\Rightarrow ۵۰x+۱۰=۳۳x+۹$$

$$\Rightarrow ۵۰x-۳۳x=۹-۱۰\Rightarrow ۱۷x=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۱۷}$$

مثال: معادلهٔ $\frac{۲t+۱}{۳}-\frac{t-۱}{۲}+۱=\frac{t}{۲}+t$ را حل کنید.

حل: به‌ترتیب می‌توان نوشت:

$$\frac{۲(۲t+۱)-۳(t-۱)+۶}{۶}=\frac{t+۲t}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{۴t+۲-۳t+۳+۶}{۳}=\frac{۳t}{۱}\Rightarrow\frac{t+۱۱}{۳}=\frac{۳t}{۱}$$

$$\Rightarrow t+۱۱=۹t$$

$$\Rightarrow ۱۱=۹t-t\Rightarrow ۱۱=۸t\Rightarrow \boxed{t=\frac{۱۱}{۸}}$$

مثال: حلّ معادلهٔ

$$\frac{۷z+۱}{۴}-\frac{۲z-۳}{۲}-\frac{z-۱}{۳}=\frac{۵z}{۲}-\frac{۳z-۱}{۵}-۱$$

حل:

$$\frac{۳(۷z+۱)-۶(۲z-۳)-۴(z-۱)}{۱۲}$$

$$=\frac{۲۵z-۲(۳z-۱)-۱۰}{۱۰}$$

$$\Rightarrow\frac{۲۱z+۳-۱۲z+۱۸-۴z+۴}{۶}=\frac{۲۵z-۶z+۲-۱۰}{۵}$$

$$\Rightarrow\frac{۵z+۲۵}{۶}=\frac{۱۹z-۸}{۵}\Rightarrow ۵(۵z+۲۵)=۶(۱۹z-۸)$$

$$\Rightarrow ۲۵z+۱۲۵=۱۱۴z-۴۸$$

$$\Rightarrow ۲۵z-۱۱۴z=-۱۲۵-۴۸$$

$$\Rightarrow -۸۹z=-۱۷۳\Rightarrow z=\frac{۱۷۳}{۸۹}$$

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{x}{۲}-\frac{x}{۳}=\frac{x+۱}{۵}-۱$

۲) $\frac{x+۱}{۴}-\frac{۲x-۱}{۲}=\frac{x-۱}{۳}-\frac{x-۱}{۲}$

۳) $\frac{۳x-۱}{۲}-\frac{۵x-۱}{۵}=\frac{x+۱}{۴}+\frac{x-۱}{۳}-x$

۴) $\frac{۴y+۱}{۳}-\frac{۲-y}{۲}-\frac{y-۱}{۳}=\frac{۵y+۱}{۲}-۱$

۵) $\frac{۲m+۴}{۳}-\frac{m-۱}{۵}-m-۱=\frac{۳m-۴}{۲}-\frac{m-۱}{۶}+۱$

اکنون به معادله‌هایی می‌پردازیم که در آنها عبارتهای درجهٔ دوم و بیشتر ظاهر می‌شوند ؛ ولی با حذف آنها معادله‌ای درجهٔ اوّل به‌دست می‌آید.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $\frac{x+۳}{x+۲}=\frac{۳x-۱}{۳x-۲}$ را به‌دست آورید.

حل: از طرفین ـ وسطین کردن این تناسب، به تساوی زیر می‌رسیم :

$$(x+۳)(۳x-۲)=(x+۲)(۳x-۱)$$

و از ضرب پرانتزها در یکدیگر، به برابری زیر می‌رسیم :

$$۳x^۲-۲x+۹x-۶=۳x^۲-x+۴x-۲$$

اکنون اگر همهٔ عبارتهای شامل مجهول x را به یک طرف و عددهای معلوم را به طرف دیگر ببریم، تساوی به این صورت تغییر می‌کند :

$$۳x^۲-۲x+۹x-۳x^۲+x-۶x=-۲+۶$$

در اینجا عبارت درجهٔ دوم $۳x^۲$ با $-۳x^۲$ حذف شده و یک معادلهٔ درجهٔ اوّل به‌دست می‌آید : $۲x=۴$ که از حلّ آن نتیجه می‌شود :

$$\boxed{x=۲}$$

البته در حل این‌گونه معادله‌ها که x در مخرج کسرها قرار دارد، باید دقت نمود که ریشهٔ معادله، مخرج هیچ یک از کسرها را صفر نکند و در این جا چنین نیست ؛ زیرا ریشه‌های مخرج کسرها به‌صورت زیر به دست می‌آیند :

$$x+۲=۰\Rightarrow x=-۲ , ۳x-۲=۰\Rightarrow ۳x=۲\Rightarrow x=\frac{۲}{۳}$$

که هیچ یک مساوی ۲ نمی‌باشند. در حقیقت، در معادله‌هایی که مجهول معادله در مخرج هریک از کسرها باشد، ابتدا باید ریشهٔ مخرج همهٔ کسرها را به‌دست آورد و این ریشه‌ها را از مجموعهٔ اعداد حقیقی کم کرد، مجموعهٔ حاصل را دامنهٔ معادله می‌نامیم ؛ مثلاً در معادلهٔ اخیر دامنهٔ معادله، مجموعهٔ $D=\mathbb{R}-\left\{-۲,\frac{۲}{۳}\right\}$ می‌باشد.

مثال: دامنهٔ معادلهٔ $\frac{x+۱}{x-۱}+\frac{x-۲}{x+۱}=۲$ را به‌دست آورده و سپس معادله را حل کنید.

حل: از صفر قرار دادن مخرج کسرها جوابهای زیر به‌دست می‌آیند :

$$x-۱=۰\Rightarrow x=۱$$

$$x+۱=۰\Rightarrow x=-۱$$

بنابراین، دامنهٔ معادله $D=\mathbb{R}-\{۱,-۱\}$ می‌باشد، یعنی ریشهٔ معادله، نباید مساوی یکی از این دو مقدار باشد. اکنون با جمع کسرهای سمت چپ تساوی، حلّ معادله را آغاز می‌کنیم :

$$\frac{(x+۱)^۲+(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(x+۱)}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{x^۲+۲x+۱+x^۲-۳x+۲}{x^۲-۱}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{۲x^۲-x+۳}{x^۲-۱}=\frac{۲}{۱}$$

اکنون با طرفین ـ وسطین کردن، تناسب بالا به‌دست می‌آید :

$$۲x^۲-x+۳=۲x^۲-۲$$

$$\Rightarrow ۲x^۲-x-۲x^۲=-۲-۳$$

$$\Rightarrow -x=-۵\Rightarrow x=۵$$

جواب به‌دست آمده در دامنهٔ معادله صدق نموده، لذا قابل قبول است.

تمرین: دامنهٔ هریک از معادله‌های زیر را به‌دست آورده و سپس معادله را حل کنید و درستی جواب را براساس دامنه، تحقیق کنید.

۱) $\frac{۴x-۱}{۳x+۱}=\frac{۴x+۱}{۳x-۱}$ ۲) $\frac{۵x+۲}{x-۱}=\frac{۵x+۳}{x+۱}$

۳) $\frac{x+۲}{x-۲}-\frac{x-۱}{۲x-۱}=\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{x+۱}+\frac{۱}{x-۱}=\frac{۲}{x+۲}$

معادلهٔ غیر ممکن و معادلهٔ مبهم

هرگاه پس از ساده کردن یک معادله، برای حل آن، مجهول معادله حذف شده و یک تساوی نادرست عددی حاصل شود، معادلهٔ مزبور را معادله‌ای غیرممکن می‌نامیم. معادلهٔ غیرممکن، ریشهٔ حقیقی ندارد.

مثال: معادلهٔ $\frac{x+۲}{۳}+\frac{x-۲}{۲}=\frac{۵x+۱}{۶}$ را حل کنید.

حل: مطابق روشهای گفته شده، طرفین تساوی را ساده کنیم :

$$\frac{۲(x+۲)+۳(x-۲)}{۶}=\frac{۵x+۱}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+4+3x-6}{6}=\frac{5x+1}{6}$$

$$\Rightarrow 5x-2=5x+1 \Rightarrow 5x-5x=2+1 \Rightarrow 0=3$$

که برابری آخر نادرست می‌باشد، لذا معادلهٔ اوّلیه غیر ممکن است و هیچ عدد حقیقی x، در تساوی فوق صدق نمی‌کند. حال اگر پس از ساده شدن طرفین معادله، x حذف شده و یک تساوی درست حاصل شود، معادلهٔ مزبور را معادلهٔ مبهم گوییم. معادلهٔ مبهم دارای بی‌شمار ریشهٔ حقیقی است.

مثال: معادلهٔ $\frac{3x+1}{10}-1=\frac{x-1}{2}-\frac{x+2}{5}$ را حل کنید.

حل: پس از ساده کردن طرفین تساوی، نتیجه می‌شود :

$$\frac{2(x+2)-5(x-1)}{10}=\frac{10-(3x+1)}{10}$$

$$\Rightarrow 2x+4-5x+5=10-3x-1$$

$$\Rightarrow 2x-5x+3x=10-1-4-5 \Rightarrow 0=0$$

و تساوی آخر صحیح می‌باشد. و از آن‌جا نتیجه می‌شود معادلهٔ فوق یک معادلهٔ مبهم بوده و بی‌شمار ریشهٔ حقیقی دارد. به‌عبارت دیگر، تساوی فوق به ازای هر عدد حقیقی x برقرار می‌باشد؛ یعنی برابری $\frac{3x+1}{10}-1=\frac{x-1}{2}-\frac{x+2}{5}$ یک اتحاد جبری می‌باشد.

معادله‌های حرفی

معادله‌های حرفی، معادله‌هایی می‌باشند که معلومهای معادله، عدد حقیقی نمی‌باشند و به‌صورت حرفی می‌باشند. مانند معادلهٔ $\frac{x+a}{b}=\frac{x+b}{a}$ که در آن x مجهول معادله بوده و a و b دو مقدار معلوم می‌باشند. برای حلّ این گونه معادله‌ها به همان ترتیبی عمل می‌کنیم که در مورد معادله‌های عددی دیدیم : یعنی همهٔ عبارتهای شامل مجهول معادله را به یک طرف تساوی و سایر عبارتها را به طرف دیگر معادله می‌بریم. سپس از مجهول معادله فاکتور می‌گیریم. آن‌گاه مجهول معادله برابر می‌شود با مجموع عبارتهای معلوم تقسیم بر ضریب مجهول. برای شروع، حلّ معادله‌ای را که مثال زده شد، انجام می‌دهیم :

$$\frac{x+a}{b}=\frac{x+b}{a}$$

با طرفین ـ وسطین کردن تناسب بالا به تساوی زیر می‌رسیم :

$$a(x+a)=b(x+b) \Rightarrow ax+a^2=bx+b^2$$

و با بردن عبارتهای مجهول و معلوم به یک طرف، نتیجه می‌شود :

$$ax-bx=b^2-a^2$$

و اگر در سمت چپ، از x فاکتور بگیریم :

$$x(a-b)=b^2-a^2 \Rightarrow x=\frac{b^2-a^2}{a-b}$$

و به این ترتیب، x برحسب a و b به‌دست می‌آید. حال با فرض $a \neq b$ (که با این فرض، مقدار مخرج کسر، مخالف صفر بوده و کسر تعریف شده می‌باشد) می‌توان مقدار x را ساده‌تر نمود :

$$x=\frac{b^2-a^2}{a-b}=\frac{-(a^2-b^2)}{a-b}=\frac{-(a-b)(a+b)}{(a-b)}$$

$$=-(a+b) \Rightarrow x=-(a+b)$$

با یک مثال دیگر از این نوع، موضوع روشنتر می‌شود.

مثال: از تساوی $b^2(b-a)=c^2(c-a)+a(b-c)$ مقدار a را برحسب b و c به‌دست آورید.

حل: با ملاحظهٔ این برابری، واضح است که معادلهٔ فوق، برحسب مجهول a، از درجهٔ اول می‌باشد. برای حلّ آن مانند مثال قبل، پس از ضرب و ساده کردن پرانتزها، همهٔ عبارتهای شامل مجهول a را به یک طرف معادله برده و سایر عبارتها را به طرف دیگر آن می‌بریم و a را به‌دست می‌آوریم :

$$b^3-b^2a=c^3-c^2a+ab-ac \Rightarrow$$

$$b^3-c^3=b^2a-c^2a+ab-ac \Rightarrow$$

$$b^3-c^3=a(b^2-c^2+b-c) \Rightarrow a=\frac{b^3-c^3}{b^2-c^2+b-c}$$

با تجزیهٔ عبارتهای صورت و مخرج کسر، می‌توان مقدار a را ساده‌تر نمود :

$$a=\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{(b-c)(b+c)+(b-c)}=\frac{(b-c)(b^2+bc+c^2)}{(b-c)(b+c+1)}$$

$$\Rightarrow a=\frac{b^2+bc+c^2}{b+c+1} \quad \text{با شرط } (b \neq c)$$

و این مقدار a را برحسب b و c به ما می‌دهد.

مثال: از تساوی $a^2+ab=ac+bc+1$ مقادیر b و c را برحسب سایر مجهولها به‌دست آورید.

حل: یک بار b را مجهول اصلی فرض نموده و آن را برحسب سایر عبارتها به دست می‌آوریم :

$$ab-bc=ac-a^2+1 \Rightarrow b(a-c)=ac-a^2+1$$

$$\Rightarrow b=\frac{ac-a^2+1}{a-c}$$

و یک بار دیگر، c را مجهول اصلی فرض نموده و آن را برحسب a و b به‌دست می‌آوریم:

$$a^2+ab-1=ac+bc \Rightarrow a^2+ab-1=c(a+b)$$

$$\Rightarrow c=\frac{a^2+ab-1}{a+b}$$

در انتهای این بخش، یادآور می‌شویم که حلّ معادله‌های حرفی و به‌دست آوردن هریک از مجهولها در یک تساوی، برحسب سایر مجهولها، کاربردهای زیادی در سایر علوم و بخصوص در محاسبه‌های مربوط به فیزیک و الکترونیک دارد. در این‌جا به چند نمونه توجه می‌کنیم.

مثال: قانون حرکت متحرّکی که با حرکت شتابدار، طی مسیر می‌کند، به‌صورت $x=\frac{1}{2}at^2+V_0t$ بیان می‌شود که در این تساوی، a شتاب حرکت، t زمان و V_0 سرعت اولّیه می‌باشد و از آن‌جا x مسافت طی شده به‌دست می‌آید. از این تساوی، مقدار شتاب حرکت را برحسب زمان حرکت، سرعت اولیه و مسافت به‌دست آورید.

حل: به ترتیب می‌توان نوشت:

$$x=\frac{1}{2}at^2+V_0t \Rightarrow x-V_0t=\frac{1}{2}at^2$$

$$\Rightarrow a=\frac{x-V_0t}{\frac{1}{2}t^2} \Rightarrow a=\frac{2x-2V_0t}{t^2}$$

مثال: ظرفیت یک خازن مسطح، از دستور $C=\varepsilon_0\frac{kA}{d}$ به‌دست می‌آید.

که در این دستور، C ظرفیت خازن، k عددی ثابت به نام ثابت دی الکتریک، ε_0 نیز یک عدد ثابت بوده و A مسافت صفحات خازن و d فاصلهٔ دو صفحه از یکدیگر می‌باشد. از این دستور، مقدار ثابت دی‌الکتریک را برحسب سایر متغیرها و مقادیر ثابت به‌دست آورید.

حل: بسادگی می‌توان نوشت:

$$C=\frac{\varepsilon_0 kA}{d} \Rightarrow \varepsilon_0 kA=C.d \Rightarrow k=\frac{C.d}{\varepsilon_0 .A}$$

تمرین: در هریک از معادله‌های حرفی زیر، متغیر خواسته شده را برحسب سایر مجهولها به‌دست آورید:

۱) $a^2(x-1)-b^2(x+1)+2ab=0 \quad (x=?)$

۲) $x^2(y-x)+xy+y+1=0 \quad (y=?)$

۳) $a^2b+c^2-b+1=b+c \quad (b=?)$

۴) $(a+b)(a+x)=(b+x)(b-a) \quad (x=?)$

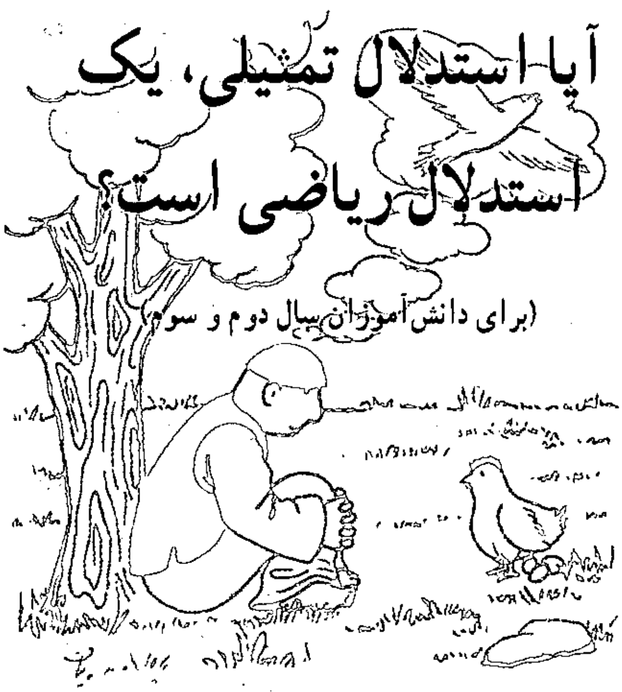
۵) $\frac{x+n}{m}+\frac{x+m}{n}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n} \quad (x=?)$

تمرین: به هر جسم با جرم m که بر دایره‌ای به شعاع r و با سرعت V دوران کند، نیرویی معادل F وارد می‌شود؛ به قسمی که: $F=\frac{mV^2}{r}$. از این دستور، مقدار شعاع دایره (r) را برحسب سایر متغیرها به‌دست آورید.

تمرین: دو بار الکتریکی با اندازه‌های q_1 و q_2 که به فاصلهٔ r از یکدیگر قرار داشته باشند، نیرویی به اندازهٔ F به یکدیگر وارد می کنند؛ به‌طوری که: $F=\frac{kq_1q_2}{r^2}$
که در این دستور، k مقدار ثابتی می‌باشد. برای محاسبهٔ این مقدار ثابت، دو بار معلوم q_1 و q_2 را در فاصلهٔ معین r از یکدیگر قرار داده و نیروی بین آنها (F) را اندازه گرفته‌ایم. مقدار k را برحسب q_1، q_2، r و F به دست آورید.

آیا استدلال تمثیلی، یک استدلال ریاضی است؟

(برای دانش‌آموزان سال دوم و سوم)



● علیرضا عین‌اللهی

تمثیل "Analogy" در لغت، به معنای مثل آوردن، نمایش دادن، نمایندگی و... است. اما از دیدگاه منطق کلاسیک، تمثیل به معنای «**از جزئی به جزئی دیگر پی بردن است.**» به عبارت دیگر، توسط تمثیل بین مفاهیم گوناگون، به نوعی شباهت و یکسانی دست می‌یابیم.

به مثالهای زیر توجه کنید :

مثال (۱): عدد $(۲^۵)$ از عدد $(۵^۲)$ بزرگتر است. از راه مشابهت نتیجه می‌شود که عدد $(۳^۵)$ از عدد $(۵^۳)$ نیز بزرگتر است.

مثال (۲): می‌دانیم که گزارهٔ «هر انسان یک سَر دارد» درست است و چون «فردوسی یک انسان است» پس از راه مشابهت نتیجه می‌شود که «فردوسی یک سَر دارد».

مثال (۳): با توجه به درست بودن دو گزارهٔ «هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است» و «مربع نوع خاصی از مستطیل است» می‌توان نتیجه گرفت که : «مربع یک متوازی‌الاضلاع است».

مثال (۴): یک مربع با یک مکعب مشابه است. چون مساحت یک مربع به ضلع a برابر (a^2) است، از این مشابهت می‌توانید نتیجه بگیرید که حجم یک مکعب به ضلع a برابر (a^3) است.

مثال (۵): لطفاً درستی برابری زیر را توسط ماشین‌حساب بررسی کنید :

۱۲۳۴۵۶۷۹ × ۹ = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱

۱۲۳۴۵۶۷۹ × ۱۸ = ۲۲۲۲۲۲۲۲۲

آیا بدون محاسبه کردن می‌توانید برابری زیر را کامل کنید؟

۱۲۳۴۵۶۷۹ × ۲۷ = ...

درستی پاسخ خودتان را با استفاده از ماشین‌حساب تحقیق کنید.

بسیاری از نتیجه‌گیریهای علمی و غیرعلمی که بنا بر تمثیل بیان می‌شوند، نادرستند ؛ زیرا روش استدلال تمثیل، یک روش علمی نیست. بنابراین استفاده از این روش، برای اثبات درستی یک مسأله پذیرفته نیست. با وجود این، دیده می‌شود که تمثیل در طرز تفکر، در سخن گفتن روزمرّه، نتیجه‌گیریهای متعارف و نیز در تعبیرات هنری و در عالیترین دستاوردهای علمی ما نفوذ دارد و در ترازهای مختلف به‌کار می‌رود. به کمک تمثیل ممکن است راه‌حلهای مناسبی را برای حلّ یک مسأله کشف کرد. حتی می‌توان توسط آن، گزاره‌های جدید را بیان و سپس درستی آنها را بررسی کرد. به همین دلیل، نباید از هیچ نوع تمثیل غافل بمانیم.

فعالیت (۱)

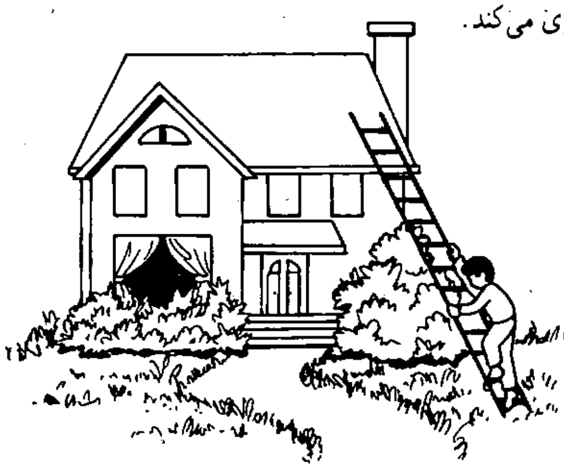
هدف ما از این فعالیت، استفاده از تمثیل برای درک بهتر ضرب اعداد صحیح، بخصوص ضرب اعداد مثبت در منفی و منفی در منفی است. ابتدا قراردادهای زیر را می‌پذیریم :

قرارداد اوّل: کلمه **قبل** را با نماد «−» و کلمه **بعد** را با نماد «+» نمایش می‌دهیم. برای مثال، ۳ ثانیه قبل، یعنی ۳ − و ۳ ثانیه بعد، یعنی ۳ +.

قرارداد دوم: از پله بالا رفتن را با نماد «+» و از پله پایین آمدن را با نماد «−» نمایش می‌دهیم. برای مثال، ۲ پله بالا رفت ؛ یعنی ۲+ و ۲ پله پایین آمد ؛ یعنی ۲ −.

قرارداد سوم: یک دانش‌آموز به نام علی می‌تواند در هر ثانیه ۲ پله بالا برود.

علی دانش‌آموز سال اوّل دبستان، در حیاط منزلشان با نردبان بازی می‌کند.



I. اگر علی بخواهد از نردبان بالا برود، در این صورت، بعد از ۳ ثانیه، چند پله بالا می‌رود؟ آیا می‌توان نوشت؟

$(+۳) \times (+۲) = (+۶)$

II. فرض کنید علی از نردبان بالا می‌رود. به‌نظر شما ۳ ثانیه قبل، علی چند پله پایین بوده است؟ آیا می‌توان نوشت؟

$(-۳) \times (+۲) = (-۶)$

III. اگر علی بخواهد از نردبان پایین بیاید، در این صورت ۳ ثانیه بعد، او چند پله پایین آمده است؟ آیا می‌توان نوشت؟

$(+۳) \times (-۲) = (-۶)$

IV. فرض کنید علی از نردبان پایین می‌رود. به‌نظر شما ۳ ثانیه قبل، علی چند پله بالا بوده است؟ آیا می‌توان نوشت؟

$(-۳) \times (-۲) = (+۶)$

در توضیح بیان شده در (I) توجه دارید که :

+۳ یعنی ۳ ثانیه بعد

+۲ یعنی علی در یک ثانیه ۲ پله بالا می‌رود

در این صورت، از ضرب این دو عدد صحیح، می‌توانیم تعداد پله‌هایی را که علی بعد از سه ثانیه بالا می‌رود، به‌دست آوریم ؛ بنابراین :

+۶ یعنی تعداد پله‌هایی که بعد از ۳ ثانیه بالا می‌رود.

اکنون از شما می‌خواهیم که برابری موجود در قسمتهای (II)، (III) و (IV) را توضیح دهید.

فعالیت (۲)

هدف ما از این فعالیت، استفاده از تمثیل در کشف راه‌حلهای مناسب برای حلّ مسائل است. قرارداد زیر را می‌پذیریم :

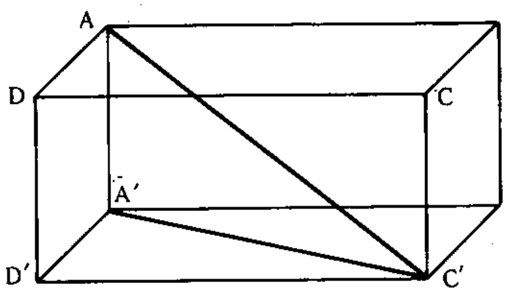
قرارداد: محسن دانش‌آموز دورهٔ راهنمایی تحصیلی است. وی مثلث قائم‌الزاویه و کار با آن را دقیقاً می‌شناسد. همچنین با معلوم بودن دو ضلع از اضلاع مثلث قائم‌الزاویه، می‌تواند ضلع سوم را حساب کند.

یکی از روزهای هفته در کلاس ریاضی، معلم ریاضی، مسألهٔ زیر را پای تخته برای بچه‌ها نوشت :

«**مسأله:** قطر یک مکعب مستطیل به ابعاد ۳، ۴ و ۵ را به‌دست آورید.»

معلم از بچه‌ها خواست که با استفاده از معلومات ریاضی‌شان که تا به حال کسب کرده‌اند، به حلّ این مسأله بپردازند.

محسن برای حلّ این مسأله، ابتدا توسط خط‌کش دقیقی، یک مکعب مستطیل را رسم کرد و یکی از قطرهای آن را نیز کشید. (شکل (۱) را ببینید.)



شکل (۱)

محسن همراه با نگاه کردن به شکل رسم شده، به‌دنبال راه‌حلّی برای حلّ مسأله داده شده بود. همچنین خطوطی فرضی در شکل مکعب رسم و در مورد اشکال پدید آمده فکر می‌کرد. در همین زمان، با رسم پاره‌خط $A'C'$ توجه محسن به مثلث $AA'C'$ جلب شد. با شباهت‌سازی بین شکل مکعب مستطیل رسم شده با کلاس درس، محسن متوجه شد که مثلث $AA'C'$ در رأس A' قائمه است. (چگونه؟) بنابراین با توجه به شناختی که محسن از مثلث قائم‌الزاویه داشت، احساس کرد که می‌تواند قطر مکعب (یعنی AC') را بیابد ؛ ولی با کمی دقت، دریافت که این کار میسّر نیست ؛ چرا که در این مثلث (یعنی $AA'C'$) تنها یک ضلع AA' معلوم است.

پیش از ادامهٔ بحث، از شما می‌خواهیم سعی کنید تمثیلهایی را که محسن از آنها استفاده کرده است، بیابید و توضیح دهید.

پس از این هدف محسن، حلّ مسألهٔ جدید و آن هم یافتن طول پاره‌خط $A'C'$ بود. اینک برای حلّ این مسألهٔ جدید، باز هم محسن می‌تواند از استدلال تمثیل استفاده کند.

آیا مثلث قائم‌الزاویه‌ای که شامل پاره‌خط $A'C'$ باشد، در شکل رسم شده وجود دارد؟ سرانجام محسن طول $A'C'$ را چگونه به‌دست می‌آورد؟

فعالیت (۳)

با نگاهی دقیق و متفکرانه به سخنان گهروار پروردگار در قرآن کریم، درمی‌یابیم که خداوند بسیاری از نکات را توسط استدلال تمثیلی برای ما روشن ساخته است. از جمله در سورهٔ «نور» آیهٔ ۳۵ خداوند متعال می‌فرماید : اللّه نور السّموات والارض....

علامهٔ طباطبایی در کتاب «تفسیر المیزان» می‌فرماید که مراد از این جمله، این است : «خدای سبحان نوری است که به‌وسیلهٔ او، آسمانها و زمین ظهور یافته‌اند.» و نیز می‌فرماید : «مراد به نور در جمله، نور خداست که از آن نور عالم منشأ می‌گیرد : نوری که هر چیزی به‌وسیلهٔ آن روشن می‌شود، با وجود هر چیزی مساوی

است و عبارت اُخریٰ آن است و این همان رحمت عامّهٔ الهیه است.» در جای دیگر می‌فرماید: «مراد به آن نور، نوری است خاص که خدای تعالی آن را تنها به مؤمنین اختصاص داده و آن، به‌طوری که از کلام استفاده می‌شود، حقیقت ایمان است.» همچنین خداوند در ادامهٔ آیهٔ (۳۵) می‌فرماید: «*مثل نوره کمشکوة فیها مصباح المصباح فی زجاجة الزجاجة کانّها کوکب درّیّ...*» بنابراین پروردگار در ادامهٔ آیهٔ شریفهٔ نور، خود را توصیف می‌کند؛ بدین‌صورت که: «مثل نور او، چون محفظه‌ای است که در آن چراغی باشد و چراغ در شیشه‌ای؛ شیشه‌هایی که گویی ستاره‌ای است درخشان...»

با مراجعه به قرآن و تفسیر المیزان، از شما می‌خواهیم تا کلیهٔ استدلالهای تمثیل به‌کار رفته در این آیه را استخراج کنید.

۱ـ۲) سؤالهای دوره‌ای

۱. یک دانش‌آموز، راه‌حلّ مسأله زیر را می داند:

مسأله: می‌خواهیم ۱۵ متر پارچه را بین سه خیاط تقسیم کنیم. به هر یک چند متر پارچه می‌رسد؟

از دانش‌آموز می‌خواهیم که مسألهٔ زیر را حل کند:

مسأله: می‌خواهیم ۱۵ شیشه شیر را بین سه خانواده به‌طور مساوی تقسیم کنیم، به هر خانواده چند شیشه شیر می‌رسد؟

آیا دانش‌آموز ما از استدلال تمثیل برای حلّ این مسأله می‌تواند استفاده کند؟ چگونگی آن را توضیح دهید.

۲. آیا گزارهٔ «کبوتر بال دارد و پرواز می‌کند» درست است؟ آیا گزارهٔ «مرغ بال دارد» درست است؟ آیا از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که مرغ پرواز می‌کند؟ آیا استدلال تمثیل در این‌جا مؤثر است؟

۳. یک معلم برای محاسبهٔ اعداد $۳۵^۲$ و $۶۵^۲$ به‌صورت زیر عمل کرده است:

$۳۵^۲: ۳\times۴=۱۲ \Rightarrow$ جواب $=۱۲۲۵$

$۶۵^۲: ۶\times۷=۴۲ \Rightarrow$ جواب $=۴۲۲۵$

آیا جوابهایی که معلم به‌دست آورده است، صحیح می‌باشد؟ آیا از راه مشابهت می‌توانید حاصل عدد $۷۵^۲$ را به‌دست آورید؟ درستی پاسخ خود را با ماشین‌حساب بررسی کنید.

۴. یک دانش‌آموز برای محاسبهٔ اعداد $(۳\frac{۱}{۲})^۲$ و $(۶\frac{۱}{۲})^۲$ به صورت زیر عمل می‌کند:

$(۳\frac{۱}{۲})^۲: ۳\times۴=۱۲ \Rightarrow$ جواب $=۱۲\frac{۱}{۴}$

$(۶\frac{۱}{۲})^۲: ۶\times۷=۴۲ \Rightarrow$ جواب $=۴۲\frac{۱}{۴}$

به روش متعارف، حاصل توانهای $(۳\frac{۱}{۲})^۲$ و $(۶\frac{۱}{۲})^۲$ را به‌دست آورده و با جوابهای دانش‌آموز مقایسه کنید. آیا جوابهایی که دانش‌آموز به‌دست آورده است، صحیح است؟ آیا به روش تمثیل می‌توانید حاصل $(۷\frac{۱}{۲})^۲$ را به‌دست آورید؟ درستی پاسخ خود را به روش متعارف محاسبهٔ کسرها بررسی کنید.

۵. آیا مشابهتی بین روشهای معلم و دانش‌آموز در سؤالهای (۳) و (۴) وجود دارد؟ توضیح دهید.

۶. آیا می‌توانید بگویید کدام‌یک از اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt[۵]{۷}$ بزرگتر است؟ با داشتن یک ماشین‌حساب تقریباً مجهز، می‌توانید به راحتی به این سؤال پاسخ دهید. ما برای پاسخ به این سؤال، ابتدا هر دو عدد را به توان (۱۰) می‌رسانیم، خواهیم داشت: $(\sqrt{۲})^{۱۰}=۲^۵=۳۲$ و $(\sqrt[۵]{۷})^{۱۰}=۷^۲=۴۹$ و چون $۳۲<۴۹$، ما نتیجه می‌گیریم که $\sqrt{۲}<\sqrt[۵]{۷}$.

اینک از طریق مشابهت، بزرگترین عدد را از بین اعداد داده شده در هر قسمت، به‌دست آورید:

آ. ($\sqrt{۲}$ و $\sqrt[۵]{۵}$)   ب. ($\sqrt[۳]{۳}$ و $\sqrt[۴]{۵}$)   ج. ($\sqrt[۷]{۷}$ و $\sqrt[۴]{۴}$)

۷. خداوند در آیهٔ (۵) از سورهٔ «جمعه» و «صف» حال آنان را که تحمل (علم) تورات کرده و خلاف آن عمل نمودند، در مثل به حماری تشبیه می‌کند. از شما می‌خواهیم که این استدلال تمثیل را که خداوند بیان فرموده است، بیشتر توضیح دهید.

۸. یک نتیجه‌گیری علمی (غیرعلمی) نادرست که بر پایهٔ استدلال تمثیل باشد، مثال بزنید.

۹. آیا روش استدلال تمثیل، یک روش علمی است؟ می‌دانید که $۲^۵>۵!$. (چرا؟) آیا از روش مشابهت می‌توان نتیجه گرفت: $۲^۳>۳!$؟ (چرا؟)

۱۰. آیا این جمله که «توسط تمثیل می‌توان گزاره‌های جدید را بیان و سپس درستی آنها را بررسی کرد.» در فعالیت (۲) دیده می‌شود؟ توضیح دهید.

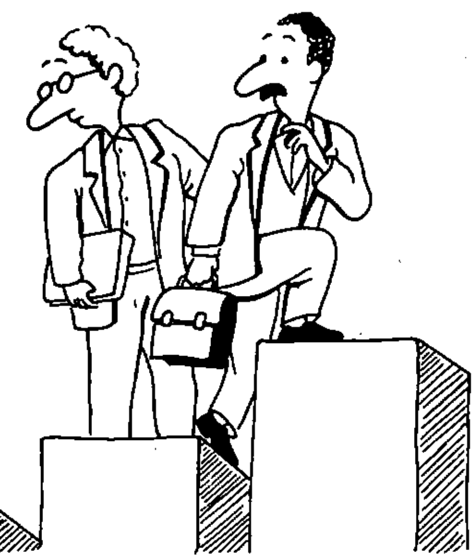
۱۱. یک دانش‌آموز از درستی برابری:

$۹۸۷۶۵۴۳۲۱\times۹=۸۸۸۸۸۸۸۸۹$

با استفاده از استدلال تمثیل، برابری زیر را نتیجه می‌گیرد:

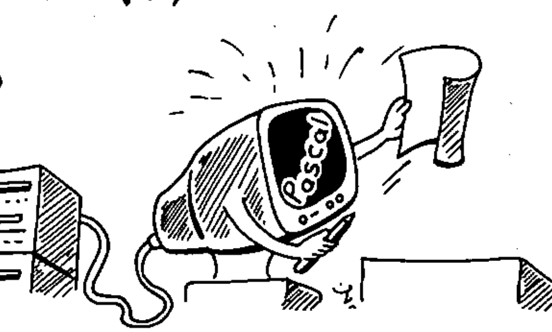
$۹۸۷۶۵۴۳۲۱\times۱۸=۷۷۷۷۷۷۷۷۷۸$

آیا نتیجه‌گیری این دانش‌آموز صحیح است؟ چرا؟



برنامه‌نویسی به زبان پاسکال (۷)

● محمّد رحیم



مقدمه

در شمارهٔ پیش ابتدا چند تابع کتابخانه‌ای و سپس دستور if را به تفصیل بیان کردیم. در این شمارهٔ نیز ابتدا چند تابع کتابخانه‌ای را معرفی کرده و سپس حلقه‌های[1] for و while را توضیح می‌دهیم.

معرفی چند تابع کتابخانه‌ای

توابع مثلثاتی sin(x)، cos(x) و arctan(x): ورودی توابع sin(x) و cos(x) زاویه برحسب رادیان است و عددی بین ۱- تا ۱ را برمی‌گردانند. ورودی تابع arctan(x) یک عدد حقیقی است و مقدار بازگشتی آن، زاویه برحسب رادیان می‌باشد.

توجه: اگر در برنامه‌ای که می‌نویسید، زوایا برحسب درجه باشند، ابتدا باید آنها را به رادیان تبدیل کرده و سپس از توابع sin(x) و cos(x) استفاده کنید.

تابع Exp(x): از این تابع برای محاسبهٔ e^x استفاده می‌شود که e عدد نپر[2] و برابر با ... ۲/۷۱۷۸ است.

تابع Ln(x): از این تابع برای محاسبهٔ لگاریتم طبیعی[3] (یا نپرین) استفاده می‌شود.

توجه: لگاریتم طبیعی دارای همان خواص لگاریتم معمولی است؛ ولی پایهٔ آن عدد نپر (e) است.

نکته: مترجم پاسکال، دارای عملگر توان (که مثلاً در زبان Basic به‌صورت ^ است) نیست و نیز تابع کتابخانه‌ای مشخصی برای محاسبهٔ یک عبارت توانی نظیر a^x ندارد. بنابراین لازم است که این نقیصه رفع شود. به محاسبات ریاضی زیر توجه کنید:

$$y = a^x \Rightarrow Lny = Lna^x$$
$$\Rightarrow Lny = xLna$$
$$\Rightarrow y = e^{xLna}$$

بنابراین با شرط $a > 0$ داریم: $a^x = e^{xLna}$

این بدان معناست که به جای محاسبهٔ a^x می‌توان e^{xLna} را محاسبه کرد و محاسبهٔ عبارت اخیر در مترجم پاسکال امکان‌پذیر است؛ چون توابع کتابخانه‌ای Exp(x) و Ln(x) موجود هستند. بنابراین دستور زیر a^x را محاسبه می‌کند:

```
y:= Exp(x*Ln(a));
```

تابع length(s): ورودی این تابع، یک رشته[4] است و این تابع طول آن را محاسبه می‌کند.

تابع random: این تابع یک عدد اتفاقی بین ۰ تا ۱ را تولید می‌کند.

تابع random(M): ورودی این تابع، عدد صحیح M است و خروجی آن یک عدد اتفاقی صحیح بین ۰ تا M می‌باشد.

تابع randomize: این تابع کتابخانه‌ای از نوع procedure است و مقدار بازگشتی ندارد و فقط فراخوانی[5] می‌شود. از این تابع کتابخانه‌ای، هنگامی استفاده می‌کنیم که تابع random (با پارامتر یا بدون پارامتر) بخواهد در درون یک حلقه قرار گیرد. لذا باید randomize را پیش از اجرای حلقه فراخوانی کنیم؛ در غیر این صورت تابع random یا random(M) در درون حلقه درست عمل نمی‌کند و همواره مقدار ثابتی را می‌دهد.

مثال (۱): برنامهٔ زیر، یک عدد اتفاقی تولید می‌کند و

در صورت برقراری شرط، عدد را گرد کرده و در خروجی چاپ می‌کند.

```
Var
    R:reali
    I:Integer;
Begin
    R:= Random * 50000.0;
    Writeln ('R = ',R:0:5);
    if(-32768 <= R)and(R <= 32767+)then
    begin
        I: = Round (R);
        Writeln('I = ',I);
    end
    else
        Writeln('out of Range').
End.
```

مثال (۲): برنامهٔ زیر، ده عدد اتفاقی بین صفر تا ۳۲۷۶۷ را یافته و در خروجی چاپ می‌کند. برای آن که ده عدد اتفاقی یکسان نباشند، از تابع کتابخانه‌ای randomize قبل از حلقه استفاده شده است.

```
Var
    I:Integer;
BEGIN
    Randomize;
    for I: = 1 To 10 Do
        Write (Random (MaxInt): 8);
    Writeln;
END.
```

توجه: در مثال فوق، از تابع کتابخانه‌ای MaxInt استفاده شده که بزرگترین مقدار صحیح، مربوط به تایپ Integer، یعنی ۳۲۷۶۷ را برمی‌گرداند.

دستورهای حلقه

دستورهای حلقه، دستورهایی هستند که یک سری فرامین را چندین بار تکرار می‌کنند. مترجم پاسکال دارای ۳ دستور حلقه به نامهای for، while و Repeat...until می‌باشد. حال، هریک از این دستورها را شرح می‌دهیم.

الف) دستور for

این دستور، یک سری فرامین را به تعداد دفعات مشخص تکرار می‌کند. شکل دستور چنین است:

```
for متغیر حلقه = : مقدار اوّلیه  To  مقدار نهایی  Do
    دستور;
```

حلقهٔ فوق‌الذکر، یک حلقهٔ افزایشی است؛ چون متغیر حلقه از یک مقدار اولیه (مقدار کوچکتر) به مقدار نهایی (مقدار بزرگتر) می‌رسد. درصورت لزوم، می‌توان حلقهٔ کاهشی هم داشت:

```
for متغیر حلقه = : مقدار نهایی  Downto  مقدار اوّلیه  Do
    دستور;
```

به نکات زیر توجه کنید:

۱. متغیر حلقه، مقدار اولیه و مقدار نهایی باید از نوع ترتیبی[۶] (نوع عددی صحیح، نوع کارکتری و...) باشند.

۲. متغیر حلقه را نباید در درون حلقه مقداردهی یا کم و زیاد کرد.

۳. دستور for همانند دستور if، فقط یک دستور را تحت پوشش قرار می‌دهد و درصورتی که بخواهیم دستورهای بیشتری تکرار شوند، باید از بلوک فرعی استفاده کنیم و دستورهای موردنظر را در داخل بلوک آوریم:

```
for متغیر حلقه = : مقدار اوّلیه  To  مقدار نهایی  Do
begin
        دستور ۱;
        دستور ۲;
           :
        دستور n;
end;
```

۴. می‌توان حلقه‌های for متداخل[۷] هم داشت.

مثال (۳): حلقهٔ زیر، عبارت test of for را ده مرتبه در خروجی چاپ می‌کند.

```
Var
    i:integer;
BEGIN
    for i: = 1 To 10 Do
        Writeln ('test of for');
END.
```

مثال (۴): برنامهٔ صفحهٔ بعد، با استفاده از حلقه‌های متداخل،

جدول ضرب ۱۰ در ۱۰ را در خروجی چاپ می‌کند.

```
Var
   i,j:integer;
BEGIN
   for i: = 1 To 10 Do
   begin
      Writeln;
   for j: = 1 To 10 Do
      Write(i*j:4);
   end;
END.
```

ب) دستور While

این دستور یک سری فرامین را تا زمان برقراری شرایط ادامه می‌دهد. شکل دستور چنین است:

While شرط Do
دستور;

به نکات زیر توجه کنید:

۱. حلقهٔ While برخلاف حلقهٔ for، دارای مقدار اولیه و نهایی نیست و فقط با شرط کنترل می‌شود.

۲. تمام مطالبی که در مورد شرط دستور if گفته شد، در این‌جا نیز صادق است.

۳. شرط حلقهٔ While می‌تواند همانند متغیر حلقه در دستور for عمل کند. در این صورت متغیر حلقه باید پیش از حلقهٔ While دارای مقدار اوّلیه باشد و نیز این متغیر باید به نحوی در داخل حلقه افزایش یا کاهش داده شود ؛ لذا باید بلوک فرعی تشکیل داد.

۴. می‌توان حلقه‌های While متداخل[8] هم داشت.

مثال (۵): مثال (۳) را با استفاده از حلقهٔ While می‌نویسیم:

```
var
   i:integer;
BEGIN
   i: = 1;
   While i< = 10 Do
   begin
      Writeln('test of While');
      Inc(i);     {i:= i+1 ;}
   end;
END.
```

مثال (۶): برنامهٔ زیر ب.م.م دو عدد m و n را محاسبه و در خروجی چاپ می‌کند.

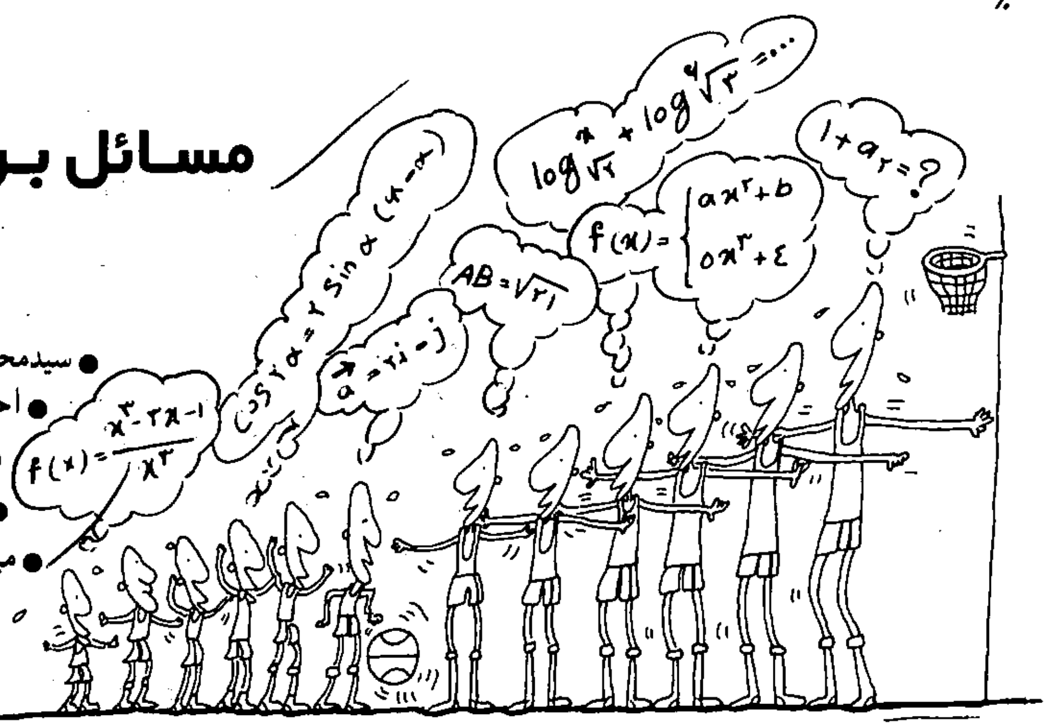
```
var
   m,n,k:Word;
BEGIN
   Readln (m,n);
   if (m=0) or (n=0) Then
      Halt (0);
   if m<n Then
   begin
      k:=m;
      m:=n;
      n:=k;
   end;
   k:=m mod n;
   While k < >  0 Do
   begin
      m:=n;
      n:=k;
      k:=m mod n;
   end;
   Writeln ('B.M.M.=',n);
END.
```

توجه: در برنامهٔ فوق، دستور Halt سبب قطع اجرای برنامه می‌شود.

واژه‌نامهٔ ریاضی و کامپیوتر

1. Loop
2. Neper → Napier
3. Natural Logarithm
4. String
5. Call
6. Ordinal
7. Nested - for
8. Nested - While

مسائل برای حل



● سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
● احمد قندهاری
● محمدهاشم رستمی
● حمیدرضا امیری
● میرشهرام صدر
● هوشنگ شرقی

ریاضیات ۲

۱. نقطهٔ $M(8m-3\ ,\ 4m+1)$، به ازای چه مقدار m روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم واقع است؟

۲. اگر $AB=\sqrt{50}$ و $A(6n-1\ ,3)$ و $B(2\ ,\ 6n)$، مقادیر n را بیابید.

۳. دو خط به معادله‌های $y=ax-1$ و $y=bx+1$ مفروض‌اند، a و b را چنان بیابید که این دو خط عمود باشند و از نقطه‌ای به طول ۱- بگذرند.

۴. معادله‌های دو قطر مربعی $4x+2y+1=0$ و $2x-4y+1=0$ است؛ فاصلهٔ مرکز مربع از خط $x+y=1$ کدام است؟

۵. به‌ازای چه مقادیری از m، دو خط به معادله‌های $4x+my=6$، و $2mx+2y=5$، متقاطع نیستند.

۶. اگر $x^4+x^2-1=0$، حاصل $(x^{10}+1)$ را بیابید.

۷. حاصل عبارت $\sqrt[3]{\dfrac{7-4\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-2)^2}}$ را بیابید.

۸. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\frac{8x}{2x-1}+\frac{16x}{4x+2}=8x$$

۹. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ $x^2+x-1=0$ باشند، حاصل عبارت $S=\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}$ را بیابید.

۱۰. مجموعهٔ جواب دستگاه نامعادله‌های زیر را بیابید.

$$\begin{cases}\dfrac{3x+2}{3}\geq\dfrac{3x+1}{2}\\[2mm] \dfrac{3x}{2}-\dfrac{2}{3}>\dfrac{3x-2}{6}\end{cases}$$

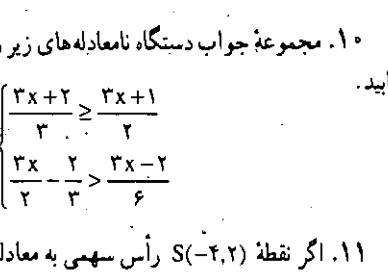
۱۱. اگر نقطهٔ $S(-4,2)$ رأس سهمی به معادلهٔ $y=x^2+ax+b$ باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۱۲. حاصل عبارت $T=(\sin x+\cos x)^4-(\sin x-\cos x)^4$ رابیابید.

هندسهٔ ۲

۱. تعداد قطرهای یک چند ضلعی ۵۴ است. مجموع زاویه‌های این چند ضلعی را تعیین کنید.

۲. در مثلث ABC، AD نیمساز زاویهٔ درونی A است. اندازهٔ ضلعهای این مثلث را تعیین کنید.

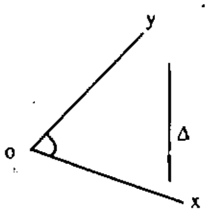


۳. سه نقطهٔ A، B و C چنان داده شده‌اند که $AB=2a-1$، $AC=12$ و $BC=a-2$ است.

الف. مقدار a را چنان تعیین کنید که این سه نقطه روی یک خط راست باشند.

ب. حدود a را چنان بیابید که این سه نقطه رأسهای یک مثلث باشند.

۴. زاویهٔ xOy و امتداد Δ داده شده است. پاره‌خطی به طول l به موازات امتداد Δ بر دو ضلع این زاویه متکی کنید.

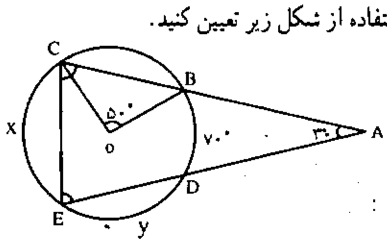


۵. خط Δ، دایرهٔ C(O,R) و نقطهٔ A داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایرهٔ (C) بیابید که قرینه‌اش نسبت به نقطهٔ A، روی خط Δ واقع شود.

۶. دایرهٔ C(O,3) داده شده است. از نقطهٔ P که به فاصلهٔ ۶ سانتیمتر از مرکز این دایره قرار دارد مماس PT را بر دایره رسم کرده‌ایم. طول این مماس را تعیین کنید.

۷. ثابت کنید که در هر چند ضلعی، هر ضلع از مجموع ضلعهای دیگر کوچکتر است.

۸. اندازهٔ x و y و اندازهٔ زاویهٔ ACE را با استفاده از شکل زیر تعیین کنید.



۹. اندازهٔ a و b را چنان بیابید که نقطهٔ $A' = (a+b-2\ ,\ 3a-3)$، تصویر نقطهٔ $A = (3a-b-2\ ,\ a+2b+4)$ تحت تبدیل $T(x,y) = (x+2\ ,\ 2y-3)$ باشد.

۱۰. سه نقطهٔ $A = (2,-3)$، $B = (3,5)$ و $C = (-1,2)$ رأسهای مثلث ABC داده شده‌اند. تصویر این نقطه‌ها را تحت تبدیل $R(x,y) = (-y,x)$ پیدا کنید. طول ضلعهای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ شیب ضلع AB و شیب ضلع $A'B'$ را محاسبه و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ریاضی ۴

۱. جمله پنجم یک تصاعد حسابی ۱۶ و جمله هشتم آن ۲۵ است. مجموع ده جمله اول این تصاعد را به‌دست آورید.

۲. قدر نسبت تصاعد هندسی را به‌دست آورید که در آن $S_{12} = 17S_6$ است.

۳. نقاط $A(1,2)$ و $B(-1,3)$ مفروض‌اند. به کمک خواص بردارها روی محور xها نقطه‌ای مانند C به‌دست آورید که زاویه $A\hat{C}B$ مساوی $45°$ باشد.

۴. بردارهای $\vec{a} = 2i-j$ و $\vec{b} = 3i+2j$ و $\vec{c} = 2i-3j$ مفروض‌اند. مقدار $[(\vec{a}.\vec{b})\vec{c}].[(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}]$ را به‌دست آورید.

۵. با حروف کلمه یادگار چند کلمه (با معنا و یا بی‌معنا) ۵ حرفی بدون نقطه (بدون حق تکرار حرف) می‌توان نوشت؟

۶. می‌خواهیم از بین ۲۰ زوج ساکن یک مجتمع آپارتمانی یک هیأت مدیرهٔ ۷ نفری انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد، اگر قید شود که هیچ زنی بدون همسر خود نمی‌تواند عضو هیأت مدیره شود؟

۷. ۶ دانش‌آموز که دو نفر آنها برادر یکدیگرند، در یک ردیف ایستاده‌اند و عکس می‌اندازند. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که :

الف) دو برادر در تصویر کنار هم باشند.

ب) دو برادر در دو طرف بقیه افراد قرار داشته باشند.

۸. می‌خواهیم از بین ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم و ۶ دانش‌آموز سال سوم دو دانش‌آموز را برای شرکت در مسابقه علمی منطقه اعزام کنیم. همچنین تمام دانش‌آموزان سال اول و دو نفر از دانش‌آموزان سال دوم و نصف دانش‌آموزان سال سوم از دانش‌آموزان ممتاز هستند. مطلوب است تعیین احتمال آن‌که هر دو دانش‌آموز منتخب سال سومی یا ممتاز باشند.

۹. اولاً درستی تساوی $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos(60-\alpha)\cos(60+\alpha)$ را برای هر زاویه α ثابت کنید، ثانیاً مقدار $A = \cos 20 \cdot \cos 40 \cdot \cos 80$ را به‌دست آورید.

۱۰. مجموعه جواب معادله مثلثاتی $tg2x\,tg4x = 1$ را به‌دست آورید و تعداد جوابهای این معادله را که در بازهٔ $[0,2\pi]$ هستند، مشخص کنید.

جبر و احتمال

۱. اولاً، به کمک استدلال برگشتی ثابت کنید برای هر عدد حقیقی و نامنفی x، نامساوی $x+1 \ge 2\sqrt{x}$ درست است. ثانیاً، به کمک این موضوع و با استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی مثبت بوده و در رابطهٔ $a_1a_2...a_n = 1$ صدق کنند، آن‌گاه :

$$(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n) \ge 2^n$$

۲. به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی ثابت کنید :

$$\frac{1}{(1)(3)}+\frac{1}{(2)(4)}+...+\frac{1}{[(n)(n+2)]} < \frac{n}{n+1}$$

۳. ۵ عدد حقیقی و متمایز مفروض‌اند. ثابت کنید برای لااقل دو عدد حقیقی x و y از میان آنها داریم :

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1$$

۴. ثابت کنید هرگاه برای مجموعه عددهای A ، B و C داشته باشیم : $(A\cap B)\cup C = A\cap(B\cup C)$، آن‌گاه $C \subseteq A$

۵. ثابت کنید رابطهٔ R که در زیر معرفی شده است، یک رابطه هم‌ارزی است و کلاسهای هم‌ارزی آن را مشخص کنید :

$$\begin{cases} R:\mathbb{R}^2 \Rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y)R(z,t) \Leftrightarrow (x-z) = 3(y-t) \end{cases}$$

۶. رقم سمت راست $17^{17} - 22^{22}$ را به دست آورید.

۷. در یک کیسه سه مهره سفید و دو مهره قرمز و یک مهره سیاه وجود دارد. دو مهره را به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. فضای نمونه این تجربه و نیز پیشامد تصادفی آن‌که دو مهره همرنگ باشند را بنویسید.

۸. یک سکه سالم را ده بار پرتاب کرده‌ایم. مطلوب است تعیین احتمال آن که :

الف) دقیقاً ۵ بار رو بیاید.

ب) اقلاً ۶ بار رو بیاید.

۹. از بین مستطیلهایی که ابعاد آنها کوچکتر از ۴ واحد است، یکی را به تصادف انتخاب کرده‌ایم، احتمال آن‌که محیط آن بزرگتر از ۶ باشد را به‌دست آورید.

۱۰. اگر شانس وقوع پیشامد A و عدم وقوع پیشامد B، ۰/۳ باشد و شانس وقوع A یا B ۰/۷ باشد، شانس عدم وقوع B را به‌دست آورید.

حسابان ۲

۱. تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+b & ,\ x \ge 1 \\ 3x^2+4 & ,\ x < 1 \end{cases}$$

در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است، a و b را بیابید.

۲. سوی تقعر و نقاط عطف منحنی تابع به معادله $y = \frac{2x}{x^2+1}$ را بررسی و تعیین کنید.

۳. نمودار تابع به معادله $y = Arcsin(x+1)$ را رسم کنید.

۴. نزدیکترین فاصله منحنی به معادله $y^2 = 4x+13$ را از مبدأ مختصات بیابید.

۵. نمودار تابع به معادله $y = \log\frac{1+x}{1-x}$ را رسم کنید.

۶. اگر $\log^x_{\sqrt{3}} + \log^x_{\sqrt[4]{3}} + \log^x_{\sqrt[6]{3}} = 12$، x را بیابید.

۷. تناوب اصلی تابع به معادله $f(x) = \tan 2x.\cot 2x$ را بیابید.

۸. با استفاده از دومین قضیه بنیادی، انتگرالهای مُعین، حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{3}} -(\sin^2 x - 2\cos^2 x)dx$ را بیابید.

۹. سطح محصور بین منحنی به معادله $y = 4\sqrt{x}$ و محور xها و خط $x = 4$ را محاسبه کنید.

۱۰. مطلوب است محاسبه

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x^2+1)+\sqrt{1-x^2}}{(x^2+1).\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱. تابع با ضابطه $f(x)=\lfloor x\rfloor - x$ را در بازه $[-1,3]$ رسم کنید، تعداد نقاط اکسترمم نسبی و مطلق آن را مشخص کنید.

۲. اگر $0<x<1$ ثابت کنید:

$$x-\frac{x^3}{3}<\text{Arctan}\,x$$

۳. تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}x+2 & , \quad x<-1\\ x^2-2x & , \quad -1\le x\le 2\end{cases}$ را رسم کنید و نقاط بحرانی آن را بیابید.

۴. از سیمی به طول l یک‌بار یک مربع و یک بار یک دایره می‌سازیم. ثابت کنید، مساحت دایره بیشتر از مساحت مربع است.

۵. در حل معادله $x^3-3x-1=0$ اگر $x_1=2$، به روش نیوتن x_2 را بیابید.

۶. مطلوب است رسم جدول و منحنی نمایش تغییرات تابع با ضابطه $y=\frac{-x}{(x-2)^2}$.

۷. Cهای قضیه رل را در تابع با ضابطه $f(x)=4x^3-16x$ در بازه $[-2,2]$ بیابید.

۸. ثابت کنید سوی تقعر منحنی به معادله $f(x)=\text{Ln}(x)$ به سمت پایین است و از آن‌جا نتیجه بگیرید اگر $0<a<b$، آن‌گاه:

$$\text{Ln}\frac{a+b}{2}>\frac{\text{Ln}a+\text{Ln}b}{2}$$

۹. مطلوب است محاسبه $\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$

۱۰. ثابت کنید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(n+1)^2}+\frac{n}{(n+2)^2}+\frac{n}{(n+3)^2}+\dots+\frac{n}{(n+n)^2}\right)=\frac12$$

۱۱. به کمک حدّ مجموع بالاریمان ثابت کنید:

$$\int_0^2 2x^2dx=\frac{16}{3}$$

۱۲. مطلوب است محاسبه $\int\frac{x^5+x+1}{x^2+1}dx$.

ریاضی عمومی ۲

۱. معادله خط مماس بر منحنی تابع با ضابطهٔ $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$ در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

۲. اگر $f(2)=-3$ و $f'(2)=4$ و $g(x)=\frac1x f(x)$، در این صورت $g'(2)$ را به‌دست آورید.

۳. ضرایب a، b و c را چنان تعیین کنید که تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ در $(1,7)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد و نمودار تابع از نقطه $(2,-2)$ بگذرد.

۴. نقاط ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^4-8x^2+16$ را روی بازهٔ $[0,3]$ به‌دست آورید.

۵. نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^3-3x-2}{x^2}$ را رسم کنید.

۶. ثابت کنید محل برخورد مجانبهای تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$، مرکز تقارن این تابع است.

۷. ثابت کنید منحنی با معادلهٔ $\begin{cases}x=x_0+a\cos t\\ y=y_0+b\sin t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ بیضی است. $(a>b>0)$

۸. در صورتی که $A(2,6)$ و $A'(2,-6)$ رأسهای حقیقی یک هذلولی و خروج از مرکز آن $e=\frac53$ باشد، معادلهٔ هذلولی را بنویسید.

۹. ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x](x-2)$ را در فاصلهٔ $[0,4]$ رسم کنید، سپس حاصل انتگرال زیر را تعیین کنید:

$$\int_0^4[x](x-2)dx$$

۱۰. حاصل انتگرالهای زیر را به‌دست آورید:

(الف) $\int\frac{7x^{13}dx}{\sqrt{x^7-1}}$ (ب) $\int\frac{\sin^6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}}$

ریاضیات گسسته

۱. اگر درخت T تنها دارای یک رأس درجهٔ ۵ و دو رأس درجهٔ ۳ و یک رأس درجهٔ ۲ و x رأس از درجهٔ یک باشد، x را پیدا کنید.

۲. گراف همبند G با p رأس و q یال مفروض است، ثابت کنید تعداد یالهایی که باید حذف شود تا گراف حاصل به یک درخت تبدیل شود از رابطهٔ $m=q-p+1$ به‌دست می‌آید.

۳. ثابت کنید اگر R یک رابطهٔ بازتابی روی مجموعهٔ متناهی A باشد ROR نیز روی A یک رابطه بازتابی خواهد بود.

۴. مطلوب است تعداد شمارهٔ شناسنامه‌های چهار رقمی که در آنها هر یک از ارقام ۲، ۴ و ۶ حداقل یک‌بار وجود داشته باشند.

۵. عدد طبیعی و سه رقمی k را دو بار کنار هم نوشته‌ایم تا عدد شش رقمی t به‌دست آید، اگر t را بر عدد ۱۱ و حاصل تقسیم را بر ۱۳ و حاصل تقسیم را بر ۷ تقسیم کنیم عدد ۲۴۱ به‌دست می‌آید، k را به‌دست آورید.

۶. عدد ۱۳۲ در مبنای a به‌صورت ۲۴۶ نمایش داده می‌شود، a را به‌دست آورید.

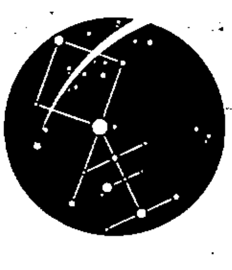
۷. باقیمانده تقسیم 1380^{2001} را بر عدد ۷ به‌دست آورید.

۸. اگر $p\ge q\ge 5$ و p و q اعداد اول باشند ثابت کنید عدد (p^2-q^2) همواره بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

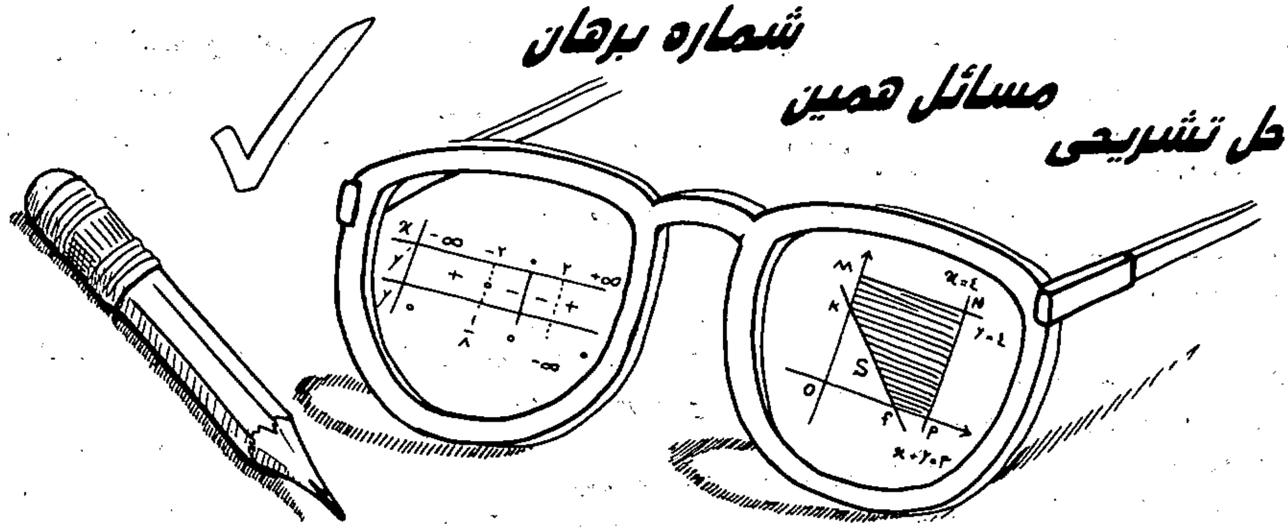
۹. دو عدد طبیعی متمایز بیابید که حاصلضرب آنها مربع کامل بوده و کوچکترین مضرب مشترکشان ۴۸ باشد.

۱۰. سکه‌ای را که یک طرف آن عدد ۲ و طرف دیگرش عدد ۳ حک شده است، سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی x را مجموع اعداد ظاهر شده در سه پرتاب تعریف کنیم، جدول توزیع احتمال را تشکیل دهید.

۱۱. سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم. اگر رو بیاید تاسی را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید سکه را دوبار دیگر پرتاب می‌کنیم، اولاً فضای نمونه‌ای این پدیده را تشکیل دهید، ثانیاً احتمال آن را حساب کنید که سکهٔ فقط یک‌بار پشت بیاید.



حل تشریحی مسائل همین شماره برهان



حل مسائل ریاضیات ۲

۱. معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ اول و سوم $y=x$ است. پس، هرنقطه به مختصات $M(x,x)$ روی نیمساز ناحیه اول و سوم واقع است:

$M(8m-3,4m+1)$: $8m-3=4m+1$;

$4m=4$; $\boxed{m=1}$

۲. می‌دانیم فاصلهٔ دو نقطه به مختصات $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$، چنین است:

$AB=\sqrt{50}$

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$;

$50=(2-6n+1)^2+(6n-3)^2$;

$2(6n-3)^2=50$; $(6n-3)^2=25$;

$6n-3=\pm 5$;

$6n=3\pm 5$; $n=\frac{3\pm 5}{6}$,

$\boxed{n=\frac{4}{3}}$; $\boxed{n=-\frac{1}{3}}$

۳. مختصات نقطه‌ای به طول ۱- در معادلهٔ هر دو خط صدق می‌کند و همچنین حاصلضرب ضریب زاویهٔ دو خط برابر ۱- است، پس:

$$\begin{cases} y=a(-1)-1 \\ y=b(-1)+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-b=-2 \\ ab=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow ab=(b-2)b=b^2-2b=-1$;

$b^2-2b+1=0$; $(b-1)^2=0$;

$\boxed{b=1}$, $\boxed{a=-1}$

۴. ابتدا محلّ برخورد دو قطر مربع (مرکز مربع) را از حلّ دستگاه زیر تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} 4x+2y+1=0 \\ 2x-4y+1=0 \end{cases} ;\ x=\frac{-3}{10} ,\ y=\frac{1}{10} ;$$

$O'(\frac{-3}{10},\frac{1}{10})$

فاصلهٔ مرکز مربع (O') از خط $x+y=1$ را d می‌نامیم، پس:

$$O'D=d=\frac{\left|\frac{-3}{10}+\frac{1}{10}-1\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{5\sqrt{2}} ;$$

$\boxed{d=\frac{3\sqrt{2}}{5}}$

۵. دو خط $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ با شرط $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}\neq\frac{c'}{c}$، متقاطع نیستند:

$$\begin{cases} 4x+my=6 \\ 2mx+2y=5 \end{cases};\ \frac{2m}{4}=\frac{2}{m}\neq\frac{5}{6} ;$$

$m^2=4$; $\boxed{m=\pm 2}$

۶. با فرض $x^2+x^4=1$، خواهیم داشت:

$x^{10}=x^8.x^2=(x^4)^2.x^2=(1-x^2)^2.x^2$

$=(1-2x^2+x^4).x^2$

$=(1-2x^2+1-x^2).x^2=(2-3x^2).x^2$

$=2x^2-3x^4=2x^2-3(1-x^2)$

$=5x^2-3$; $\boxed{x^{10}+1=5x^2-2}$

۷. با توجه به قوانین رادیکالها:

$$\sqrt[4]{\frac{7-4\sqrt{3}}{(\sqrt{3}-2)^2}}=\frac{\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt[4]{3+4-4\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2}}=\frac{\sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}=1$$

۸. حوزهٔ تعریف x، چنین است:

$x\in\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

با توجه به حوزهٔ تعریف، معادله را ساده می‌کنیم:

$\frac{8x}{2x-1}+\frac{16x}{4x+2}=8x$; $2(2x-1)(2x+1)$

$\left[\frac{8x}{2x-1}+\frac{16x}{4x+2}=8x\right]$;

$16x(2x+1)+16x(2x-1)=16x(4x^2-1)$;

$16x(2x+1+2x-1-4x^2+1)=0$;

$16x(-4x^2+4x+1)=0$;

$16x=0$; $\boxed{x_1=0}$, $4x^2-4x-1=0$;

$x=\frac{2\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

پس معادله دارای سه ریشهٔ حقیقی است.

$\boxed{x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$, $\boxed{x_3=\frac{1-\sqrt{2}}{2}}$

۹. با توجه به معادلهٔ مفروض، یعنی $x^2+x-1=0$ ، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}x_1+x_2=-1\\x_1x_2=-1\end{cases};\quad S=\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}$$

$$S=\frac{(-1)^3-3(-1)(-1)}{(-1)^3}=\frac{-1-3}{-1}=\frac{-4}{-1}=4;$$

$\boxed{S=4}$

۱۰. از حلّ هر یک از نامعادله‌ها، نتیجه می‌شود:

$6(\frac{3x+2}{3}\ge\frac{3x+1}{2});\quad 6x+4\ge 9x+3;$

$3x\le 1;\quad x\le\frac{1}{3}$

$6(\frac{3x}{2}-\frac{2}{3}>\frac{3x-2}{6});\quad 9x-4>3x-2;$

$6x>2;\quad x>\frac{1}{3}$

اشتراک مجموعهٔ جوابهای نامعادله‌ها، مجموعه تهی $(\varnothing)$ است. پس دستگاه جواب ندارد.

۱۱. معادلهٔ سهمی $y=x^2+ax+b$ را به شکل استاندارد $y-\frac{4b-a^2}{4}=(x+\frac{a}{2})^2$ می‌نویسیم، پس از مقایسه S با رأس این سهمی:

$S(-4,2):-\frac{a}{2}=-4;\quad \boxed{a=8}$.

$\frac{4b-a^2}{4}=2;\quad \boxed{b=18}$

۱۲. با استفاده از اتحاد مزدوج و اختصار لازم:

$T=2(2\sin 2x)=4\sin 2x$

حل مسأله‌های هندسهٔ ۲

۱. تعداد قطرهای یک n ضلعی برابر $\frac{n(n-3)}{2}$ است. پس داریم:

$\frac{n(n-3)}{2}=54\Rightarrow n^2-3n-108=0$

$\Rightarrow n=12, n=-9<0$

پس چند ضلعی موردنظر، ۱۲ ضلعی است. از طرفی داریم:

$(2n-4)$ قائمه = مجموع زاویه‌های داخلی n ضلعی

$2\times12-4$ = مجموع زاویه‌های داخلی ۱۲ ضلعی $\Rightarrow$ قائمه ۲۰ =

۲. چون AD نیمساز زاویهٔ درونی A است، پس داریم:

$\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{x+1}{x}=\frac{x+3}{x+1}\Rightarrow x^2+3x$

$=x^2+2x+1$

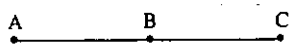
$\Rightarrow x=1\Rightarrow AB=4\ ,\ AC=2\ ,$

$BC=2x+1=3$

۳. با توجه به این که باید $\begin{cases}2a-1>0\\a-2>0\end{cases}$ یا $\begin{cases}a>\frac{1}{2}\\a>2\end{cases}$ و در نتیجه $a>2$ باشد:

الف) سه حالت وجود دارد:

۱. نقطهٔ B بین دو نقطهٔ A و C باشد.

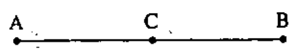


در این صورت داریم:

$AB+BC=AC\Rightarrow 2a-1+a-2=12$

$\Rightarrow 3a=15\Rightarrow a=5$

۲. نقطهٔ C بین دو نقطهٔ A و B باشد.



در این صورت داریم:

$AC+BC=AB\Rightarrow 12+a-2=2a-1$

$\Rightarrow a=11$

۳. نقطهٔ A، بین دو نقطهٔ B و C باشد.



در این صورت داریم:

$AB+AC=BC\Rightarrow 2a-1+12=a-2\Rightarrow a$

$=-13<0\Rightarrow$ این حالت ممکن نیست

ب) باید دستگاه نامساوی $\begin{cases}AB+BC>AC\\AC+BC>AB\\AB+AC>BC\end{cases}$

و یا، نامساوی مضاعف زیر برقرار باشد.

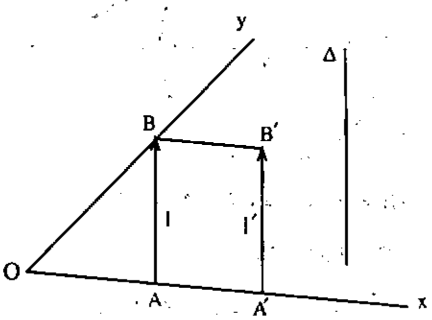
$|AB-BC|<AC<AB+BC$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{cases}2a-1+a-2>12\\12+a-2>2a-1\\2a-1+12>a-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>5\\a<11\\a>-13\end{cases}$$

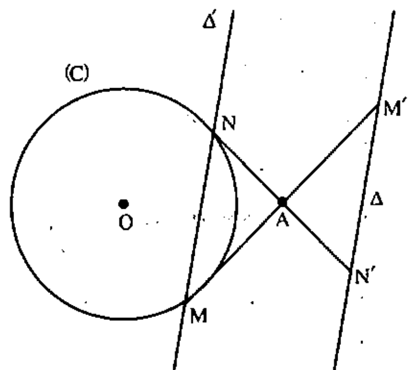
با توجه به این که $a>2$ باید باشد. پس جواب مشترک، $5<a<11$ است.

۴. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و پاره‌خط AB به‌طول l و موازی امتداد Δ جواب مسأله باشد. در این صورت می‌توان گفت که نقطهٔ B واقع بر Oy انتقال‌یافتهٔ نقطهٔ A واقع بر Ox به‌اندازهٔ بردار $\vec{AB}$ (با طول l و امتداد موازی Δ) است، پس برای حل مسأله با استفاده از انتقال چنین عمل می‌کنیم:



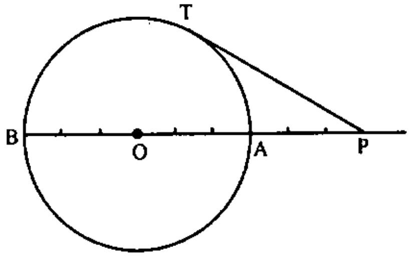
ضلع Ox از زاویهٔ xOy را به‌اندازهٔ بردار AB انتقال می‌دهیم. برای این کار از نقطهٔ اختیاری A′ واقع بر Ox بردار $\vec{A'B'}$ را مساوی l و موازی امتداد Δ رسم می‌کنیم. آن‌گاه از نقطهٔ B′ خطی موازی Ox رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ B قطع کند. از B خطی موازی Δ (یا A′B′) رسم می‌کنیم تا Ox را در نقطهٔ A قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.

۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و نقطهٔ M واقع بر دایرهٔ (C) جواب مسأله باشد. از M به A وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط Δ را در نقطهٔ M′ قطع کند. دو نقطهٔ M و M′ نسبت به نقطهٔ A



بازتاب (قرینهٔ) مرکزی یکدیگرند. پس نقطهٔ M روی قرینهٔ مرکزی خط Δ نسبت به نقطهٔ A است؛ یعنی این نقطه محل برخورد قرینهٔ مرکزی خط Δ نسبت به نقطهٔ A با دایرهٔ (C) می‌باشد. بنابراین برای حل مسأله، خط Δ′ قرینهٔ مرکزی خط Δ نسبت به نقطهٔ A را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این خط با دایرهٔ (C) یعنی نقطه‌های M و N جواب مسأله‌اند، و به تعداد نقطه‌های برخورد Δ′ با دایرهٔ (C)، مسأله دارای جواب است.

۶. قطری از دایره را که از نقطهٔ P می‌گذرد، یعنی قطر PAB را رسم می‌کنیم. داریم:



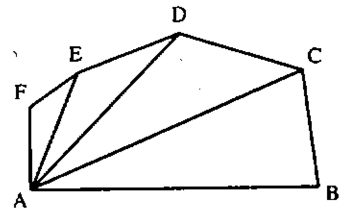
$OP=۶\ ,\ OB=OA=۳\Rightarrow AP=۶-۳=۳$

$PB=PO+OB=۶+۳=۹$

$PT^{۲}=PA.PB\Rightarrow PT^{۲}=۳\times ۹=۲۷$

$\Rightarrow PT=۳\sqrt{۳}$

۷. چند ضلعی ABCDE...N و به‌عنوان مثال شش ضلعی ABCDEF را در نظر می‌گیریم. اگر بزرگترین ضلع آن AB باشد، از A به رأسهای غیر مجاورش یعنی C، D و E وصل می‌کنیم. در مثلثهای ABC، ACD، ADE و AEF داریم:



$AB<BC+AC$ (۱)

$AC<CD+AD$ (۲)

$AD<DE+AE$ (۳)

$AE<EF+AF$ (۴)

از جمع کردن عضوهای متناظر نامساویهای (۱)، (۲)، (۳) و (۴) داریم:

$AB<BC+CD+DE+EF+FA$

۸. داریم:

زاویهٔ مرکزی، $B\hat{O}C=\widehat{BC}\Rightarrow \widehat{BC}=۵۰^\circ$

زاویهٔ برونی $\hat{A}=\frac{\widehat{CE}-\widehat{BD}}{۲}\Rightarrow ۳۰^\circ=\frac{x-۷۰^\circ}{۲}$

$\Rightarrow x=۱۳۰^\circ$

$x+y+\widehat{BD}+\widehat{BC}=۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۳۰^\circ+y+۷۰^\circ+۵۰^\circ=۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow y=۱۱۰^\circ$

زاویهٔ محاطی، $A\hat{E}C=\frac{\widehat{CD}}{۲}=\frac{۷۰^\circ+۵۰^\circ}{۲}=۶۰^\circ$

۹. با توجه به تبدیل داده شده داریم:

$$\begin{cases}(۳a-b-۲)+۲=a+b-۲\\ ۲(a+۲b+۴)-۳=۳a-۳\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۲a-۲b=-۲\\ -a+۴b=-۸\end{cases}$$

$\Rightarrow a=-۴\ ,\ b=-۳$

۱۰. با توجه به تبدیل $R(x,y)=(-y,x)$ داریم:

$A=(۲,-۳)\Rightarrow A'=(+۳,۲)$

$B=(۳,۵)\Rightarrow B'=(-۵,۳)$

$C=(-۱,۲)\Rightarrow C'=(-۲,-۱)$

$AB=\sqrt{(۳-۲)^{۲}+(۵+۳)^{۲}}=\sqrt{۶۵},$

$AC=\sqrt{(۲+۱)^{۲}+(-۳-۲)^{۲}}=\sqrt{۳۴}$

$BC=\sqrt{(۳+۱)^{۲}+(۵-۲)^{۲}}=۵$

$A'B'=\sqrt{(۳+۵)^{۲}+(۲-۳)^{۲}}=\sqrt{۶۵},$

$A'C'=\sqrt{(۳+۲)^{۲}+(۲+۱)^{۲}}=\sqrt{۳۴},$

$B'C'=\sqrt{(-۵+۲)^{۲}+(۳+۱)^{۲}}=۵$

$\Rightarrow A'B'=AB=\sqrt{۶۵}, A'C'=AC=\sqrt{۳۴},$

$B'C'=BC=۵$

پس تبدیل داده شده، یک ایزومتری است.

$m/AB=\frac{۵+۳}{۳-۲}=۸,\ m/A'B'=\frac{۳-۲}{-۵-۳}$

$=-\frac{۱}{۸}$

$m/AB\neq m/A'B'$ است. بنابراین تبدیل داده شده شیب خطها را حفظ نمی‌کند.

نکتهٔ ۱. داریم:

$m/AB.m/A'B'=۸(-\frac{۱}{۸})=-۱$

پس $A'B'\perp AB$ است. همچنین می‌توان ثابت کرد که $A'C'\perp AC$ و $B'C'\perp BC$ است.

نکتهٔ ۲. تبدیل داده شده یک دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویهٔ ۹۰° است.

حل مسائل ریاضی ۴

۱. با توجه به مفروضات مسأله می‌توان نوشت:

$$a_{۵}=۱۶\ ,\ a_{۸}=۲۵\Rightarrow\begin{cases}a_{۱}+۴d=۱۶\\ a_{۱}+۷d=۲۵\end{cases}$$

$\Rightarrow ۳d=۹\Rightarrow d=۳,\ a_{۱}=۴$

$S_n=\frac{n}{۲}\left[۲a_{۱}+(n-۱)d\right]\Rightarrow S_{۱۰}$

$=۵\left[۸+(۱۰-۱)\times ۳\right]=۱۷۵$

۲.

$S_{۱۲}=۱۷S_{۶}\Rightarrow a_{۱}\frac{q^{۱۲}-۱}{q-۱}=۱۷\times a_{۱}\frac{q^{۶}-۱}{q-۱}\Rightarrow$

$q^{۱۲}-۱=۱۷(q^{۶}-۱)\Rightarrow (q^{۶}-۱)(q^{۶}+۱)$

$=۱۷(q^{۶}-۱)\Rightarrow$

$q^{۶}+۱=۱۷\Rightarrow q^{۶}=۱۶\Rightarrow$

$q=\pm\sqrt[۶]{۱۶}=\pm\sqrt[۳]{۴}$

۳. فرض می‌کنیم نقطهٔ $C(x,۰)$ نقطهٔ مطلوب باشد، در این صورت داریم:

$\overrightarrow{CA}=(۱-x,۲)\ ,\ \overrightarrow{CB}=(-۱-x,۳)$

و اگر $A\hat{C}B=\alpha$ فرض شود، به کمک ضرب نقطه‌ای بردارها می‌توان نوشت:

$$\cos\alpha=\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}|.|\overrightarrow{CB}|}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{(۱-x)(-۱-x)+۶}{\sqrt{(۱-x)^{۲}+۴}\times\sqrt{(-۱-x)^{۲}+۹}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{x^{۲}+۵}{\sqrt{x^{۲}-۲x+۵}\times\sqrt{x^{۲}+۲x+۱۰}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow\frac{(x^{۲}+۵)^{۲}}{(x^{۲}-۲x+۵)(x^{۲}+۲x+۱۰)}=\frac{۱}{۲}$$

$\Rightarrow ۲x^{۴}+۵۰+۲۰x^{۲}=x^{۴}+۲x^{۳}+۱۰x^{۲}-$

$۲x^{۳}-۴x^{۲}-۲۰x+۵x^{۲}+۱۰x+۵۰$

$\Rightarrow x^{۴}+۹x^{۲}+۱۰x=۰$

$\Rightarrow x(x^{۳}+۹x+۱۰)=۰$

$\Rightarrow x=۰$ یا $x^{۳}+۹x+۱۰=۰$

$\Rightarrow (x^{۳}+۱)+(۹x+۹)=۰$

$\Rightarrow (x+۱)(x^{۲}-x+۱)+۹(x+۱)=۰$

$\Rightarrow (x+۱)(x^{۲}-x+۱۰)=۰$

$\Rightarrow x=-۱$ یا $x^{۲}-x+۱۰=۰.$

$\Delta=۱-۴۰<۰$

بنابراین دو نقطهٔ $C_{۱}$ و $C_{۲}$ به طولهای صفر و ۱- دارای ویژگی فوق هستند.

۴. $\vec{a} = 2i - j\ ,\ \vec{b} = 3i + 2j \Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b}$

$= 6 - 2 = 4,$

$(\vec{a}\,.\,\vec{b})\,\vec{c} = 4\,\vec{c} = 8i - 12j$

$\vec{a} = 2i - j\ ,\ \vec{c} = 2i - 3j \Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{c} = 4 + 3$

$= 7 \Rightarrow (\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b} = 7\,\vec{b}$

$= 21i + 14j \Rightarrow \left[(\vec{a}\,.\,\vec{b})\,\vec{c}\right].\left[(\vec{a}\,.\,\vec{c})\,\vec{b}\right]$

$= (8i - 12j)(21i + 14j)$

$= 168 - 168 = 0$

۵. پنج جای خالی را می‌خواهیم پر کنیم. جاهای خالی در واقع مکان حروف کلمهٔ پنج حرفی هستند. اولین حرف سمت راست را به پنج طریق و دومین حرف را به چهار طریق و سومین حرف را به سه طریق و چهارمین حرف را به دو طریق می‌توان نوشت. ولی پنجمین حرف را نیز به دو طریق می‌توان نوشت زیرا «ی» وقتی در آخر واقع شود، بدون نقطه می‌باشد، بنابراین تعداد کلمات برابر است با:

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$

۶. به چهار روش کلّی می‌توان با حفظ شرط فوق هیأت مدیره را تشکیل داد.

الف) همه اعضای هیأت مدیره مرد باشند، در این صورت تعداد روشهای انتخاب برابر است با:

$C(20,7)$

ب) یک زوج (زن و شوهر) و ۵ مرد در هیأت مدیره باشند که در این صورت تعداد روشهای انتخاب اعضا برابر است با:

$C(10,1) \times C(19,5)$

ج) دو زوج و ۳ مرد در هیأت مدیره باشند و در این حالت تعداد انتخابها برابر است با:

$C(10,2) \times C(18,3)$

د) سه زوج و یک مرد در هیأت مدیره باشند. در این حالت تعداد انتخابها برابر است با:

$C(10,3) \times C(17,1)$

بنابراین تعداد کل روشهای انتخاب اعضا با شرط فوق برابر است با:

$C(20,7) + C(10,1) \times C(19,5) + C(10,2) \times C(18,3) + C(10,3) \times C(17,1)$

۷. برای قسمت (الف) به دو برادر یک مکان می‌دهیم و بقیهٔ افراد هر کدام یک جا می‌گیرند. پس تعداد اعضای پیشامد مطلوب برابر است با تعداد جایگشتهای ۵ شیء ضرب در !۲ (زیرا دو برادر می‌توانند کنار هم جابه‌جا شوند) و تعداد اعضای فضای نمونه هم برابر است با تعداد جایگشتهای ۶ شیء (یعنی تعداد همهٔ عکسها، بدیهی است که در این‌جا جابه‌جایی اشیاء مهم است) بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5!\times 2!}{6!} = \frac{5!\times 2}{6\times 5!} = \frac{1}{3}$$

در قسمت (ب) چون جای دو برادر در طرفین است، لذا بقیه به !۴ طریق می‌توانند جابه‌جا شوند و دو برادر نیز می‌توانند جای خود را عوض کنند؛ لذا می‌توان نوشت:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4!2!}{6!} = \frac{4!\times 2}{6\times 5\times 4!} = \frac{1}{15}$$

۸. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{\binom{6}{2}}{\binom{15}{2}} + \frac{\binom{9}{2}}{\binom{15}{2}} - \frac{\binom{3}{2}}{\binom{15}{2}}$$

$$= \frac{15 + 36 - 3}{105} = \frac{48}{105} = \frac{16}{35}$$

۹. $4\cos\alpha\cos(60-\alpha)\cos(60+\alpha)$

$= 4\cos\alpha(\cos 60\cos\alpha + \sin 60\sin\alpha)$

$(\cos 60\cos\alpha - \sin 60\sin\alpha)$

$= 4\cos\alpha(\cos^2 60\cos^2\alpha - \sin^2 60\sin^2\alpha)$

$= 4\cos\alpha(\frac{1}{4}\cos^2\alpha - \frac{3}{4}\sin^2\alpha)$

$= \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha$

$= \cos^3\alpha - 3(1 - \cos^2\alpha)\cos\alpha$

$= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha,\ \alpha = 20^\circ$

$\Rightarrow 4\cos 20\cos(60-20)\cos(60+20)$

$= \cos 60^\circ \Rightarrow 4\cos 20\cos 40\cos 80 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow A = \cos 20\cos 40\cos 80 = \frac{1}{8}$

۱۰. $\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}4x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}4x = \frac{1}{\operatorname{tg}2x}$

$= \operatorname{cotg}2x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - 2x)$

$\Rightarrow \operatorname{tg}4x = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow 4x = k\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$

$\Rightarrow 6x = k\pi + \frac{\pi}{2}\ ,\ x = \frac{k\pi}{6} + \frac{\pi}{12}\ ,$

$k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 11$

تعداد جوابهای بین ۰ و 2π معادله فوق ۱۲ جواب می‌باشد.

حل مسائل جبر و احتمال

۱. $x + 1 \ge 2\sqrt{x} \Rightarrow (x+1)^2 \ge 4x$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 \ge 4x$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 \ge 0 \Rightarrow (x-1)^2 \ge 0$

نامساوی آخر همواره صحیح است و همهٔ مراحل برگشت‌پذیرند (چرا؟). اکنون براساس نامساوی اخیر برای عددهای مثبت a_1 و a_2 و ... و a_n می‌توان نوشت:

$a_1 + 1 \ge 2\sqrt{a_1},\ a_2 + 1 \ge 2\sqrt{a_2}, \ldots, a_n + 1 \ge 2\sqrt{a_n} \Rightarrow$

$(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1) \ge 2^n \sqrt{\underbrace{a_1a_2\ldots a_n}_{1}}$

$\Rightarrow (a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_n+1) \ge 2^n$

۲. $n = 1:\ \frac{1}{1\times 3} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

$n = k:\ \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{2\times 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+2)} < \frac{k}{k+1}$ (فرض استقرا)

$n = k:\ \frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{2\times 4} + \ldots + \frac{1}{(k+1)(k+3)} < \frac{k+1}{k+2}$ (حکم استقرا)

برای اثبات حکم از روی فرض، کافی است به طرفین فرض جمله $\frac{1}{(k+1)(k+3)}$ را اضافه کنیم:

$$\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{2\times 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(k+3)} < \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+3)}$$

اکنون برای رسیدن به حکم کافی است ثابت کنیم:

$$\frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+3)} < \frac{k+1}{k+2}$$

و برای اثبات نامساوی اخیر نیز از روش برگشتی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{k(k+3)+1}{(k+1)(k+3)} < \frac{k+1}{k+2} \Rightarrow \frac{k^2+3k+1}{(k+1)(k+3)} < \frac{k+1}{k+2}$$

$\Rightarrow (k^2+3k+1)(k+2) < (k+1)^2(k+3) \Rightarrow$

$k^3+2k^2+3k^2+6k+k+2 < k^3+3k^2+$
$2k^2+6k+k+3 \Rightarrow 2<3$

تمام مراحل برگشت‌پذیرند (به‌عنوان تمرین انجام دهید).

۳. هر عدد حقیقی را می‌توان تانژانت یک زاویه معیّن در بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ در نظر گرفت (چرا؟) لذا ۵ عدد فوق را می‌توان تانژانتهای ۵ زاویهٔ نامعین α_1، α_2، α_3، α_4 و α_5 همگی متعلق به بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ دانست.

اکنون اگر بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ را به چهار بازهٔ $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$، $[-\frac{\pi}{4}, 0)$، $[0, \frac{\pi}{4})$ و $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ افراز کنیم، طبق اصل لانه کبوتری لااقل دو زاویه از ۵ زاویه فوق متعلق به یکی از این چهار بازه هستند و در نتیجه تفاضل زاویه بزرگتر از زاویه کوچکتر بین ۰ و $\frac{\pi}{4}$ می‌باشد، بنابراین برای دو تا از این زوایا که آنها را α_i و α_j می‌نامیم. می‌توان نوشت: $0 < \alpha_i - \alpha_j < \frac{\pi}{4}$ و در نتیجه:

$0 < \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1+tg\alpha_i tg\alpha_j} < 1 \Leftarrow 0 < tg(\alpha_i - \alpha_j) < 1$ و

با فرض $tg\alpha_i = x$ و $tg\alpha_j = y$ خواهیم داشت:

$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 1$.

۴. از فرض مسأله داریم: $(A\cup C)\cap(B\cup C) = A\cap(B\cup C)$ حال با فرض $B\cup C = X$ داریم: $(A\cup C)\cap X = A\cap X$ و یا: $(A\cap X)\cup(C\cap X) = (A\cap X)$ و از آنجا به دست می‌آید: $(C\cap X)\subseteq(A\cap X)$ و بنابراین:

$C\cap(B\cup C)\subseteq A\cap(B\cup C)$,

$C\cap(B\cup C) = C$ (قانون جذب)

$\Rightarrow C\subseteq A\cap(B\cup C) \Rightarrow C\subseteq(A\cap X)$

$\Rightarrow C\subseteq A$

۵. $(x,y)R(x,y): (x-x) = 3(y-y)$:

$0 = 3\times 0$ (خاصیت انعکاسی)

$(x,y)R(z,t) \Rightarrow (x-z) = 3(y-t) \Rightarrow (z-x) = 3(t-y) \Rightarrow (z,t)R(x,y)$ (خاصیت تقارنی)

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)R(z,t)\\(z,t)R(m,n)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases}(x-z)=3(y-t)\\(z-m)=3(t-n)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-z = 3y-3t\\ z-m = 3t-3n\end{cases}\Rightarrow$$

$x-m = 3y-3n = 3(y-n)$

$\Rightarrow (x,y)R(m,n)$ خاصیت تعدی

چون رابطه فوق سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را دارد، بنابراین یک رابطهٔ هم‌ارزی است. کلاس هم‌ارزی عضو معین (α,β) برابر است با:

$(\alpha,\beta)R(x,y)\Rightarrow \alpha - x = 3(\beta-y)$

$\Rightarrow x-3y = \alpha-3\beta$

$[(\alpha,\beta)] = \{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}, x-3y=\alpha-3\beta\}$

بنابراین دسته‌های هم‌ارزی این رابطه، دسته خطوطی موازی با شیب $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

۶. رقم سمت راست هر عدد باقیمانده تقسیم آن عدد بر ۱۰ می‌باشد.

$22 \overset{10}{\equiv} 2 \Rightarrow 22^{22} \overset{10}{\equiv} 2^{22}$, $2^{10} = 1024 \overset{10}{\equiv} 4$

$\Rightarrow 2^{20}\overset{10}{\equiv}16$,

$2^{22}\overset{10}{\equiv}64\overset{10}{\equiv}4 \Rightarrow 2^{22}\overset{10}{\equiv}4$ (I)

$17\overset{10}{\equiv}7\Rightarrow 17^2\overset{10}{\equiv}49\overset{10}{\equiv}-1\Rightarrow 17^{16}\overset{10}{\equiv}1$

$\Rightarrow 17^{17}\overset{10}{\equiv}17 \Rightarrow 17^{17}\overset{10}{\equiv}7$ (II)

(I) , (II) $\Rightarrow 22^{22} - 17^{17} \overset{10}{\equiv} 4-7 = -3 \overset{10}{\equiv}7$

بنابراین رقم سمت راست $22^{22} - 17^{17}$ مساوی ۷ است.

۷. اگر مهره‌های قرمز را با R_1 و R_2 و مهره‌های سفید را با W_1، W_2 و W_3 و مهره سیاه را با B نمایش دهیم، فضای نمونه انتخاب دو مهره برابر است با:

$S = \{(R_1,R_2), (R_1,W_1), (R_1,W_2),$
$(R_1,W_3), (R_1,B), (R_2,W_1), (R_2,W_2),$
$(R_2,W_3), (R_2,B), (W_1,W_2),$
$(W_1,W_3), (W_1,B),$
$(W_2,W_3), (W_2,B), (W_3,B)\}$

و تعداد اعضای S برابر است با: $\binom{6}{2} = 15$. پیشامد تصادفی همرنگ بودن دو مهره نیز به صورت زیر نوشته می‌شود:

$A = \{(R_1,R_2), (W_1,W_2), (W_1,W_3),$
$(W_2,W_3)\}$

۸. الف) تعداد اعضای فضای نمونه برابر است با 2^{10} (در هر پرتاب دو حالت ممکن است) و تعداد اعضای پیشامد مطلوب $\binom{10}{5}$ می‌باشد (چرا؟).

بنابراین: $P(A) = \frac{\binom{10}{5}}{2^{10}}$

ب) مانند مثال قبل عمل می‌کنیم و مجموع احتمالهای آن را به‌دست می‌آوریم که شش بار یا هفت‌بار یا هشت یا نه و یا ده بار سکه رو بیاید:

$$P(B)=\frac{\binom{10}{6}}{2^{10}}+\frac{\binom{10}{7}}{2^{10}}+\frac{\binom{10}{8}}{2^{10}}+\frac{\binom{10}{9}}{2^{10}}+\frac{\binom{10}{10}}{2^{10}}$$

۹. اگر طول و عرض مستطیلهای فوق را x و y فرض کنیم، فضای نمونه این پیشامد برابر است با:

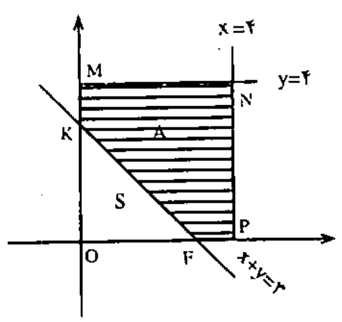
$S = \{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}, 0<x,y<4\}$

و پیشامد مطلوب برابر است با:

$A = \{(x,y)|(x,y)\in S, 2x+2y>6$ یا
$x+y>3\}$

و با رسم نمودارهای A و S احتمال مزبور را از تقسیم مساحتهای دو ناحیه فوق به‌دست می‌آوریم:

$$P(A) = \frac{S_{KMNPF}}{S_{OMNP}} = \frac{16-\frac{9}{2}}{16} = \frac{23}{32}$$



۱۰. براساس مفروضات مسأله داریم: $P(A-B)=0/3$ و $P(A\cup B)=0/7$ و $P(B')$ را می‌خواهیم. به کمک قضایای احتمال داریم:

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0/7\\P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0/3\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow P(B) = 0/4$

$\Rightarrow P(B') = 1-P(B) = 0/6$

حل مسائل حسابان ۲

۱. برای آن که این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، باید این تابع در ۱ مشتق‌پذیر باشد، پس اوّل باید این تابع در ۱ پیوسته باشد.

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=f(1)$$

$$a+b=3+4=a+b\Rightarrow a+b=7 \qquad (1)$$

پس تابع باید در ۱ مشتق‌پذیر باشد؛ یعنی:

$$f'_+(1)=f'_-(1)$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{ax^3+b-a-b}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{a(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=3a=f'_+(1)$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{3x^2-4-3+4}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{3(x^2-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{3(x-1)(x+1)}{x-1}=6=f'_-(1)$$

$$3a=6\Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$a+b=7\Rightarrow 2+b=7\Rightarrow \boxed{b=5}$$

۲. $y=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow y'=\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

$$\Rightarrow y''=\frac{-4x(3-x^2)}{(x^2+1)^3}=0$$

طولهای نقاط عطف $x=0\ ,\ \pm\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y''		$-$		$+$		$-$		$+$	
انحنای y		$\frown$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\smile$		$\frown$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\smile$	

نقاط عطف $\left|\begin{matrix}-\sqrt{3}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right.$ ، $\left|\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right.$ ، $\left|\begin{matrix}\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right.$

۳. $y=\text{Arcsin}(x+1)$

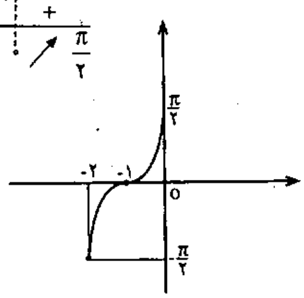
$$-1\le x+1\le 1\Rightarrow -2\le x\le 0\Rightarrow D_f=[-2,0]$$

$$y'_x=\frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}>0$$

اگر $-2<x<0$ ، تابع صعودی اکید است.

$$x=-1\Rightarrow y=\text{Arcsin}\,0=0$$

x	-2		-1		0
y'		$+$	⋮	$+$	
y	$-\frac{\pi}{2}$	↗	⋮	↗	$\frac{\pi}{2}$



۴. فرض می‌کنیم $A\left|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right.$ روی منحنی به معادلهٔ $y^2=4x+13$ باشد.

$$OA=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+4x+13}$$

$$=\sqrt{\underbrace{(x+2)^2}_{Min=0}+9}\Rightarrow MinOA=\sqrt{9}=3$$

۵. $y=\log\frac{1+x}{1-x}$

$$\frac{1+x}{1-x}>0\Rightarrow x=-1\ ,\ 1\ \Rightarrow D_f=(-1,1)$$

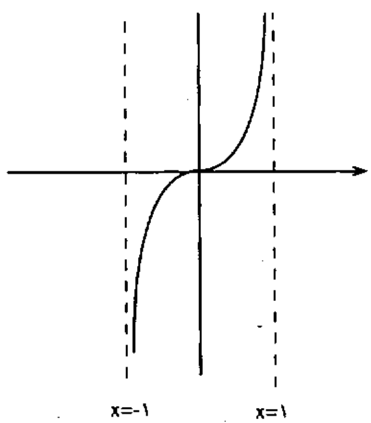
تابع صعودی اکید است

$$y'_x=\frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}}\log e=\frac{2}{1-x^2}\log e>0$$

$$x\to-1^+\Rightarrow y\to-\infty$$

$$x\to1^-\Rightarrow y\to+\infty$$

x	-1		0		1
y'		$+$	⋮	$+$	
y	$-\infty$		⋮		$+\infty$



۶. $\log_{\sqrt{3}}^{x}+\log_{\sqrt[4]{3}}^{x}+\log_{\sqrt[6]{3}}^{x}=12$

فرمول: $\log_b^a=\log_{b^2}^{a^2}=\log_{b^3}^{a^3}=\dots=\log_{b^p}^{a^p}$

$$\log_{\sqrt{3}}^{x}=\log_3^{x^2}$$

$$\log_{\sqrt[4]{3}}^{x}=\log_3^{x^4}$$

$$\log_{\sqrt[6]{3}}^{x}=\log_3^{x^6}$$

$$\Rightarrow \log_3^{x^2}+\log_3^{x^4}+\log_3^{x^6}=12$$

$$\Rightarrow \log_3^{x^{12}}=12$$

$$x^{12}=3^{12}\Rightarrow \boxed{x=3}$$

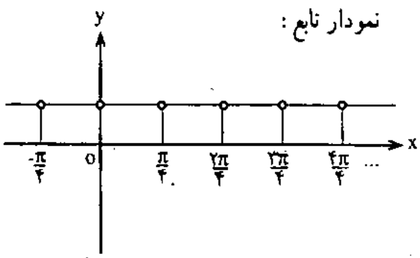
۷. $f(x)=\frac{\sin2x}{\cos2x}+\frac{\cos2x}{\sin2x}$

$$=\frac{2\sin2x\cos2x}{2\sin2x.\cos2x}=\frac{\sin4x}{\sin4x}=1$$

یا $\sin4x\ne0\Rightarrow 4x\ne k\pi\Rightarrow x\ne\frac{k\pi}{4}$

$$x\ne\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\dots\Rightarrow T=\frac{\pi}{4}$$

نمودار تابع:



۸. $-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin^2x-2(1-\sin^2x))dx$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(3\sin^2x-2)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\frac{3}{2}(1-\cos2x)-2)dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\cos2x)dx$$

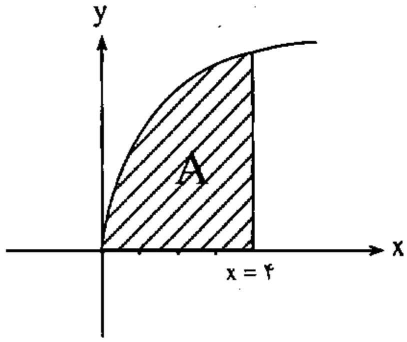
$$=(+\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\sin2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=+\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{+4\pi+9\sqrt{3}}{24}$$

۹. $y=4\sqrt{x}$

$$A=\int_0^4 4\sqrt{x}\,dx=4\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$A=\left(4\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)_0^4=\frac{8}{3}(4)^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}(2)^3=\frac{64}{3}$$



۱۰.
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{(x^2+1)+\sqrt{1-x^2}}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^2+1}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}dx+$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=(\text{Arcsin}\,x+\text{Arctan}\,x)_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\text{Arcsin}\frac{\pi}{4}+\text{Arctan}\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$$

حل مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱. $f(x)=\lfloor x\rfloor-x \quad x\in[-1,3]$

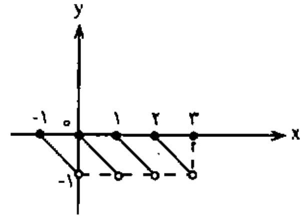
$-1\le x<0\Rightarrow\lfloor x\rfloor=-1\Rightarrow f(x)=-1-x$

$0\le x<1\Rightarrow\lfloor x\rfloor=0\Rightarrow f(x)=-x$

$1\le x<2\Rightarrow\lfloor x\rfloor=1\Rightarrow f(x)=1-x$

$2\le x<3\Rightarrow\lfloor x\rfloor=2\Rightarrow f(x)=2-x$

$x=3\Rightarrow f(3)=3-3=0$



این تابع در نقاط ۱-، ۰، ۱، ۲ و ۳ ماکزیمم مطلق و در نقاط ۰، ۱ و ۲ ماکزیمم نسبی است.

۲. فرض می‌کنیم $f(x)=x-\frac{x^3}{3}-\text{Arctan}\,x$ ، داریم:

$$f'(x)=1-x^2-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1-x^4-1}{1+x^2}$$

$$=\frac{-x^4}{1+x^2}\Rightarrow f'(x)<0\ ,\ 0<x<1$$

این تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در $(0,1)$ نیز پیوسته است.

$$f(0)=0\ ,\ f(1)=1-\frac{1}{3}-\frac{\pi}{4}<0$$

پس وقتی $0<x<1$ ، $f(x)<0$

$$f(x)<0\Rightarrow x-\frac{x^3}{3}-\text{Arctan}\,x<0$$

$$\Rightarrow x-\frac{x^3}{3}<\text{Arctan}\,x$$

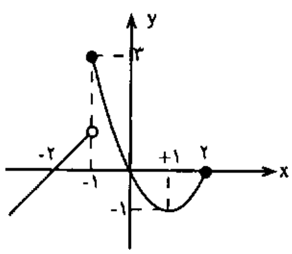
۳. $f'(x)=2x-2=0\Rightarrow x=1\in[-1,2]$

$f(1)=-1\ ,\ f'(1)=0$

$f(-1)=3\ ,\ f'(-1)$ وجود ندارد

$f(2)=0\ ,\ f'(2)$ وجود ندارد

اعداد ۱-، ۱ و ۲ طولهای نقاط بحرانی‌اند.



۴. در مورد مربع داریم:

ضلع مربع = x

$l=4x\Rightarrow x=\frac{l}{4}$

مساحت مربع = $x^2=\frac{l^2}{16}$

در مورد دایره:

شعاع دایره = R

$l=2\pi R\Rightarrow R=\frac{l}{2\pi}$

مساحت دایره = $\pi R^2=\pi\times\frac{l^2}{4\pi^2}=\frac{l^2}{4\pi}$

$\pi<4\Rightarrow 4\pi<16\Rightarrow\frac{1}{4\pi}>\frac{1}{16}$

$\Rightarrow\frac{l^2}{4\pi}>\frac{l^2}{16}\Rightarrow$ مساحت مربع < مساحت دایره

۵. $f(x)=x^3-3x-1$

$f'(x)=3x^2-3\ ,\ x_1=2$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\ :\ x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2=2-\frac{f(2)}{f'(2)}=2-\frac{1}{9}=\frac{17}{9}$$

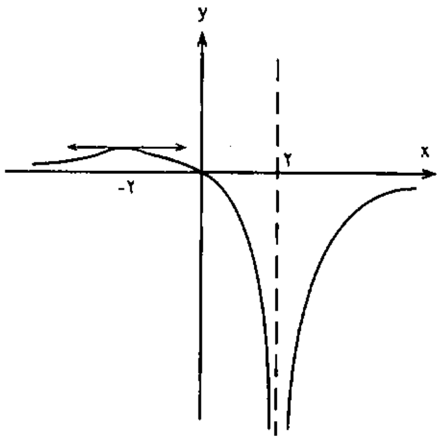
۶. $y=\frac{-x}{(x-2)^2}$

$y\to\infty\Rightarrow x=2$ مجانب قائم

$x\to\pm\infty\Rightarrow y=0$ مجانب افقی

$$y'=\frac{x+2}{(x-2)^3}=0\Rightarrow x=-2\ ,\ x=0\Rightarrow y=0$$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+		−		−	‖	+	
y	0	↗	$\frac{1}{8}$	↘		↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	0



۷. بازهٔ $[-2,2]$ را به دو زیربازهٔ $[0,2]$ و $[-2,0]$ تبدیل می‌کنیم و داریم:

$f(-2)=f(0)=0\ ,\ f(0)=f(2)=0$

این تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است، پس در بازه‌های $[0,2]$ و $[-2,0]$ هم پیوسته و در بازه‌های $(0,2)$ و $(-2,0)$ مشتق‌پذیر است.

$$f'(x)=12x^2-16=0\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}=C_1\ ,\ C_2$$

عدد $\frac{2}{\sqrt{3}}$ در بازهٔ $(0,2)$ و عدد $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ در بازهٔ $(-2,0)$ است.

۸. $f(x)=\text{Ln}(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$,

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

پس سوی تقعّر منحنی به طرف پایین است. قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x)=Lnx$ را درنظر می‌گیریم.

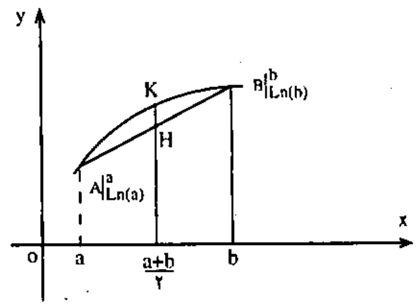
با توجه به شکل داریم:

$$y_H = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{Ln(a)+Ln(b)}{2}$$

$$y_K = f(\frac{a+b}{2}) = Ln(\frac{a+b}{2})$$

با توجه به شکل: $y_K > y_H$

$$\Rightarrow Ln\frac{a+b}{2} > \frac{Ln(a)+Ln(b)}{2}$$



۹. هوپیتال تابع: $\lim_{x\to 0^+}\frac{2x\sin|x|}{3x^2} \sim \lim_{x\to 0^+}\frac{2x|x|}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

۱۰.

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{n}{n^2(1+\frac{2}{n})^2} + \frac{n}{n^2(1+\frac{3}{n})^2} + \cdots + \frac{n}{n^2(1+\frac{n}{n})^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^2} + \frac{1}{(1+\frac{3}{n})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\frac{n}{n})^2}\right) \quad , \quad f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + \cdots + f(\frac{n}{n})\right)$$

$$= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$= (\frac{-1}{1+x})\Big|_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

۱۱.

$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \geq 0 \ , \ 0 \leq x \leq 2$

بازهٔ $[0,2]$ را به n زیربازهٔ مساوی افراز می‌کنیم، $\Delta x = \frac{2}{\pi}$.

$0 \quad 1(\Delta x) \quad 2(\Delta x) \quad \cdots \quad (i-1)\Delta x \quad i\Delta x \quad \cdots \quad 2$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{i-1} \quad x_i \quad \cdots \quad x_n$

در بازه کلی $[x_{i-1} \ , \ x_i]$ ماکزیمم مطلق تابع f، $f(x_i)$ است.

$$f(u_i) = f(x_i) = f(i\Delta x) = f(\frac{2i}{n}) = \frac{8i^2}{n^2}$$

$$\int_0^2 2x^2dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{8i^2}{n^2}\times\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sim \lim_{n\to\infty}\frac{16(2n^3)}{6n^3} = \frac{16}{3}$$

۱۲. $\int\frac{x^5+x+1}{x^2+1}dx$

$x^5+x+1 \ | \ x^2+1$ ؛ خارج قسمت: $x^3 - x$ ؛ باقیمانده: $2x+1$

$$\frac{x^5+x+1}{x^2+1} = x^3 - x + \frac{2x+1}{x^2+1}$$

$$= x^3 - x + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\int\frac{x^5+x+1}{x^2+1}dx = \int x^3dx - \int xdx + \int\frac{2x}{x^2+1}dx + \int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$\int\frac{x^5+x+1}{x^2+1} = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + Ln(x^2+1) + \text{Arctan}\,x + C$$

حل مسائل ریاضی عمومی ۲

۱. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+1} ; y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2}$

$m = y'(1) = 0$

$x = 1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{1}}{(1+1)} = \frac{1}{2} ; A(1,\frac{1}{2})$

معادله خط مماس: $(y - \frac{1}{2}) = 0(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

۲. $g'(x) = (\frac{1}{x})'f(x) + (\frac{1}{x})f'(x)$

$$g'(x) = \frac{-f(x)}{x^2} + \frac{f'(x)}{x}$$

$$g'(2) = \frac{-f(2)}{(2)^2} + \frac{f'(2)}{2} = \frac{-(-3)}{4} + \frac{4}{2} = \frac{11}{4}$$

۳. $f(x) = ax^2 + bx + c; \ f'(x) = 2ax + b$

چون تابع در (۱،۷) ماکزیمم نسبی دارد، بنابراین داریم:

$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \qquad (1)$

$f(1) = 7 \Rightarrow a + b + c = 7 \qquad (2)$

چون نمودار تابع از نقطهٔ (۲،-۲) می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در f صدق می‌کند؛ یعنی:

$f(2) = -2 \Rightarrow 4a + 2b + c = -2 \qquad (3)$

با استفاده از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳)، ضرایب a، b و c را به‌دست می‌آوریم:

$$-1\times\begin{cases}a+b+c=7\\4a+2b+c=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-a-b-c=-7\\4a+2b+c=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3a + b = -9$$

$$\begin{cases}3a+b=-9\\2a+b=0\end{cases} \Rightarrow a=-9, b=18, c=-2$$

۴. ابتدا نقاط بحرانی f را در فاصله $[0,3]$ به‌دست می‌آوریم:

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$$\Rightarrow\begin{cases}x = 0 \in [0,3] & \text{نقطه بحرانی}\\ x = 2 \in [0,3] & \text{نقطه بحرانی}\\ x = -2 \notin [0,3] & \text{غیرقابل قبول}\end{cases}$$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 16$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = 0$

$x = 3 \Rightarrow f(3) = 25$

با مقایسه $f(0)$، $f(2)$ و $f(3)$ داریم:

ماکزیمم مطلق $Max\{16,0,25\} = 25$

می‌نیمم مطلق $Min\{16,0,25\} = 0$

۵. $f(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2} ; D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

مجانب افقی $y=1$; $\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y\to 1\end{cases}$

مجانب قائم $x=0$; $\begin{cases}y\to\pm\infty\\ x\to 0\end{cases}$

$y=0\Rightarrow x^3-3x-2=0$

$\Rightarrow (x^3-x)-(2x+2)=0$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1)-2(x+1)=0$

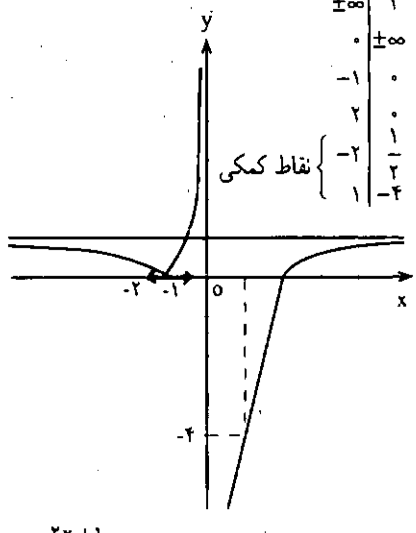
$\Rightarrow (x+1)(x^2-x-2)=0\Rightarrow x=-1\ ,\ x=2$

$f'(x)=\frac{6x+6}{x^4}=0\Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
f'		−		−		+	‖	+		+		+	
f	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-4	↗	0	↗	1

x	y
$\pm\infty$	1
0	$\pm\infty$
-1	0
2	0
-2	$\frac{1}{2}$
1	-4

(نقاط کمکی: -2 و 1)



.۶ $y=\frac{2x+1}{x-1}$

مجانب افقی $\begin{cases}x\to\pm\infty\\ y\to 2\end{cases}\Rightarrow y=2$

مجانب قائم $\begin{cases}y\to\pm\infty\\ x\to 1\end{cases}\Rightarrow x=1$

بنابراین محل برخورد مجانبها، نقطه $A(1,2)$ است. اکنون برای این که ثابت کنیم، نقطهٔ A مرکز تقارن منحنی است، ابتدا مبدأ مختصات را به نقطه A منتقل می‌کنیم، سپس با تبدیل $X\to -X$ و $Y\to -Y$ ملاحظه می‌کنیم که ضابطهٔ تابع f تغییر نخواهد کرد، بنابراین نقطهٔ A مرکز تقارن منحنی است:

$\begin{cases}X=x-\alpha\\ Y=y-\beta\end{cases}$; $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y-2\end{cases}$; $\begin{cases}x=X+1\\ y=Y+2\end{cases}$

$Y+2=\frac{2(X+1)+1}{(X+1)-1}\Rightarrow Y=\frac{3}{X}$

$\begin{cases}X\to -X\\ Y\to -Y\end{cases}\Rightarrow -Y=\frac{3}{-X}\Rightarrow Y=\frac{3}{X}$

.۷ $\begin{cases}x=x_0+a\cos t\Rightarrow \frac{x-x_0}{a}=\cos t\\ y=y_0+b\sin t\Rightarrow \frac{y-y_0}{b}=\sin t\end{cases}$

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$

$$\Rightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ بیضی افقی به مرکز (x_0,y_0) است.

.۸ چون $A'A\parallel y'y$ ، پس هذلولی قائم است و معادله آن به‌صورت $\frac{(y-\beta)^2}{a^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}=1$ است. مرکز هذلولی یعنی نقطه V وسط پاره‌خط $A'A$ است، بنابراین:

$V\begin{cases}\alpha=\frac{2+2}{2}=2\\ \beta=\frac{6+(-4)}{2}=1\end{cases}$; $A'A=2a$

$\Rightarrow \sqrt{(2-2)^2+(-4-6)^2}=2a\Rightarrow a=5$

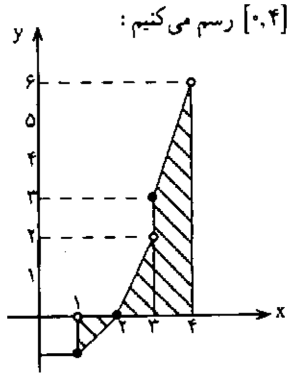
$e=\frac{c}{a}\Rightarrow \frac{5}{3}=\frac{c}{5}\Rightarrow c=\frac{25}{3}$

$a^2+b^2=c^2\Rightarrow b^2=c^2-a^2=\frac{625}{9}-25$

$\Rightarrow b=\frac{20}{3}$

$$\frac{(y-1)^2}{25}-\frac{(x-2)^2}{\frac{400}{9}}=1$$

.۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x](x-2)$ را در فاصلهٔ $[0,4]$ رسم می‌کنیم:



$0\le x<1\Rightarrow [x]=0\Rightarrow y=0$

$1\le x<2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow y=x-2;$

x	1	2
y	−1	0

$2\le x<3\Rightarrow [x]=2\Rightarrow y=2(x-2);$

x	2	3
y	0	2

$3\le x<4\Rightarrow [x]=3\Rightarrow y=3(x-2);$

x	3	4
y	3	6

$$\int_0^4[x](x-2)dx=\int_0^1[x](x-2)dx+\int_1^2[x](x-2)dx+\int_2^3[x](x-2)dx+\int_3^4[x](x-2)dx$$

$$=0+\left(\frac{-1\times 1}{2}\right)+\frac{1\times 2}{2}+\frac{3+6}{2}\times 1=5$$

.۱۰ الف.

$$\int\frac{7x^{13}dx}{\sqrt{x^7-1}}=\int(x^7-1)^{-\frac{1}{2}}\times 7x^{13}dx$$

$\begin{cases}u=x^7-1\Rightarrow x^7=u+1\\ du=7x^6dx\end{cases}$

با جایگزینی رابطه‌های بالا در مسأله، خواهیم داشت:

$$\int(x^7-1)^{-\frac{1}{2}}\times x^7\times 7x^6dx=$$

$$\int u^{-\frac{1}{2}}(u+1)du=\int u^{\frac{1}{2}}du+\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$=\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}(x^7-1)\sqrt{x^7-1}+2\sqrt{x^7-1}+c$$

ب.

$\begin{cases}u=\sin\sqrt[3]{x}\\ du=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x}dx\Rightarrow \frac{\cos\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3du\end{cases}$

بنابراین داریم:

$$\int\frac{\sin^6\sqrt[3]{x}\cos\sqrt[3]{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}}=$$

$\int \sin^{۶}\sqrt[۳]{x} \times \frac{\cos\sqrt[۳]{x}dx}{\sqrt[۳]{x^{۲}}}$

$= \int u^{۶} \times ۳du = \frac{۳}{۷}u^{۷} + c = \frac{۳}{۷}\sin^{۷}\sqrt[۳]{x} + c$

$= \frac{-۱}{۵}\cot^{۵} x + \frac{۱}{۳}\cot^{۳} x - \cot x - x + c$

حل مسائل ریاضیات گسسته

۱. اگر درخت T از مرتبهٔ p و اندازهٔ q باشد همواره داریم $p = q + ۱$ یا $q = p - ۱$. از طرفی تعداد رأسهای این درخت طبق فرض برابر است با:

$p = ۱ + ۲ + ۱ + x \Rightarrow q = (۴ + x) - ۱$

طبق قضیه مجموع درجه‌های رأسهای هر گراف برابر با $۲q$ می‌باشد، پس:

$۵ + ۲ \times ۳ + ۲ + x \times ۱ = ۲[(۴ + x) - ۱]$

$\Rightarrow ۱۳ + x = ۶ + ۲x \Rightarrow x = ۷$

۲. فرض می‌کنیم m یال از گراف G حذف شود تا G به‌درخت تبدیل شود. بنابراین با توجه به‌رابطه $p = q + ۱$ در درخت داریم:

$p = (q - m) + ۱ \Rightarrow m = q - p + ۱$

۳. اگر ماتریس مجاورت رابطهٔ R را $M(R)$ بنامیم، می‌دانیم $M^{۲} = M(ROR)$ و برای این که ثابت کنیم ROR خاصیت بازتابی دارد کافی است ثابت کنیم درآیه‌های روی قطر اصلی $M^{۲}$ همگی برابر ۱ می‌باشند، حال اگر فرض کنیم $M = [a_{ij}]$ و $M^{۲} = [b_{ij}]$، در این صورت داریم:

$b_{ii} = a_{i۱} \odot a_{۱i} \oplus a_{i۲} \odot a_{۲i} \oplus \ldots \oplus a_{ii} \odot a_{ii} \oplus \ldots \oplus a_{ip} \odot a_{pi}$

می‌دانیم رابطهٔ R بازتابی است پس $a_{ii} = ۱$ بنابراین $a_{ii} \odot a_{ii} = ۱$ و در نتیجه با توجه به تعریف عمل جمع بولی باید $b_{ii} = ۱$.

۴. سه مجموعهٔ $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_۱ =$ {اعداد چهار رقمی | رقم ۲ را شامل نیستند}

$A_۲ =$ {اعداد چهار رقمی | رقم ۴ را شامل نیستند}

$A_۳ =$ {اعداد چهار رقمی | رقم ۶ را شامل نیستند}

حال کافی است $|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$ یا $(\overline{A_۱} \cap \overline{A_۲} \cap \overline{A_۳})$ را حساب کنیم:

$|S| = ۹ \times ۱۰^{۳}$

$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۸ \times ۹^{۳}$

$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۷ \times ۸^{۳}$

$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۶ \times ۷^{۳}$

$\Rightarrow |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = ۹ \times ۱۰^{۳} - [۳(۸ \times ۹^{۳}) - ۳ \times (۷ \times ۸^{۳}) + ۶ \times ۷^{۳}]$

۵. اگر فرض کنیم $k = \overline{abc}$ در این صورت $t = \overline{abcabc}$ خواهد بود. با توجه به فرض مسأله داریم:

$\frac{۱۰۰۰۰۰a + ۱۰۰۰۰b + ۱۰۰۰c + ۱۰۰a + ۱۰b + c}{۱۱ \times ۱۳ \times ۷} = ۲۴۱$

$\Rightarrow \frac{۱۰۰۱۰۰a + ۱۰۰۱۰b + ۱۰۰۱c}{۱۰۰۱} = ۲۴۱$

$\Rightarrow ۱۰۰a + ۱۰b + c = ۲۴۱ \Rightarrow \overline{abc} = ۲۴۱$

$\Rightarrow k = ۲۴۱$

۶. طبق فرض داریم: $۱۳۲ = (۲۴۶)_a$

$(۲۴۶)_a = ۱۳۲ \Rightarrow ۲ \times a^{۲} + ۴ \times a + ۶ = ۱۳۲$

$\Rightarrow ۲a^{۲} + ۴a - ۱۲۶ = ۰ \Rightarrow a^{۲} + ۲a - ۶۳ = ۰$

$\Rightarrow (a + ۹)(a - ۷) = ۰ \Rightarrow a = -۹$ یا $a = ۷$

و با توجه به این‌که مبنا عددی است طبیعی و بزرگتر از یک پس $a = ۷$.

۷. با توجه به این که ۷ عددی اول و $۷ \nmid ۱۳۸۰$ پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$۱۳۸۰^{۶} \overset{۷}{\equiv} ۱ \ , \ ۲۰۰۱ = ۶ \times ۳۳۳ + ۳$

$\Rightarrow (۱۳۸۰^{۶})^{۳۳۳} \times ۱۳۸۰^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۱ \times ۱۳۸۰^{۳} \ ,$

$۱۳۸۰ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۳۸۰^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۱$

$\Rightarrow ۱۳۸۰^{۲۰۰۱} \overset{۷}{\equiv} ۱$

۸. برای اثبات این‌که $۲۴ | p^{۲} - q^{۲}$ کافی است ثابت کنیم $(p^{۲} - q^{۲})$ بر ۳ و ۸ بخش‌پذیر است.

$p \geq ۵$ اول $\Rightarrow p$ فرد است $\Rightarrow p^{۲} = ۸k + ۱$

(مربع هر عدد فرد به شکل $(۸k + ۱)$ است.)

$q \geq ۵$ اول $\Rightarrow q$ فرد $\Rightarrow q^{۲} = ۸k' + ۱$

$\Rightarrow p^{۲} - q^{۲} = (۸k + ۱) - (۸k' + ۱)$

$= ۸(k - k') \Rightarrow ۸ | p^{۲} - q^{۲} \qquad (۱)$

$\left.\begin{array}{l} ۳, (۳,p) = ۱ \Rightarrow p^{۲} \overset{۳}{\equiv} ۱ \text{ اوّل است} \\ ۳, (۳,q) = ۱ \Rightarrow q^{۲} \overset{۳}{\equiv} ۱ \text{ اوّل است} \end{array}\right\} \Rightarrow p^{۲} - q^{۲} \overset{۳}{\equiv} ۰$

$\Rightarrow ۳ | p^{۲} - q^{۲} \quad (۲)$

(۱) و (۲) $\overset{(۳,۸)=۱}{\Longrightarrow} ۲۴ | p^{۲} - q^{۲}$

۹. فرض کنیم آن دو عدد a و b باشند. در این صورت طبق فرض داریم:

$ab = k^{۲} \ , \ [a,b] = c = ۴۸ \ , \ (a,b) = d$

$\Rightarrow a'b'd^{۲} = k^{۲} \ , \ a'b'd = ۴۸$

$\Rightarrow a'b' = \frac{k^{۲}}{d^{۲}} \ , \ a'b' = \frac{۴۸}{d}$

چون $a'b'$ باید مربع کامل باشد پس $d = ۳$ و $a'b' = ۱۶$ و چون $(a',b') = ۱$ پس $a' = ۱$ و $b' = ۱۶$، بنابراین:

$a = a'd = ۱ \times ۳ = ۳ \ , \ b = b'd = ۱۶ \times ۳ = ۴۸$

۱۰. حالتهای ممکن در سه پرتاب به‌صورت زیر است:

$(۲,۲,۲) \ , \ (۲,۳,۲) \ , \ (۳,۲,۲) \ , \ (۲,۲,۳) \ ,$

$(۳,۳,۲) \ , \ (۳,۲,۳) \ , \ (۲,۳,۳) \ , \ (۳,۳,۳)$

و حاصل جمع اعداد رو شده یکی از اعداد ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ می‌تواند باشد، پس داریم:

x_i	۶	۷	۸	۹
P_i	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۳}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$

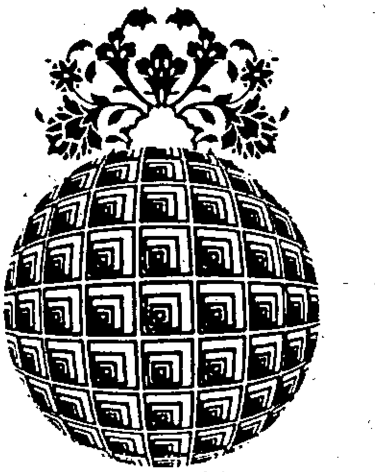
۱۱. طبق فرض فضای نمونه‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$S = \{(H,۱),(H,۲),\ldots,(H,۶),(T,T,T),$

$(T,H,T),(T,T,H),(T,H,H)\}$

$\Rightarrow |S| = ۶ + ۴ = ۱۰ \ , \ A = \{(T,H,H)\}$

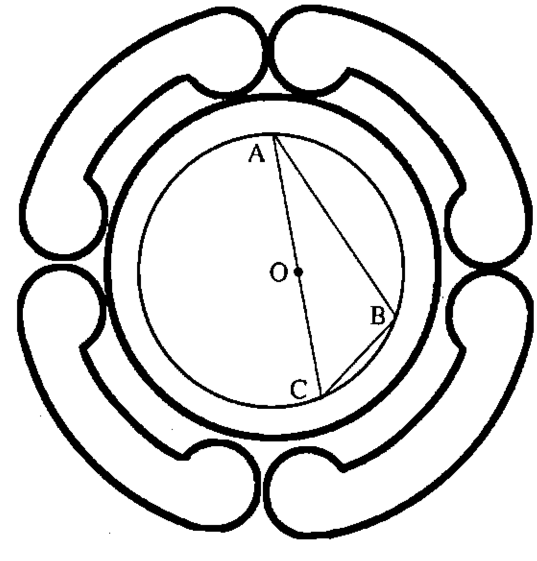
$\Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۱۰}$



مسأله مسابقه‌ای / طراح احمد فیروزنیا

کاربرد ریاضی در نیازمندیها:

بر محیط میدان دایره شکلی سه برج نگهبانی در نقطه‌های A و B و C قرار دارد به طوری که $AB = d$ و $BC = d'$ است. $(d > d')$
مطلوب است تعیین نقطه D بر محیط میدان برای ساختن چهارمین برج نگهبانی به طوری که $AB + CD = AD + BC$ باشد.



جواب تفریح اندیشه صفحهٔ ۱۸

جواب : ۸۰

حل: زمانی که سعید با نرخ یک پله در هر ثانیه، از پله برقی بالا می‌رود، برای رسیدن به بالای پلکان، به ۲۰ ثانیه نیاز دارد. هنگامی که با نرخ دو پله در ثانیه بالا می‌رود، برای رسیدن به بالای پلکان، ۱۶ ثانیه وقت می‌خواهد ؛ بنابراین :

۱۶(۲+ نرخ پله‌برقی) = ۲۰ (۱+ نرخ پله‌برقی)

با حلّ این معادله، به‌دست می‌آوریم :

۳ پله در ثانیه= نرخ پله‌برقی

بنابراین، فاصلهٔ پایین تا بالای پله‌برقی برابر است با :

۸۰ = ۲۰(۱+۳) پله

جواب تفریح اندیشه صفحهٔ ۲۵

جواب : ۰ـ۰

حل: از آن‌جا که تیم M سه گل به تیم B زده است، هیچ گل دیگر به تیم B زده نشده است و بازی T-B یک تساوی بدون گل بوده است.

حل مسأله مسابقه‌ای برهان ۳۱

می‌خواهیم عدد صحیح مثبت x را پیدا کنیم. به طوری‌که $x \equiv k(\mathrm{mod}(k+1))$ برای هر $k = 1,2,\dots,5$ ؛ و $x \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7)$.
توجه کنید که چون همه پیمانه‌ها متباین نیستند، مستقیماً نمی‌توانید از قضیه باقیمانده چینی استفاده کنید. اما با توجه به طبیعت خاص همنهشتی‌ها، می‌توان استدلال ساده‌ای برای آن اقامه کرد.
پنج همنهشتی اول را می‌توانید به صورت ساده $x \equiv -1(\mathrm{mod}\, 2,3,4,5,6)$ درآورید. بنا به قضیه (در حالت کلی اگر $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m_i)$ و $i = 1,2,\dots,r$ ، آنگاه داریم $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ که در آن $m = [m_1, m_2, \dots, m_r]$)، جواب این دستگاه فوراً از همنهشتی $x \equiv -1(\mathrm{mod}\, 60)$ به دست می‌آید (چون که ۶۰، کوچکترین مضرب مشترک این پنج عدد می‌باشد).
پس، می‌خواهیم دستگاه $x \equiv -1(\mathrm{mod}\, 60)$ و $x \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7)$ را حل کنیم یا اگر قرار دهیم $x = 7y$ ، می‌خواهیم همنهشتی $7y \equiv -1(\mathrm{mod}\, 60)$ را حل کنیم. بنا به الگوریتم اقلیدس $y = 17$ ، یک جواب این همنهشتی است. لذا $x = 119$ یک جواب دستگاه اصلی است. چون جواب‌های دیگر این دستگاه همنهشتی‌ها، حداقل $7.60 = 420$ اختلاف دارند، پس $x = 119$ کوچک‌ترین جواب ممکن است.

معرفی کتابهای ریاضی انتشارات مدرسه

ورودی به آمار

مؤلف: دکتر عین‌ا... پاشا / ناشر: انتشارات مدرسه



به آمار راهنمای دنیای ناشناخته ها گفته اند. به کمک مباحث آمار می آموزیم که چگونه با استفاده از اطلاعات ناقص، پی به واقعیتها ببریم. از زمانهای دور در زبان فارسی، ضرب المثلی که به خوبی راهکارهای آمار را نشان می دهد، «مشت نمونهٔ خروار است» رایج شده است. دنیای امروز دنیای انفجار اطلاعات است و از هر سو با اطلاعات مختلف، بمباران می شویم. اگر بتوانیم بر این اطلاعات مسلط شویم و از آنها استفاده کنیم پیشرفت خواهیم کرد. در غیر این صورت در زیر تلی از اطلاعات مدفون خواهیم شد. ما در این کتاب سعی کرده ایم اصول و مقدمات این علم را همراه با مثالهای متنوع بیان کنیم.

مکان هندسی / جلد (۱)

مؤلف: محمدهاشم رستمی / ناشر: انتشارات مدرسه



مکان هندسی از بخشهای مهم و جالب و پرکاربرد در هندسه است و یکی از ابزارهای مفید، مؤثر و لازم برای رسم شکلهای هندسی یا ساختمانهای هندسی است. این کتاب اولین جلد از سری کتابهای مکان هندسی است و در این کتاب مکانهای هندسی وابسته به یک نقطه ثابت و مکانهای هندسی وابسته به دو نقطه ثابت و مکانهای هندسی وابسته به سه نقطه ثابت و بیشتر آمده است.

دایرة المعارف هندسه جلد ۷

مؤلف: محمدهاشم رستمی / ناشر: انتشارات مدرسه



این سری کتابها، مجموعهٔ کاملی است از تعریفها، قضیه ها، مسأله ها و تاریخ هندسه که با بهره گیری از منابع متعدد ایرانی و خارجی تدوین و تألیف شده است. جلد هفتم دایرة المعارف هندسه، رابطه های متری در چندضلعیهاست که شامل ۵ بخش رابطه های متری در چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج ضلعی و شش ضلعی و چندضلعیهای منتظم است.

آموزش المپیاد ریاضی

مؤلفان: هوشنگ شرقی، حسین شفیع‌زاده، ابراهیم ریحانی / ناشر: انتشارات مدرسه



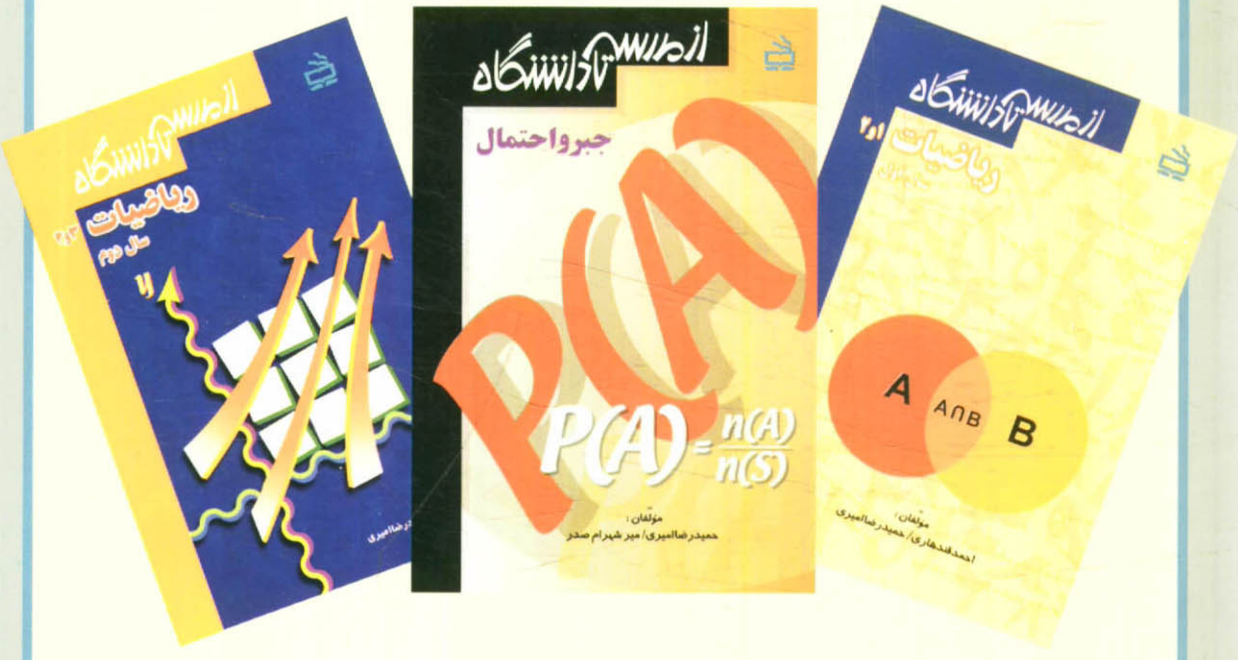
این کتاب، اولین جلد از سری کتابهایی است که زیر عنوان کلّی «کتابهای آموزش المپیاد ریاضی» توسط انتشارات مدرسه منتشر می شود. این کار اگرچه کمی دیر انجام شده است، اما به هر تقدیر، حرکتی ضروری است که تاکنون انجام نشده و جای کتابهای این چنین در میان کتابهای آموزشی، به خصوص شاخهٔ المپیاد ریاضی تا حال خالی بوده است.

ناشر برگزیده
سالهای ۷۳ و ۱۳۷۵

انتشارات مدرسه منتشر کرده است
سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

دانش‌آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته های پنهان در لابه لای این مفاهیم و قضیه ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه ای آشنا می شوند، تا هم برای پاسخ گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.



کتابهای زیر از این سری در دست چاپ است:

۱- ریاضی عمومی ۱ و ۲ پیش دانشگاهی رشته علوم تجربی
۲- حسابان ۱ و ۲
۳- حساب دیفرانسیل ۱ و ۲
۴- ریاضیات سال سوم تجربی
۵- ریاضیات گسسته
۶- هندسه تحلیلی و جبر خطی

کد ۹۲۴/۱
انتشارات مدرسه

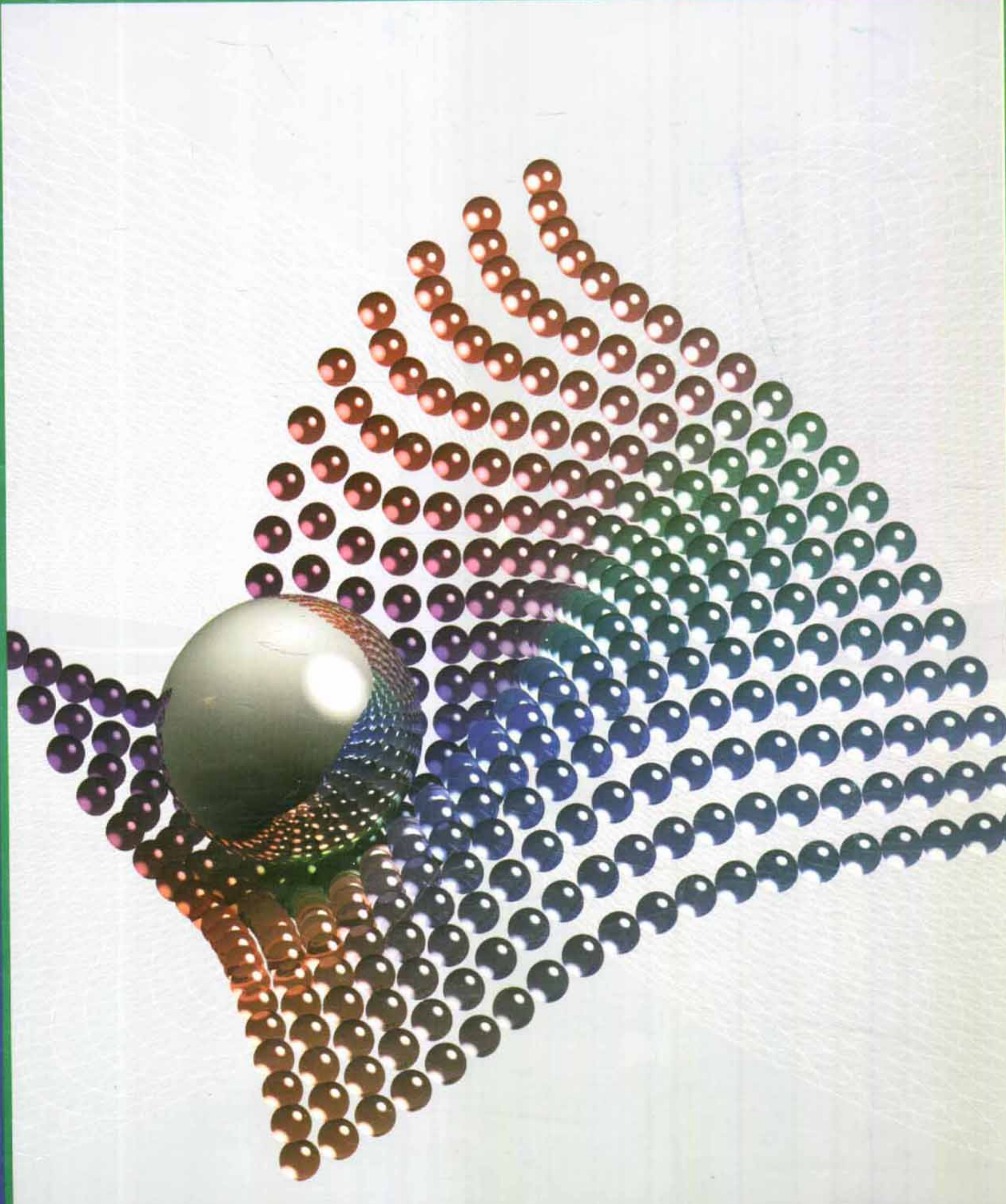
مجله ریاضی

برهان

برای دانش آموزان دبیرستان

۳۴

سال دهم، شمارهٔ سوم، بهار ۱۳۸۰، بها ۲۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

برهان

سال دهم
بهار ۱۳۸۰
شمارهٔ سوم

وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز : انتشارات مدرسه
مدیر مسؤول : محمد صادق عزیزی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی : میرشهرام صدر
طراح گرافیک : فریبرز سیامک نژاد
مدیر فنی : هوشنگ آشتیانی
رسام : علیرضا عابدی
اعضای هیأت تحریریه : حمیدرضا امیری ، محمدهاشم رستمی ، احمد قندهاری ، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی ، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ، غلامرضا یاسی پور
(با تشکر از همکاری ارزنده آقای پرویز شهریاری)
چاپ و صحافی : چاپخانه مدرسه

نشانی : خیابان سپهبد قرنی ، خیابان سپند شرقی ، پلاک ۳۸ ، صندوق پستی: ۱۹۴۹ / ۱۴۱۵۵
تلفن : ۶ - ۸۸۹۶۷۶۵ ، دورنویس (فاکس) : ۸۸۲۰۵۹۹ ، تلفن امور مشترکین : ۹ - ۸۸۰۰۳۲۴

۱ حرف اول
۲ از تاریخ بیاموزیم(۸)/ پرویز شهریاری
۷ روش تعیین عرضهای اکسترمم.../ احمد قندهاری
۱۱ ملانصرالدین و مسألهٔ .../ غلامرضا یاسی پور
۱۶ بخشی از یک کتاب .../ حمید رضا امیری
۲۱ مکان هندسی(۲۲)/ محمد هاشم رستمی
۲۴ ترکیبیات (قسمت اول)/ میر شهرام صدر
۲۹ قضیهٔ کوتاهترین راه.../ دکتر احمد شرف الدین
۳۱ معادلهٔ یک مجهولی.../ هوشنگ شرقی
۴۰ جشن آغاز دهمین ...
۴۲ روشی جدید و سریع برای محاسبه ...
۴۷ همراه با درسهای ریاضیات/ پرویز شهریاری
۴۹ حجم یک مخروط.../ کریم احمدی دلیر
۵۰ مسألهٔ مسابقه‌ای برهان
۵۱ پرسش های چهار گزینه ای
۵۷ پاسخ پرسش های چهار گزینه ای

برهان

تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی
(شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آنها
(برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آنها
(برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمه مقاله های عمومی ریاضی
(مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامه علمی و اجتماعی ریاضیدانان، زندگینامهٔ علمی واجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات ، آموزش مسائل کامپیوتر و...)

برهان
هر سه ماه یک شماره منتشر می شود

- هیأت تحریریه در حک و اصلاح و حذف واضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
- مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
- استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

حرف اول

دانش‌آموزان عزیز و خوانندگان محترم مجله برهان،

با اهدای سلام.

◎ آیا یک کتاب کمک‌آموزشی یا کمک‌درسی مفید و استاندارد را می‌شناسید؟

تألیف کتاب‌های درسی یکی از مهمترین وظیفه‌های وزارت آموزش و پرورش است که به‌عهدهٔ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی درسی است. به‌دلیل محدودیت‌هایی که در کتاب درسی از قبیل زمان لازم برای تدریس، موقعیت مکانی و منطقه‌ای دانش‌آموزان و حجم کتاب وجود دارد و به‌منظور گسترش و عمق‌بخشی و کاربرد مفاهیم کتاب، باید در کنار کتاب درسی، کتاب‌هایی به‌صورت مکمل موجود باشد که منطبق با هدف‌های برنامه‌ریزی تألیف کتاب درسی باشند تا این‌که دانش‌آموزان با مطالعه این نوع کتاب‌ها، مطالب کتاب درسی را بهتر فراگیرند و با کاربردهای مفاهیم علمی آشنا شوند.

برای این منظور بهتر است که شما عزیزان، کتاب‌های خود را از ناشران و مؤلفان متعهد و خوش‌نام انتخاب کنید؛ چون اغلب دانش‌آموزان و اولیا از استانداردهای آموزشی برای یک کتاب کمک‌درسی و کمک‌آموزشی اطلاع دقیقی ندارند و کتاب‌هایی خریداری می‌کنند که در آنها تمرین‌های موجود کتاب‌های درسی را حل کرده‌اند. این نوع کتاب‌ها نه‌تنها بازدهی مطلوبی را ندارند، بلکه بسیاری از هدف‌های کتاب درسی را زیرپا می‌گذارند و زحمت‌های کارشناسان کتاب درسی را به‌هدر می‌دهند. تمرین‌های کتاب درسی به‌طور قطع با هدف‌های آموزشی خاصی طرح شده است تا دانش‌آموزان خود را بسنجند و معلم میزان فراگیری و وضعیت کلاسی را درک کند.

بنابراین بر همه دانش‌پژوهان و دبیران محترم است که با آگاهی از این مطالب، جلوی این مشکل اجتماعی و فرهنگی را بگیرند که به‌شدت جامعه آموزشی ما را به مخاطره انداخته است و بر مسؤولان فرهنگی است که از چاپ چنین کتاب‌هایی جلوگیری قانونی به‌عمل آورند.

والسلام ـ سردبیر



از تاریخ بیاموزیم ۸

پرویز شهریاری

دنبالهٔ مقالهٔ
« آگاهیهایی از ریاضیات چین باستان »

کسرهای با منطق متری را، هنوز نمی‌توان کسرهای دهدهی امروزی دانست ؛ آنها تنها شکل نخستینِ کسرهای دهدهی به شمار می‌آیند. برای این که مفهوم کسر دهدهی، به صورتی انتزاعی شکل بگیرد، باید از پوشش منطق متری بیرون آید ؛ یعنی از پوسته و از حوزهٔ مقدارهایی که به خودی خود، اندیشهٔ تقسیم منظم واحدها را تلقین می‌کند، خارج شود و بتواند به طور کلی تا هر جا که لازم است، ادامه یابد. رسیدن به چنین ساختمان انتزاعی، کاری دشوار بود ؛ زیرا برای ریاضیدانان باستانی، همیشه مسأله‌ها به صورت مشخص و عملی آن مطرح بود.

در مسأله‌های باستانی، به طور معمول، سخن از اندازهٔ مساحت کف اتاق، حجم آب بند و آبراه و دیوار قلعه، گنجایش انبارهای غلّه، وزن ابریشم یا پنبهٔ خام و اندازهٔ پارچه‌های ابریشمی یا کتانی است. بنابراین، در مسأله‌هایی که از زندگی روزانه گرفته شده است، اغلب با مقدارهایی با منطق متری یا با عددهایی که برای واحدهای مختلف آن نامی وجود داشته باشد، سروکار دارند.

ولی ریاضیات، جوهر اصلی این مسأله‌های مشخص را جدا می‌کند و روشهایی برای حلّ کلی یک دسته از مسأله‌های معین به وجود می‌آورد، و کلی‌ترین و دشوارترین نوع مسأله‌ها را به حلّ ساده‌ترینِ آنها می‌رساند. به این ترتیب، مضمون عملی مسأله‌ها، تسلیمِ طرح‌های کلی می‌شود و با کنار رفتن آن، مسأله‌های خالص علمی پدید می‌آید.

در واقع، اکنون دیگر همهٔ امکانها، برای تنظیم مسأله‌ها به صورت کلی و بدون توجه به جنبهٔ عملی و کاربردی آنها پدید آمده بود. در «ریاضیات در نُه کتاب» به مسأله‌های کلی و حلّ جبری آنها برمی‌خوریم، در کتاب هفتم با عنوان «زیادی و کاستی» و در کتاب هشتم با عنوان «قانون خان ـ چین». ولی به طور کلی، برای مسأله‌های چینی، این ویژگی اساسی وجود دارد که جنبهٔ کاربردی، با مضمون انتزاعی به هم آمیخته است ؛ شبیه آن چه پیش از این برای بخشهای کسری آدم دیدیم.

سون تسرزی هم، وقتی درک خود را از کسرهای دهدهی، با مفهوم کلی پیشنهاد می‌کند، درست به همین ترتیب عمل می‌کند. او مقداری را انتخاب می‌کند که از پیش معلوم است بخشهای کوچکتری ندارد. این مقدار بخش‌ناپذیر، چیزی مثل آدم است که نمی‌توان دربارهٔ بخشی از آن سخن گفت. روشن است، بخشهای دهدهی چنین عددی، کسرهای دهدهی امروزی را معرفی می‌کند؛ گرچه خود به عدد به ظاهر انتزاعی نیست و به چیزی وابسته است. این مسأله را از کتاب آخر سون تسرزی انتخاب کرده‌ایم.

از بین ۱۵۰۰۰۰۰۰ دهقان، ۴۰۰۰۰۰ سرباز انتخاب شده است. می‌خواهیم بدانیم، از هرچند دهقان، یک نفر به سربازی رفته است!

✱ پاسخ: ۳۷ دهقان و ۵ فن.

در این جا آموزش کسر دهدهی مطرح نیست؛ ولی کسر دهدهی وجود دارد: ۳۷ عدد درست و ۵ دهم، با این که ۵ دهم دهقان نمی‌تواند وجود داشته باشد. در این‌جا ریاضیدان چینی، برای بخشهای دهدهی عدد از واژهٔ «فن» استفاده کرده است که به معنای $\frac{۱}{۱۰}$ تسون است. به کار بردن نامهای مشخص برای بخشهای دهدهی انتزاعی، همیشه معمول بوده است، بعدها هم از این عادت پیروی شده است. در چین باستان، این بخشهای دهدهی را از روی ارزش سکّه‌ها نامگذاری می‌کردند. سون تسرزی، بخشهای دهدهی «بو» را به کار می‌برد که به طور کلی وجود نداشت: «بو» از ۶ «چی» تشکیل شده بود. در این حالت «بو» مثل آدم، بخش‌پذیر بود.

این مرحله که بخشهای دهدهی هر عدد را با نام یک مقدار مشخص به کار می‌بردند، گذری است از مفهوم کسر با منطق متری به مفهوم کسر دهدهی. می‌بینیم، چگونه هر سه مقیاس، برای طول، وزن و حجم لازم می‌شود؛ در حالی که در آغاز، یکی از این مقیاسها کافی بود.

وقتی «فن» بخش دهدهی «تسون»، معنای نخستین خود را از دست داد، معنای تازه‌ای یافت و به طور کلی، برای بخش دهدهی به کار رفت. این معنا تنها برای بقیهٔ مقدارهای با منطق متری نبود؛ بلکه به طورکلی به بخش دهدهی یک عدد گفته می‌شد.

این درک تازه از مفهوم عدد و گسترده کردن آن، به صورت دستگاه دهدهی و پیدا شدن ردیفهای کوچکتر از واحد، ناشی از منطق درونی خود ریاضیات بود و به همین دلیل، در آغاز کاربردی محدود داشت.

دو مسأله را از رسالهٔ سون‌تسرزی مقایسه می‌کنیم. این مقایسه بخوبی می‌تواند، احتیاطی را که در گذار به وضع تازه وجود داشته است، روشن کند. یکی از آنها، مسألهٔ بیست و یکم از کتاب میانهٔ رساله است، به این شرح:

کف اتاقی به شکل منحنی است که طول آن ۶۳۹ بو و قطر آن ۳۸۰ بو است. مساحت کف اتاق چقدر است؟

باید مساحت قطاع دایره را بنابر دستور چینی به دست آوریم.

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{C}{۲}\times\frac{D}{۲}$$

که در آن، C طول کمان و D طول قطر دایرهٔ قطاع ست. برای نصف کردن طول کمان، یعنی ۶۳۹ بو، عدد دهدهی ۳۱۹/۵ بو به دست می‌آید. سون تسرزی، این مقدار را این طور به دست می‌آورد:

طول کمان را نصف می‌کنم، ۳۱۹ بو ۵ فن می‌شود.

ولی در همین کتاب از رساله، مسألهٔ شانزدهم هم وجود دارد:

طنابی داریم به طول ۵۷۹۴ بو. اگر با آن مربعی بسازیم، طول ضلع مربع چه قدر است؟

✱ پاسخ: ۱۴۴۸ بو و ۳ چی.

پاسخ این مسأله را می‌شد به صورت کسر دهدهی ۱۴۴۸/۵ بو داد؛ ولی سون تسرزی این کار را نمی‌کند. از این دو مسأله، روشن می‌شود که سون تسرزی، زیر فشار سنت بوده است. در عملی که سون تسرزی، به عنوان یک عمل بینابینی انجام می‌دهد، به خودش حق می‌دهد، از یک بدعت محاسبه‌ای استفاده کند. این کار برای او خطری ندارد؛ زیرا در مسألهٔ اوّل و برای محاسبهٔ قطاع، سرانجام باید ۳۱۹/۵ را در ۱۹۰ ضرب کند و در نتیجه، کسر دهدهی باقی نمی‌ماند. ولی وضع در مسألهٔ دوم فرق می‌کند. کارمند ادارهٔ ارضی، کتاب را مطالعه می‌کند و ممکن است به خاطر واحد اختراعی تازه، به زحمت بیفتد و می‌بینیم که سون تسرزی لازم می‌بیند، در این مسأله از

قانون خودش بگذرد و همان اندازه‌های قدیمی و عادی را برای طول در نظر بگیرد. البته، حَل مسأله پیچیده‌تر می‌شود؛ ولی آیا سون تسرزی هم می‌خواهد همین را نشان بدهد؟ به جای یک عمل تقسیم، ناچار شده است دو عمل دیگر را هم انجام دهد:

طول طناب را ۵۷۹۴ بو برقرار می‌کنم، آن را بر ۴ تقسیم می‌کنم، ۱۴۴۸ بو به دست می‌آورم و ۲ بو هم باقی می‌ماند. باقیمانده را در ۶ ضرب می‌کنم، ۱ چژان و ۲ چی به دست می‌آید. آن را بر ۴ تقسیم می‌کنم، ۳ چی به دست می‌آورم.

همین شباهت تاریخی را در ریاضیات بابلی هم می‌توان یافت. در آن‌جا از دستگاه شصت شصتی محاسبه استفاده می‌کردند که بر اساس موضعی‌بودن رقمها بنا شده بود و تنها در محاسبه‌ها به کار می‌رفت؛ ولی مقدارهای داده شده و نتیجه را در دستگاه شصت شصتی یا دستگاه دهدهی غیرموضعی (که در متنهای اقتصادی به کار می‌رفت و در زندگی و عمل رواج داشت) بیان می‌کردند.

ویژگی اصلی کسر دهدهی، یعنی انتقال ممیّز به راست (یا به چپ) با ضرب عدد در توانی از ۱۰ (یا تقسیم عدد بر توانی از ۱۰)، در چین باستان بخوبی شناخته شده بود، در زبان چینی، دو اصطلاح وجود داشت؛ «شان شی چژه» به معنای بزرگ کردن یک عدد با ضرب آن در ۱۰ و «توی» به معنای عقب کشیدن و حرکت از یک مرتبه به سمت چپ. این عمل‌ها ضمن حلّ مسأله‌های ۲۱ و ۲۲ در کتاب سوّم سون تسرزی وجود دارد. یکی از این مسأله‌ها را در این‌جا می‌آوریم:

یک «پی» کتان ۱۸۰۰۰ «تسیان» می‌ارزد. ارزش یک «چژان»، یک «چی» و یک «تسون» کتان به طور جداگانه چه قدر است؟

✱ پاسخ: چژان ۴۵۰۰ تسیان؛ چی ۴۵۰ تسیان؛ تسوی ۴۵ تسیان[1]

روش حل: ۱۸۰۰۰ تسیان را برقرار می‌کنم. آن را بر ۴ تقسیم می‌کنم، ارزش یک چژان به دست می‌آید. به طرف راست عقب می‌کشم، دوباره به طرف راست عقب می‌کشم و ارزش چی و تسون را به دست می‌آورم.

در این مسأله، اصطلاح «توی» به کار رفته است. در مسألهٔ ۲۲ که عدد ۱۸۰۰۰۰۰۰ را در ۱۰۰ ضرب می‌کند، مرتبه را به سمت چپ می‌برد؛ یعنی به زبان امروزی، نماد ممیّز را دو رقم به سمت راست می‌برد. در مسألهٔ ۹ از کتاب سوّم رسالهٔ سون تسرزی، ضرب در ۴۰ با دو عمل انجام می‌شود؛ ضرب در ۱۰ و سپس ضرب در ۴.

به این ترتیب چینیها، به دلیل روش خوب و پیشرفته‌ای که در محاسبه داشتند، در حالی که نه لگاریتم را می‌شناختند و نه مثلثات را، به برتری کسرهای دهدهی پی برده بودند و نظر من این است که مفهوم کسر دهدهی، در سدهٔ سوم میلادی و در چین کشف شده است. درست است که بعدها هم، ویژگی متری بودن کسرهای دهدهی باقی ماند؛ ولی این ویژگی به سمت انتزاع کشش داشت.

به گواهی تاریخ، «تسه زو چون ـ چژی»، ریاضیدان سدهٔ پنجم چین هم از این کسرها استفاده می‌کرد. نام این ریاضیدان، به آن دلیل در تاریخ آمده است که عدد π را تا شش رقم درست بعد از ممیّز محاسبه کرده بود.

«تسین تسه زیو ـ شا او»، «چژوشی ـ تسه‌زه»، «لی له» و «یان هوئد» جبردانهای سدهٔ سیزدهم و چهاردهم میلادی هم، کسرهای دهدهی را به کار برده‌اند. اصطلاح امروزی چینی «سیا او شو» (عددهای کوچک)، برای کسرهای دهدهی، مربوط به «چژوشی ـ تسه‌زه» است. او برای اندازه‌گیری طول تا 10^{-16} «چی» پیش رفته بود و نامهایی برای این مقیاسها گذاشته بود که تا مدتها و تا زمانی که ریاضیات غرب به چین نفوذ کرد، به کار برده می‌شد. «یان هوئد» در یکی از مسأله‌های خود، در آغاز کسر متعارفی را به کسر دهدهی تبدیل می‌کند، و سپس عمل ضرب را انجام می‌دهد. در دورهٔ «کانگ ـ هی» (۱۶۶۲ ـ ۱۷۱۲) در واحدهای اندازه‌گیری قدیمی ـ که گویا «هوان دی» امپراتور افسانه‌ای سدهٔ بیست و هفتم پیش از میلاد، آنها را به کار می‌برد ـ تجدیدنظر کردند. جدولهای اندازه‌گیری را به این ترتیب درست کرده، در «فرهنگ ریاضی» ضبط کردند. در این جدولها، اندازه‌های کسری دقیق داده شده است؛ برای طول تا 10^{-31} «چی»، برای حجم تا 10^{-14} «شن» و برای وزن تا 10^{-16} «لانو» بستگی بین واحدها، تقریباً در همه‌جا به صورت دهدهی است و بستگیهای از نوع «۶ چی = ۱ بو» به بستگی ساده‌تر «۵ چی = ۱ بو» تغییر یافته است.

در این‌جا، تکامل کسرهای دهدهی را، از صورت کسرهای با منطق متری به کسرهای دهدهی انتزاعی، کم و بیش به تفضیل بررسی کردیم. ولی خود کسرهای با منطق متری چگونه پدید آمدند؟ چه ضرورتی موجب پیدایش آنها شد؟

روشن است، بدون در نظر گرفتن اثر تختهٔ محاسبه (که محاسبه با کسرهای دهدهی به یاری آنها انجام می‌گرفت)، نمی‌توان پاسخ این پرسش را یافت. برای این بررسی، نگاهی به تاریخ منطق متری می‌اندازیم.

واحدهای مختلف اندازه‌گیری، در رشته‌های گوناگون فعالیت آدمی، همزمان و بدون بستگی با یکدیگر پدید آمده است. به یاری «پی» و «دوان» (یعنی تکّه) پارچه را اندازه می‌گرفتند، به یاری «بو» (گام) طول ضلعهای تکّه زمینها را به دست می‌آوردند، به‌یاری «لی» (ورست) فاصله تا نقطه‌های پرجمعیت را بیان می‌کردند و «چی» که اکنون برابر $\frac{1}{3}$ متر است و در طول تاریخ از ۰/۱۹ متر تا ۰/۳۴ متر تغییر کرده است، برای اندازه‌گیری وسیله‌های منزل و بعضی چیزهای دیگر به کار می‌رفت.

وقتی هر کدام از این واحدها در جای خود مستقر شدند، لازم بود با هم مقایسه شوند. البته بستگی بین این واحد، دهدهی نبود. ولی وقتی ضمن محاسبه، دانشمندان به عددهای خیلی کوچک و خیلی بزرگ برخوردند، وضع تغییر کرد. در این حالتها باید از مقیاسی منظم استفاده می‌شد و این مقیاس به طور طبیعی در دستگاه شمار دهدهی وجود داشت؛ زیرا در آن می‌توان به طور دلخواه و تا هر اندازه که لازم باشد، از دو طرف عدد جلو رفت.

تاریخ چین، از نخستین قانونگذاری دربارهٔ اندازه‌ها خبر می‌دهد. این قانونگذاری در سدهٔ سوّم پیش از میلاد و به وسیلهٔ «تسین شی هوان دی» انجام گرفت. این امپراتور، چین را به صورت یک دولت واحد درآورد و اصلاحهایی انجام داد؛ خط نوشتنی را یکنواخت کرد، برای عبور ارّابه‌ها جاده کشید و غیره. تا زمان او آشفتگی زیادی در زمینهٔ اندازه‌گیریها بود. برای نمونه:

۸ «چی» = ۱ «سیون»، = «۲ سیون» = ۱ «چژان» و همچنین ۸ «چی» = ۱ «ژن». گاهی هم ممکن بود ۴ «چی» یا ۷ «چی» تشکیل یک «ژن» را بدهند.

بویژه مطالب زیادی دربارهٔ منطق متری می‌توان در «رسالهٔ ریاضی سون تسرزی» یافت. اگر نخستین صفحهٔ این رساله را باز کنیم، به جدول اندازه‌ها و وزنها برمی‌خوریم. با این جدولها بیشتر آشنا شویم. بیش از همه، جدول سوّم برای اندازه‌گیری حجمها جالب است که در مسألهٔ «مربوط به مبادله» غلّه، با آن برخورد می‌کنیم. این جدول شامل جزءهای کوچکتر، نسبت به واحد «دوی» است:

برای تعیین حجم با آغاز از «سو»:

زاگه = ۱۰ شا او	زاگوی = ۶ سو
زاشه‌نو = ۱۰ گو	راتسو = ۱۰ گوی
زادوی = ۱۰ شرنو	زاچااو = ۱۰ تسو
اهو = ۱۰ دوی	زاشااو = ۱۰ چا او

این جدول از این جهت جالب است که در همهٔ برابریها، بجز نخستین آنها، با شمار دهدهی ساخته شده است. به همین دلیل، همان‌طور که پیش از این هم دیدیم، می‌توان از آنها برای نشان دادن عددها به صورت کسرهای با منطق دهدهی بسادگی استفاده کرد. برای نمونه، اگر «دوی» را واحد بگیریم، به یاری جدول می‌توان تا ۶ رقم دهدهی را محاسبه کرد.

یادآور می‌شویم اگر بعکس، «گوی» را به عنوان واحد در نظر بگیریم، می‌توان دستگاهی با ردیفهای مشخص برای بیان عددهای بزرگ در دست داشت؛ به نحوی که برای هر مرتبه، نامی وجود داشته باشد. سون تسرزی، دو نمونه از چنین دستگاهی را ساخته است؛ در دستگاه اوّل، به هر مرتبهٔ تازه که از 10^8 آغاز می‌شود، نامهای ویژه‌ای داده است. در دستگاه دوم (که برای عددهای بزرگ است) نامهای مشابهی برای هریک از مرتبه‌های جدید، یعنی 10^8، 10^{12}، 10^{16}، ... آمده است.

جدول دیگر، شامل اندازهٔ وزنهاست که ابتدا جزءهای آن، اهمیت جزءهای واحد حجم را ندارد. واحدهای وزن در چین، دهدهی نبود؛ بجز آن که این جدول دهدهی نیست و از قانون هماهنگی هم پیروی نمی‌کند.

برای وزن کردن با آغاز «شو»:

یک تسه زین = ۱۶ لانو	ز یک لِنی = ۱۰ شو
یک تسه زیون = ۳۰ تسه‌زین	ز یک چژو = ۱۰ رنی
یک دوانیو = ۴ تسه زیون	ز یک لانو = ۲۴ چژو

همان‌طور که دیده می‌شود، برابری بین اندازه‌ها در این جدول، بجز دو تای اوّل، به صورتهای متفاوت است. بروشنی معلوم است که، برابری اوّل هم، بعد از تنظیم جدول به آن

اضافه شده است. این موضوع، به ما در این نتیجه‌گیری کمک می‌کند که جدولهای سون‌تسرزی، نه یک جمع‌آوری سادهٔ واحدهای موجود، بلکه نتیجه تنظیم و اصلاح آنها بوده است، در آغاز، واحد اصلی تعریف می‌شود، سپس رابطهٔ بین واحدهای مختلف، تا حدّ امکان، به صورت دهدهی داده شده است.

جدولها، بروشنی دربارهٔ منطق متری سخن می‌گویند. برای تشکیل اندازه‌های کوچکتر یا بزرگتر، واحدهای اصلی را با شیوه‌های مختلف می‌شکستند یا با هم یکی می‌کردند. تنها بعدها این عمل را به صورت مقیاس دهدهی در آوردند. این مطلب را بیش از همه، می‌توان از جدول اندازه‌های طول فهمید که سون تسرزی، رسالهٔ خود را با آن آغاز می‌کند:

برای اندازه‌گیری طول، از «هو» آغاز می‌کنم. اگر بخواهی دربارهٔ «هو» بدانی، نخی است که کرم ابریشم پدید می‌آورد:

یک پنیو = ۱۰ چژان	یک سی = ۱۰ هو
یک دوانیو = ۵۰ چی	یک ها او = ۱۰ سی
یک پی = ۴۰ چی	یک لی = ۱۰ ها او
یک بو = ۶ چی	یک فن = ۱۰ لی
یک مو = ۲۴۰ بو	یک تسون = ۱۰ فن
یک لی = ۳۰۰ لو	یک چی = ۱۰ تسون
	یک چژان = ۱۰ چی

اندازهٔ طول «هو»، به اندازهٔ قطر تار ابریشم تعیین می‌شود. یکی از اندازه‌هایی که در این جا نام برده شده، مربوط به مساحت است. «هو» واحد مساحت است و بنابراین، باید گفته می‌شد: ۲۴۰ «بو»ی مربع برابر است با یک «مو»ی مربع. آن طور که از مسألهٔ اوّل «ریاضیات در نُه کتاب» برمی‌آید، این مساحت مستطیلی است با ضلعهای به طول ۱۵ و ۱۶ بو (گام). «تسین شی هوان دی»، اندازهٔ «چی» را با ۵ رقم دهدهی داده است.

می‌بینیم، چگونه روش محاسبه، در منطق متری اثر می‌گذارد و این به نوبهٔ خود، مایهٔ اصلی برای عامتر شدن کسرهای دهدهی شد. تختهٔ محاسبه، همراه با استفاده از روش موضعی عددنویسی، به پیدایش کسرهای دهدهی یاری رساند. روی این تخته باید بسادگی عملهای تقسیم و ریشه گرفتن، بدون توجه به مرزی که ستون عددهای درست را مشخص می‌کنند، انجام شود. هر ستون خالی که در سمت راست ستون واحد باشد، می‌تواند برای به دست‌آوردن رقمهای دهدهی به کار رود، که به زبان امروز، به معنای این است که در سمت راست نماد ممیّز، صفر قرار دهیم.

ولی تختهٔ محاسبه هم، به نوبهٔ خود محدودیتهایی پدید آورده بود؛ بعد از انجام عمل روی تخته، به محض این که نتیجه را از آن جدا می‌کردند، شکل موضعی بودن خود را از دست می‌داد. چینیها برای نوشتن، از اصل «ترکیب ضربی» استفاده می‌کردند؛ یعنی از دستگاه دهدهی که رقمهای آن نامهای موضعی داشت؛ شبیه آن چه در دستگاه عدد شماری شفاهی امروز داریم. در این عددشماری، صفر وجود ندارد؛ همان‌طور که روی تخته هم وجود نداشت. نبودن نماد صفر (به نحوی که صفر را به عنوان یک رقم مثل سایر رقمها در نظر بگیرند)، سدی در راه شکل نهایی کسرهای دهدهی شد. به همین دلیل است که در کسر دهدهی چینی، نمادی برای ممیّز هم وجود ندارد. روی تخته، شبیه کسرهای دهدهی امروزی نشان داده می‌شد و هر رقم درست در جای خودش بود؛ ولی همین که از تخته جدا می‌شد و نتیجهٔ عمل به صورت نوشته در می‌آمد، صورت منطق متری، یعنی رقمهایی با نامهای ویژه به خود می‌گرفت؛ درست مثل شمار شفاهی که یک دستگاه موضعی با ترکیب ضربی است. ما شاهد سون تسرزی و تلاش او برای بیرون آمدن از این وضع بودیم و در ضمن دیدیم، چگونه با سختی توانست در این راه موفّق شود.

از این به بعد، کسرهای متعارفی و دهدهی، در مسیر پیشرفت خود، به دو راه مختلف افتادند. کسر به عنوان نسبت دو عدد، آغازی برای تعمیم مفهوم عدد شد و این امکان به دست آمد که زمینه‌های مختلف جبر ساخته شود، این جنبهٔ جبری، تعمیم مفهوم عدد بود.

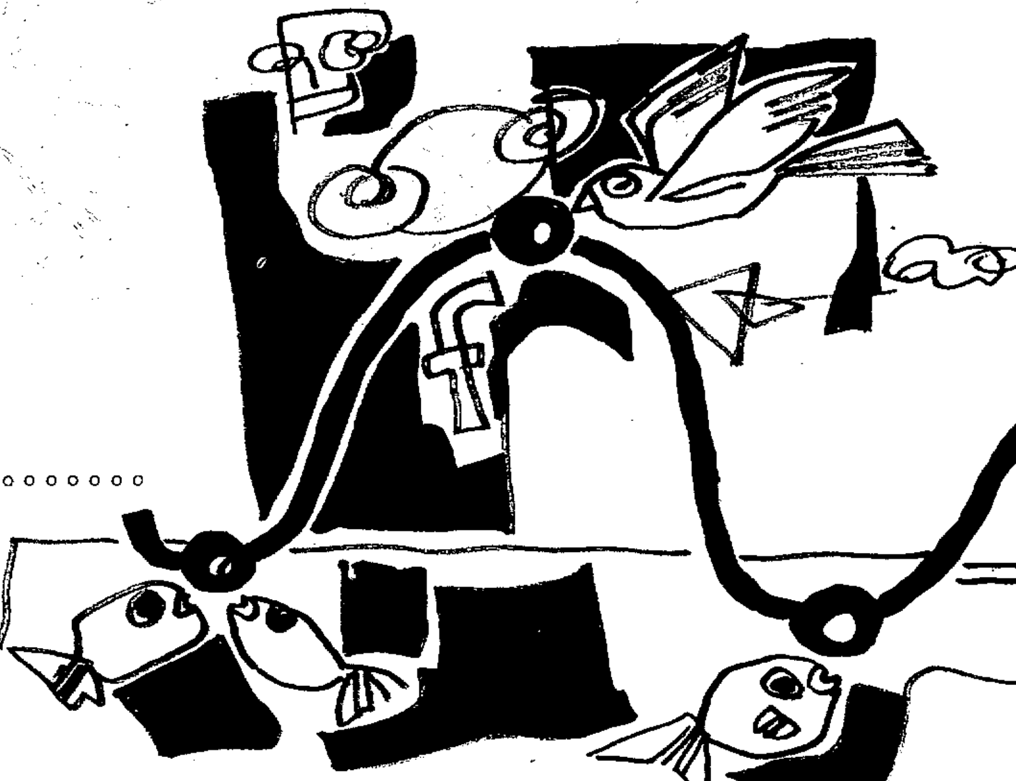
اگر کسرهای متعارفی، نمونه‌های ساده‌ای هستند که عملهایی بنابر قاعده‌های معلوم، روی آنها انجام می‌شود، کسرهای دهدهی، مفهوم بی‌نهایت و مسأله‌های ناشی از آن را، در درون خود نهفته داشتند.

کسر دهدهی، پایه‌ای برای تعمیم و پیشرفت مفهوم تقریب در زمینهٔ رشته‌ها و کسرهای مسلسل شد. بی‌تردید نیوتون برای تبدیل تابع به یک رشته، از اندیشهٔ کسر دهدهی الهام گرفته است؛ زیرا کسر دهدهی شبیه رشتهٔ پیوسته‌ای است که در آن، هر رقم معرّف درجه‌ای از دقّت مقدار واقعی عدد است، و این، جنبهٔ تحلیلیِ مفهوم عدد است.

*

روش تعیین عرضهای اکسترمم نسبی تابع f بدون استفاده از مشتق

(برای دانش‌آموزان سال سوم و پیش دانشگاهی)



احمد قندهاری

تابع به معادلهٔ $y = x^2 - 2x + 4$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم عرض می‌نی‌مم نسبی این تابع را ابتدا به کمک مشتق محاسبه کنیم. می‌نویسیم:

طول می‌نی‌مم نسبی تابع

$$y' = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

در معادلهٔ تابع

$$x = 1 \longrightarrow y = 1 - 2 + 4 = 3 \Rightarrow y = 3$$

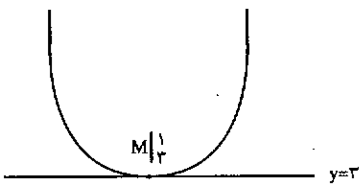
عرض می‌نی‌مم نسبی تابع

پس نقطهٔ $M\begin{vmatrix}1\\3\end{vmatrix}$ می‌نی‌مم نسبی تابع است.

چون عرض می‌نی‌مم نسبی (۳) است، حال نشان می‌دهیم که خط $y = 3$ بر منحنی تابع مماس است:

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x + 4 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 3$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 = 0$$



توجه داریم که اگر خطی بر یک منحنی مماس باشد، چنانچه معادله‌های آنها را با هم تقاطع دهیم (yها حذف)، معادله حاصل باید دو ریشهٔ برابر داشته باشد یا دلتای معادله حاصل برابر ۰ باشد.

حال فرض می‌کنیم $y = k$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع باشد، پس اگر خط $y = k$ را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم (yها حذف)، دلتای معادلهٔ تقاطع حاصل باید برابر ۰ باشد.

$$\begin{cases} y = x^۲ - ۲x + ۴ \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۲x + (۴ - k) = ۰$$

$$\Delta = ۴ - ۴(۴ - k) = ۰ \Rightarrow ۱ - ۴ + k = ۰ \Rightarrow k = ۳$$

پس عرض می‌نی‌مم نسبی منحنی تابع برابر (۳) است.

حال عرض اکسترمم نسبی تابع درجه دوم به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ را بدون استفاده از مشتق به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = ax^۲ + bx + c \\ y = k \end{cases}$$

فرض می‌کنیم $y = k$ عرض اکسترمم نسبی تابع باشد.

$$ax^۲ + bx + c - k = ۰$$

$$\Delta = b^۲ - ۴a(c - k) = ۰ \Rightarrow b^۲ - ۴ac + ۴ak = ۰$$

$$۴ak = ۴ac - b^۲ \Rightarrow k = \frac{۴ac - b^۲}{۴a}$$

پس عرض اکسترمم نسبی تابع درجه دوم به معادلهٔ $y = ax^۲ + bx + c$ برابر $\frac{۴ac - b^۲}{۴a}$ است.

مثال: عرضهای اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y = \frac{۲x}{x^۲ + ۱}$ را به دو روش بیابید.

■ **روش اوّل با استفاده از مشتق:**

$$y' = \frac{۲x^۲ + ۲ - ۴x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲} = \frac{۲ - ۲x^۲}{(x^۲ + ۱)^۲}$$

طولهای اکسترمم نسبی تابع

$$y' = ۰ \Rightarrow ۲ - ۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

(توجه داریم که ریشه‌های سادهٔ مشتق، طولهای اکسترمم نسبی تابع است.)

$$x = ۱ \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} y = \frac{۲}{۲} = ۱$$

عرض ماکزیمم نسبی تابع

$$x = \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} y = \frac{-۲}{۲} = -۱$$

عرض می‌نی‌مم نسبی تابع

■ **روش دوم بدون استفاده از مشتق:** به جای این که فرض کنیم $y = k$ عرض اکسترمم نسبی تابع است، فرض می‌کنیم $y = y$ عرض اکسترمم نسبی تابع باشد. (در واقع معادلهٔ تابع را طرفین وسطین می‌کنیم و بر حسب x مرتب می‌نویسیم.)

$$\begin{cases} y = \frac{۲x}{x^۲ + ۱} \Rightarrow \frac{۲x}{x^۲ + ۱} = y \Rightarrow yx^۲ + y = ۲x \\ y = y \end{cases}$$

$$yx^۲ - ۲x + y = ۰ \; ; \; \Delta = b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow ۴ - ۴y^۲ = ۰$$

$y^۲ = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$ عرضهای اکسترمم نسبی تابع

تذکر: چون منحنی این تابع مجانب قائم ندارد، عرض ماکزیمم نسبی بزرگتر از عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است؛ پس $y = ۱$ عرض ماکزیمم نسبی و $y = -۱$ عرض می‌نی‌مم نسبی است.

توجه: عملاً در مسائل به جای این‌که خط $y = k$ یا خط $y = y$ را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم، یکباره معادلهٔ تابع را بر حسب x مرتّب می‌نویسیم. (در مسائل کسری ابتدا معادلهٔ تابع را طرفین وسطین می‌کنیم.)

مثال: عرضهای اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^۲ + ۱}{x}$ را بیابید.

از روش مورد بحث (بدون استفاده از مشتق استفاده می‌کنیم):

$$y=\frac{x^2+1}{x}\Rightarrow x^2+1=yx\to x^2-yx+1=0$$
$$\Delta=b^2-4ac=0\Rightarrow y^2-4=0\Rightarrow y=\pm 2$$

چون $x=0$ مجانب قائم منحنی تابع است ؛ یعنی منحنی تابع مجانب قائم دارد، پس عرض می‌نی‌مم نسبی تابع بزرگتر از عرض ماکزیمم نسبی تابع است.

بنابراین $y=-2$ عرض ماکزیمم نسبی تابع و $y=2$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است.

خلاصه برای تعیین عرضهای اکسترمم نسبی تابع، معادلهٔ تابع را بر حسب x مرتّب می‌نویسیم، سپس $\Delta=0$، از حلّ معادلهٔ $\Delta=0$ عرضهای اکسترمم نسبی تابع به دست می‌آید.

مثال: عرضهای اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{x^2-5x+4}$ را بدون استفاده از مشتق بیابید.

حل: معادلهٔ تابع را بر حسب x مرتّب می‌نویسیم :

$$y=\frac{x}{x^2-5x+4}\Rightarrow yx^2-5yx+4y=x$$
$$yx^2-(5y+1)x+4y=0\ ,\ \ \Delta=(5y+1)^2-16y^2=0$$
$$9y^2+10y+1=0\qquad a+c=b\ ;\ \begin{cases}y=-1\\ y=-\frac{1}{9}\end{cases}$$

چون منحنی این تابع مجانب قائم دارد، $y=-1$ عرض ماکزیمم نسبی و $y=-\frac{1}{9}$ عرض می‌نی‌مم نسبی تابع است.

تابع به معادلهٔ $y=f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ (حدّاقل a یا 'a مخالف است)، می‌خواهیم عرضهای اکسترمم نسبی این تابع را بیابیم :

$$y=\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$$
$$\Rightarrow ax^2+bx+c=a'yx^2+b'yx+c'y$$

معادلهٔ مرتّب شده بر حسب x

$$(a-a'y)x^2+(b-b'y)x+(c-c'y)=0$$
$$\Delta=(b-b'y)^2-4(a-a'y)(c-c'y)=0\Rightarrow$$
$$(b'^2-4a'c')y^2+2(2ac'+2a'c-bb')y+b^2-4ac=0$$

ریشه‌های این معادله، عرضهای اکسترمم نسبی تابع f است. فرض می‌کنیم ریشه‌های این معادله y_1 و y_2 باشد.

$$y_1.y_2=\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}=\frac{f}{f}\ \frac{\Delta\ \text{صورت تابع}}{\Delta\ \text{مخرج تابع}}$$
$$y_1+y_2=-\frac{b}{a}=\frac{-2(2ac'+2a'c-bb')}{b'^2-4a'c'}$$

مثال: در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2-4x+m}{x-\frac{m}{4}}$، مجموع عرضهای اکسترمم نسبی تابع برابر (۴-) است، m را بیابید.

حل: توجه $a'=0$

$$y_1+y_2=\frac{-2(2ac'+2a'c-bb')}{b'^2-4a'c'}$$
$$-4=\frac{-2(-\frac{m}{2}+0+4)}{1}\Rightarrow\frac{-m}{2}+4=2\Rightarrow m=4$$

مثال: در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x-1}{x^2+mx}$، اگر حاصلضرب عرضهای اکسترمم نسبی برابر $\frac{1}{4}$ باشد، m را بیابید.

حل:

$$y_1.y_2=\frac{b^2-4ac}{b'^2-4a'c'}=\frac{1}{m^2}=\frac{1}{4}\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\pm 2$$

مسأله: تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2+4ax+1^2}{x^2-ax-3}$ مفروض است. ثابت کنید به ازای جمیع مقادیر a یکی از مقادیر اکسترمم

نسبی تابع مقدار ثابتی است. همچنین a را چنان بیابید تا مقدار دیگر اکسترمم نسبی تابع برابر $-\frac{۱}{۴}$ باشد.

حل:

$$y=\frac{x^۲+۴ax+۱۲}{x^۲-ax-۳}$$
$$yx^۲-ayx-۳y=x^۲+۴ax+۱۲$$
$$(y-۱)x^۲-a(۴+y)x-۳(y+۴)=۰$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=a^۲(۴+y)^۲+۱۲(y-۱)(y+۴)=۰$$
$$(y+۴)(a^۲(۴+y)+۱۲(y-۱))=۰$$
$$y+۴=۰\Rightarrow y=-۴$$

یکی از مقادیر اکسترمم نسبی که مقدار ثابتی است.

$$a^۲(۴+y)+۱۲(y-۱)=۰$$
$$y=-\frac{۱}{۴}\ ;\ a^۲(۴-\frac{۱}{۴})+۱۲(-\frac{۱}{۴}-۱)=۰\Rightarrow ۱۵a^۲=۵(۱۲)$$
$$\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=\pm۲$$

مسأله: تابع به معادلهٔ $y=\frac{x+۲m}{x^۲-mx-۲}$ مفروض است. m را چنان بیابید تا عرض می‌نی‌مم نسبی تابع ۹ برابر عرض ماکزیمم نسبی تابع باشد.

حل:

$$y=\frac{x+۲m}{x^۲-mx-۲}\Rightarrow yx^۲-myx-۲y=x+۲m$$
$$yx^۲-(my+۱)x-(۲y+۲m)=۰$$
$$\Delta=b^۲-۴ac=۰\Rightarrow(my+۱)^۲+۴y(۲y+۲m)=۰\Rightarrow$$
$$\underbrace{(m^۲+۸)}_{a}\,y^۲+\underbrace{۱۰m}_{b}\,y+\underbrace{۱}_{c}=۰\quad(I)$$

تذکر مهم: اگر در معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ ، یک ریشهٔ k برابر ریشه دیگر باشد، داریم: $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(k+۱)^۲}{k}$

در معادلهٔ (I) یک ریشهٔ ۹ برابر ریشهٔ دیگر است؛ پس

$$\frac{b^۲}{ac}=\frac{(۹+۱)^۲}{۹}\Rightarrow\frac{۱۰۰m^۲}{m^۲+۸}=\frac{۱۰۰}{۹}$$
$$۹m^۲=m^۲+۸\Rightarrow m^۲=۱\Rightarrow m=\pm۱$$

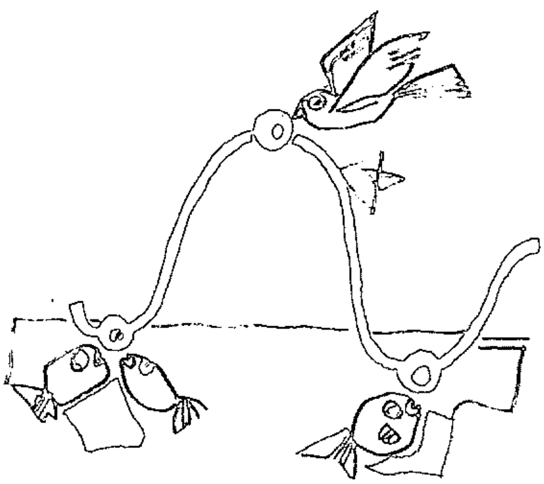
تمرین: بدون استفاده از مشتق عرضهای اکسترمم نسبی، هریک از تابعهای به معادلهٔ زیر را بیابید.

$$۱)\ y=\frac{x^۲+۵}{x}$$

$$۲)\ y=\frac{(x-۱)^۲}{x+۱}$$

تمرین: در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x}{x^۲-۵x+m}$ ، اگر حاصلضرب عرضهای اکسترمم نسبی تابع برابر $\frac{۱}{۹}$ باشد، m را بیابید.

تمرین: در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x-۲a}{x^۲-a}$ ، $(a\neq۰)$ تحقیق کنید، حاصل جمع اکسترمم‌های نسبی تابع مقدار ثابت ۲ است.



ملانصرالدین و مسأله شیر، شتر و کاهو

قسمت اوّل

یان استیوارت، ترجمه: غلامرضا یاسی پور

روزگاری در یکی از جاده‌های خاکی و طویلی که در سرزمین جابُلقا فراوانند، دهقانی در حرکت بود. در دست راست دهقان، کاهویی بزرگ و در دست چپش، افسار دو حیوان بود. در جلوِ افسار، شتری به آهستگی روان بود و پشت سر شتر، شیری پاورچین پاورچین قدم برمی‌داشت. صفی عجیب و غریب، اما مناظری چنین در سرزمین ناهموار جابلقا عادی‌اند؛ ناحیه‌ای که ـ به‌خصوص در جمعه‌ها ـ به‌علت کشاورزی غیرعادی‌اش، مشهور و معروف است. جمعه‌ها، جمعه‌بازار است و دهقان که، همان ملّانصرالدین خودمان باشد، محصول مزرعه‌اش را به بازار می‌برد.

شتر برگردد و سرانجام کاهو را انتقال دهد. اما واضح است که شما کشاورز نیستید؛ چه هر زادهٔ راستین زمین، به‌طور شهودی و بدون تفکر منطقی، می‌داند نقشه‌ای چنین به کجا می‌انجامد. ملّانصرالدین هنگامی که برای بردن شتر بازگردد، با شتری چاق و راضی مواجه می‌شود؛ اما از کاهو اثری نمی‌یابد. چرا که شتر در یک حمله، تمامی کاهو را، هرچند بزرگ، یک لقمهٔ چپ می‌کند.

نقشهٔ ارائه شده باز هم دارای نقصی قطعی است؛ چه زمانی که شیر با شتر تنها بماند، آن را بیشتر به‌صورت یک شتر برگر می‌بیند تا یک شتر. از طرف دیگر، انتظار نداریم که شیر



اما در راه، ملّانصرالدین با مشکلی مواجه شد. پل واقع بر رودخانهٔ مسیر فرو ریخته بود و به‌جای آن، پلی موقّتی از لاستیک و گونی بنا شده بود. پل، تنها طاقت حمل ملّانصرالدین را با یکی از محصولات مزرعه‌اش، یعنی شیر، شتر یا کاهو داشت. (همان‌گونه که گفتیم، کاهوی مزبور، کاهویی بسیار بزرگ بود و شتر موردبحث، حقیقتش را بخواهیم، شتری نسبتاً تنومند.)

ممکن است با نگاهی سرزنش‌آمیز بگویید: این‌که خیلی ساده است، ابتدا شیر را به آن طرف ببرد، بعد برای بردن

گرسنه‌ای در کِرْت صیفی جات، در جست‌وجوی کاهویی بزرگ و آبدار باشد؛ بنابراین سبزیجات را می‌توان با اطمینان‌خاطر، نزد این حیوان گوشتخوار رها کرد.

شاید متوجه شده باشید که مشکل ملّانصرالدین، همان معمّای قدیمی گرگ و بز و کلم است که در این‌جا به‌صورتی دیگر عرضه شده است و شاید به این نکته نیز رسیده باشید که ملّانصرالدین همان **الکوئین** "Alcuin" (۷۳۵ـ ۸۰۴م) ریاضیدان قرون‌وسطی است؛ ریاضیدانی که معمّای مزبور را معمولاً به او نسبت می‌دهند؛ چه این معمّا، به‌طور قطع،

مسأله‌ای باستانی است که در مرجع زیر ظاهر شده است :

Ozanam's Récréations Mathématiques et Physiques of 1694

این را هم اضافه کنیم که در این مورد، حداّقل از یک لحاظ حق دارید ؛ زیرا فکر ملاّنصرالدین، فکر منطقی کسی است که از شکم مادر، ریاضیدان متولد شده باشد. برای چنین شخصی، روش آزمون و خطا به‌کار نمی‌آید ؛ بلکه کار او استدلال منظّم و سیستماتیک است و بدین‌ترتیب است که ملاّنصرالدین چنین استدلال می‌کند :

«باید ابتدا مسأله را ساده کرده، جنبه‌های اساسی آن را بیابم. مطلب مهم این است که هریک از سه شیئ باب جمعه‌بازارم را در کدام طرف درّه بگذارم. این‌که خودم کجا باشم یا پل زوار دررفته کجا باشد، مهم نیست ؛ زیرا پل نمی‌تواند به میل خود حرکت کند. اما بنابه محدودیتهای مربوط به خوردوخوراک دو حیوان مزبور، نباید شیر را با شتر و شتر را با کاهو تنها گذاشت.

مکان هریک از سه شیئ مزبور را می‌توانم با عددهای ۰ و ۱ نمایش دهم ؛ به این ترتیب که از ۰ برای نمایش این طرف درّه و از ۱ برای نمایش طرف دیگر استفاده می‌کنم.

به این ترتیب، ترکیب سه شیئ موردبحث، توسط سه‌تایی (L, λ, l) در فضای سه‌بعدی شیرـ شترـ کاهو نمایش داده می‌شود. به‌عنوان مثال، $(L,\lambda,l) = (1, 0, 1)$ موارد :

$L = 1 \ , \ \lambda = 0 \ , \ l = 1$

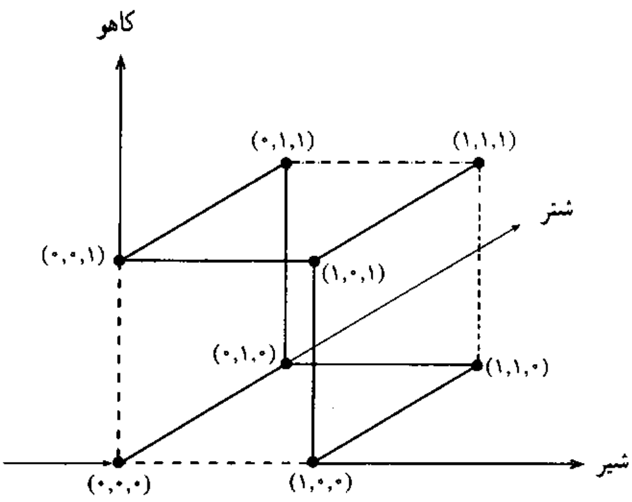
را نمایش می‌دهد، که به این معناست که، شیر در طرف دیگر درّه است، شتر در این‌طرف آن و کاهو در طرف دیگر آن.

اما در این مورد، چند ترکیب موجودند؟ هر مختص L، λ، یا l می‌تواند یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را اختیار کند. به این ترتیب $2 \times 2 \times 2 = 8$ امکان وجود دارد. گذشته از این، امکانات مزبور دارای ساختار هندسی زیبایی نیز هستند : آنها هشت رأس مکعبی واحد در فضای شیرـ شترـ کاهو را تشکیل می‌دهند(شکل ۱ الف).

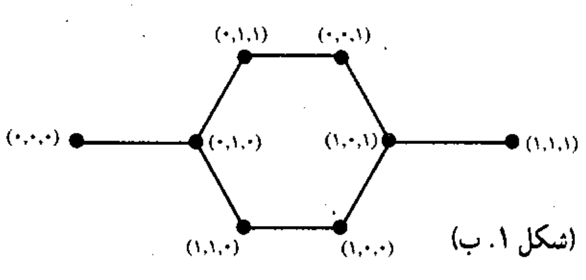
در هربار می‌توانم تنها یکی از این سه موجود را حرکت دهم ؛ یعنی، تنها می‌توانم از یالهای مکعب مزبور عبور کنم، اما گذشتن از بعضی از این یالها قدغن است. برای مثال، یال از $(0,0,0)$ به $(1,0,0)$ نظیر بردن شیر به آن طرف درّه است ؛ ولی این‌کار شتر و کاهو را بی‌نگهبان برجا می‌گذارد و در بازگشت، شتری چاق و چلّه به من سلام و درود می‌گوید ؛ در حالی‌که از کاهو خبری نیست.

در واقع محدودیتهای مربوط به خوردوخوراک شیر و شتر دقیقاً چهار یال را کنار می‌گذارد ؛ چهار یالی که آنها را با خط‌چین و بقیه را که حرکتهای مجاز را نمایش می‌دهند، با خط پر رسم می‌کنم.

به این ترتیب، مسأله به مسأله‌ای هندسی تبدیل می‌شود : آیا می‌توان با عبور از یالهای پر مکعب از $(0,0,0)$ـ تمام موجودات در این‌طرفـ آغاز کرد و به $(1,1,1)$ـ تمام موجودات در طرف دیگرـ رسید؟ و صد البته که پاسخ«آری» است. در واقع، از نظرگاه توپولوژیک، می‌توان یالها را مسطّح کرد(شکل ۱ ب)



(شکل ۱. الف)



(شکل ۱. ب)

شکل ۱. الف. حرکتهای ممکن در فضای شیرـ شترـ کاهو بانمودار مشخص شده‌اند. یالهای خط‌چین قدغن و یالهای پر مجازند. ب. نمودار سادهٔ شدهٔ یالهای پر، دو پاسخ متمایز را واضح می‌کند.

راه‌حل زل در چشمان من نگاه کند. در واقع، در صورتی که از تکرارهای غیرضروری اجتناب کنم[جدول زیر را ملاحظه کنید] **دو** راه‌حل و **تنها** دو راه موجودند. آنها تنها در عملِ متقارن شیر/ کاهو متفاوتند.

روش هندسی ملانصرالدین در حوزهٔ وسیعی از معمّاهایی به‌کار می‌رود که در آنها اشیا را باید طبق قواعد خاصی تجدید آرایش کرد و هدف، رفتن از مکان آغازی معلومی به مکان پایانی معلومی است. طریقهٔ راه در این‌گونه مسائل، ترسیم **نموداری** است شامل رأسها(نقطه‌ها)یی که توسط یالها(خطها) به‌هم وصل شده باشند. در این‌صورت، هر رأس نظیر مکانی در معمّا و هر یال نظیر حرکتی قانونی است. بنابراین، راه‌حلّ معمّا مسیری از نمودار است که رأس آغازی را به پایانی وصل می‌کند. معمولاً چنین مسیری به وضوح به چشم می‌آید؛ البته به‌شرطی که معمّا آن‌قدر ساده باشد که کل نمودارِ آن را بتوان ترسیم کرد.

چگونه از رودخانه بگذریم تا محصولاتمان سالم بماند.

راه‌حلّ اول:

(۰،۰،۰)	آغاز
(۰،۱،۰)	شتر را به آن طرف ببرید
(۰،۱،۱)	(بازگردید و) کاهو را ببرید
(۰،۰،۱)	شتر را بازگردانید
(۱،۰،۱)	شیر را به آن طرف ببرید
(۱،۱،۱)	(بازگردید و) شتر را ببرید

راه‌حلّ دوم:

(۰،۰،۰)	آغاز
(۰،۱،۰)	شتر را به آن طرف ببرید
(۱،۱،۰)	(بازگردید و) شیر را ببرید
(۱،۰،۰)	شتر را بازگردانید
(۱،۰،۱)	کاهو را به آن طرف ببرید
(۱،۱،۱)	(بازگردید و) شتر را ببرید

معمّاهایی از این دست، در واقع مارپیچهایی تغییر قیافه داده‌اند؛ زیرا مارپیچ در حقیقت، نموداری است که به‌گونه‌ای اندک متفاوت رسم شده است.

■ مسألهٔ ۱

هفتهٔ بعد، *ملانصرالدین یک کاهو، یک شتر، یک شیر و یک نهنگ به بازار برد. پل همچنان فرسوده بود.* همان‌طور که *می‌دانیم، نهنگهایی که تحت مواظبت نباشند، شیرها را می‌خورند؛ مگر این‌که پای کاهویی نیز در میان باشد؛ زیرا هنگامی‌که بوی کاهوی تازه به مشام نهنگی برسد، رام و بی‌آزار می‌شود. نموداری رسم(ممکن است ملاحظهٔ این مطلب مفید باشد که نمودار موردبحث ابرمکعبی* "hypercube"، *با مختصات* (d,L,λ,l) جمیعاً ۰ *یا* ۱، *و بعضی یالهای حذف شده، در فضای نهنگ- شیر- شتر- کاهو است) و ملاحظه کنید که برای این مسأله، راه‌حلّی وجود دارد یا خیر؟*

گرچه رهیافت نموداری ملّا به‌طور اصولی در مورد بسیاری از معمّاها کاربردپذیر است؛ اما اغلب با اشکالی عملی مواجه می‌شویم و آن اشکال، این است که اگر تعداد مکانها یا حرکتها خیلی زیاد باشد، نمودار مربوطه را نمی‌توان رسم کرد. به‌عنوان مثال، اصولاً نمی‌توان مکعب روبیک "Rubic Cube" را با رسم نمودارش حل کرد؛ چرا که نمودار مزبور به

۴۳،۲۵۲،۰۰۳،۲۷۴،۴۸۹،۸۵۶،۰۰۰

رأس نیاز دارد!

مسألهٔ بعدی، تا اندازه‌ای حدود امکانهای عملی را مشخص می‌کند و نیز این موضوع را که اندکی تفکر اضافه، می‌تواند به راه‌حلّ ساده‌تری منجر شود.

■ مسألهٔ ۲

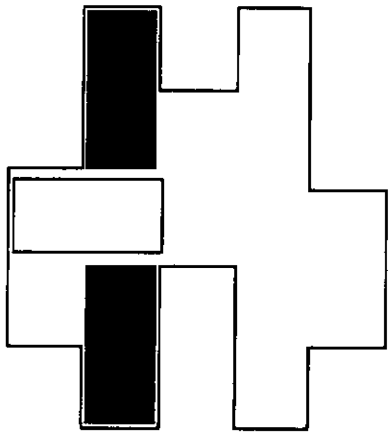
با استفاده از روش نموداری ملانصرالدین، طریقی بیابید که طبق آن، سه بلوک(شکل ۲) را بدون برگرداندن آنها، چنان بلغزانید که سمت راست ناحیهٔ مشخص شده را اشغال کنند.

آیا معمّای بلوکها مسألهٔ ساده‌تری را به یادتان می‌آورد؟ از چه راهی به کمکتان می‌آید؟

معمّای قدیمی دیگری، به نموداری با زیبایی قابل‌ملاحظه‌ای

منجر می‌شود. برج هانوی "Tower of Hanoi" در سال ۱۸۸۳ میلادی توسط ریاضیدان خلّاق فرانسوی **ادوارد لوکاس** "Edouard Lucas" (با نام مستعار **ام. کلاوس** "M. Claus") به بازار آمد.

به‌سال ۱۸۸۴ **ام. دوپارویل**



شکل ۲ ــ آیا می‌توانید بلوکها را به سمت راست ناحیه بلغزانید؟

"M. De parville" در **La Nature** این مسأله را با عبارتهای شاعرانهٔ زیر توصیف کرده است:

در معبد بزرگ بنارس، زیر گنبدی که مرکز زمین را مشخص می‌کند، صفحه‌ای برنجین قرار دارد که در آن، سه میلهٔ الماسین به ارتفاع یک اَرَج و به ضخامت بدن یک زنبور تعبیه شده است. بر یکی از این میله‌ها، خداوند متعال، در آغاز خلقت، شصت‌وچهار قرص زرّین چنان قرار داده است که بزرگترین قرص بر صفحهٔ برنجین واقع شده و قرصهای دیگر، به‌ترتیب، از بزرگ به کوچک روی یکدیگر قرار گرفته‌اند. این همان **برج براهما** "Tower of Brahma" است.

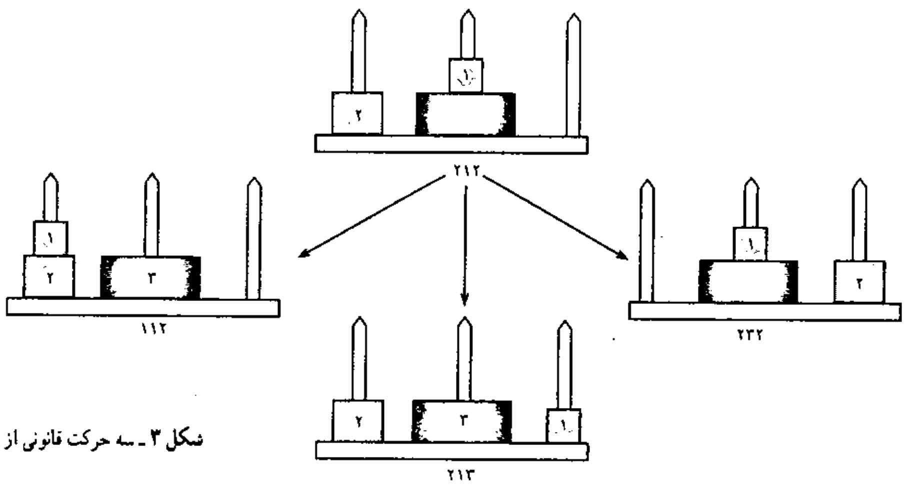
بَرهمنان معبد شب و روز، بدون وقفه، قرصها را طبق قوانین ثابت ولایتغیر براهما، از یکی از میله‌های الماسین به دیگری انتقال می‌دهند. قوانین مزبور برآنند که کاهن دست‌اندرکار این وظیفه، نباید هربار بیش از یک قرص را حرکت دهد و باید این قرص را بر میله چنان قرار دهد که قرص کوچکتری زیر آن واقع نشود.

زمانی‌که به این ترتیب، شصت‌وچهار قرص موردبحث از میله‌ای که آنها را خداوند در آغاز خلقت بر آن قرار داده است، بر یکی از میله‌های دیگر منتقل شود، برج، معبد، نیز برهمنان خرد و خمیر خواهند شد و دنیا با صدایی رعدآسا به پایان می‌رسد.

برج هانوی مشابه برج براهماست؛ منتها با هشت(یا گاهی کمتر از هشت) قرص. برج مزبور یکی از دوستان قدیمی ریاضیدانان حوزهٔ تفریح اندیشه است و به‌نظر نمی‌رسد که بتوان مطلب تازه‌ای دربارهٔ آن بیان کرد.

اما چنان‌که ملاحظه خواهیم کرد، رهیافت نموداری ملّانصرالدین به هماهنگی جالب و شگفت‌انگیزی با عصر جدید می‌انجامد.

در این‌جا برای تصریح کار، هانوی ۳ـ قرصی، یعنی، برج هانویی با سه قرص را درنظر می‌گیریم. مکانها و حرکتهای قانونی نمونه را در شکل ۳ نشان داده‌ایم. برای تشکیل نمودار، باید ابتدا راهی برای نمایش جمیع مکانهای ممکن بیابیم، سپس



شکل ۳ ـ سه حرکت قانونی از مکان ۲۱۲

حرکتهای قانونی بین آنها را مشخص کنیم و سرانجام به ترسیم نمودار بپردازیم.

از آن‌جا که آغاز کار واضح نیست، توضیح می‌دهم عملاً چه‌کار کردم و سپس با واپس‌نگری، ملاحظه خواهیم کرد که

روشی بس هوشمندانه‌تری نیز وجود دارد.

اما چگونه می‌توان یک مکان را نمایش داد؟ سه قرص موردنظر را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ چنان مشخص می‌کنیم که ۱ کوچکترین و ۳ بزرگترین قرص باشد. میله‌ها را از چپ به راست ۱، ۲ و ۳ می‌نامیم. فرض می‌کنیم می‌دانیم هر قرص بر کدام‌یک از سه میله واقع است؛ به‌عنوان مثال، قرص ۱ بر سوزن ۲، قرص ۲ بر سوزن ۱ و قرص ۳ بر سوزن ۲. در این‌صورت، مکان موردنظر را به‌طور کامل معین کرده‌ایم؛ زیرا قواعد مزبور مستلزم این است که قرص ۳ باید **زیر** قرص ۱ قرار داشته باشد. این اطلاعات را در دنبالهٔ ۲۱۲ رمزبندی می‌کنیم، سه رقم مزبور، به‌ترتیب، میله‌های مربوط به قرصهای ۱، ۲ و ۳ را نمایش می‌دهند.

بنابراین، هر مکان واقع در هانوی ۳ـ قرصی موردنظر، نظیر دنباله‌ای سه‌رقمی است که هریک از آنها ۱، ۲ یا ۳ است. برای واضح کردن این امر، شکل ۳ شامل این رمزهاست. نتیجه می‌شود که دقیقاً $3 \times 3 \times 3 = 27$ مکان متفاوت در هانوی ۳ـ قرصی موجود است؛ اما حرکتهای مجاز کدامند؟

کوچکترین قرص واقع بر یک میلهٔ مفروض، باید در بالا واقع باشد. در این‌صورت، این وضعیت نظیر **اولّین ظهور** شمارهٔ آن میله در دنباله است. در صورت حرکت دادن این قرص، باید آن را به بالای تودهٔ واقع در میلهٔ دیگر قرار دهیم؛ یعنی شماره را چنان تغییر می‌دهیم که **اولّین ظهور** شماره‌ای دیگر شود.

به‌عنوان مثال، در مکان ۲۱۲ی فوق، فرض می‌کنیم مایل به جابه‌جا کردن قرص ۱ باشیم. این قرص بر میلهٔ ۲ قرار دارد و نظیر اولّین ظهور ۲ در دنبالهٔ مربوطه است و فرض می‌کنیم این اولّین ۲ را به ۱ تغییر می‌دهیم. در این‌صورت، این رقم(به‌طور بدیهی!) اولّین ظهور رقم ۱ است؛ بنابراین، جابه‌جایی از ۲۱۲ به ۱۱۲ قانونی است.

همچنین است جابه‌جایی ۲۱۲ به ۳۱۲؛ زیرا اولّین ظهور ۳ در اولّین مرتبهٔ دنبالهٔ مربوطه است. می‌توان قرص ۲ را نیز جابه‌جا کرد؛ زیرا اولّین ظهور نماد ۱ در مرتبهٔ دوم دنبالهٔ مربوطه است. اما نمی‌توان آن را به ۲ تغییر داد؛ زیرا ۲ قبلاً، در مرتبهٔ اولّ ظاهر شده است. اما تبدیل به ۳ قانونی است. بنابراین می‌توان ۲۱۲ رابه ۲۳۲ تبدیل کرد(اما به ۲۲۲ **نمی‌توان**). ــ (جدول زیر)

سرانجام قرص ۳ را نمی‌توان حرکت داد؛ زیرا رقم سوّم واقع در دنبالهٔ ۲ است و این اولّین ظهور ۲ **نیست**.

در جمع‌بندی: از مکان ۲۱۲ جابه‌جاییهای قانونی به ۱۱۲، ۳۱۲ و ۲۳۲، و **تنها** به اینها را می‌توان انجام داد.

با پیروی از قاعده‌های فوق، می‌توان جمیع ۲۷ مکان و تمام حرکتهای ممکن را فهرست کرد؛ نتیجهٔ این کار را در جدول داده شده نشان داده‌ایم.

۱۱۳	به یکی از اینها ختم کنید	....	از اینجا آغاز کنید
۱۱۲	۳۱۱	۲۱۱	۱۱۱
۱۳۱	۳۱۲	۲۱۲	۱۱۲
۱۳۲	۳۱۳	۲۱۳	۱۱۳
۱۳۳	۳۲۱	۲۲۲	۱۲۱
۱۲۱	۳۲۲	۲۲۳	۱۲۲
۱۲۲	۳۲۳	۲۳۱	۱۲۳
۱۲۳	۳۳۱	۲۳۲	۱۳۱
۲۳۱	۳۳۲	۲۳۳	۱۳۲
۲۳۲	۳۳۳	۱۱۱	۱۳۳
۲۳۳	۳۱۱	۱۱۲	۲۱۱
۲۲۳	۳۱۲	۱۱۳	۲۱۲
۲۲۱	۳۱۳	۱۲۱	۲۱۳
۲۱۱	۳۲۱	۱۲۲	۲۲۱
۲۱۲	۳۲۲	۱۲۳	۲۲۲
۲۱۳	۳۲۳	۱۳۱	۲۲۳
۳۲۱	۳۳۱	۱۳۲	۲۳۱
۳۲۲	۳۳۲	۱۳۳	۲۳۲
۳۲۳	۳۳۳	۱۱۱	۲۳۳
۳۱۱	۲۱۱	۱۱۲	۳۱۱
۳۱۲	۲۱۲	۱۱۳	۳۱۲
۳۱۳	۲۱۳	۱۲۱	۳۱۳
۳۳۲	۲۲۱	۱۲۲	۳۲۱
۳۳۱	۲۲۲	۱۲۳	۳۲۲
	۲۲۳	۱۳۱	۳۲۳
	۲۳۱	۱۳۲	۳۳۱
	۲۳۲	۱۳۳	۳۳۲
	۲۳۳		۳۳۳

حرکتهای قانونی در هانوی ۳ـ قرصی

بقیه در شمارهٔ بعد

بخشی از یک کتاب



ورودی به نظریه اعداد
(سری کتابهای کوچک ریاضی)

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

حمیدرضا امیری

بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب م م) یا بزرگترین شمارندهٔ مشترک

عدد صحیح c را مقسوم‌علیه مشترک یا شمارندهٔ مشترک دو عدد صحیح a و b می‌نامیم، در صورتی که هر دو را بشمارد؛ یعنی $c|a$ و $c|b$.

به عنوان مثال، عدد ۳ یک شمارندهٔ مشترک برای دو عدد ۶ و ۹- است؛ زیرا ۶|۳ و ۹-|۳.

تعریف: اگر a و b دو عدد صحیح باشند؛ به طوری که حداقل یکی از آنها صفر نباشد، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب‌م‌م) a و b را با نماد (a,b) نمایش داده و آن عددی است طبیعی چون d، که اولاً مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد و دوم این که هر مقسوم‌علیه مشترک a و b از d کوچکتر باشد.

اگر بخواهیم معادل تعریف فوق را با نمادهای ریاضی بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$(a,b)=d \Leftrightarrow \begin{cases} \text{I)}\ d|a,\quad d|b \\ \text{II)}\ \forall c>0,\ c|a,\ c|b \Rightarrow c\le d \end{cases}$$

به مثالهای زیر توجه کنید:

$(3,-6)=3,\ (4,9)=1,\ (6,8)=2$

تعریف: اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $(a,b)=1$، در این صورت می‌گوییم a و b نسبت به هم اوّل هستند (یا نسبت به هم متباین هستند). به‌عنوان مثال، ۱=(۹، ۴)، ۱=(۵، ۳) و ۱=(۶، ۵).

تذکر: اگر دو عدد صحیح a و b مفروض باشند و مجموعهٔ همهٔ شمارنده‌های مشترک a و b را A بنامیم؛ یعنی فرض کنیم $A=\{c|c|a,\ c|b\}$ واضح است که $A\subseteq Z$ و $A\neq\varnothing$؛ زیرا، $1\in A$. از طرفی اگر فرض کنیم $a<b$، در این صورت $|a|$

$|a|$ یک کران بالا برای مجموعهٔ A است (زیرا عددی بزرگتر از $|a|$ نمی‌تواند a را عاد کند)، پس طبق قضیه‌های[1] قبل مجموعهٔ A باید دارای عضو انتها باشد که این عضو انتها همان ب‌م‌م است. درواقع ثابت شد که همواره ب‌م‌م دو عدد صحیح که حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد، موجود است.

قضیهٔ ۱: اگر a و b دو عدد صحیح و $a|b$ $(a \neq 0)$، در این صورت $(a,b) = |a|$.

اثبات: باید ثابت کنیم که $|a|$ هر دو شرط ب‌م‌م را دارد:

$$\text{I)}\ a|a,\ -a|a \Rightarrow |a|\,\big|\,a$$

(یعنی $|a|$ یک مقسوم علیه مشترک a و b است.)

طبق فرض: $a|b \Rightarrow -a|b \Rightarrow |a|\,\big|\,b$

II) فرض کنیم $c>0,\ c|a,\ c|b$

$$c|a \Rightarrow |c| \leq |a| \overset{c>0}{\Rightarrow} c \leq |a|$$

(یعنی $|a|$ از هر مقسوم‌علیه مشترک a و b بزرگتر است.)

قضیهٔ ۲: اگر p عددی اوّل باشد و a عددی صحیح؛ به طوری که $p \nmid a$، در این صورت همواره $(p,a)=1$ (عدد اوّل p نسبت به هر عددی که مضرب p نباشد، اوّل است.)

اثبات: فرض کنیم $(p,a)=d$، ثابت می‌کنیم $d=1$.

$$(p,a) = d \rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|p \overset{p\ \text{اول}}{\Rightarrow} d=1 \end{cases} \quad (1)\ \text{یا}\ d=p$$

اگر $d=p$ باشد، در این صورت، با توجه به (۱) باید $p|a$ (به جای d قرار می‌دهیم p) که با فرض $(p \nmid a)$ تناقض دارد؛ پس باید $d=1$.

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ بزو): اگر a و b دو عدد صحیح و حداقل یکی از آنها مخالف صفر باشد، در این صورت، عضو ابتدای مجموعهٔ $A = \{ma+nb>0 \mid m,n \in Z\}$، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b است؛ یعنی: $\min A = (a,b)$.

اثبات: واضح است که $A \subseteq N$، از طرفی حداقل یکی از دو عدد a و b ناصفر است، بنابراین حداقل یکی از دو عدد $|a|$ یا $|b|$ عضو A است و $A \neq \varnothing$؛ زیرا:

$$\text{I)}\ a \neq 0 \Rightarrow |a| > 0 \Rightarrow |a| = \pm a + 0b \Rightarrow |a| \in A$$

$$\text{II)}\ b \neq 0 \Rightarrow |b| > 0 \Rightarrow |b| = 0a \pm b \Rightarrow |b| \in A$$

(توجه دارید که عددی عضو A است که دو شرط داشته باشد؛ یکی آن که مثبت باشد و دیگر آن که به صورت ترکیبی خطی و صحیح از a و b نوشته شود.)

پس ثابت شد که A زیرمجموعه‌ای ناتهی از N است؛ بنابراین طبق اصل خوش‌ترتیبی، باید دارای عضو ابتدا باشد. اگر عضو ابتدای A را d بنامیم، کافی است ثابت کنیم $d=(a,b)$. البته توجه دارید که چون فرض شده $d=\min A$، پس باید $d \in A$؛ یعنی m_0 و n_0ای در Z باشند، به قسمی که $d = m_0a + n_0b$ (۱).

برای اثبات این که $d=(a,b)$، دو شرط ب‌م‌م را برای d بررسی کنیم، شرط اوّل آن است که $d|a$ و $d|b$، پس a را بر d تقسیم می‌کنیم که طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a=dq+r$ که $0 \leq r < d$.

اگر $0<r<d$ در این صورت داریم:

$$0 < r = a - dq \overset{(1)}{=} a - (m_0a + n_0b)q = \underbrace{(1-m_0q)}_{m}a + \underbrace{(n_0q)}_{n}b$$

(r هر دو شرط را برای عضو A بودن داراست.) $\Rightarrow r \in A$

امّا $r \in A$ با توجه به این که $r<d$ و تعریف عضو ابتدا برای d یک تناقض ایجاد می‌کند (زیرا عضوی از عضو ابتدا کوچکتر نمی‌توانیم در مجموعه داشته باشیم.) پس باید $r=0$؛ یعنی $a=dq$ یا $d|a$ و به همین طریق، ثابت می‌شود $d|b$.

حال فرض کنیم $c>0$ و $c|a$ و $c|b$، ثابت می‌کنیم که $c \leq d$.

$$\left.\begin{array}{l} c|a \Rightarrow c|m_0a \\ c|b \Rightarrow c|n_0b \end{array}\right\} \Rightarrow c|m_0a+n_0b \overset{(1)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow c \leq d$$

نتیجه‌های حاصل از قضیهٔ بزو

نتیجهٔ ۱: اگر $(a,b)=d$ آن‌گاه اعدادی صحیح و نسبت به هم اوّل مانند r و s وجود دارند؛ به قسمی که $ra+sb=d$

(بمم دو عدد را بر حسب ترکیب خطی آن دو عدد می‌توان نوشت).

اثبات: طبق قضیهٔ بزو d عضو ابتدای مجموعهٔ ترکیبهای خطی a و b است، پس باید $d \in A$ و هر عضو A ترکیبی خطی از a و b است. اثبات نسبت به هم اوّل بودن ضرایب این ترکیب خطی؛ یعنی r و s را درنتیجهٔ (۴) ملاحظه کنید.

نتیجهٔ ۲: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، آن‌گاه همواره بمم آنها را نیز می‌شمارد؛ یعنی:

$$a|b, a|c \Rightarrow a|(b,c)$$

اثبات: فرض کنیم $(b,c)=d$ ثابت می‌کنیم که $a|d$.

$$(b,c)=d \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} \exists r,s,\ rb+sc=d$$

از طرفی $a|b, a|c \Rightarrow a|rb, a|sc \Rightarrow a|rb+sc=d \Rightarrow a|d$

تذکر مهم: عکس قضیهٔ بزو در حالت کلّی برقرار نمی‌باشد؛ یعنی اگر عددی چون d برابر با ترکیب خطی دو عدد صحیح مانند a و b باشد، نمی‌توان نتیجه گرفت که d بمم دو عدد a و b است.

به عنوان مثال $27=3 \times 4+3 \times 5$ ولی $(5,3)=1 \neq 27$.

نتیجهٔ ۳: عکس قضیهٔ بزو در حالت $d=1$ برقرار است؛ یعنی اگر ترکیب خطی دو عدد صحیح، مساوی با یک باشد، آن‌گاه آن دو عدد نسبت به هم اوّل هستند.

$ra+sb=1 \Rightarrow (a,b)=1$

اثبات: فرض کنیم $(a,b)=d$ و ثابت می‌کنیم که $d=1$.

$$(a,b)=d \begin{cases} \nearrow d|a \Rightarrow d|ra \\ \searrow d|b \Rightarrow d|sb \end{cases} \Rightarrow d|ra+sb$$

و چون طبق فرض $ra+sb=1$ ، بنابراین باید $d|1$ که نتیجه می‌شود $d=1$.

نتیجهٔ ۴: اگردو عدد صحیح مانند a و b را بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم کنیم، آن‌گاه خارج‌قسمتها نسبت‌به هم اوّل خواهند بود؛ یعنی:

$$(a,b)=d \Rightarrow (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$$

اثبات: کافی است ثابت کنیم یک ترکیب خطی از $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ مساوی با عدد یک است و طبق نتیجهٔ (۳) ثابت می‌شود $\frac{a}{d}$ و $\frac{b}{d}$ نسبت به هم اوّل هستند.

$$(a,b)=d \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} \exists r,s \in Z \text{ ، } ra+sb=d \overset{\text{دو طرف بر d تقسیم}}{\Rightarrow}$$

$$r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=\frac{d}{d} \Rightarrow r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=1 \overset{\text{نتیجهٔ ۳}}{\Rightarrow} (\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$$

تذکر مهم: تساویِ $r\frac{a}{d}+s\frac{b}{d}=1$ ترکیبی خطی از r و s نیز هست که در این صورت، ثابت می‌شود $(r,s)=1$ ؛ یعنی در قضیهٔ بزو ضرایب ترکیب خطی که d را می‌سازد، همواره نسبت به هم اوّل هستند!

نتیجهٔ ۵ (لم اقلیدس): هرگاه عددی حاصلضرب دو عدد را بشمارد و نسبت به یکی از آن دو، عدد اوّل باشد، آن‌گاه همواره دیگری را می‌شمارد:

$$a|bc, (a,b)=1 \Rightarrow a|c$$

اثبات: برای اثبات این که $a|c$ کافی است که ثابت کنیم $c=aq$ ، پس به دنبال یک تساوی هستیم که یک طرف آن c باشد و طرف دیگر مضرب a باشد:

$$(a,b)=1 \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} ra+sb=1 \Rightarrow rac+sbc=c \qquad (1)$$

از طرفی طبق فرض: $a|bc \Rightarrow bc=aq_1 \overset{(1)}{\Rightarrow} rac+s(aq_1)=c$

$$\Rightarrow c=a\underbrace{(rc+sq_1)}_{q} \Rightarrow c=aq \Rightarrow a|c$$

مسألهٔ مهم: ثابت کنید، اگر a ، b ، c و d اعداد طبیعی بوده

و $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ و داشته باشیم $(a,b)=(c,d)=1$، آن‌گاه $a=c$ و $b=d$.

اثبات: کافی است ثابت کنیم $a \le c$ و $c \le a$ که در این صورت $a=c$ و در نتیجه $b=d$ حاصل می‌شود:

$$(1)\quad ad=bc \Rightarrow a|bc,\ (a,b)=1 \overset{\text{لم اقلیدس}}{\Rightarrow} a|c \Rightarrow a\le c$$: طبق فرض

$$(2)\quad ad=bc \Rightarrow c|ad,\ (c,d)=1 \overset{\text{لم اقلیدس}}{\Rightarrow} c|a \Rightarrow c\le a$$:طبق فرض

(۱) و (۲) $a=c, ad=bc \Rightarrow \not{a}d=b\not{a} \Rightarrow b=d$

تست: اگر a و b دو عدد صحیح و $p|ab$ و $37p-29a=1$، کوچکترین عضو مثبت مجموعهٔ $A=\{mp+nb: m,n\in Z\}$ کدام است؟ (سراسری ۷۵)

۱) b　　　۲) p

۳) ۱　　　۴) ۸

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا با توجه به رابطهٔ $37p-29a=1$ و نتیجهٔ (۳) باید $(p,a)=1$ و چون $p|ab$ پس طبق لم اقلیدس باید $p|b$؛ بنابراین $(p,a)=|p|$ که طبق قضیهٔ بزو $\min A=(p,b)$، پس $\min A=|p|$ که البته در گزینه‌ها باید به جای p عدد $|p|$ به کار می‌رفت!

نتیجهٔ ۶: اگر عددی بر دو عدد بخش‌پذیر باشد و آن دو عدد نسبت به هم اوّل باشند، آن‌گاه بر حاصلضرب آن دو عدد نیز بخش‌پذیر است:

$$b|a,\ c|a,\ (b,c)=1 \Rightarrow bc|a$$

اثبات: برای اثبات این که، $bc|a$ کافی است ثابت کنیم $a=bcq$ که به یک تساوی نیازمندیم؛ طوری که در یک طرف آن a و طرف دیگر آن مضرب bc باشد:

$$(1)\quad (b,c)=1 \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} rb+sc=1 \overset{\text{دو طرف در a ضرب}}{\Rightarrow} rab+sac=a$$

از طرفی طبق فرض: $b|a,\ c|a \Rightarrow a=bq_1,\ a=cq_2$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} r(cq_2)b+s(bq_1)c=a \Rightarrow a=bc\underbrace{(rq_2+sq_1)}_{q}$$

$$\Rightarrow a=bcq \Rightarrow bc|a$$

تست: عدد k بر دو عدد ۹ و t بخش‌پذیر است، اگر k بر 9t نیز بخش‌پذیر باشد، در این صورت t کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۳　　　۲) ۶

۳) ۴　　　۴) ۹

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا طبق نتیجهٔ ۶، باید $(9,t)=1$ که در بین گزینه‌ها فقط $(9,4)=1$.

نتیجهٔ ۷: اگر p عددی اوّل و $p|ab$، آن‌گاه $p|a$ یا $p|b$ (p حداقل یکی از a یا b را عاد می‌کند).

اثبات: اگر $p|a$ حکم ثابت است و اگر $p\nmid a$ طبق قضیهٔ (۲) باید $(p,a)=1$ و

در نتیجه، بنابر لم اقلیدس، باید $p|b$؛ یعنی:

$$p\nmid a \Rightarrow (p,a)=1,\ p|ab \Rightarrow p|b$$

که در این صورت نیز حکم به اثبات رسید؛ یعنی همواره $p|a$ یا $p|b$.

نتیجهٔ ۸: اگر $(a,b)=d$ و $k\in N$ در این صورت $(ka,kb)=kd$ و بعکس.

اثبات (شرط لازم):

$$\overbrace{(a,b)=d}^{\text{فرض}} \Rightarrow \overbrace{(ka,kb)=kd}^{\text{حکم}}=k(a,b)$$

دو شرط ب‌م‌م را برای kd بررسی می‌کنیم:

$$I)\ (a,b)=d \begin{cases} d|a \Rightarrow kd|ka \\ d|b \Rightarrow kd|kb \end{cases}$$

II) فرض کنیم $c>0, c|kb \overset{\text{باید ثابت کنیم}}{\Rightarrow} c\le kd$

$$(1)\quad (a,b)=d \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} ra+sb=d \Rightarrow rka+skb=kd$$ طبق فرض

از طرفی فرض کرده‌ایم: $c|ka, c|kb \Rightarrow c|rka, c|skb \Rightarrow c|rka+skb$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} c|kd \Rightarrow c \le kd$$

(شرط کافی):

$$\overbrace{(ka,kb)=kd}^{\text{فرض}} \Rightarrow \overbrace{(a,b)=d}^{\text{حکم}}$$

حال دو شرط ب‌م‌م را برای d بررسی می‌کنیم :

$$\text{I)}\ (ka,kb)=kd \begin{cases} kd|ka \Rightarrow d|a \\ kd|kb \Rightarrow d|b \end{cases}$$

II) فرض کنیم $c>0, c|a, c|b \overset{\text{باید ثابت کنیم}}{\Rightarrow} c \le d$

$$(ka,kb)=kd \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} rka+skb=kd \Rightarrow ra+sb=d \quad (۲)$$

از طرفی فرض کرده‌ایم : $c|a, c|b \Rightarrow c|ra, c|sb \Rightarrow c|ra+sb$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} c|d \Rightarrow c \le d$$

تست: اگر $(a,b)=1$، در این صورت $(a+b,a-d)$ کدام است؟

۱) ۱ ‏ ۲) ۲

۳) ۱ یا ۲ ‏ ۴) ۱ یا ۲ یا ۴

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا اگر فرض کنیم $(a+b,a-b)=d$ در این صورت داریم :

$$\left.\begin{matrix} d|a+b \\ d|a-b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \Rightarrow d|(a+b)+(a-b) \Rightarrow d|2a \\ \Rightarrow d|(a+b)-(a-d) \Rightarrow d|2b \end{matrix}$$

$$d|2a, d|2b \overset{\text{نتیجهٔ ۲}}{\Rightarrow} d|(2a,2b) \overset{\text{نتیجهٔ ۸}}{\Rightarrow} d|2(a,b) \Rightarrow d|2\times 1=2$$

$$\Rightarrow d=1 \text{ یا } d=2$$

نتیجهٔ ۹: اگر عددی نسبت به دو عدد اوّل باشد، آن‌گاه نسبت به حاصلضرب آن دو عدد نیز اوّل است و بعکس :

$$(a,b)=1, (a,c)=1 \Leftrightarrow (a,bc)=1$$

اثبات (شرط لازم):

$$\left.\begin{matrix} (a,b)=1 \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} r_1a+s_1b=1 \\ (a,c)=1 \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} r_2a+s_2c=1 \end{matrix}\right\} \underset{\text{در هم ضرب}}{\overset{\text{دو طرف تساویها}}{\Rightarrow}}$$

$$r_1r_2a^2 + r_1s_2ac + r_2s_1ab + s_1s_2bc = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{(r_1r_2a + r_1s_2c + r_2s_1b)}_{r}a + \underbrace{(s_1s_2)}_{s}bc = 1$$

$$\Rightarrow ra+sbc=1 \overset{\text{نتیجهٔ ۳}}{\Rightarrow} (a,bc)=1$$

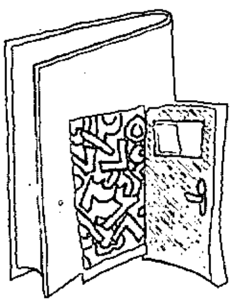
اثبات (شرط کافی):

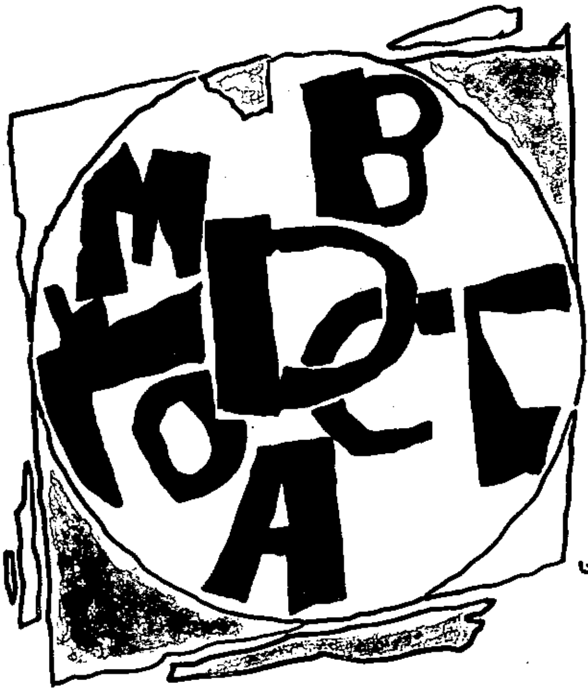
$$(a,bc)=1 \overset{\text{قضیهٔ بزو}}{\Rightarrow} ra+sbc=1 \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow ra+(sb)c=1 \overset{\text{نتیجهٔ ۳}}{\Rightarrow} (a,c)=1$$

$$(1) \Rightarrow ra+(sc)b=1 \overset{\text{نتیجهٔ ۳}}{\Rightarrow} (a,b)=1$$

۱. هر زیر مجموعهٔ ناتهی Z که از بالا کراندار باشد، دارای عضو انتها است.



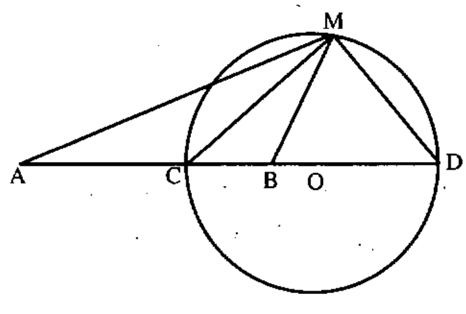


مکان هندسی (۲۳)

دایره آپولونیوس

محمدهاشم رستمی

دایرهٔ آپولونیوس: مکان هندسی، نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت K($K\neq 0$, $K\neq 1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.



اثبات به روش هندسی: دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P درنظر گرفته، خط راست AB را رسم می‌کنیم و روی این خط، دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند ؛ یعنی، (۱) $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=K$ باشد. دایره به قطر CD مکان هندسی موردنظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است ؛ زیرا :

اوّلاً: هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر K است ؛ زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است، پس دستگاه M-ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی، یعنی MC و MD بر هم عمود می‌باشند(زاویهٔ $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر 90° است)، پس این دو شعاع، نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی زاویه‌های بین دو شعاع دیگر می‌باشند ؛ یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم نیمسازهای هر زاویه، ضلع روبه‌رو آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=K$$

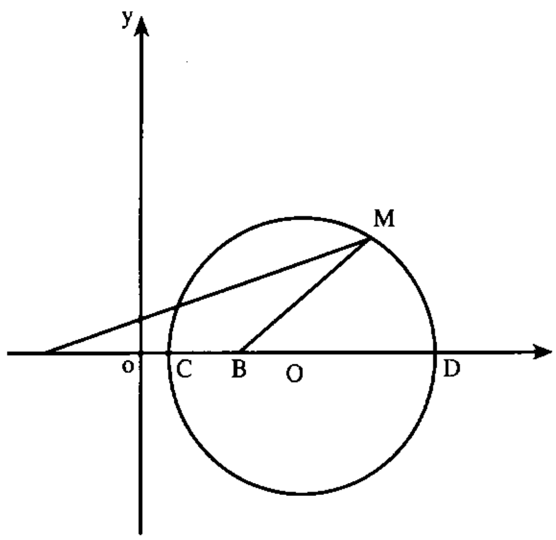
ثانیاً: هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K ، یعنی (۲) $\frac{MA}{MB}=K$ باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد ؛ زیرا اگر از M به نقطه‌های A،B،C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$K=\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{CA}{CB}=\dfrac{MA}{MB}$ ؛ اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس M از مثلث ABC می‌باشد که چون این دو نیمساز بر هم عمودند، پس $C\hat{M}D=90^\circ$ و در نتیجه نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند.

(Appolonieus of perga)

اثبات به روش تحلیلی: دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم. خط AB را محور xها و عمودمنصّف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر M(x,y) نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت K است، با فرض AB = a داریم:



$$A(-\frac{a}{2},0)\ ,\ B(\frac{a}{2},0)\ ,\ M(x,y)\Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}$$

$$MB=\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}\ ,\ \frac{MA}{MB}=K\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}}=k\Rightarrow$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+y^2=K^2(x-\frac{a}{2})^2+K^2y^2\Rightarrow$$

$$(K^2-1)x^2+(K^2-1)y^2-a(K^2+1)x+(K^2-1)\frac{a^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{a(K^2+1)}{K^2-1}x+\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ(۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1\left(\dfrac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}\ ,\ 0\right)$ و شعاعش $R=\left|\dfrac{aK}{K^2-1}\right|$ است.

بعکس ثابت می‌شود، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ(۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B، برابر K است. قطر CD از این دایره، پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند؛ زیرا داریم:

$$O_1A=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}+\frac{a}{2}\right|\ ,\ O_1B=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}-\frac{a}{2}\right|\ ,$$

$$O_1C=O_1D=R=\left|\frac{aK}{K^2-1}\right|\Rightarrow O_1C^2=O_1D^2=\overline{O_1A}\,.\,\overline{O_1B}$$

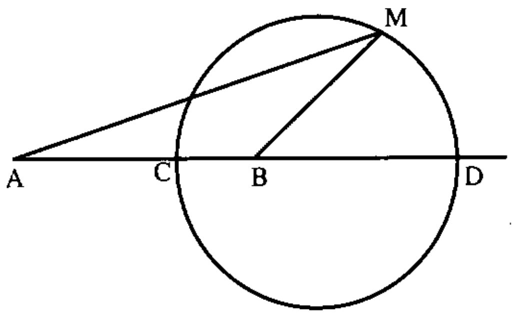
$$\Rightarrow\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}+\frac{a}{2}\right|.\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}.\frac{a}{2}\right|\Rightarrow$$

$$\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\frac{a^2}{4}.\left(\frac{(K^2+1)^2}{(K^2-1)^2}-1\right)\Rightarrow\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، برابر مقدار ثابت K است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

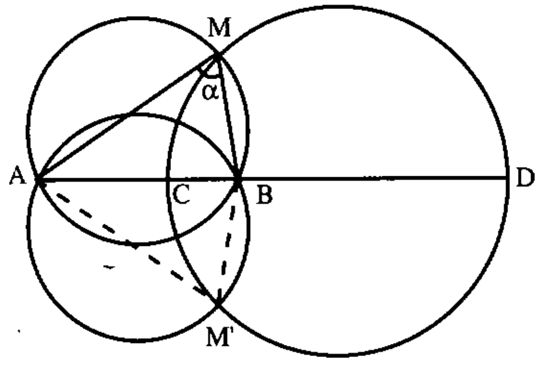
مثال ۱: پاره‌خط AB به‌طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل: نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند؛ یعنی $2=\dfrac{DA}{DB}=\dfrac{CA}{CB}$ باشد. در این‌صورت



CA = ۸ ،CB = ۴ ،DA = ۲۴ و DB = ۱۲ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره، مکان هندسی موردنظر است.

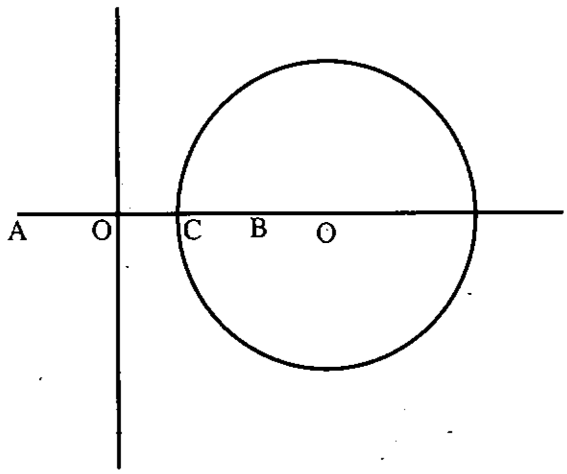
مثال ۲: دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B، برابر مقدار ثابت K باشد.



حل: کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K است، رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله‌اند و مسأله همواره دو جواب دارد.

مثال ۳: دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت K باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

حل: نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند؛ پس دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم، (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، خط Δ عمودمنصّف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است، O می‌نامیم. اما



می‌دانیم بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند(ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصّف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند؛ پس مسأله دارای جواب نیست.

ترکیبات ۱

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)



میر شهرام صدر

در این سری مقاله‌ها ابتدا به یادآوری رابطهٔ روی مجموعهٔ شمارش‌پذیر و خواص مربوط به آنها خواهیم پرداخت و به دنبال راههایی ساده‌تر و جذّابتر برای بررسی خواصّ رابطه‌ها هستیم. به همین سبب، متناظر با هر رابطه یک گراف جهت‌دار و متناظر با آن یک ماتریس مجاورت را نسبت می‌دهیم و ترکیب رابطه‌ها را مطالعه می‌کنیم. سپس یکی از ابزارهای مهّم شمارش به نام «اصل شمول و عدم شمول» را معرفی کرده و کاربرد این اصل را در حلّ مسأله‌های ترکیبیات بررسی خواهیم کرد.

رابطه

دو مجموعهٔ $A=\{a,b\}$ و $B=\{c\}$ را درنظر بگیرید، اکنون $A\times B$ را به دست می‌آوریم :

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A, y\in B\}=\{(a,c),(b,c)\}$$

سپس همهٔ زیر مجموعه‌های $A\times B$ را می‌نویسیم ؛ چون $A\times B$: ۲ عضو دارد، پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر $2^2=4$ است: $R_1=\varnothing$، $R_2=\{(a,c)\}$، $R_3=\{(b,c)\}$ و $R_4=\{(a,c),(b,c)\}$ بنابه تعریف، R_1 ، R_2 ، R_3 ، R_4 را رابطه‌هایی از مجموعه A به مجموعهٔ B گوییم.

تعریف. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند، هر یک از زیرمجموعه‌های $A\times B$ را یک رابطهٔ از A به B می‌گوییم. اگر R رابطه‌ای از A به B باشد و $(a,b)\in R$، آن‌گاه می‌گوییم a با b رابطه دارد و می‌نویسیم aRb.

نکته. اگر مجموعهٔ A دارای n عضو و مجموعهٔ B دارای m عضو باشد، آن گاه $A\times B$ دارای $m\times n$ عضو است و تعداد رابطه‌ها از A به B برابر با $2^{m\times n}$ است.

دامنهٔ یک رابطه

فرض کنیم R رابطه‌ای از A به B باشد. مجموعهٔ حاصل از مؤلّفه‌های اوّل زوجهای مرتّب رابطهٔ R را دامنه R می‌نامیم و آن را با D_R نمایش می‌دهیم ؛ واضح است که $D_R\subset A$.

برد یک رابطه

فرض کنیم R رابطه‌ای از A به B باشد. مجموعهٔ حاصل از مؤلفه‌های دوم زوجهای مرتّب رابطهٔ R را برد R می‌نامیم و آن را با R_R نمایش می‌دهیم؛ واضح است که $R_R \subset B$.

مثال. مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۶\}$ را درنظر بگیرید. رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x^۲\leq y\}$ را روی مجموعه A مشخص کنید، سپس دامنه و برد رابطهٔ R را بیابید.

حل.

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۶),(۲,۶)\}$$

$$D_R=\{۱,۲\} \quad ; \quad R_R=\{۱,۲,۳,۶\}$$

تذکر. اگر A یک مجموعه باشد، هریک از زیر مجموعه‌های $A\times A$ را یک رابطه روی A می‌گوییم.

نکته. اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، آن‌گاه $A\times A$ دارای $n^۲$ عضو است و تعداد رابطه‌ها روی A برابر $۲^{n^۲}$ است.

خواص رابطه ها

۱ـ رابطهٔ انعکاسی یا بازتابی

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت بازتابی دارد؛ اگر و تنها اگر برای هر عضو A، داشته باشیم $(a,a)\in R$ یا aRa . رابطهٔ R روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی ندارد؛ هرگاه $x\in A$ ای وجود داشته باشد؛ به طوری که $(x,x)\notin R$.

مثال. مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ را درنظر بگیرید، آیا رابطهٔ $R=\{(a,b)\mid a,b\in A, a\leq b\}$ روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را روی A مشخص می‌کنیم:

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۱,۴),(۲,۲),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۴),(۴,۴)\}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، ۱R۱ ، ۲R۲ ، ۳R۳ و ۴R۴ ؛ یعنی هر یک از عضوهای A با خودش در رابطه است، پس R روی A دارای خاصیت بازتابی است.

نکته. مجموعهٔ $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_n\}$ را در نظر بگیرید، رابطهٔ R روی A خاصیت بازتابی دارد؛ هرگاه داشته باشیم:

$$\{(a_۱,a_۱),(a_۲,a_۲),(a_۳,a_۳),\dots,(a_n,a_n)\}\subseteq R$$

مثال: مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۴\}$ را درنظر بگیرید. آیا رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x,y\in A, x\mid y\}$ روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد؟

حل. ابتدا رابطه Rرا روی A مشخص می‌کنیم:

$$R=\{(۲,۲),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۴)\}$$

چون $\{(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}\subseteq R$ ، پس R روی A دارای خاصیت بازتابی است.

مثال. مجموعهٔ دو عضوی $A=\{a,b\}$ را در نظر بگیرید، تعداد رابطه‌های انعکاسی روی مجموعهٔ A را مشخص کنید؟

حل.

$$A\times A=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$$

در صورتی که R یک رابطهٔ انعکاسی روی مجموعه A باشد، R باید شامل دو عضو (a,a) و (b,b) باشد. همچنین R می‌تواند بجز این دو عضو، شامل عضوهای (a,b) یا (b,a) باشد.

اکنون اگر همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{(a,b),(b,a)\}$ را بنویسیم و به هریک از این زیرمجموعه‌ها، دو عضو (a,a) و (b,b) را اضافه کنیم، همهٔ رابطه‌های انعکاسی روی Aبه دست می‌آید، که تعداد رابطه‌های انعکاسی روی A برابر ۴ است:

$$\{(a,b)\}\subseteq B \quad ; \quad R_۱=\{(a,a),(b,b),(a,b)\}$$

$$\{(b,a)\}\subseteq B \quad ; \quad R_۲=\{(a,a),(b,b),(b,a)\}$$

$$\{(a,b),(b,a)\}\subseteq B \quad ; \quad R_۳=\{(a,a),(b,b),(a,b)(b,a)\}$$

$$\varnothing\subseteq B \quad ; \quad R_۴=\{(a,a),(b,b)\}$$

تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعهٔ nعضوی A

در حالت کلی اگر $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ یک مجموعهٔ n عضوی باشد، می‌دانیم $A\times A$ دارای n^2 عضو است و تعداد عضوهای A^2 که به صورت (x_i,x_i) $1\le i\le n$ هستند، برابر n است؛ بنابراین مجموعهٔ $B=\{(x_i,x_j)|i\neq j,\ 1\le i,j\le n\}$ وجود دارد که دارای n^2-n عضواست. اکنون اگر به هر یک از زیرمجموعه‌های B عضوهای مجموعهٔ $A=\{(a_1,a_1),(a_2,a_2),\dots,(a_n,a_n)\}$ را بیفزاییم، رابطه‌های انعکاسی روی A به دست می‌آید؛ چون B دارای 2^{n^2-n} زیرمجموعه است، پس تعداد رابطه‌های انعکاسی (بازتابی) روی مجموعهٔ nعضوی A برابر 2^{n^2-n} است.

تست. روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e\}$ چند رابطهٔ بازتابی می‌توان تعریف کرد؟

۱) 2^{15} ۲) 2^{20}

۳) 2^{10} ۴) 2^{30}

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا تعداد اعضای A برابر ۵ است، پس تعداد رابطه‌های بازتابی روی A برابر است با:

$$2^{n^2-n}=2^{5^2-5}=2^{20}$$

۲ـ رابطهٔ تقارنی

فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعه A باشد، R رابطهٔ تقارنی است، هرگاه برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم:

$$(a,b)\in R\Rightarrow(b,a)\in R \quad \text{یا} \quad aRb\Rightarrow bRa$$

مثال. مجموعهٔ $A=\{-1,0,1\}$ را درنظر بگیرید، آیا رابطهٔ $R=\{(x,y)|x,y\in A, y=|x|\}$ روی A دارای خاصیت تقارنی است؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را روی A مشخص می‌کنیم:

$$R=\{(-1,1),(0,0),(1,1)\}$$

چون $(-1,1)\in R$ ، ولی $(1,-1)\notin R$ ؛ بنابراین R خاصیت تقارنی روی A ندارد.

مثال. مجموعهٔ سه عضوی $A=\{a,b,c\}$ را درنظر بگیرید، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A را مشخص کنید؟

حل.

$$A\times A=A^2=\left\{\begin{matrix}(a,a),(a,b),(a,c),(b,a)\\ ,(b,b),(b,c),(c,a),(c,b),(c,c)\end{matrix}\right\}$$

مجموعهٔ $A_1=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$ دارای ۳ عضو است؛ بنابراین مجموعهٔ:

$$A_2=A^2-A_1=\{(a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)\}$$

دارای $3^2-3=6$ عضو است و مجموعهٔ A_2 دارای $\frac{1}{2}(3^2-3)=3$ زیرمجموعهٔ به صورتهای $A_3=\{(a,b),(b,a)\}$ ، $A_4=\{(a,c),(c,a)\}$ ، $A_5=\{(b,c),(c,b)\}$ است. برای نوشتن رابطهٔ متقارن R روی A ، می‌توانیم هریک از عضوهای A_1 را در R قرار دهیم یا ندهیم. همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_3 یا A_4 یا A_5 را در R قراردهیم یا ندهیم؛ بنابراین طبق اصل ضرب تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A برابر است با:

$$\text{تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعه } A=2^3\times 2^{\frac{1}{2}(3^2-3)}=2^{\frac{1}{2}(3^2+3)}=2^6$$

تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

در حالت کلی، مجموعهٔ n عضوی $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $A\times A$ دارای n^2 عضو است و مجموعهٔ $A_1=\{(x_i,x_i)|1\le i\le n\}$ دارای n عضو است. بنابراین مجموعهٔ $A_2=A^2-A_1=\{(x_i,x_j)|i\neq j, 1\le i,j\le n\}$ دارای n^2-n عضو است و مجموعهٔ A_2 دارای $\frac{1}{2}(n^2-n)$ ، زیرمجموعهٔ به صورت $A_{ij}=\{(x_i,x_j),(x_j,x_i)\}$ است. برای نوشتن رابطهٔ متقارن R روی مجموعهٔ A، می‌توانیم هریک از عضوهای A_1 را در R قرار دهیم یا ندهیم. همچنین می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را درR قرار دهیم یا ندهیم. بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد رابطه‌های تقارنی روی یک مجموعهٔ } n \text{ عضوی}=2^n\times 2^{\frac{1}{2}(n^2-n)}=2^{\frac{1}{2}(n^2+n)}$$

تست. روی مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۵,۷,۸\}$ چند رابطهٔ متقارن می‌توان تعریف کرد؟

۱) $۲^{۱۷}$ ۲) $۲^{۱۰}$

۳) $۲^{۲۲}$ ۴) $۲^{۱۵}$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا مجموعه A دارای ۵ عضو است، بنابراین:

$$۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲+n)} = ۲^{\frac{۱}{۲}(۵^۲+۵)} = ۲^{۱۵}$$

تذکر. برای نوشتن رابطهٔ R که تقارنی و انعکاسی باشد، کافی است عضوهای مجموعهٔ $A_۱$ را در R قرار دهیم و می‌توانیم عضوهای هریک از مجموعه‌های A_{ij} را در R قرار دهیم یا ندهیم؛ بنابراین تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر تعداد زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $B=\{A_{ij} \mid i\neq j, i\le i,j\le n\}$ است، چون مجموعهٔ B دارای $\frac{۱}{۲}(n^۲-n)$ عضو است؛ بنابراین داریم:

$$۲^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)} = \text{تعداد رابطه‌های تقارنی و انعکاسی روی یک مجموعهٔ n عضوی}$$

۳ـ رابطهٔ تعدی یا تراگذاری

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت تعدی دارد؛ هرگاه برای هر $c\in A$ و b و a داشته باشیم:

$$(a,b)\in R \text{ و } (b,c)\in R \Rightarrow (a,c)\in R$$

مثال. مجموعهٔ $A=\{۲,۴,۶\}$ را درنظر بگیرید. هریک از رابطه‌های زیر روی مجموعهٔ A رابطه‌های تعدی هستند:

$$R_۱=\{(۲,۲)\}\ ;\ R_۲=\{(۲,۴)\}\ ;\ R_۳=\{(۲,۴),(۴,۶),(۲,۶)\}$$
$$R_۴=\{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}\ ;\ R_۵=\{(۲,۲),(۴,۴),(۲,۴)\}$$

امّا رابطه $R_۶=\{(۲,۴),(۴,۲),(۲,۲)\}$ روی A رابطهٔ تعدی نیست؛ زیرا:

$$(۴,۲)\in R \text{ و } (۲,۴)\in R \Rightarrow (۴,۴)\notin R$$

تذکر. فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ $A=\{a_۱,a_۲,\ldots,a_n\}$ باشد. رابطهٔ $R=\{(a_i,a_j)\}$ روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ تعدی است؛ این مطلب را می‌توانیم به برهان خلف به صورت زیر ثابت کنیم: فرض کنیم رابطهٔ $R=\{(a_i,a_j)\}$ روی A تعدی نباشد (فرض خلف)، بنابراین باید در رابطهٔ R داشته باشیم $(a_i,a_j)\in R$ و $(a_j,a_k)\in R$، امّا $(a_i,a_k)\notin R$؛ چون (a_j,a_k) را نمی‌توان در R درنظر گرفت، بنابراین به تناقض رسیده‌ایم؛ پس فرض خلف باطل و R رابطهٔ تعدی است.

۴ـ رابطهٔ هم‌ارزی

رابطهٔ R روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ هم‌ارزی است؛ هرگاه R سه خاصیت زیر را داشته باشد:

۱. رابطهٔ R انعکاسی یا بازتابی باشد؛ یعنی برای هر $a\in A$ داشته باشیم: $(a,a)\in R$.

۲. رابطهٔ R تقارنی باشد؛ یعنی برای $a,b\in A$ اگر $(a,b)\in R$، آن گاه $(b,a)\in R$.

۳. رابطهٔ R تعدی باشد؛ یعنی برای $c\in A$ و b و a، اگر $(a,b)\in R$ و $(b,c)\in R$، آن گاه $(a,c)\in R$.

نکته. تعداد رابطه‌های هم‌ارزی که می‌توانیم روی مجموعهٔ A تعریف کنیم، برابر با تعداد افرازهای A است.

مثال. روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ چند رابطهٔ هم‌ارزی می‌توان تعریف کرد؟

حل. تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی A برابر با تعداد افرازهای A است؛ بنابراین تمام افرازهای A را می‌نویسیم:

$$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}\ ,\ \{\{a,b\},\{c\}\}\ ,\ \{\{a,c\},\{b\}\}$$
$$\{\{b,c\},\{a\}\}\ ,\ \{\{a,b,c\}\}$$

بنابراین ۵ رابطهٔ هم‌ارزی می‌توان روی A تعریف کرد.

برای یافتن رابطهٔ هم‌ارزی که توسط افراز $\{\{a,c\},\{b\}\}$ روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ به وجود می‌آید، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$A_۱=\{a,c\}\times\{a,c\}=\{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c)\}$$
$$A_۲=\{b\}\times\{b\}=\{(b,b)\}$$
$$R=A_۱\cup A_۲=\{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c),(b,b)\}$$

۵ـ رابطهٔ پاد تقارنی

فرض کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد. R خاصیت پادتقارنی دارد ؛ در صورتی که برای $a \neq b$ ، اگر $(a,b) \in R$ ، آن گاه $(b,a) \notin R$.

مثال. آیا رابطهٔ $R = \{(a,b) |$ بر b بخش‌پذیر است $a\}$ روی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ یک رابطهٔ پادتقارنی است؟

حل. ابتدا رابطهٔ R را می‌نویسیم :

$$R = \{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱),(۳,۳),(۴,۱),(۴,۲),(۴,۴)\}$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، برای هر دو عضو متمایز a و b از A، اگر aRb، آن گاه $b \not R a$.

مثال. آیا رابطهٔ $\varnothing$ روی مجموعهٔ ناتهی A یک رابطهٔ پادتقارنی است؟

حل) برهان خلف. فرض کنیم A یک مجموعه ناتهی، اگر $\varnothing$ روی A پادتقارنی نباشد (فرض خلف) آن گاه باید در $\varnothing$ ، aRb و bRa که این غیرممکن است ؛ بنابراین فرض خلف باطل و $\varnothing$ رابطهٔ پادتقارنی است.

مسأله. ثابت کنید تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر $P_n = ۲^n \times ۳^{\frac{n(n-۱)}{۲}}$ است.

حل. این مسأله را به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم :

$$n = ۱ : \ P_۱ = ۲^۱ \times ۳^۰ = ۲$$

به ازای $n = ۱$ رابطه درست است ؛ زیرا روی مجموعهٔ یک عضوی $A = \{a_۱\}$ دو رابطهٔ پادتقارنی $R_۱ = \{(a_۱,a_۱)\}$ و $R_۲ = \varnothing$ را می‌توان تعریف کرد.

فرض استقرا $n = k : \ P_k = ۲^k \times ۳^{\frac{k(k-۱)}{۲}}$

حکم استقرا $n = k+۱ : \ P_{k+۱} = ۲^{k+۱} \times ۳^{\frac{(k+۱)k}{۲}}$

مجموعهٔ $k+۱$ عضوی $B = \{a_۱,a_۲,\dots,a_i,a_k,a_{k+۱}\}$ رادرنظر می‌گیریم، اگر a_i را از این مجموعه حذف کنیم، یک مجموعهٔ k عضوی مانند C به دست می‌آید که طبق فرض استقرا دارای $P_k = ۲^k \times ۳^{\frac{k(k-۱)}{۲}}$ رابطهٔ پادتقارنی است، اکنون a_i را به مجموعهٔ C اضافه می‌کنیم، در این صورت ملاحظه خواهیم کرد که $B^۲$ علاوه بر اعضای مجموعهٔ $C^۲$ دارای اعضای مجموعه‌های زیر است :

$$D = \{(a_i,a_i)\}$$

$$A_j = \{(a_i,a_j),(a_j,a_i) \mid i \neq j\} \ ; \ (۱ \leq j \leq k+۱)$$

در رابطه پادتقارنی R می‌توان عضو مجموعه D را قرار دهیم یا ندهیم ؛ یعنی دو حالت وجود دارد. همچنین در رابطهٔ پادتقارنی R می‌توان (a_i,a_j) یا (a_j,a_i) یا هیچ کدام آنها را از A_j درنظر گرفت ؛ یعنی سه حالت وجود دارد ؛ چون K مجموعه به صورت A_j داریم، پس ۳^k حالت وجود دارد ؛ بنابراین داریم :

$$P_{k+۱} = ۲^k \times ۳^{\frac{k(k-۱)}{۲}} \times ۲ \times ۳^k = ۲^{k+۱} \times ۳^{\frac{k(k+۱)}{۲}}$$

تعداد رابطه‌های پادتقارنی مجموعهٔ $(k+۱)$ عضوی

تست. روی مجموعهٔ $A = \{a,b,c,d\}$ چند رابطهٔ پادتقارن می‌توان تعریف کرد؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۲^۴ \times ۳^۶$

۳) $۲^۴ \times ۳^{۱۰}$ ۴) $۳^{۱۰}$

حل. گزینه (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$n = ۴ \ ; \ P_۴ = ۲^۴ \times ۳^{\frac{۴(۴-۱)}{۲}} = ۲^۴ \times ۳^۶$$

نکته. تعداد رابطه‌های تقارنی و پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی A برابر ۲^n است.

تذکر. تعداد رابطه‌هایی که خاصیت پادتقارنی و تقارنی دارند، با تعداد رابطه‌هایی که سه خاصیت پادتقارنی، تقارنی و بازتابی را دارند، برابر است.

نکته. تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی $A = \{a_۱,a_۲,\dots,a_n\}$ که شامل (a_i,a_j) باشند، برابر با $۲^n \times ۳^{\frac{n(n-۱)}{۲}-۱}$ است.

■

قضیهٔ کوتاهترین راه را
قضیهٔ حمار
بنامیم یا
قضیهٔ مسیر نور

دکتر احمد شرف‌الدین



چکیده

اگر دو نقطه A و B در یک محیط همگن داده شده باشند و بخواهیم از نقطهٔ A به نقطه B برویم، کوتاهترین راه، پاره خط راست AB است. این مطلب را در کتابهای هندسه تحت عنوان «قضیهٔ حمار» بیان می کنند. از نظر نویسندهٔ این سطور، عنوان قضیهٔ حمار، برای قضیهٔ کوتاهترین راه صحیح نیست؛ بلکه عنوان «قضیهٔ مسیر نور» مناسب است. در این باره توضیح می دهیم.

* * *

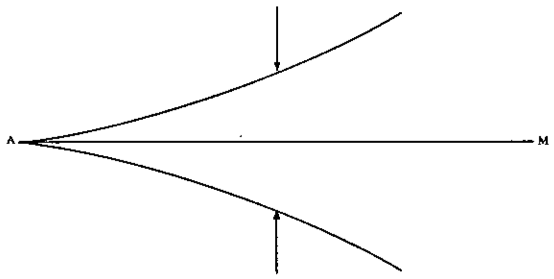
۱ـ قضیه

در هر مثلث، طول هر ضلع کوچکتر از مجموع دو ضلع دیگر است.

قضیهٔ یاد شده در بالا را قضیهٔ حمار می‌نامند و این نامگذاری را این طور توجیه می‌کنند که درک قضیهٔ مورد نظر، فوق‌العاده آسان است ؛ به طوری که حتی حمار که عقل و فکری بسیار ضعیف دارد، می‌داند که برای رفتن از نقطهٔ A به نقطهٔ B، باید روی خط راست AB حرکت کند تا کمترین راه را بپیماید.

۲ـ حرکت با چشم بسته

در یک زمین وسیع و هموار، هدفی درنظر می‌گیریم. برای مثال، درختی که در نقطهٔ M است (شکل پایین). از شخصی که در نقطهٔ A به فاصله‌ای کافی از درخت، مثلاً ۱۵۰ متر قرار دارد، می‌خواهیم که از نقطهٔ A به طرف نقطهٔ B با چشم بسته حرکت کند تا به نقطهٔ B برسد. این شخص، با چشم بسته نمی‌تواند به طور مستقیم حرکت کند، لذا به درخت نمی‌رسد ؛ بلکه روی یک کمان حرکت می‌کند و خیال می‌کند روی خط راست به جلو می‌رود.



بیشتر افراد، با چشم بسته جهت حرکت خود را گم می‌کنند و به طرف چپ منحرف می‌شوند (مسیر ۱). بعضی افراد با چشم بسته از خط راست به طرف راست منحرف می‌شوند (مسیر ۲). اگر دربارهٔ شخصی که در حرکت خود به طرف چپ منحرف شده است، آزمایشهای متعددی انجام دهیم، او همواره به طرف چپ منحرف می‌شود و اگر از شخصی که در حرکت خود به طرف راست منحرف شده است، آزمایشهای متعددی انجام دهیم، او همواره به طرف راست منحرف می‌شود.

افرادی که در بیابانها، هنگامی که کولاک یا مه غلیظ وجود دارد یا شب کاملاً تاریک است و در نتیجه جهت‌یابی با چشم (یعنی بدون وسایل فیزیکی) برای آنها ممکن نیست، حرکت می‌کنند، راه راست به سوی هدف را گم می‌کنند و روی یک منحنی حرکت و خیال می‌کنند که روی خط راست حرکت می‌نمایند. همچنین قایقرانی که در دریا به هنگام مه غلیظ یا تاریکی شب حرکت می‌کند و تصمیم داردخط راستی را برای رسیدن به هدف طی کند، ازخط راست منحرف می‌شود؛ اما خیال می‌کند که مسیر مستقیم را می‌پیماید؛ برای حیوانات نیز چنین است.

موجودات زنده فقط هنگامی می‌توانند بدون کمک چشم روی خط راست حرکت کنند، که تقارن بدن آنها از لحاظ هندسی و بیولوژی کامل باشد و در نتیجه، عضله‌های سمت راست و چپ آنها به طور یکسان عمل کنند. در بیشتر انسانها و حیوانات، عضله‌های سمت راست بدن نسبت به سمت چپ، رشد و توانایی بیشتری دارند، لذا راهپیما قدم راست خود را اندکی بلندتر از قدم سمت چپ برمی‌دارد و در نتیجه، با چشم بسته نمی‌تواند روی خط راست حرکت کند و به طرف چپ منحرف می‌شود. همچنین قایقرانی که بازوی راست او قویتر ازبازوی سمت چپش می‌باشد، هنگامی که در تاریکی پارو می‌زند، مسیری را طی می‌کند که به طرف چپ انحراف دارد.

۳ـ توضیح دربارهٔ نادرست بودن عنوان «قضیهٔ حمار»

در سطور زیر در بندهای ۳.۱ و ۳.۲ دربارهٔ نادرست بودن عنوان قضیهٔ موردنظر توضیح می‌دهیم.

۳ـ۱ـ حلّ مسائل با چشم بسته: چشم یک دانشمند ادبیات را با دستمال می‌بندیم و سپس شعری را که هرگز نخوانده است و مشکل است، برای او می‌خوانیم و از او معنای آن را طلب می‌کنیم. آن ادیب، به طور مسلّم با چشم بسته پس از دقایقی فکر کردن، آن شعر را معنا می‌کند. اما او با چشم بسته نمی‌تواند در یک زمین هموار، از نقطهٔ معین A طوری حرکت کند که به نقطهٔ معین B برسد (فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B به اندازهٔ کافی بزرگ است).

ادیب برای معنا کردن شعر، از فکر و عقل و معلومات خود کمک می‌گیرد، نه از مسیر شعاع نور؛ در صورتی که برای رفتن از نقطهٔ معین A به نقطهٔ معین B با چشم باز، مسیر شعاع نور است که او را روی خط راست AB هدایت می‌کند؛ نه عقل و فکر او.

برای مثال، همین تجربه را دربارهٔ یک ریاضیدان، یک فیزیکدان، یک شطرنج‌باز و... اجرا می‌کنیم؛ یعنی چشم یک ریاضیدان را با دستمال می‌بندیم و سپس صورت یک مسأله‌ای را که ندیده است، برای او می‌خوانیم و حلّ آن را از او طلب می‌کنیم. ریاضیدان پس از مدتی تفکر، مسأله را حل می‌کند. اما این ریاضیدان با چشم بسته نمی‌تواند در یک زمین هموار از نقطهٔ معین A طوری حرکت کند که به نقطهٔ معین B برسد.

ریاضیدان برای حلّ مسأله، از فکر و عقل و معلومات خود یاری می‌گیرد، نه از مسیر شعاع نور؛ در صورتی که برای رفتن از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، با چشم باز، مسیر شعاع نور است که او را روی خط راست هدایت می‌کند؛ نه عقل و فکر او.

۳ـ۲ـ علت نامگذاری قضیهٔ حمار (خر): قضیهٔ مذکور در شمارهٔ (۱) را از این جهت قضیهٔ حمار می‌نامند که معتقدند درک درستی آن به اندازه‌ای آسان است که حتی حمار هم که دارای فکر و عقل فوق‌العاده کمی است، درستی آن را درک می‌کند و برای رفتن از نقطهٔ معین A به نقطهٔ معین B، روی خط راست AB حرکت می‌کند.

این که موجود زنده در یک محیط همگن، برای رفتن از یک نقطهٔ مفروض A به یک نقطهٔ مفروض B، خط راست AB را می‌پیماید، هرگز به فکر و عقل او مربوط نیست؛ بلکه تنها به مسیر شعاع نور مربوط است.

اگر محیط مادی طوری باشد که در آن جا نور یک خط منحنی بپیماید، آن گاه موجود زندهٔ آن محیط، برای رسیدن به هدف، یک خط منحنی می‌پیماید. به این دلیل است که عنوان قضیهٔ مسیر نور را برای حکم مورد نظر مناسب می‌دانم؛ نه عنوان قضیهٔ حمار را.

■

معادلهٔ یک مجهولی درجهٔ دوم

(برای دانش‌آموزان سال اوّل دبیرستان)

$$ax^2+bx+c=0$$

هوشنگ شرقی

شکل کلی معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ می‌باشد و روشن است که $a\neq 0$ می‌باشد. (چرا؟)

از این‌رو، مشخص می‌شود که در این نوع معادله، برخلاف معادلهٔ درجهٔ اوّل، روش ابتدایی ما این است که همهٔ مجهولها و معلومها را به‌یک طرف معادله برده و درسمت راست معادله، عددصفر را باقی گذاریم، آن‌گاه معادله را به‌ترتیب درجات نزولی مجهول معادله، مرتّب کنیم.

مثال: معادلهٔ $(x+1)(x-2)+7=(3x+1)(x-3)$ را به‌شکل استاندارد خود تبدیل کنید.

حل: پس‌از ضرب پرانتزها و بردن همهٔ عبارتها به‌سمت چپ تساوی، نتیجه می‌شود :

$$x^2-x-2+7=3x^2-9x+x-3$$
$$\Rightarrow x^2-x-2+7-3x^2+9x-x+3=0$$
$$\Rightarrow -2x^2+7x+8=0$$

که شکل استاندارد یک معادلهٔ درجهٔ دوم را دارا می‌باشد. پس از آن‌که معادلهٔ درجهٔ دوم را به‌شکل استاندارد خود تبدیل نمودیم، روی روشهای حلّ آن بحث می‌کنیم. ابتدا از حالتهای خاص این نوع معادله شروع می‌کنیم. $(ax^2+bx+c=0)$:

الف) حالت خاصی که در آن $c=0$ باشد: در این حالت، معادله به‌صورت $ax^2+bx=0$ درمی‌آید. حال با فاکتورگیری از x و تجزیهٔ عبارت‌جبری سمت‌چپ تساوی، نتیجه می‌شود : $x(ax+b)=0$ ، اکنون دوعامل داریم که حاصلضرب آنها مساوی صفر می‌باشد و ما می‌دانیم که اگر حاصلضرب دوعامل، مساوی صفر باشد، لااقل یکی از آنها مساوی صفرمی‌باشد ؛ یعنی : $AB=0 \Rightarrow A=0$ یا $B=0$ ،
لذا می‌توان نوشت :

$$x(ax+b)=0 \Rightarrow x=0 \text{ یا } ax+b=0 \Rightarrow x=\frac{-b}{a}$$

و از آن‌جا دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ مفروض، به صورت $x'=0$ و $x''=\frac{-b}{a}$ به‌دست می‌آید. این شیوه را برای حلّ

کلیهٔ معادله‌های درجه دومی که عدد ثابت c نداشته باشند نیز به‌کار می‌بریم. لذا یکی از ریشه‌های این معادله، همواره مساوی صفر می‌باشد.

مثال: حلّ معادلهٔ $۴x^۲ - ۳x = ۰$

حل: باهمان روش گفته شده و به‌صورت زیر، معادله را حل می‌کنیم:

$$۴x^۲ - ۳x = ۰ \;;\; x(۴x - ۳) = ۰ \Rightarrow x = ۰$$ یا

$$۴x - ۳ = ۰ \Rightarrow x' = ۰ \text{ و } x'' = \frac{۳}{۴}$$

مثال: حلّ معادلهٔ $\frac{x+۱}{x-۱} + \frac{x-۲}{x+۲} = -۲$.

حل: ابتدا دامنهٔ معادله را به‌دست آوریم:

$$x+۲ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{۱, -۲\}$$ و
$$x-۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

اکنون برای حلّ معادله، مجموع کسرهای سمت‌چپ تساوی را به‌دست آورده و آن را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x+۱)(x+۲)+(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(x+۲)} = -۲$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲ + ۳x + ۲ + x^۲ - ۳x + ۲}{x^۲ + x - ۲} = -۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^۲ + ۴}{x^۲ + x - ۲} = -۲$$

اکنون باطرفین ـ وسطین تناسب بالا، نتیجه می‌شود:

$$۲x^۲ + ۴ = -۲x^۲ - ۲x + ۴ \Rightarrow ۲x^۲ + ۴ + ۲x^۲ + ۲x - ۴ = ۰$$
$$\Rightarrow ۴x^۲ + ۲x = ۰ \Rightarrow x(۴x + ۲) = ۰ \Rightarrow$$

$$x = ۰ \text{ یا } ۴x + ۲ = ۰ \Rightarrow x' = ۰ \text{ و } x'' = -\frac{۲}{۴} = -\frac{۱}{۲}$$

هر دوجواب معادلهٔ $(۰ , -\frac{۱}{۲})$ دردامنهٔ معادله صدق می‌کنندوقابل قبول هستند.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

۱) $۴x^۲ + ۶x = ۰$

۲) $۵x^۲ - ۲x = ۰$

۳) $۶x^۲ + ۴x = ۰$

۴) $x^۲ - ۳x = ۰$

۵) $x(x+۱) - ۲x(x-۲) = ۰$

۶) $\frac{۴x+۱}{x-۱} = \frac{x+۱}{۲x-۱}$

۷) $\frac{x+۲}{x-۲} - \frac{x}{x+۱} = -۱$

ب) حالت خاصی که در آن $b = ۰$ باشد: یعنی معادله به‌صورت خاص $ax^۲ + c = ۰$ درآید.

دراین حالت، برای حلّ معادله مانند معادله‌های درجهٔ اول، می‌توان از این تساوی، $x^۲$ را به‌دست آورد:

$$ax^۲ + c = ۰ \Rightarrow ax^۲ = -c \Rightarrow x^۲ = -\frac{c}{a}$$

و باجذر گرفتن از دو طرف این تساوی، x را به‌دست می‌آوریم:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

و شرط وجود جواب دراین حالت، آن است که $-\frac{c}{a} \geq ۰$ ،

یعنی $\frac{c}{a} \leq ۰$ ، لذا باید a و c مختلف‌العلامه باشند (چرا؟)

مثال: حلّ معادلهٔ $۳x^۲ - ۱۲ = ۰$

حل: به‌ترتیبی که گفته شد، می‌نویسیم:

$$۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ = ۱۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۱۲}{۳} = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$$

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $x(x+۳) + (x-۱)^۲ = x + ۵$

حل: باساده کردن دوطرف تساوی و بردن عبارتها به سمت چپ آن، نتیجه می‌شود:

$$x^2+3x+x^2-2x+1-x-5=0$$
$$\Rightarrow 2x^2-4=0 \Rightarrow 2x^2=4 \Rightarrow$$
$$x^2=\frac{4}{2} \Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

مثال: حلّ معادلهٔ

$$(x+2)^2-(3-x)(3+x)+6=4x$$

حل: باساده کردن عبارتهای سمت‌چپ و بردن همهٔ عبارتها به‌همان سمت، به‌دست می‌آید:

$$x^2+4x+4-(9-x^2)+6-4x=0$$
$$\Rightarrow x^2+4x+4-9+x^2+6-4x=0$$
$$\Rightarrow 2x^2+1=0 \Rightarrow 2x^2=-1 \Rightarrow x^2=-\frac{1}{2}$$

و چون $x^2 \geq 0$ می‌باشد، لذا معادله دارای ریشهٔ حقیقی نمی‌باشد.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را حل کنید:

1) $3x^2-9=0$

2) $-4x^2+5=0$

3) $6x(x+1)-(3x+1)(x+2)+x=0$

4) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-1}{x+1}=-6$

5) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x+2}{x+1}=-3$

6) $(4x+1)^2-(x+1)^2=6x-4$

ج) حالت خاصی که در آن $a=1$ باشد: یعنی معادله به‌صورت $x^2+bx+c=0$ باشد. دراین حالت، ممکن است به‌کمک اتحاد جملهٔ مشترک و جملهٔ غیرمشترک، عبارت $x^2+bx+c=0$ را به‌حاصلضرب دو پرانتز از درجهٔ اوّل تجزیه نمود و باصفر قرار دادن هریک از این پرانتزها ریشه‌های معادله را به‌دست آورد.

مثال: معادلهٔ درجهٔ دوم $x^2-7x+12=0$ را حل کنید.

حل: باکمی دقّت، می‌توان دریافت دوعددی که مجموع آنها -7 و حاصلضرب آنها 12 می‌باشد، عددهای -4 و -3 می‌باشند و بنابراین، سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $x^2-7x+12$، به‌صورت $(x-4)(x-3)$ قابل تجزیه می‌باشد، لذا معادلهٔ مزبور، به‌صورت زیرقابل حل است:

$$x^2-7x+12=(x-4)(x-3)=0$$

اکنون حاصلضرب دوعامل $(x-4)(x-3)$ مساوی صفر شده است، لذا یکی از آن‌دو، باید مساوی صفر باشد؛ یعنی $x-3=0$ یا $x-4=0$ و درنتیجه $x=3$ یا $x=4$؛ یعنی معادله، دوریشهٔ حقیقی مساوی ۳، ۴ دارد.

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔدوم $x^2+5x+6=0$.

حل: باتجزیهٔ عبارت x^2+5x+6 می‌توان معادلهٔ فوق را به‌صورت زیر حل نمود:

$$x^2+5x+6=0 \Rightarrow (x+2)(x+3)=0 \Rightarrow$$
$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{و} \quad x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $\frac{2x+1}{x-1}=1+\frac{8}{x}$ را به‌دست آورید.

حل: دامنهٔ معادله، عبارت‌است از $D=\mathbb{R}-\{0,1\}$، حال پس‌از ساده کردن کسر سمت راست‌تساوی و طرفین‌ـ وسطین کردن تناسب حاصل، به‌معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{2x+1}{x-1}=\frac{x+8}{x} \Rightarrow x(2x+1)=(x-1)(x+8)$$
$$\Rightarrow 2x^2+x=x^2+7x-8$$

اکنون بابردن عبارتهای جبری به‌سمت چپ تساوی و صفر قرار دادن آن، به‌یک معادلهٔ درجهٔدوم می‌رسیم و باتجزیهٔ آن به‌حاصلضرب دوپرانتز، ریشه‌های معادلهٔ مزبور را به‌دست می‌آوریم:

$$2x^2+x-x^2-7x+8=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x-2)=0 \Rightarrow$$
$$x-4=0 \ \text{یا} \ x-2=0 \Rightarrow x=4 \ \text{یا} \ x=2$$

هر دو ریشهٔ معادله قابل قبول می‌باشند.

تمرین: معادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $x^{۲} - ۵x + ۴ = ۰$

۲) $x^{۲} - ۴x + ۴ = ۰$

۳) $x^{۲} - ۸x + ۱۲ = ۰$

۴) $x^{۲} - ۹x + ۲۱ = ۰$

۵) $x^{۲} + ۲x - ۸۰ = ۰$

۶) $(x+۱)^{۲} + (x-۱)^{۲} - (x+۱)(x-۱) = ۲x$

۷) $۱ + \frac{۱۰}{x-۴} = x$

■ **حل معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^{۲} + bx + c = ۰$ درحالت کلی**
روش اول (تبدیل به‌مربع کامل نمودن سه‌جمله‌ای):

مراحل حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم کامل را بااین روش، بایک مثال نشان می‌دهیم.

مثال: معادلهٔ $۳x^{۲} - ۴x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

مراحل حلّ معادله بااین روش، به‌شرح زیر می‌باشد :

۱) دوطرف معادله را برضریب $x^{۲}$ (دراین‌جا ۳) تقسیم می‌کنیم و عدد ثابت را به‌طرف دیگر معادله می‌بریم :

$$۳x^{۲} - ۴x + ۱ = ۰ \Rightarrow x^{۲} - \frac{۴}{۳}x + \frac{۱}{۳} = ۰ \Rightarrow x^{۲} - \frac{۴}{۳}x = -\frac{۱}{۳}$$

۲) نصف ضریب x (دراین‌جا $-\frac{۴}{۳}$) را به‌دست آورده و به‌توان دو می‌رسانیم :

$$-\frac{۴}{۳} \div ۲ = -\frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{۲} = -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \left(-\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴}{۹}$$

۳) عدد حاصل (دراین‌جا $\frac{۴}{۹}$) را به‌دو طرف معادله اضافه می‌کنیم : $x^{۲} - \frac{۴}{۳}x + \frac{۴}{۹} = -\frac{۱}{۳} + \frac{۴}{۹}$

۴) سمت چپ معادله، همیشه مربع کامل است. [به‌کمک اتحادهای $(a+b)^{۲} = a^{۲} + ۲ab + b^{۲}$ و $(a-b)^{۲} = a^{۲} - ۲ab + b^{۲}$] آن را به‌صورت مربع دوجمله‌ای می‌نویسیم و سمت راست معادله را نیز ساده می‌کنیم :

$$\left(x - \frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۱}{۹}$$

۵) از دوطرف تساوی آخر، جذر می‌گیریم (به شرطی که عدد سمت راست، مثبت یا صفر باشد) و جوابهای معادله را به‌دست می‌آوریم :

$$\left(x - \frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow x - \frac{۲}{۳} = \pm\frac{۱}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} \pm \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow x_{۱} = ۱ \text{ یا } x_{۲} = \frac{۱}{۳}$$

و به‌این ترتیب، دوریشهٔ حقیقی معادله به‌دست می‌آید. به‌مثالی دیگر توجه کنید.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $۲x^{۲} + x - ۱۰ = ۰$ را به‌دست آورید.

حل: همان مراحل رابترتیب طی می‌کنیم. درستی عمل را در هر مرحله تحقیق کنید :

۱) $x^{۲} + \frac{۱}{۲}x - ۵ = ۰ \Rightarrow x^{۲} + \frac{۱}{۲}x = ۵$

(این مرحله را درحلّ مسأله نمی نویسیم، دراین‌جا برای آشنایی خواننده آمده است.)

۲) $\frac{۱}{۲} \div ۲ = \frac{۱}{۴} \quad \left(\frac{۱}{۴}\right)^{۲} = \frac{۱}{۱۶}$

۳) $x^{۲} + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۱۶} = ۵ + \frac{۱}{۱۶}$

۴) $\left(x + \frac{۱}{۴}\right)^{۲} = \frac{۸۱}{۱۶}$

۵) $x + \frac{۱}{۴} = \pm\frac{۹}{۴} \Rightarrow x = -\frac{۱}{۴} \pm \frac{۹}{۴} \quad x_{۱} = -\frac{۵}{۲}, \ x_{۲} = ۲$

یعنی ریشه‌های معادله، ۲ و $-\frac{۵}{۲}$ می‌باشند.

مثال: معادلهٔ $۲x^{۲} + x + ۳ = ۰$ را حل کنید.

حل: می‌نویسیم :

$$x^{۲} + \frac{۱}{۲}x + \frac{۳}{۲} = ۰ \Rightarrow x^{۲} + \frac{۱}{۲}x = -\frac{۳}{۲} \Rightarrow$$

$$x^{۲} + \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱}{۱۶} - \frac{۳}{۲} \Rightarrow \left(x + \frac{۱}{۴}\right)^{۲} = \frac{-۲۳}{۱۶} < ۰$$

چون سمت راست، عددی منفی است و جذر ندارد، لذا

معادله، ریشهٔ حقیقی ندارد.

تمرین: هریک از معادله‌های زیر را به‌روش گفته شده حل کنید:

1) $2x^2 - x - 6 = 0$

2) $3x^2 - x - 2 = 0$

3) $5x^2 + 3x - 2 = 0$

4) $6x^2 - 13x + 6 = 0$

■ **روش دوم (دستور b یا دستور Δ):**

برای حلّ معادله از این روش، در واقع باید معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را در حالت کلی، به روش تبدیل به‌مربع کامل حل نمود. برای این منظور، مراحل پیش‌گفته را بترتیب می‌نویسیم:

1) $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

2) $\frac{b}{a} \div 2 = \frac{b}{a} \times \frac{1}{2} = \frac{b}{2a} \quad ; \quad \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

3) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

4) $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

5) $x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$(b^2 - 4ac \geq 0) \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

نتیجه: درحالتی که $b^2 - 4ac$ مثبت باشد، این معادله دارای ریشهٔ حقیقی است که از دستور $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ به دست می‌آیند. درحالتی که $b^2 - 4ac = 0$ باشد، دو ریشهٔ معادله باهم مساوی شده و معادله دارای دوریشهٔ مساوی (به‌اصطلاح ریشهٔ مضاعف) به‌صورت $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد و درحالتی که $b^2 - 4ac < 0$ باشد، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد. $b^2 - 4ac$ را که درحلّ معادله و تعیین تعداد ریشه‌های آن، نقش اساسی دارد، **مبیّن معادله** نامیده و آن را با نماد Δ نمایش می‌دهیم. خلاصهٔ بحث بااین نمادگذاری، به‌صورت زیر می‌باشد:

برای حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ابتدا مبیّن معادلهٔ $\Delta = b^2 - 4ac$ را تشکیل می دهیم و سپس:

معادله، دوریشهٔ حقیقی به‌صورت زیر دارد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

معادله دارای دوریشهٔ مضاعف به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta = 0 \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

و اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله ریشه حقیقی ندارد.

مثال: معادلهٔ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ را به‌روش گفته شده حل کنید:

حل: مبیّن معادله (Δ) را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 25 - 24 = 1$$

چون $\Delta > 0$ است، پس معادله دوریشهٔ حقیقی دارد که از فرمول گفته‌شده، به‌صورت زیر به دست می آیند:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{+5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = 1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

یعنی ریشه‌های معادله، 1 و $\frac{2}{3}$ هستند.

مثال: ریشه‌های معادلهٔ $3x^2 - 10x + 3 = 0$ را به‌دست آورید.

حل: به‌کمک همان روش، می‌توان نوشت:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 100 - 36 = 64$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{10 \pm 8}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{10 + 8}{6} = 3$$

$$x_2 = \frac{10 - 8}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

یعنی ریشه‌های معادله، ۳ و $\frac{۱}{۳}$ هستند.

مثال: حلّ معادلهٔ $۴x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$

حل: $\Delta = (-۴)^۲ - ۴\times۴\times۱ = ۱۶ - ۱۶ = ۰$

چون $\Delta = ۰$ می‌باشد، پس معادله دارای ریشهٔ مضاعف به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x_۱ = x_۲ = \frac{-b}{۲a} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲}$$

یعنی معادله دارای یک ریشهٔ (یا دو ریشهٔ برابر) مساوی $\frac{۱}{۲}$ است.

مثال: حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم $۳x^۲ - x + ۱ = ۰$.

حل: $\Delta = (-۱)^۲ - ۴\times۳\times۱ = ۱ - ۱۲ = -۱۱ < ۰$

چون $\Delta < ۰$ می باشد، پس معادله دارای ریشهٔ حقیقی نمی‌باشد.

مثال: حلّ معادله $\frac{x-۲}{x+۲} + \frac{x}{x-۲} = \frac{۸}{x^۲-۴}$

حل: دامنهٔ معادله، مساوی $D = \mathbb{R} - \{۲, -۲\}$ می‌باشد. (چرا؟) اکنون با مخرج‌مشترک گیری از سمت چپ معادله، نتیجه می‌شود:

$$\frac{(x-۲)^۲ + x(x+۲)}{(x+۲)(x-۲)} = \frac{۸}{x^۲-۴}$$

$$\Rightarrow \frac{x^۲ - ۴x + ۴ + x^۲ + ۲x}{x^۲-۴} = \frac{۸}{x^۲-۴}$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۲x + ۴ = ۸ \Rightarrow ۲x^۲ - ۲x - ۴ = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - x - ۲ = ۰$$

$$\Delta = (-۱)^۲ - ۴(۱)(-۲) = ۱ + ۸ = ۹$$

$$x = \frac{۱ \pm ۳}{۲} \Rightarrow x_۱ = \frac{۱+۳}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

$$x_۲ = \frac{۱-۳}{۲} = \frac{-۲}{۲} = -۱$$

جوابهای معادله ۲ و ۱- هستند؛ اما جواب $x = ۲$ جزء دامنهٔ تعریف معادله نمی‌باشد، لذا تنها جواب قابل قبول معادله $x = -۱$ است. اکنون شما نیز درتمرین زیر، هریک از معادله‌های داده شده را حل کنید. توجه داشته باشید که انواع معادله‌های داده شده، متنوّع بوده و حالتهای خاص نیز که پیش از این گفته شد، درنمونه‌های داده شده وجود دارند.

تمرین: ریشه‌های هریک از معادله‌های زیر را به‌دست آورید:

۱) $۲x^۲ - ۵x + ۳ = ۰$

۲) $۴x^۲ + x + ۱ = ۰$

۳) $۳x^۲ - ۵x - ۸ = ۰$

۴) $۲x^۲ - ۷x + ۶ = ۰$

۵) $۶x^۲ - ۳۱x + ۵ = ۰$

۶) $\frac{۴x+۱}{x-۲} + \frac{x-۲}{x+۲} = -\frac{۱۱}{۲}$

۷) $۲x^۲ + ۴x - ۱ = ۰$

۸) $x^۲ + ۳x + ۵ = ۰$

۹) $۹x^۲ - ۶x + ۱ = ۰$

۱۰) $\frac{x+۲}{x} - \frac{x-۱}{x+۱} = ۴$

۱۱) $۱۲x^۲ - ۵x = ۹x^۲ + ۷x$

۱۲) $\frac{۴}{x^۲ - ۱۰x + ۲۵} + \frac{۱}{۲۵ - x^۲} = \frac{۱}{x+۵}$

۱۳) $\frac{x^۲}{a} - \frac{x}{b} = ۰$

۱۴) $x^۲ - ۲ax - ۳a^۲ = ۰$

۱۵) $۴x^۲ - ۴ax + ۴a^۲ = b^۲$

۱۶) $\frac{x^۲}{۶} - \frac{۲x}{۳} = \frac{۳x-۱۰}{۴}$

۱۷) $(x+۱)^۲ + (x-۱)^۲ + (x+۱)(x-۱) = ۱۳$

چند مثال دیگر: مثال: m را طوری تعیین کنید که معادلهٔ $x^۲ - ۲mx + ۶ - m = ۰$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد.

حل: برای آن‌که معادلهٔ بالا دارای ریشهٔ مضاعف (مساوی) باشد، لازم است $\Delta = ۰$ باشد، بنابراین داریم:

$$\Delta = (۲m)^۲ - ۴(۶ - m) = ۰$$

$$\Rightarrow ۴m^۲ - ۲۴ + ۴m = ۰ \Rightarrow m^۲ + m - ۶ = ۰$$

اکنون مقدار m را از حلّ معادلهٔ درجهٔ دوم بالا به‌کمک تجزیهٔ آن به‌حاصلضرب، به‌دست می‌آوریم:

$$(m+3)(m-2)=0 \Rightarrow m+3=0 \Rightarrow m-3$$

یا

$$m-2=0 \;\Rightarrow\; m=2$$

یعنی به‌ازای $m=2$ یا $m=-3$ معادلهٔ فوق دارای ریشهٔ مضاعف خواهد بود.

تمرین: به‌ازای این دومقدار، m معادله را حل کنید و ریشهٔ مضاعف آن را به‌دست آورید.

مثال: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند، x_1+x_2 و $x_1.x_2$ را برحسب a، b وc به‌دست آورید.

حل: بترتیب می‌نویسیم:

$$ax^2+bx+c=0 \quad \Delta=b^2-4ac$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\ ,\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow x_1+x_2=-\frac{b}{a}$$

$$x_1.x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}$$

$$=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow\ x_1.x_2=\frac{c}{a}$$

یعنی مجموع و حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ از دستورهای $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}$ به‌دست می‌آیند.

مثلاً درمعادلهٔ درجهٔ دوم $3x^2-x-4=0$ اگر ریشه‌های معادله x_1 و x_2 باشند، داریم:

$$x_1x_2=-\frac{4}{3}\ ,\ x_1+x_2=\frac{1}{3}$$

مثال: ثابت کنید درمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر مجموع ضرایب صفر باشد، $(a+b+c=0)$، آن‌گاه یکی از ریشه‌های مساوی ۱ و دیگری مساوی $\frac{c}{a}$ معادله است.

حل: بافرض $a+b+c=0$ نتیجه می‌شود $b=-(a+c)$ و بااین فرض و از دستور Δ معادله را بترتیب زیر حل می‌کنیم:

$$\Delta=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=a^2+c^2+2ac-4ac$$
$$=a^2+c^2-2ac=(a-c)^2$$

بنابراین داریم:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a-c)^2}}{2a}=\frac{a+c\pm(a-c)}{2a}$$
$$\Rightarrow\ x_1=\frac{a+c+a-c}{2a}=\frac{2a}{2a}=1$$
$$x_2=\frac{a+c-a+c}{2a}=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

و این، معادل باحکم مسأله می‌باشد.

از این موضوع، درحلّ سریعتر معادله‌هایی که مجموع ضرایب آنها مساوی صفر است، استفاده می‌کنیم. مثلاً ریشه‌های معادلهٔ $8x^2+11x-19=0$ برابرند با $x_1=1\ ,\ x_2=-\frac{19}{8}$.

تمرین:

۱ـ ثابت کنید درمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$، هرگاه $a+c=b$ باشد، آن‌گاه یکی از دوریشه مساوی ۱- و دیگری مساوی $-\frac{c}{a}$ می‌باشد.

۲ـ هرگاه درمعادلهٔ $x^2+2mx+m^2+n=0$ ریشه‌ها بایکدیگر مساوی باشند، ثابت کنید: $n=0$

۳ـ m را طوری به‌دست آورید که ریشه‌های معادلهٔ $2x^2-5x+m=0$ عکس یکدیگر باشند.

۴ـ اگر یکی از ریشه‌های معادلهٔ: $x^2-(4a+4)x+(3a^2+6a+3)=0$ مساوی ۲ باشد، a، و ریشهٔ دیگر را به‌دست آورید.

۵ـ a را طوری به‌دست آورید که ریشه‌های معادلهٔ $x^2-(3a+1)x+2a^2+2=0$ باهم مساوی باشند.

کاربرد معادله‌ها در حلّ مسائل مختلف

این بحث را باچند مثال توضیح می‌دهیم :

مثال: محیط یک مستطیل ۱۶ سانتیمتر است. ابعاد آن را طوری بیابید که مساحت آن ۱۲ سانتیمتر مربع باشد.

حل: می‌دانیم که مساحت مستطیل، حاصلضرب طول در عرض آن است. اگر طول مستطیل را x فرض کنیم، عرض آن $\frac{12}{x}$ می‌باشد. (چرا؟) و باتوجه به‌اندازهٔ محیط مستطیل، که مساوی دوبرابر مجموع طول و عرض آن است، می‌توان نوشت :

$$2(x+\frac{12}{x})=16 \Rightarrow x+\frac{12}{x}=8$$

و از حلّ این معادله بافرض $x\neq 0$ می‌توان طول مستطیل و از آن‌جا عرض آن را به دست آوریم :

$$\frac{x^2+12}{x}=8 \Rightarrow x^2+12=8x$$

$$\Rightarrow x^2-8x+12=0 \Rightarrow (x-6)(x-2)=0$$

$$\Rightarrow x=6 \quad \text{یا} \quad x=2$$

طول مستطیل را مساوی ۶ درنظر بگیریم، عرض آن مساوی ۲ می‌شود.

مثال: سنّ علی دوبرابر سنّ برادرش می‌باشد. ۱۰ سال دیگر سنّ علی ۱/۵ برابر سنّ برادرش می‌شود. علی و برادرش چند سال دارند؟

حل: اگر سنّ برادر علی را x درنظر بگیریم، سنّ علی مساوی 2x می‌باشد. اما ۱۰ سال دیگر سنّ علی $2x+10$ و سنّ برادرش $x+10$ است. باتوجه به‌فرض مسأله، برابری زیر مسلّم است :

$$2x+10=1/5(x+10)$$

از حلّ این معادلهٔ درجهٔ اوّل، x به‌دست می‌آید :

$$2x+10=1/5x+15 \Rightarrow 2x-1/5x=15-10$$

$$\Rightarrow 0/5x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{0/5} \Rightarrow x=10$$

یعنی برادر علی ۱۰ سال و علی ۲۰ سال دارد. ۱۰ سال دیگر علی ۳۰ساله و برادرش ۲۰ سال خواهد داشت و سنّ علی ۱/۵ برابر سنّ برادرش خواهد بود.

مثال: دریک میهمانی، عده‌ای حاضر بودند و همگی باهم دست دادند و معلوم شد جمعاً ۵۵بار دستها فشرده شده است، چند نفر دراین میهمانی حاضر بوده‌اند؟

حل: اگر تعداد افراد حاضر دراین میهمانی را مساوی x بگیریم، بدیهی است که، چون هرکس باسایر افراد دست داده است، پس هر کس با $x-1$ نفر دست داده است، لذا مجموع تعداد دست دادنها برابر است با $x(x-1)$ ، اما دراین شمارش، چون هربار دست دادنها، برای هر دو نفری که باهم دست داده‌اند، یک‌بار شمرده شده است، لذا تعداد فشرده شدن دستهادوبرابر مقدارواقعی آن است. بنابراین، تعداد فشرده شدن دستها دقیقاً برابر است با $\frac{x(x-1)}{2}$ و باتوجه به‌فرض مسأله، می‌توان نوشت : $\frac{x(x-1)}{2}=55$ و از حلّ این معادلهٔ درجهٔ دوم، x به دست می‌آید :

$$\frac{x^2-x}{2}=55 \Rightarrow x^2-x=110 \Rightarrow x^2-x-110=0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x+10)=0 \Rightarrow x_1=11 , x_2=-10$$

روشن است که جواب $x_2=-10$ ، قابل قبول نمی‌باشد و تنها پاسخ صحیح $x_1=11$ است و یعنی ۱۱ نفر دراین میهمانی حاضر بوده‌اند.

مثال: محیط یک مثلث قائم‌الزاویه برابر ۲۴ و اندازهٔ وتر آن ۱۰ می‌باشد. اندازه‌های دو ضلع دیگر مثلث را به‌دست آورید.

حل: اگر طول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمهٔ مثلث را x بگیریم، باتوجه به‌اندازهٔ محیط آن و طول وتر، طول ضلع دیگر زاویهٔ قائمه، مساوی $14-x$ می‌باشد (چرا؟). حال به‌کمک قضیهٔ فیثاغورث درمثلثهای قائم‌الزاویه، می‌توان نوشت :

$$10^2=x^2+(14-x)^2$$

و از حلّ این معادلهٔ درجهٔ دوم بترتیب زیر، می‌توان x را به‌دست آورد :

$$۱۰۰=x^۲+۱۹۶+x^۲-۲۸x \Rightarrow ۲x^۲-۲۸x+۹۶=۰$$
$$\Rightarrow x^۲-۱۴x+۴۸=۰$$
$$\Rightarrow (x-۶)(x-۸)=۰ \Rightarrow x-۶=۰ \text{ یا } x-۸=۰$$
$$\Rightarrow x=۶ \text{ یا } x=۸$$

و از آن‌جا طول یکی از اضلاع زاویهٔ قائمه مساوی ۶ و دیگری مساوی ۸ می‌باشد. (اگر $x=۸$ درنظر گرفته شود، $۱۴-x=۶$ و اگر $x=۶$ باشد، $۱۴-x=۸$ می‌شود.)

مثال: پنج عدد صحیح متوالی به‌دست آورید که مجموع مربعات سه‌تای اوّل، برابر مجموع مربعات دوتای آخر باشد.

حل: اگر این پنج عدد متوالی را $n+۲$ و $n+۱$ و n و $n-۱$ و $n-۲$ بنامیم، باتوجه به‌فرض مسأله، خواهیم داشت:

$$(n-۲)^۲+(n-۱)^۲+n^۲=(n+۱)^۲+(n+۲)^۲$$

باساده کردن این عبارتها و بردن همهٔ عبارتها به‌سمت چپ تساوی، به‌یک معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$n^۲-۴n+۴+n^۲-۲n+۱+n^۲$$
$$=n^۲+۲n+۱+n^۲+۴n+۴$$
$$۳n^۲-۶n+۵=۲n^۲+۶n+۵$$
$$\Rightarrow ۳n^۲-۲n^۲-۶n-۶n+۵-۵=۰$$

$$\text{یا } n=۱۲$$
$$n^۲-۱۲n=۰ \Rightarrow n(n-۱۲)=۰ \Rightarrow n=۰$$

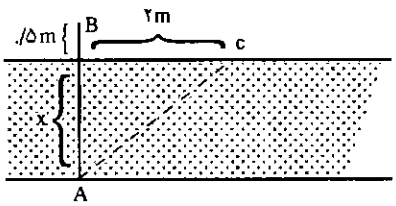
اگر $n=۰$ درنظر گرفته شود، این پنج عدد به‌صورت: ۲ و ۱ و ۰ و ۱- و ۲- و اگر $n=۱۲$ در نظر گرفته شود، این پنج عدد به‌صورت: ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۱و ۱۰ به دست می‌آیند، که هر دو سری اعداد، باشرط گفته شده، وفق می‌کنند.

آخرین مثال این بخش را از یک مسألهٔ تاریخی هندوستان برگرفته‌ایم:

گلی که دریک دریاچه روییده است، به‌اندازهٔ ۰/۵ متر از آب بیرون آمده است. دراثر وزش باد، از ریشه خم شده و درمحلّی که درفاصلهٔ ۲ متری محل اوّل آن است، درآب فرو می‌رود. عمق دریاچه چه‌قدر است؟

حل: اگر به‌شکل دقت کنیم و عمق دریاچه را x فرض کنیم، ارتفاع گل $x+۰/۵$ می‌باشد.

اکنون بانوشتن قضیهٔ فیثاغورث درمثلث $\hat{A}BC$، به‌معادله‌ای می‌رسیم که باحلّ آن، x که همان عمق دریاچه است، به‌دست می‌آید:



$$AC^۲=AB^۲+BC^۲ \Rightarrow (x+۰/۵)^۲=x^۲+۴$$
$$\Rightarrow x^۲+۰/۲۵+x=x^۲+۴ \Rightarrow x^۲+x-x^۲=۴-۰/۲۵$$
$$\Rightarrow x=۳/۷۵m$$

یعنی عمق دریاچه ۳/۷۵ بوده و ارتفاع گل ۴/۲۵m می‌باشد.

تمرین:

۱ـ دو عدد طبیعی متوالی به‌دست آورید که مجموع مربعات آنها مساوی ۱۱۳ باشد.

۲ـ طولهای اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه، سه عدد زوج متوالی‌اند، آنها را بیابید.

۳ـ مجموع مربعات سه عدد فرد متوالی، ۳۷۱ است، آن سه عدد را بیابید.

۴ـ عددی را پیدا کنید که مجموع آن، بامعکوس خودش، مساوی $\frac{۳۴}{۱۵}$ باشد.

۵ـ عددی را به‌دست آورید که حاصلضرب آن در ۱۴، به‌اندازهٔ ۸۴ واحد از حاصلضرب آن در ۱۷ کمتر باشد.

■



جشن

آغاز دهمین سال انتشار مجلهٔ ریاضی برهان

ساعت ۳۰ : ۱۰ دقیقهٔ صبح سه‌شنبه ۵ مهرماه ۱۳۷۹، به مناسبت آغاز دهمین سال انتشار مجلهٔ ریاضی برهان، جلسه‌ای با شرکت اعضای هیأت تحریریهٔ مجله و آقای «فریدون» صاحب امتیاز مجله و ریاست محترم انتشارات مدرسه و آقای «برادری» معاون فرهنگی محترم انتشارات مدرسه، منعقد گردید. اعضای حاضر هیأت تحریریه، عبارت بودند از :

آقایان: پرویز شهریاری، رستمی، قندهاری، امیری، صدر، هاشمی، شرقی و یاسی‌پور.

جلسه با تلاوت آیاتی چند از کلام‌الله مجید آغاز شد و سپس جناب استاد شهریاری به نمایندگی از اعضای هیأت تحریریه، از زحمات سردبیر و مدیرداخلی مجله، آقایان امیری و صدر تشکّر و خاطرنشان کردند که اوّلاً، در صورت امکان، فاصلهٔ زمانی بین دو شمارهٔ مجله کمتر شود و ثانیاً تاریخ نشر آن دقیق‌تر باشد. ایشان همچنین اشاره‌ای داشتند به محاسن کار گروهی و بقا و استمرار مجله با توجه به کار دسته‌جمعی.

در ادامهٔ جلسه، آقای یاسی‌پور با اشاره به آیهٔ کریمهٔ قرآن : فارجع البصر،...، ثمّ ارجع البصر برای رسیدن به اهداف مجله و بهبود هرچه بیشتر کیفیت آن، رجوع به کارهای گذشته و برنامه‌ریزی برای مقاله‌های آینده را خاطرنشان کردند. در ضمن، اشاره‌ای داشتند به وجود صمیمیت و همدلی اعضای هیأت تحریریه و این نکته را یکی از دلایل بقای مجله تا این تاریخ دانستند. ایشان با اشاره به بعضی از دست‌اندرکاران سابق مجله، از جمله آقای «چینی‌فروشان» رئیس اسبق، آقای «ابراهیمی» رئیس سابق انتشارات مدرسه و آقای «سیّد موسوی» عضو سابق هیأت تحریریه، یادشان را گرامی داشتند و از زحماتشان در پیشبرد مجله قدردانی کردند.

آقای رستمی بحثی داشتند دربارهٔ اطلاع‌رسانی مجله و معرفی وسیعتر آن. این نکته را آقای موسوی نیز مطرح کردند و نکاتی را دربارهٔ بهبود آن متذکر شدند. در ضمن، آقای رستمی تشکیل کتابخانهٔ مجهز ریاضیات و شرکت در کنفرانسهای ریاضی ایران را خواستار شدند.

آقای شرقی، عضو دیگر هیأت تحریریه، دربارهٔ معرفی رشته‌های گوناگون ریاضی و کاربردهای آن که یکی از بخشهای دورهٔ جدید مجله است، تذکراتی دادند.

جناب آقای قندهاری نیز با تشکّر از دست‌اندرکاران انتشار مجله، تشکّری نیز به مناسبت چاپ کتاب **فرهنگ ریاضیات** داشتند و آن را یکی از کارهای ارزندهٔ جنبی انتشار مجله قلمداد کردند.

آقای صدر نیز تشکّری داشتند از آقایان امیری و برادری، و تذکری دربارهٔ گردهمایی دست‌اندرکاران نشریات ریاضی دادند و وجود گردهماییهایی از این قبیل را لازم شمردند.

سپس نوبت سخن به آقای امیری، سردبیر محترم مجله

رسید که به ترتیب، به موارد زیر اشاره کردند :

۱- نشر مجله پس از این تاریخ، در هر دو ماه یک بار انجام می شود و تاریخ انتشار آن نیز منظم خواهد شد.

۲- کارهای جنبی مجله از قبیل نشر فرهنگ ریاضیات و کتابهای کوچک ریاضی، که در این مورد از آقایان دکتر پاشا و عابدی نیز سپاسگزاری کردند.

۳- توزیع مجله با سیستم توزیع رشد ریاضی انجام می شود که بهبود قابل توجهی در این وضع به وجود خواهد آورد.

۴- در مورد تبلیغات برای معرفی مجله، کارهایی انجام شده است؛ از قبیل تهیهٔ پوستر، بروشور و یک دوره مسابقهٔ تلویزیونی ریاضی به نام برهان.

۵- کارهای در دست انجام از قبیل تهیه و تألیف تاریخ ریاضی.

پس از سخنان آقای امیری و پذیرایی مختصری از دوستان، جناب آقای برادری، معاونت محترم فرهنگی، رشتهٔ سخن را به دست گرفتند و سخنانی مبسوط ایراد کردند که به طور خلاصه چنین بود :

اولاً، جلسهٔ سالگرد مجلهٔ برهان مصادف است با سالگرد شکست حصر آبادان، شکست حصری که اگر فرمان امام راحل(ره) و فداکاری رزمندگان اسلام نبود، انجام نمی گرفت و امروز ما امکان نشر این مجله و نیز دیگر فعالیتهای فرهنگی و شاید تمام فعالیتها را نداشتیم و به این ترتیب، ضمن سپاس از خالق، به خاطر تقریباً یک دهه انتشار مجلهٔ برهان، از دست‌اندرکاران آن تشکر کردند.

ایشان ضمن سخنان خود، اشاره‌ای داشتند به یکی از صفات حضرت احدیت و گفتند : خداوند متعال مؤلف القلوب است و هم او است که جمع صمیمی و یکدل مجلهٔ برهان را به وجود آورده و از حضرت باریتعالی درخواست کردند که جشن چهل سالگی برهان نیز به همین سبک و سیاق برگزار شود.

آن‌گاه به تداوم کار اشاره کردند و برای تداوم نشر مجله، شناخت آفتهای کار را از واجبات به شمار آوردند. به اهمیت استمرار مجله اشاره داشتند و آن را منوط به تازگی و طراوت مقاله‌ها و روزآمد بودن آنها دانستند. موارد زیر، از جمله موارد موردنظر ایشان در بهبود مجله بود :

۱- تشکیل سیستمی برای نقد دوره ای مجله توسط جمیع صاحبنظران.

۲- مشخص کردن اهداف بلندمدت و کوتاه مدت مجله.

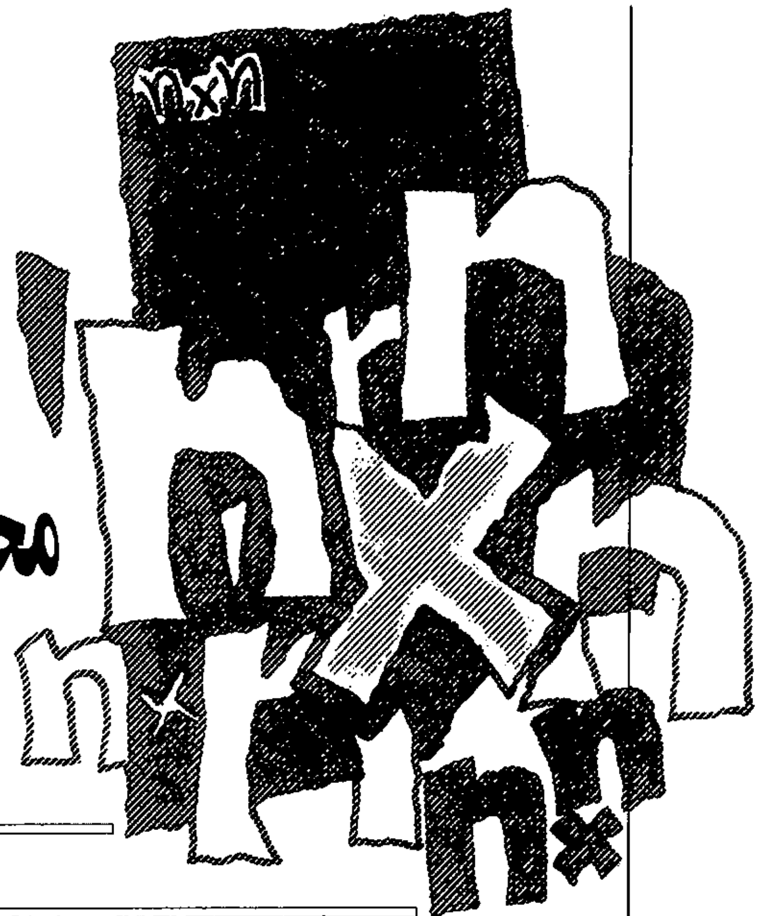
۳- توازن مطالب علمی و مطالب کمک آموزشی مجله.

۴- توجه به هدف اصلی مجله که آشنا کردن مخاطب با علم ریاضی و کاربردهای آن است.

۵- نشر و توزیع مرتب و به موقع مجله.

پس از سخنان مبسوط آقای برادری، جناب آقای فریدون، رئیس محترم انتشارات مدرسه، طی سخنان کوتاهی، از هیأت تحریریهٔ مجله تشکر کردند و گروه ریاضی را یکی از بهترین گروه‌های انتشارات مدرسه دانستند، و به خصوص تأکید بسیاری بر این مطلب داشتند که گروه ریاضی، طرحهای زیربنایی خود را ارائه دهد تا انتشارات مدرسه در تهیه و نشر آنها اقدام لازم را به عمل آورد.

جلسه همزمان با اذان ظهر پایان گرفت و دوستان هیأت تحریریه، با دلی گرمتر و عزمی راسختر، برای خدمت به خلق، به عبادت خالق شتافتند.



روش جدید و سریع برای محاسبهٔ دترمینانهای n×n

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی)

سید محمدرضا هاشمی موسوی

برای نشان دادن روش جدید محاسبه دترمینان، کافی است که به محاسبهٔ چند دترمینان در حالت کلی و عددی بپردازیم. بنابراین، دترمینان مرتبهٔ سوم و چهارم را در حالت کلی و عددی محاسبه می‌کنیم.

۱) محاسبهٔ دترمینان مرتبهٔ سوم

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

روش محاسبه: با توجه به قوانین دترمینانها همواره می‌توان فرض کرد که عنصر میانی ستون اوّل، یعنی a_2 مخالف صفر است ($a_2 \neq 0$). بنابراین فرض Δ_3 را به دترمینان مرتبه دوم زنجیره‌ای تحویل می‌دهیم. روش عمل به صورت زیر است.

روش عمل: ابتدا سطر دوم را بار دیگر می‌نویسیم. مرحلهٔ بعد، ستون اوّل حاصله را نیز یک مرتبهٔ دیگر میان ستون دوم و سوم قرار می‌دهیم. سپس عناصر به دست آمده را به دسته‌های چهارتایی تقسیم می‌کنیم و هر یک از دسته‌های چهارتایی را یک دترمینان ۲ × ۲ در نظر می‌گیریم، که در این صورت، یک دترمینان ۲ × ۲ داریم که هریک از عناصرش، خود یک دترمینان ۲ × ۲ است. در آخر، برای محاسبهٔ Δ_3 کافی است مقدار حاصله را بر a_2 تقسیم کنیم.

مراحل عمل: سطرم دوم را یک بار دیگر نوشته و ستون اوّل حاصله را نیز بار دیگر میان ستون دوم و سوم صداده‌ایم. سپس عناصر به دست آمده را به دسته‌های چهارتایی افراز کرده‌ایم :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \text{مرحلهٔ (۱)}$$

$$\text{مرحلهٔ (۲)}\quad \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{۱} & b_{۱} \\ a_{۲} & b_{۲} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۱} & c_{۱} \\ a_{۲} & c_{۲} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{۲} & b_{۲} \\ a_{۳} & b_{۳} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{۲} & c_{۲} \\ a_{۳} & c_{۳} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

هریک از دسته‌های چهارتایی، یک دترمینان ۲ × ۲ تشکیل می‌دهند. سپس از محاسبهٔ هریک از دترمینانهای ۲ × ۲ و محاسبهٔ دترمینان کلی و تقسیم عدد حاصل بر $a_{۲}$، مقدار $\Delta_{۳}$ محاسبه می‌شود :

$$\text{مرحلهٔ(۳)}\quad \Delta_{۳} = \frac{۱}{a_{۲}} \begin{vmatrix} \underbrace{a_{۱}b_{۲} - a_{۲}b_{۱}}_{A_{۱}} & \underbrace{a_{۱}c_{۲} - a_{۲}c_{۱}}_{B_{۱}} \\ \underbrace{a_{۲}b_{۳} - a_{۳}b_{۲}}_{A_{۲}} & \underbrace{a_{۲}c_{۳} - a_{۳}c_{۲}}_{B_{۲}} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{۱}{a_{۲}}(A_{۱}B_{۲} - A_{۲}B_{۱}) \quad (a_{۲} \neq ۰)$$

بنابراین $\Delta_{۳}$ چنین است :

$$\Delta_{۳} = \frac{۱}{a_{۲}}[(a_{۱}b_{۲} - a_{۲}b_{۱})(a_{۲}c_{۳} - a_{۳}c_{۲}) - (a_{۲}b_{۳} - a_{۳}b_{۲}) \times (a_{۱}c_{۲} - a_{۲}c_{۱})]$$

$$\Delta_{۳} = \frac{۱}{a_{۲}}[a_{۱}a_{۲}b_{۲}c_{۳} - \cancel{a_{۱}a_{۳}b_{۲}c_{۲}} - a_{۲}^{۲}b_{۱}c_{۳} + a_{۲}a_{۳}b_{۱}c_{۲} - a_{۱}a_{۲}b_{۳}c_{۲} + a_{۲}^{۲}b_{۳}c_{۱} + \cancel{a_{۳}a_{۱}b_{۲}c_{۲}} - a_{۲}a_{۳}b_{۲}c_{۱}]$$

پس از اختصار لازم :

$$\Delta_{۳} = a_{۱}b_{۲}c_{۳} - a_{۲}b_{۱}c_{۳} + a_{۳}b_{۱}c_{۲} - a_{۱}b_{۳}c_{۲} + a_{۲}b_{۳}c_{۱} - a_{۳}b_{۲}c_{۱}$$

مثال ۱ : دترمینان زیر را محاسبه کنید :

$$\Delta_{۳} = \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۲ \\ -۱ & ۱ & -۳ \end{vmatrix}$$

محاسبه به روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم :

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۲ \\ ۳ & -۲ & ۲ \\ -۱ & ۱ & -۳ \end{vmatrix};$$

۱) سطر دوم را بار دیگر نوشته‌ایم

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & -۲ & ۳ & ۲ \\ ۳ & -۲ & ۳ & ۲ \\ -۱ & ۱ & -۱ & -۳ \end{vmatrix};$$

۲) ستون اوّل حاصله را بار دیگر نوشته‌ایم

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} ۳ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ -۱ & -۳ \end{vmatrix} \end{vmatrix};$$

۳) به دترمینانهای مرتبهٔ دوم افراز کرده‌ایم

$$\begin{vmatrix} -۸ & ۵ \\ ۱ & -۷ \end{vmatrix};$$

۴) دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم

$$\Delta_{۳} = \frac{۵۱}{۳};$$

۵) حاصل دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم را تقسیم بر عنصر میانی ستون اوّل دترمینان می‌کنیم

$$\Delta_{۳} = ۱۷$$

۶) مقدار محاسبه شده $\Delta_{۳}$

ساده شدهٔ روش عمل دترمینان زنجیره‌ای

حال در این جا روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم را به صورتی مختصر و ساده‌تر ارائه می‌دهیم.

ابتدا ستون اوّل را جدا می‌کنیم و عملیات روی سطرهای متوالی را به شکل زیر انجام می‌دهیم:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \textcircled{a_2} & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

(با توجه به قوانین دترمینانها، فرض شده است که $a_2 \neq 0$)

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \underbrace{a_1b_2 - a_2b_1}_{A_1} & \underbrace{a_1c_2 - a_2c_1}_{A_2} \\ \underbrace{a_2b_3 - a_3b_2}_{B_1} & \underbrace{a_2c_3 - a_3c_2}_{B_2} \end{vmatrix} ;$$

$$\Delta_2 = A_1B_2 - A_2B_1 \;;\; \boxed{\Delta_3 = \frac{\Delta_2}{a_2}} \;(a_2 \neq 0)$$

در این‌جا مثال ۱ را با روش ساده شده دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم محاسبه می‌کنیم.

ابتدا ستون اوّل را جدا می‌کنیم و عملیات روی سطرها را انجام می‌دهیم و سپس Δ_2 را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -8 & 5 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = 51 \qquad \boxed{\Delta_3 = \frac{51}{3} = 17}$$

۲) محاسبهٔ دترمینان مرتبهٔ چهارم به روش افراز (دترمینان مرتبهٔ دوم زنجیره‌ای):

با روشی مشابه، ابتدا Δ_4 را به Δ_3 تحویل داده و سپس Δ_3 را مانند قبل به دترمینان مرتبهٔ دوم زنجیره‌ای تحویل می‌دهیم.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

برای افراز Δ_4 به دترمینانهای مرتبهٔ دوم، کافی است سطر دوم و سوّم را بار دیگر نوشته و ستون اوّل حاصله را یک در میان به طور مکرّر بنویسیم و سپس افراز را انجام دهیم. در این جا نیز با توجه به قوانین دترمینانها، a_2 و a_3 را مخالف صفر فرض می‌کنیم (مثلاً با تعویض دو سطر یا دو ستون). بنابراین همواره می‌توان فرض کرد که $a_3 \neq 0$ و a_2، سپس با این فرض، Δ_4 را افراز می‌کنیم:

$$\Delta_4 = \frac{1}{a_2a_3}\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & c_3 \\ a_4 & c_4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & d_3 \\ a_4 & d_4 \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a_2a_3}\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

* با توجه به قوانین دترمینانها می‌توان فرض کرد که $A_2 \neq 0$

و در نتیجه:

$$\Delta_4=\frac{1}{a_2a_3A_2}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}A_1 & C_1\\ A_2 & C_2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}A_2 & B_2\\ A_3 & B_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}A_2 & C_2\\ A_3 & C_3\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{a_2a_3A_2}\begin{vmatrix}A_4 & B_4\\ A_5 & B_5\end{vmatrix}=\frac{\overbrace{A_4B_5-A_5B_4}^{\Delta}}{a_2a_3A_2}$$

$$\boxed{\Delta_4=\frac{\Delta}{a_2a_3A_2}}$$

(فرض: a_2 و a_3 و $A_2 \neq 0$)

اکنون روش ساده شدهٔ دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم را ارائه می‌دهیم:

ابتدا ستون اوّل را جدا می‌کنیم و سپس عملیات روی سطرها را به شکل زیر انجام می‌دهیم. فرض شده است:

A_2 و a_2 و $a_3 \neq 0$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1 & d_1\\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2\\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3\\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4\end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}\underbrace{a_1b_2-a_2b_1}_{A_1} & \underbrace{a_1c_2-a_2c_1}_{B_1} & \underbrace{a_1d_2-a_2d_1}_{C_1}\\ \underbrace{a_2b_3-a_3b_2}_{A_2} & \underbrace{a_2c_3-a_3c_2}_{B_2} & \underbrace{a_2d_3-a_3d_2}_{C_2}\\ \underbrace{a_3b_4-a_4b_3}_{A_3} & \underbrace{a_3c_4-a_4c_3}_{B_3} & \underbrace{a_3d_4-a_4d_3}_{C_3}\end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\underbrace{A_1B_2-A_2B_1}_{\alpha_1} & \underbrace{A_1C_2-A_2C_1}_{\beta_1}\\ \underbrace{A_2B_3-A_3B_2}_{\alpha_2} & \underbrace{A_2C_3-A_3C_2}_{\beta_2}\end{vmatrix}=$$

$$\overbrace{\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1}^{\Delta_2}\Rightarrow \Delta_4=\frac{\Delta_2}{a_2a_3A_2}$$ (Δ_4 : حاصل دترمینان)

* این توضیح لازم است که برای محاسبهٔ دترمینان مرتبهٔ nام وقتی $n \geq 5$، نیز از روش ساده شده دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم استفاده می‌شود؛ زیرا هر قدر مرتبهٔ دترمینان بالاتر رود، نیاز ما به روشی با سرعت بالا بیشتر می‌شود. برای محاسبهٔ Δ_n باید توجه داشت که عناصر میانی ستون اوّل هر مرحله، یعنی Δ_{n-1} و Δ_{n-2} و Δ_{n-3} و... باید مخالف صفر باشند. به عنوان مثال، برای محاسبهٔ Δ_5 باید داشته باشیم: $\alpha_2 \neq 0$ و A_3 و A_2 و a_4 و a_3 و a_2؛ زیرا در مرحلهٔ (۱) Δ_5 باید داشته باشیم: $a_4 \neq 0$ و a_3 و a_2، در مرحلهٔ (۲) Δ_4 باید داشته باشیم: $A_3 \neq 0$ و A_2 و در مرحلهٔ (۳) Δ_3 باید داشته باشیم: $\alpha_2 \neq 0$. واضح است که با توجه به قوانین دترمینانها برای هر مرحله، این فرض مسلّم است و به عام بودن مسأله هیچ خللی وارد نمی‌کند.

مثال ۲: دترمینان مرتبهٔ چهارم زیر را به روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم محاسبه کنید.

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}2 & -3 & 1 & -1\\ 3 & -2 & -3 & 6\\ -1 & 1 & 2 & -4\\ 1 & 4 & -1 & 1\end{vmatrix}$$

محاسبه به روش دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم:

$$\Delta_4=\frac{1}{(-1)(3)}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}2&-3\\3&-2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\3&-3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-1\\3&6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&-2\\-1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&-3\\-1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}3&6\\-1&-4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-1&1\\1&4\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&2\\1&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}-1&-4\\1&1\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{-3}\begin{vmatrix}5&-9&15\\1&3&-6\\-5&-1&3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{(-3)(1)}\begin{vmatrix}\begin{vmatrix}5&-9\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}5&15\\1&-6\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&3\\-5&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-6\\-5&3\end{vmatrix}\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{vmatrix}24&-45\\14&-27\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{3}\left[(24)(-27)-(-45)(14)\right];$$

$$\Delta_4=-\frac{1}{3}(-18)=6;\ \boxed{\Delta_4=6}$$

در این‌جا مثال ۲ را نیز با روش ساده شدهٔ دترمینان زنجیره‌ای مرتبهٔ دوم محاسبه می‌کنیم.

برای این منظور، ابتدا ستون اوّل را جدا می‌کنیم و عملیات روی سطرها را به شکل زیر انجام می‌دهیم (مشابه دترمینان مرتبهٔ سوّم):

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}2&-3&1&-1\\3&-2&-3&6\\-1&1&2&-4\\1&4&-1&1\end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}5&-9&15\\1&3&-6\\-5&-1&3\end{vmatrix};\ \Delta_2=\begin{vmatrix}24&-45\\14&-27\end{vmatrix};\ \Delta_2=-18$$

$$\Delta_4=\frac{\Delta_2}{(3)(-1)(1)}=\frac{-18}{(3)(-1)(1)}=6;\ \boxed{\Delta_4=6}$$

مثال ۳: دترمینان مرتبهٔ پنجم زیر را محاسبه کنید.

حل : عملیات روی سطرها را انجام می‌دهیم و سپس دترمینانهای Δ_4 ، Δ_3 و Δ_2 را به دست می‌آوریم.

$$\Delta_5=\begin{vmatrix}1&-2&1&-1&-2\\2&-1&-1&1&-3\\1&-1&1&-2&1\\-1&2&1&-1&3\\1&-1&2&1&-1\end{vmatrix}$$

$$\Delta_4=\begin{vmatrix}3&-3&3&1\\-1&3&-5&5\\1&2&-3&4\\-1&-3&0&-2\end{vmatrix}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}6&-12&16\\-5&8&-9\\-1&-3&2\end{vmatrix}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-12&26\\23&-19\end{vmatrix}$$

حاصل دترمینان چنین خواهد شد :

$$\Delta_5=\frac{\Delta_2}{(2)(1)(-1)(-1)(1)(-5)}=\frac{-370}{-10}=37;$$

$$\boxed{\Delta_5=37}$$

همراه با درسهای ریاضیات



پرویز شهریاری

گالیله می‌گفت : «ریاضیات، زبان طبیعت است» ؛ یعنی دانشمند طبیعت‌شناس (اخترشناس، فیزیکدان، زیست‌شناس، شیمیدان، ژن‌شناس و...) بدون ریاضیات نمی‌تواند حتی یک گام به‌جلو بردارد. ریاضیات یار وفادار صنعت است و درپشت این چرخها و دنده‌ها، دستورها و بستگیهای ریاضیات پنهان است. از روزی که دربیش‌از ۳۵۰ سال پیش نخستین ماشین‌حساب مکانیکی را ساخت، تا امروز که با رایانه‌های پرقدرت، فاکس و اینترنت سروکار داریم، همه در پرتو ریاضیات و از برکت آن پدید آمده‌اند. ریاضیات دردانشهای دیگری همچون اقتصاد، جامعه‌شناسی و روان‌شناسی هم نفوذ کرده است و امروز یکی از ابزارهای شناخت به‌شمار می‌رود.... ریاضیات، همچنین به‌ذهن نظم می‌بخشد و کسی که باریاضیات کار می‌کند، به‌نظم عادت می‌کند و تااندازه‌ای درزندگی و برنامه‌ریزی برای زندگی عادی خود، و هم برای کارآیندهٔ خویش، موفّقتر است... ولی از همهٔ اینها جالبتر، این است که ریاضیات زیباست و از این‌جهت، باهنر قابل مقایسه است. می‌گویند دانش بابرون سروکار دارد و هنر بادرون آدمی ؛ ولی ریاضیات باهر دوجنبه کار دارد و از یک‌طرف و از آن جا که«زبان‌طبیعت است»، بیرون را می‌شکافد و چون باذهن آدمی سروکار دارد، درون را می‌کاود. می‌گویند دانش کارش خرد کردن است، هر پدیده‌ای را می‌شکند، درجزئیات وارد می‌شود و به‌ژرفا می‌رود، و هنر همه‌چیز را درمجموع خود می‌بیند. اگر دانش، جامعه و سپس انسان را آن‌قدر خرد می‌کند تاسرانجام به‌سلول برسد، هنر، تمامی انسانها و تمامی جامعه را یکی می‌یابند و درمجموع، دربارهٔ آن داوری می‌کند ؛ ولی ریاضیات از طرفی راهنمای دانش درشناسایی اجزاست و ازطرفی، مددکار هنر درشناخت «مجموعه»ی چیزها.

اما همهٔ اینها به‌شرطی است که همراه بادرسهای ریاضی خود، به‌تاریخ و فلسفه آن و به کاربردهای آن توجه داشته باشیم و این بجز آن است که به‌درس ریاضی همچون درسی که به‌حافظه مربوط می‌شود، نگاه نکنیم. ریاضیات را باید درمجموع خود درک کرد ؛ نه به‌صورت نکته‌ها و اشاره‌ها. زمانی‌که درس می‌خوانید، باید به عمق مطالب توجه داشته باشید و به‌طور دائم از خود بپرسید : این بخش درس از کجا آمده؟ چرا این موضوع مطرح شده است؟ آیا تصادفی به‌ذهن دانشمندی آمده است یا روند طبیعی پیشرفت، آن را رشد داده است؟ هیچ‌چیز درجهان و به‌ویژه در دانش، تصادفی نیست ؛ ولی ما باید از علتها آگاه باشیم. بیش‌از چهارصد سال نیست که نهادها و نشانه‌های ریاضی پدید آمده‌اند ؛ اما چه عامل یا عاملهایی موجب پدید آمدن آنها شده است؟ پیش‌از پیدایش نمادها، ریاضیدانان از چه وسیله‌ای برای بیان اندیشه‌های خود استفاده می‌کردند و چرا؟ همین عمل ضرب را که به‌راحتی انجام می‌دهیم و حاصلضرب عددهای چندرقمی را به‌دست می‌آوریم، مدیون ده انگشت دست هستیم. تازمانی که بشر نتوانسته بود نمادهایی برای ده عدد نخستین بیابد و تازمانی که برای عددصفر، علامتی قرار نداده بود، کار عمل‌ضرب بسیار دشوار بود. دریونان‌باستان، عددها را باالفبای یونانی نشان

می‌دادند و درنتیجه، عملهای حسابی بسیار دشوار بود. به‌همین دلیل، یا یکی از دلیلها ، آن است که یونانیها، بیشتر استدلالهای خود را به‌زبان هندسه می‌نوشتند ؛ چون عددنویسی نداشتند و عددنویسی بابلی- میخی هم از بین رفته بود.

خیال داریم دراین‌جا، تنها به‌یک‌جنبه از موضوعی که همراه باکتابهای درسی لازم است، بپردازیم و آن، کوشش و کششی است که انسان درطول موجودیت خود، دراین چندهزار سالی که از موجودیت انسان اندیشمند و ابزارمند می‌گذرد، درزمینهٔ ریاضیات انجام داده است.

ازآن زمانی‌که انسان دوران خوشبختی نخستین خود را در طول هزاران سال می‌گذراند، تنها پنج یا شش‌هزارسال می‌گذرد. درآن دوران کودکی انسان نخستین، زندگی بسیار ساده بود، همه برای زندگی کار می‌کردند و از دسترنج همگان، همهٔ قبیله استفاده می‌کرد. اقتصاد برپایهٔ شکارو درختان جنگلی قرار داشت. درغارها و کنار رودخانه‌ها جا گرفته بودند. هیچ‌کسی دیگری را نمی‌آزارد و محصول شکار یا میوه‌های جنگلی که یک‌نفر به‌دست می‌آورد، برای همه بود. هر کسی وظیفه‌ای داشت و زندگی به‌سامان و راحت می‌گذشت. دریکی از غارهای بهشهر، استخوانی پیدا شده که مربوط به تقریباً هجده‌هزار سال قبل است. روشی این استخوان، پاره‌خطهای راست موازی هم کنده شده است و روشن است که نوعی حساب اولیه برای قبیله بوده است. انسان از همان آغاز، درتلاش برای پیشرفت خود بوده است ؛ ولی این پیشرفت درابتدا بسیار کند بود. سده‌های متوالی می‌گذشت و انسان همچنان درشکار و استفاده از جنگل به‌سر می‌برد تا این‌که یاد گرفت از کاشت برخی گیاهان استفاده کند و... کشاورزی آغاز شد. کشاورزی نیاز به‌شناختن زمان دارد تا زمان کشت‌وبرداشت روشن باشد. انسان که پیش‌از آن، از حرکت ماه‌و ستارگان برای یافتن راه‌خود سود می‌جست، دیگر نمی‌توانست به‌آن بسنده کند و... درطول سده‌ها، توانست روزشمار و گاه‌نامهٔ خورشیدی را سامان دهد. ایرانیان از نزدیک به‌پنج‌هزار سال پیش گاه‌شماری خورشیدی داشته‌اند و روزوماه و سال را باآن می‌سنجیده‌اند ؛ بدون این که بدانند زمین به‌دور خورشید می‌چرخد.

گرفتاری بشر، از زمانی آغاز شد که پا به‌مرحلهٔ تازه‌ای گذاشت. دیگر می‌توانست با کشت خود، بسیاری از چیزها را تهیه کند ؛باتنه‌های درخت قایق ساخت و رودخانه‌ها و بعدها دریاها را درنوردید و... صاحب سلاح شد. عده‌ای دیگران را به‌کار کشیدند ؛ آنان باید روی زمین‌ها کار می‌کردند، کشتیها را راه می‌انداختند، برای صاحبان خود، خانه و کاخ می‌ساختند و... دوران بردگی انسان آغاز شد. جامعه‌شناسان سدهٔ نوزدهم، که سرمایه‌داری تجاری همه‌جا نفوذ کرده بود، نظریهٔ «انسان‌وحشی»را پیش کشیده‌اند. گویا انسان وحشی، انسانهای دیگر را می‌خورده است ؛ ولی «انسانهای وحشی» همان کسانی بودند که دیگران را به‌زنجیر کشیده و از آنها کار می‌کشیده‌اند. انسانهای وحشی کسانی بودند که دردوران بردگی و ارباب-رعیتی (که پس‌از آن آمد) خود را صاحب جان‌ومال همهٔ مردم می‌دانستند و از دسترنج آنها استفاده می‌کردند. جامعه‌شناسان نظام سرمایه‌داری، دلیل دیگری هم برای نظریهٔ خود داشتند ؛ آنها می‌خواستند جنایتهای حکّام سرمایه‌داری را که به‌کشورهای دیگر می‌تاختند و مردم آن را درخدمت خود می‌گرفتند، به‌نام لشکرکشی «انسان‌متمدن» به‌کشورهایی که درآن‌جا «انسانهای وحشی» زندگی می‌کنند، توجیه کنند.

انسان به‌بند کشیده شد ؛ ولی به‌هرحال گامی به‌پیش برداشته بود، و دراین میان، هوشمندان جامعه، که از همهٔ حقوق محروم بودند و دربین آنان، کاهنان هم بودند، بتدریج دانش و از آن جمله، دانش ریاضی را پیش بردند. هنوز دوران اسارت انسان به‌پایان نرسیده است ؛ ولی ما درزمان خود، شاهد پیشرفت و تکامل دانشها، به‌صورتی که باورکردنی نیست، هستیم...

□

ریاضیات را زمانی می‌توان یاد گرفت و به‌کار بست که دوران گذشته و پراز خوف‌و هراس آن را بشناسیم. باکششها و کوششهایی که اغلب به‌دست ساده‌ترین و محروم‌ترین انسانها انجام گرفته است، آشنا شویم و خود را درمیان انبوه آگاهیها و دستورها گم نکنیم. «گوته» می‌گفت : «تاریخ دانش، خود دانش است.» و اگر ما می‌خواهیم درمیان هیاهوی زمان، راه خود را بیابیم، باید تاریخ را بشناسیم و خود را تنها درچارچوب دانش‌روز محبوس نکنیم.

از این‌رو، تاریخ دانش‌ریاضی، از ساده‌ترین تا پیچیده‌ترین آنها، روایت خواهد شد. دلیل پیدایش این یا آن نظریهٔ ریاضی را، در بستگی بازمان خود، خواهیم آورد و خواهیم دید چه تلاشهایی صورت گرفته است تا انسان به‌این جایی که ما امروز هستیم، رسیده است.

حجم یک مخروط، بدون کاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال



ام. هیرشهورن[1]

ترجمه کریم احمدی دلیر، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تبریز

همه می‌دانیم که اگر حجم، مساحت قاعده و ارتفاع یک مخروط را به ترتیب با حروف V، A و h نشان دهیم، حجم آن از فرمول $V=\frac{1}{3}Ah$ به‌دست می‌آید. عامل $\frac{1}{3}$ در این فرمول از انتگرال‌گیری از x^2 نسبت به x ظاهر می‌شود. هدف این مقاله، با شروع از فرض $V=cAh$، نشان دادن- **بدون کاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال**- این مطلب است که $c=\frac{1}{3}$.

با استفاده از این فرمول مخروط، فرمولهای حجم و مساحت سطح یک کره به شعاع R را نیز نتیجه خواهیم گرفت.

مخروطی ناقص به ارتفاع h، مساحت بالایی a و مساحت قاعدهٔ A را در نظر بگیرید که از یک مخروط به ارتفاع e+h («e» برای قسمت «اضافی» است) و مساحت قاعدهٔ A بریده شده است. حجم این مخروط ناقص عبارت است از :

$$V=cA(e+h)-cae.$$

حال، مساحت یک برش عرضی این مخروط با مربع فاصلهٔ آن از رأس مخروط متناسب است ؛ بنابراین :

$$\frac{\sqrt{a}}{e}=\frac{\sqrt{A}}{e+h}.$$

از این نتیجه می‌شود که :

$$e=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}h \ ,\ e+h=\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}h$$

و حجم این مخروط ناقص عبارت است از :

$$V=cA(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}h)-ca(\frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}h)$$

$$=c(\frac{A\sqrt{A}-a\sqrt{a}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}})h=c(A+\sqrt{Aa}+a)h.$$

حال ملاحظه می‌کنیم که همچنان که a به A میل می‌کند، چه اتفاقی می‌افتد. این مخروط ناقص به یک استوانه تبدیل می شود و درمی‌یابیم که $V=3cAh$. اما می‌دانیم که برای یک استوانه، $V=Ah$، بنابراین $c=\frac{1}{3}$، و نتیجه می‌گیریم که حجم یک مخروط عبارت است از :

$$V=\frac{1}{3}Ah.$$

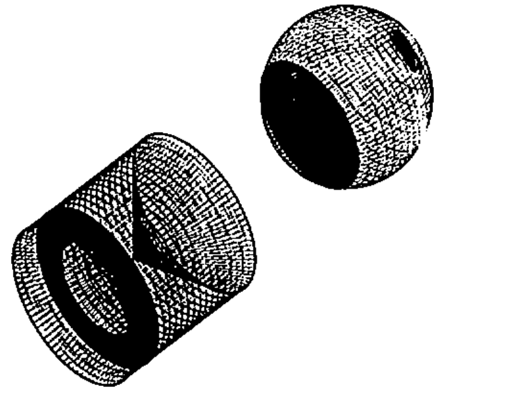
به عنوان یک جایزه، حجم یک مخروط ناقص را به دست می‌آوریم :

$$V=\frac{1}{3}(A+\sqrt{Aa}+a)h.$$

دو کاربرد ساده از این فرمول را نتیجه می‌گیریم.

حجم یک کُره

شکل ۱ کره‌ای به شعاع R را همراه با استوانه‌ای به شعاع R و طول 2R را نشان می‌دهد. مخروطهایی از هریک از دو انتهای استوانه به مرکز آن حفر شده‌اند.



اگر هر کدام از این دو شیء را در فاصلهٔ x از مرکز آن ببریم، مساحت این برش در هر دو حالت عبارت است از $\pi(R^2 - x^2)$، لذا این دو جسم دارای حجم یکسانی هستند و نتیجه می‌گیریم که:

$$V = \pi R^2 . 2R - 2 . \frac{1}{3} . \pi R^2 . R = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$

مساحت سطح یک کُره

به ازای یک کرهٔ مفروض، سطح آن را به تعداد زیادی قطعه‌های (مسطح) بسیار کوچک به مساحت A_i، $i = 1, 2, \dots, n$ تقسیم می‌کنیم. هرکدام از این قطعه‌ها را به مرکز کُره وصل می‌کنیم تا مخروطهایی نوک‌تیز تشکیل شوند.

حجم یک مخروط نوعی عبارت است از $V = \frac{1}{3}A_i R$ و جمع کل حجمهای تمامی مخروطها عبارت است از:

$$V = \frac{1}{3}R \sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{1}{3}RS,$$

که در آن S عبارت است از مساحت سطح کره، لذا $\frac{1}{3}RS = \frac{4}{3}\pi R^3$؛ بنابراین:

$$S = 4\pi R^2 .$$

زیرنویس:

مقالهٔ حاضر ترجمهٔ "The Volume of a cone, without Calculus" چاپ شده (Mathematics Magazine) شمارهٔ Vol. 70, No. 4. Oct. 1997 است.

1. M. Hirschhorn, University of New South Wales, Sydney. 2052, NSW, Australia.

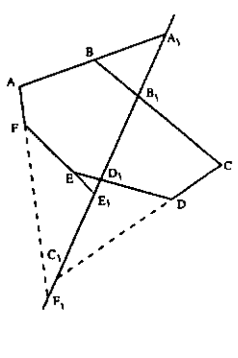
مسألهٔ مسابقه‌ای برهان



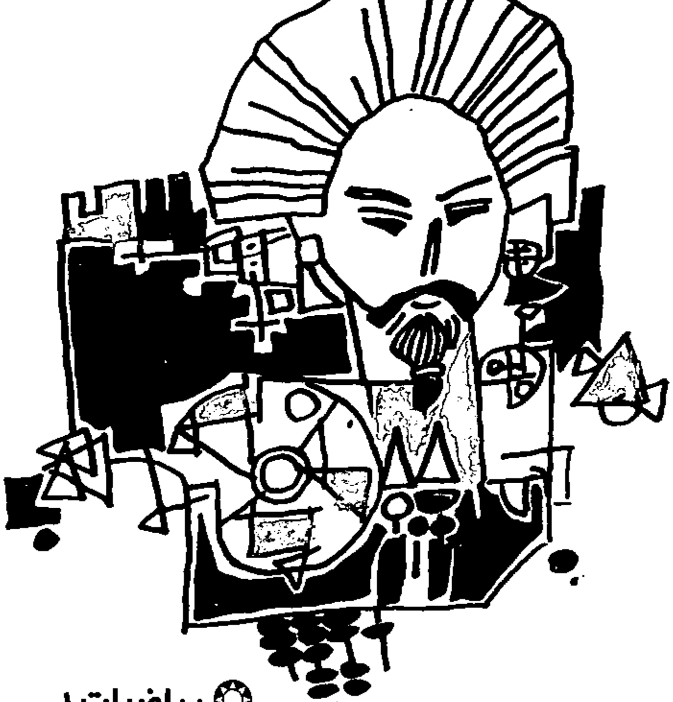
چندضلعی مسطح دلخواهی، برای مثال، شش‌ضلعی ABCDEF و قاطع Δ که ضلعهای AB، BC، CD، DE، EF و FA از این چندضلعی را به‌ترتیب در نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1، E_1 و F_1 قطع می‌کند، درنظر می‌گیریم. ثابت کنید:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{C_1D}}{\overline{C_1E}} \times \frac{\overline{D_1E}}{\overline{D_1F}} \times \frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}} = 1$$

آیا عکس این قضیه صحیح است؟



پرسشهای چهار گزینه‌ای



ریاضیات ۱

۱ـ کدام گزینه نادرست است؟

الف) مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هرمجموعه است.

ب) اگر $A \not\subset B$ ، آن‌گاه باید حدّاقل یک عضو در A باشد که آن عضو در B نباشد.

ج) هرمجموعه، زیرمجموعهٔ خودش است.

د) اگر $A \not\subset B$ و $C \subset A$ ، آن‌گاه $B \subset C$.

۲ـ کدام گزینه درست است؟ (M مجموعهٔ مرجع)

الف) $A \cup (B \cap A) = B$

ب) $B \cap (A \cup B) = A'$

ج) $A \cap M = A'$

د) $(B \cup \varnothing) \cap M = B$

۳ـ باتوجه به‌تعریف تفاضل دومجموعه $(A-B)$ ، کدام گزینه نادرست است؟ (M مجموعهٔ مرجع)

الف) $(A-B)$　　ب) $A - \varnothing = A$

ج) $A - M = \varnothing$　　د) $A - B = A' \cap B$

۴ـ اگر $A - B = \varnothing$ ، کدام گزینه نادرست است؟ (A' متمم A است.)

الف) $A \cup B = B$　　ب) $A \subset B$

ج) $A \cap B' = A'$　　د) $B' \subset A'$

۵ـ اگر تعداد زیرمجموعه‌های یک‌مجموعهٔ $(n+۲)$ عضوی، ۲۲۴ واحد کمتراز تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(n+۵)$ عضوی باشد، n کدام است؟

الف) $n=۲$　　ب) $n=۳$

ج) $n=۴$　　د) $n=۵$

۶ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم دوعبارت $A = ۱۳x^{۱۳۸۰} + ۷x^{۱۳۸۱} - ۹$ و $B = x^۲ + mx + ۱$ برعبارت $(x+۱)$ برابر باشند، m کدام است؟

الف) ۹　　ب) ۷

ج) ۵　　د) ۱

۷ـ عبارت $k = \left(\frac{۳a^۳ b^{-۷} c^۲}{۸^۴ a^{-۲} b^{-۳} c^{-۴}} \right)^{a+۲}$ ، به‌ازای $a = (-۱)^{-۳}$ ، $b = ۲^{-۱}$ و $c = ۲$ برابر چه عددی است؟

الف) $k = \frac{-۳}{۲^{۱۰}}$　　ب) $k = \frac{-۳}{۲^{۲۰}}$

ج) $k = \frac{-۳}{۲^{۳۰}}$　　د) $k = \frac{-۳}{۲^{۴۰}}$

۸ـ مساحت مربعی به‌ضلع $x^{۱۳۸۰}$ ، برابر مساحت مستطیلی به‌طول $۶۴x^{۲۴۱۶}$ و عرض $۴x^{۳۴۵}$ است ؛ ۶۴ برابر محیط مربعی به‌ضلع x چه عددی است؟

الف) ۱　　ب) ۲

ج) ۴　　د) ۱۶

۹ـ اگر برابری $k(x+۱)^۲ + s(x-۱) = ۲x - ۲$ ، به‌ازای هرمقدار x برقرار باشد، حاصل $S^{s^k} + s^k + ۱$ کدام است؟

الف) ۲　　ب) ۳

ج) ۴　　د) ۵

۱۰ـ عدد $T = (۲^{۳۴} + ۲)$ برکدام یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

الف) $۱۸(۲^{۱۱}+۱)$　　ب) $۱۹(۲^{۲۷}+۱)$

ج) $۲۸(۲^{۱۷}+۲)$　　د) $۲۹(۲^{۱۵}+۲)$

ریاضیات ۳

۱ـ معادلهٔ $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۲ـ تابع f با ضابطهٔ $y=\frac{x+2}{x-1}$ مفروض است. به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر از دامنهٔ تابع، $-1\le y\le 1$ است؟

الف) $[-\frac{1}{2}\,,+\infty)$

ب) $[-\frac{1}{2}\,,+\infty)-\{1\}$

ج) $(-\infty\,,-\frac{1}{2}]$

د) $[0\,,-\frac{1}{2}]$

۳ـ اگر $f(x)=\begin{cases}\operatorname{Sin}x+\operatorname{Cos}x, & x>\sqrt{2}\\ \operatorname{Sin}x-\operatorname{Cos}x, & x<\sqrt{2}\end{cases}$ باشد، حاصل $f(\frac{\pi}{3})$ برابر با کدام گزینه است؟

الف) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

ج) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$

۴ـ تابع حقیقی f با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x$ روی کدام مجموعهٔ مقادیر دامنهٔ تعریف، یک‌به‌یک نیست؟

الف) $[1\,,+\infty)$ ب) $(-\infty\,,1]$

ج) $[2\,,+\infty)$ د) $(-\infty\,,2]$

۵ـ دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2+x$، با فرض $x\neq -2$، حاصل $\frac{f(x+2)-f(x+1)}{f(x+3)-f(x)}$، برابر با کدام گزینه است؟

الف) $\frac{1}{3}$ ب) ۳ ج) $\frac{2}{3}$ د) ۲

۶ـ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|-[x]$، وقتی $x\in[-2\,,2]$ باشد، به کدام صورت زیر است؟

الف) چهار پاره‌خط موازی.

ب) چهار پاره‌خط موازی و یک نقطه.

ج) چهار پاره‌خط، شامل دو جفت دوبه‌دو موازی.

د) چهار پاره‌خط شامل دو جفت دوبه‌دو موازی و یک نقطه.

۷ـ تابع $\begin{cases}f:\mathbb{R}\to z\\ f(x)=[x]\end{cases}$ کدام است؟

الف) یک به یک است و پوششی نیست.

ب) پوششی است و یک‌به یک نیست.

ج) نه یک‌به‌یک است و نه پوششی.

د) هم یک‌به‌یک است و هم پوششی.

۸ـ اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ دترمینان ماتریس A^2-B^2 کدام است؟

الف) ۳۸ ب) ۲۱ ج) ۴۶ د) ۲۹

۹ـ اگر برای ماتریس دودردوی A داشته باشیم $A^2-2A=I$ و $|A|\neq 0$، حاصل $A-A^{-1}$ برابر با کدام است؟

الف) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

۱۰ـ به‌ازای چه مقدار m دستگاه معادله‌های $\begin{cases}mx+2y=0\\ 2x+my=0\end{cases}$ دارای جواب غیرصفر است؟

الف) $m\in\varnothing$ ب) $m=2$

ج) $m=-2$ د) $m=\pm 2$

۱۱ـ K چه باشد تا دستگاه معادله‌های $\begin{cases}kx-(5k+6)y=4\\ x+ky=-2\end{cases}$ دارای جواب نباشد؟

الف) ۲- ب) ۳- ج) ۲- یا ۳- د) ۰

۱۲ـ به‌ازای کدام مجموعهٔ مقادیر x عبارت جبری $\delta=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\times\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ تعریف شده است؟

الف) $\mathbb{R}$ ب) $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$

ج) $R-(-1\,,1)$ د) $\mathbb{R}-[-1\,,1]$

۱۳ـ اگر $\log_{5}^{2}=a$ باشد، $\log 2$ بر حسب a کدام است؟

الف) $\frac{a+1}{a}$ ب) $\frac{a}{a+1}$

ج) $\frac{a}{a-1}$ د) $\frac{a-1}{a}$

۱۴ـ معادلهٔ $\log_{2x-2}^{x^2}=2$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳

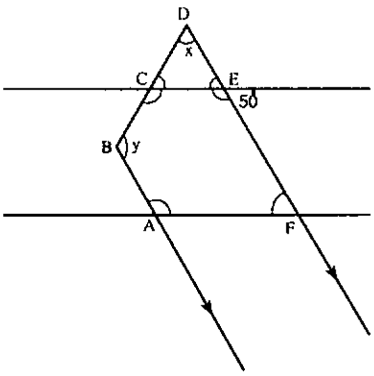
۱۵ـ اگر $f(x)=x^2-x-1$ باشد، حاصل $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ با صرف‌نظر از مقادیر کوچک Δx برابر با کدام گزینه می‌شود؟

الف) $2x$ ب) $2x-1$

ج) $2x+1$ د) $4x-1$

هندسهٔ ۱

۱ـ اندازهٔ $x+y$، درصورتی که $DC=DE$ و پیکانهای هم‌جهت خطهای موازی را نشان دهند، چه قدر است؟

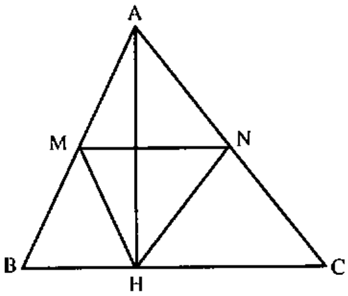


الف) 100° ب) 80°

ج) 120° د) 180°

۲ـ AH ارتفاع مثلث ABC و M و N

به‌ترتیب وسطهای ضلعهای AB و AC است. نسبت محیط مثلث HMN به محیط مثلث ABC کدام است؟



الف) ۲ ب) $\frac{۱}{۳}$
ج) $\frac{۱}{۲}$ د) ۳

۳ـ کدام‌یک از نمودارهای زیر نمایش‌دهندهٔ یک خم نیست؟

الف)  ب) 
ج)  د) 

۴ـ مستطیلی به‌ابعاد ۱۲ و ۱۸، معادل مثلثی به‌قاعدهٔ ۲۴ است. اندازهٔ ارتفاع نظیر این قاعدهٔ مثلث کدام است؟

الف) ۱۲ ب) ۱۴
ج) ۱۶ د) ۱۸

۵ـ مساحت متوازی‌الاضلاعی به‌قاعدهٔ $x+۲$ و ارتفاع X، دوبرابر مساحت یک لوزی به‌قطرهای ۶ و ۸ است. اندازهٔ قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع چه‌قدر است؟

الف) ۲ ب) ۴
ج) ۶ د) ۸

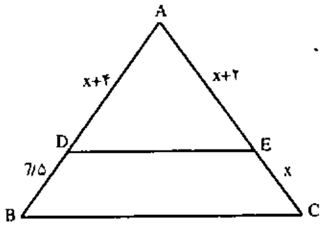
۶ـ درچهارضلعی ABCD دوقطر AC و BD برهم عمودند. اگر AC=۳۶ و BD=۲۴ باشد، اندازهٔ مساحت این چهارضلعی کدام است؟

الف) ۸۶۴ ب) ۴۳۲
ج) ۱۷۲۸ د) ۲۱۶

۷ـ شش‌ضلعی منتظمی، معادل ذوزنقه‌ای به‌قاعده‌های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۶ است. اندازهٔ ضلع این شش‌ضلعی منتظم، درصورتی که اندازهٔ سهم آن برابر ۴ باشد، چه قدر است؟

الف) ۲ ب) ۳
ج) ۴ د) ۵

۸ـ درشکل، $DE \parallel BC$ است. نسبت مساحت مثلث ADE به‌مساحت مثلث ABC کدام است؟



الف) $\frac{۱۶}{۴۹}$ ب) $\frac{۴}{۷}$
ج) $\frac{۸}{۴۹}$ د) $\frac{۷}{۴}$

۹ـ منشور مربع‌القاعدهٔ قائمی به‌قاعدهٔ ۱۲ و ارتفاع ۱۸ است. حجم استوانه محاط دراین منشور کدام است؟

الف) ۶۴۸π ب) ۶۴۸
ج) ۳۲۴π د) ۳۲۴

۱۰ـ نسبت مساحتهای سطح دوکره برابر $\frac{۴}{۹}$ است. نسبت حجمهای این دوکره چه‌قدر است؟

الف) $\frac{۴}{۹}$ ب) $\frac{۲}{۳}$
ج) $\frac{۸}{۲۷}$ د) $\frac{۱۶}{۹}$

ریاضیات ۵

۱ـ درتابع f باضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} ax+۲ , & x>۲ \\ x-۲ , & x<۲ \end{cases}$، اگر $f(۱)f(۳)=-۵$ باشد، $۲a$ چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) ۲
ج) ۳ د) ۴

۲ـ دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt[۳]{۲x-۱}$ کدام است؟

الف) $x>\frac{۱}{۲}$ ب) $x\geq\frac{۱}{۲}$
ج) $x\leq\frac{۱}{۲}$ د) IR

۳ـ اگر $f(x)=x^۲-۴\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ باشد، $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ چه‌قدراست؟

الف) ۲ ب) ۳
ج) -۳ د) -۲

۴ـ اگر $f(x)=ax+۲$ ، $g(x)=(۲-۳a)x+۳$ و $(f+g)(-۱)=۵$ باشد، a چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) ۲
ج) ۳ د) -۲

۵ـ حدّکسر $\frac{\sqrt{x+۱}-۱}{Sin۲x}$ و قتی $x\to ۰$، کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۳}$ ب) $\frac{۱}{۴}$
ج) $\frac{۱}{۵}$ د) $\frac{۱}{۶}$

۶ـ اگرتابع f باضابطه $f(x)=\begin{cases} x^۲-a , & x<۱ \\ bx-۱ , & x>۱ \\ ۳ , & x=۱ \end{cases}$ به‌ازای همهٔ مقادیر X پیوسته باشد، $a+b$ چه‌قدر است؟

الف) ۱ ب) ۲
ج) ۳ د) ۴

۷ـ درتابع $f(x)=Sin(۲x-\frac{\pi}{۶})+Cos۲x$، مقدار $f'(\frac{\pi}{۲})$ چه‌قدر است؟

الف) $\sqrt{۳}$ ب) $-\sqrt{۳}$
ج) $۲\sqrt{۳}$ د) $-۲\sqrt{۳}$

۸ـ تابع $f(x)=\frac{۳x-۱}{x-۲}$ درفاصله‌های $[۰,۱]$ و $[۳,۵]$ به‌ترتیب چگونه است؟

الف) صعودی ـ صعودی
ب) صعودی ـ نزولی
ج) نزولی ـ صعودی
د) نزولی ـ نزولی

۹ـ به‌ازای کدام مقدار a و b، نقطهٔ $A=(۳,-۱۶)$ ، نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نی‌مم تابع

f باضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx-7$ است؟

الف) $a=1$ ، $b=6$

ب) $a=1$ ، $b=-6$

ج) $a=7$ ، $b=1$

د) $a=6$ ، $b=-2$

۱۰ـ معادلهٔ خط مماس برمنحنی تابع f باضابطهٔ $f(x)=2x^3-x^2+5x-1$ درنقطه‌ای به‌طول ۱- واقع‌برآن کدام است؟

الف) $f(x)=2x^3-x^2+5x-1$

ب) $y=-13x+4$

ج) $y=13x-4$

د) $y=13x+4$

حسابان ۱

۱ـ دامنهٔ تعریف کدام یک از تابعهای به معادله‌های زیر مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است؟

۱) $f(x)=\log x^2$

۲) $f(x)=\log|x+1|$

۳) $f(x)=\sqrt{x^2+4x+1}$

۴) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$

۲ـ تابع به معادلهٔ زیر:

$f(x)=\mathrm{Log}(\sqrt{a^2x^2+1}-3x)$ فرد است، a کدام است؟

۱) $\{\pm1\}$ ۲) $\{\pm2\}$

۳) $\{\pm3\}$ ۴) $\{\pm9\}$

۳ـ اگر باقیماندهٔ تقسیم عبارت زیر:

$P(x)=x^3+3x^2+3x$ بر $(x-a)$، ۲۸ باشد، a کدام است؟

۱) $a=1$ ۲) $a=2$

۳) $a=-1$ ۴) $a=-2$

۴ـ اگر f تابعی یک به یک و داشته باشیم $g(x)=f(\frac{1}{x})-4$ ، $g^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{f^{-1}(x-4)}$

۲) $\frac{1}{f^{-1}(x+4)}$

۳) $\frac{-1}{f^{-1}(x-4)}$

۴) $\frac{-1}{f^{-1}(x+4)}$

۵ـ عبارت $\cot x-\tan x$ برابر است با:

۱) $\cot 2x$ ۲) $\tan 2x$

۳) $2\cot 2x$ ۴) $2\tan 2x$

۶ـ حاصل $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{3x}-3}$ برابر است با:

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{2}{5}$

۷ـ حاصل $\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\cos 2x}}$ برابر است با:

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۳) $\pm\sqrt{2}$ ۴) حدّ ندارد

۸ـ منحنی تابع به معادلهٔ زیر:

$f(x)=\frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x}}{(x+1)(x+2)(x-4)}$ چند مجانب قائم دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۳

۹ـ تابع به معادلهٔ زیر:

$f(x)=\begin{cases}\left[x-\frac{5}{2}\right]+a, & x\geq2\\ \left[x+\frac{1}{1000}\right]+2a, & x<2\end{cases}$ در ۲ پیوسته است، a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱-

۳) ۲- ۴) ۳-

۱۰ـ اگر $f'(x)=\frac{1}{x}$ ، آن‌گاه مشتق تابع به معادلهٔ $y=f(\sqrt[3]{x^2})$ در $x=2$، کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{8}{3}$

هندسهٔ تحلیلی پیش دانشگاهی

۱ـ قرینهٔ نقطهٔ (۲ و ۲- و ۱)=M نسبت به‌صفحهٔ $P: 2x-y-z-8=0$ کدام نقطه است؟

۱) $M'=(5,4,0)$

۲) $M'=(-5,-4,1)$

۳) $M'=(5,-4,0)$

۴) $M'=(0,-4,5)$

۲ـ طول میانهٔ رأس B از مثلث ABC، (۴و۰و۲)=A، (۲و۱-وa)=B و (۲-و۲و۰)=C برابر ۳ است، مقدار a کدام است؟

۱) ±3 ۲) ±1

۳) ۳+ و ۱- ۴) ۳- و ۱+

۳ـ اگر $a=-2i+j-6k$ باشد، تصویر بردار $-\frac{2}{3}a$ روی محور zها کدام است؟

۱) $+\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$

۳) ۴- ۴) ۴+

۴ـ اگر (۱و ۰ و ۱-)=a، (۲ و ۲ و ۲)=b و (۴و ۱- و ۳)=c باشد، $c.(a\times b)$ کدام است؟

۱) ۱۸+ ۲) ۱۸-

۳) ۹- ۴) ۹+

۵ـ فاصلهٔ نقطهٔ (۳و۱و۲-)=A از خط D به معادله‌های پارامتری $z=-t+2$ و $y=t$ و $x=2t-1$ چه‌قدر است؟

۱) $\frac{\sqrt{21}}{3}$ ۲) $\frac{\sqrt{21}}{2}$

۳) $\sqrt{21}$ ۴) $2\sqrt{21}$

۶ـ معادلهٔ صفحه گذرنده بر نقطه (۴- و ۲ و ۱)=A و عمود بر دو صفحهٔ $P_1: x+z-2=0$ و $P_2: y+2z=3$ ، کدام است؟

۱) $2x-y+z=0$
۲) $x-y+z-9=0$
۳) $-x+2y+9=0$
۴) $-x-2y+z+9=0$

۷ـ کدام نقطه از خط $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+5}{7}$ به فاصلهٔ ۳ از صفحهٔ $P:2x+2y-z+4=0$ و بالای این صفحه واقع است؟

۱) (۴۷- و ۱۹- و ۱۱-)
۲) (۴۷ و ۱۹ و ۱۱)
۳) (۴۷ و ۱۹- و ۱۱)
۴) (۴۷ و ۹- و ۱۱)

۸ـ اگر سه نقطهٔ $A=(a,1,2)$، $B=(4,-1,0)$ و $C=(2,a+b-1,4)$ روی یک خط راست واقع باشند، $a+b$ چه‌قدر است؟

۱) ۱ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۴

۹ـ معادلهٔ صفحه‌ای که در نقطهٔ برخورد صفحهٔ $P:x-2y+z+4=0$ با محور عرض‌ها بر این محور عمود می‌شود، کدام است؟

۱) $x+y=2$ ۲) $y=2$
۳) $z=2$ ۴) $x=2$

۱۰ـ فصل مشترک صفحه‌های: $P_1:x+z+4=0$ ، $P_2:2x+y-z+4=0$ و $P_3:-x+z=2$ کدام نقطه است؟

۱) (۱- و ۱ و ۳-) ۲) (۱ و ۱ و ۳)
۳) (۱- و ۱- و ۳-) ۴) (۰ و ۱- و ۳)

جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱ـ حاصل

$$\begin{vmatrix}2&5&4\\4&2&1\\1&7&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&5&2\\1&2&4\\2&7&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&2&-1\\3&5&4\\1&5&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&2&-1\\3&5&4\\5&5&6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4&2\\3&5\end{vmatrix}$$

کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۲-

۲ـ اگر $A=\begin{vmatrix}0&0&-2\\0&3&4\\-1&2&9\end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $(A^*)^T$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) $\frac{1}{6}$
۳) ۳۶ ۴) $\frac{1}{36}$

۳ـ اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۶ و $|A|=3$، حاصل $|\sqrt[3]{3}A|$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۲۷
۳) ۸۱ ۴) $3\sqrt{3}$

۴ـ کدام یک از دسته بردارهای زیر مستقل خطی‌اند؟

۱) (۵ و ۰) و (۱ و ۲) و (۱- و ۱)
۲) (۱- و ۲) و (۲- و ۴)
۳) $(\sqrt{5},0)$ و (۰ و ۳)
۴) (۳ و ۶) و $(2,\frac{1}{2})$

۵ـ اگر $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی باشد و داشته باشیم (۲ و ۲) = (۰ و ۰ و ۱) f و (۱- و ۱) = (۰ و ۱ و ۰) f و (۲ و ۱-) = (۱ و ۰ و ۰) f در این صورت (۱- و ۱ و ۲) f کدام است؟

۱) (۱ و ۶) ۲) (۱ و ۲)
۳) (۱ و ۶-) ۴) (۵- و ۶)

۶ـ اگر $A=\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&2&-1\end{vmatrix}$ ماتریس نگاشت (fog) باشد، نگاشت f کدام می‌تواند باشد؟

۱) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ ۲) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$
۳) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ۴) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

۷ـ بُعد هستهٔ نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y,z)=(x,0)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱
۳) ۲ ۴) ۳

۸ـ اگر k هستهٔ نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ بوده و f یک به یک باشد، کدام گزینه نادرست است؟

۱) $n(k)=1$ ۲) $k=\{(0,0)\}$
۳) $k=\{(0,0,0)\}$ ۴) $f(0,1,2)\neq(0,0)$

۹ـ تصویر خط به معادلهٔ $y=2x$ تحت نگاشت $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f(x,y)=(x+y,y)$ کدام است؟

۱) خط به معادلهٔ $x=3y$
۲) خط به معادلهٔ $y=0$
۳) خط به معادلهٔ $2x=3y$
۴) محور y ها

۱۰ـ اگر $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی باشد و داشته باشیم (۱- و ۱)=(۰ و ۱) f و (۲ و ۱)=(۱و۰) f حاصل $f^{-1}(3,-3)$ کدام است؟

۱) $(\frac{1}{3},3)$ ۲) (۰ و ۳)
۳) (۰ و ۳-) ۴) (۳- و ۰)

۱۱ـ اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$، در این صورت حاصل A^{1379} کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ ۲) A

۳) I ۴) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{-\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

۱۲ـ اگر داشته باشیم، $A^2+A-I=0$، وارون ماتریس A کدام است؟

۱) (A-I) ۲) (A+I)
۳) (I-A) ۴) A^2

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱ـ دنبالهٔ $\left\{\frac{n^2+1}{n^2+2}\right\}$:

۱) کراندار و نزولی است.
۲) بی‌کران و نزولی است.
۳) کراندار و صعودی است.
۴) بی‌کران و صعودی است.

۲ـ سری $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{3})^{2k}(x-4)^k$ به‌ازای کدام مقادیر x همگراست؟

۱) $-13<x<5$ ۲) $-5<x<13$

۳) $5<x<13$ ۴) $-13<x<-5$

۳ـ مقدار $\lfloor \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\lfloor \sin x+\cos x\rfloor$ برابر است با:

۱) ۰ ۲) ۱

۳) ۱- ۴) حدّ ندارد

۴ـ تابع به معادله زیر:

$f(x)=(x^2+ax)\lfloor x\rfloor+2x^2+b\lfloor x\rfloor$

در $x=1$ و $x=2$ پیوسته است، a و b کدامند؟

۱) $\begin{cases}a=3\\b=-2\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a=-3\\b=-2\end{cases}$

۳) $\begin{cases}a=3\\b=2\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$

۵ـ مجموع مقادیر اکسترمم نسبی تابع به معادلهٔ $y=x^3-3x^2+m$ برابر (۱۰) است، m کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۷- ۴) ۶-

۶ـ اگر f تابعی یک جمله و مشتق‌پذیر و داریم $x^4 f(x)=f'(x).f''(x).f'''(x)$ ، درجهٔ f کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۷ـ طول از مبدأ و عرض از مبدأ خطهای مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2=8$ برابرند؛ معادله خطی که نقاط تماس را به‌هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $y=x$ ۲) $y=-x$

۳) $y=2x$ ۴) $y=\pm x$

۸ـ معادله‌های مجانبهای تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ کدام است؟

۱) $y=\pm x$ ۲) $y=\pm\frac{x}{2}$

۳) $y=\pm 2x$ ۴) $y=\pm x\sqrt{2}$

۹ـ تابع به معادله زیر:

$f(x)=(x-a)^n\lfloor x-a\rfloor$ ، $n\in N$

در a مشتق‌پذیر است، آن‌گاه باید:

۱) $n\geq 1$ ۲) $n\geq 2$

۳) $n\leq 3$ ۴) $n\leq 4$

۱۰ـ نقطه‌ای روی مسیر به معادلهٔ $y=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{x^3}$ در حرکت است، اگر آهنگ افزایش مؤلفهٔ x در نقطه‌ای به‌طول $x=4096$ برابر ۱۲ متر در ثانیه باشد، آهنگ افزایش مؤلفهٔ y کدام است؟

۱) $\frac{13}{8}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{17}{8}$ ۴) $\frac{19}{8}$

ریاضی عمومی ۱

۱ـ ضریب تغییرات داده‌های زیر کدام است؟

۲۳،۱۷،۱۵،۶۶،۲۵،۱۲

۱) ۰/۶۹ ۲) ۱/۴۳

۳) ۰/۵۸ ۴) ۱/۷۲

۲ـ اگر بخواهیم تعداد دسته‌ها را دوبرابر کنیم، طول دسته‌ها:

۱) دو برابر می‌شود.
۲) تغییر نمی‌کند.
۳) نصف می‌شود.
۴) چهار برابر می‌شود.

۳ـ از ظرفی که شامل ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهره سیاه است، دو مهره با هم خارج می‌کنیم. احتمال آن که دو مهره همرنگ نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{31}{66}$ ۲) $\frac{35}{66}$

۳) $\frac{10}{66}$ ۴) $\frac{21}{66}$

۴ـ ظرفی شامل ۶ مهره سفید و ۷ مهره سیاه است، دو مهره به طور متوالی و با جایگذاری خارج می‌کنیم، احتمال آن که هر دو مهره سفید باشند، کدام است؟

۱) $\frac{5}{26}$ ۲) $\frac{5}{13}$

۳) $\left(\frac{6}{13}\right)^2$ ۴) $\left(\frac{5}{26}\right)^2$

۵ـ ظرف I شامل ۵ مهره سفید و ۳ مهرهٔ سیاه است. در ظرف II، ۷ مهره سفید و ۵ مهرهٔ سیاه موجود است. مهره‌ای از ظرف I به تصادف به ظرف II منتقل می‌کنیم، سپس از ظرف II مهره‌ای خارج می‌کنیم، احتمال آن که این مهره سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{43}{104}$ ۲) $\frac{21}{104}$

۳) $\frac{40}{104}$ ۴) $\frac{61}{104}$

۶ـ شرط این که دستگاه معادله‌های $\begin{cases}(m-1)x_1+4x_2=0\\x_1+2x_2=0\end{cases}$ جواب غیر صفر داشته باشد، کدام است؟

۱) $m=-1$ ۲) $m=1$

۳) $m=-3$ ۴) $m=3$

۷ـ اگر معادله‌های قطرهای یک دایره به صورت $(m-1)x+2y-m+5=0$ باشد، مختصات مرکز دایره کدام است؟

۱) $(1,-2)$ ۲) $(-1,2)$

۳) $(1,2)$ ۴) $(-1,-2)$

۸ـ در بسط $(2x-3x^2)^4$ ضریب شامل جملهٔ x^6 کدام است؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۲۱۶-

۳) ۲۱۴ ۴) ۲۱۴-

۹ـ دنبالهٔ $x_n=\frac{n^2+1}{2n^2+n+3}$ به کدام عدد همگراست؟

۱) ۰ ۲) $\frac{1}{2}$

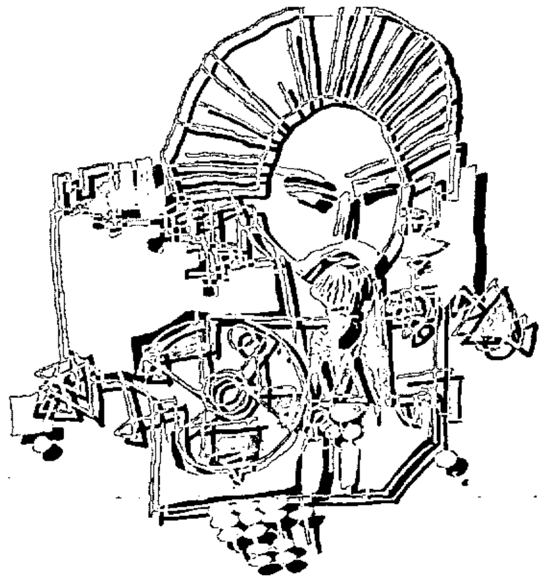
۳) ۱ ۴) $\frac{1}{3}$

۱۰ـ اگر معادلهٔ مجانب مایل منحنی به معادلهٔ $y=\frac{3x^2-mx+1}{x-1}$ به صورت $y=3x+2$ باشد، m کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲-

۳) ۱ ۲) ۱-





پاسخ تشریحی پرسشهای چهار گزینه‌ای

ریاضیات ۱

۱ ـ گزینهٔ (۴) نادرست است ؛ زیرا با شرایط $A \subset B$ و $C \subset A$ خواهیم داشت $C \subset B$ ؛ برای مثال، با فرض $\{1,2,3\} = B$ ، $A = \{1,2\}$ و $C = \{2\}$ ، ملاحظه می‌شود که $C \subset B$.

۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

$$B \cup \emptyset = B \ , \ B \cap M = B$$

۳ ـ گزینهٔ (۴) نادرست است ؛ زیرا :

$$A - B = A \cap B'$$

۴ ـ گزینهٔ (۳) نادرست است ؛ زیرا :

$$A - B = \phi \Leftrightarrow A \subset B \ , \ A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$$

$$A - B = A \cap B' = \phi \ , \ A - B = \phi \Leftrightarrow A \cup B = B, A \cap B = A$$

۵ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

(2^k، تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ k عضوی است)

$$2^{n+5} - 2^{n+2} = 2^n \times 2^5 - 2^n \times 2^2$$
$$= 2^n(2^5 - 2^2) = 2^n(32-4)$$
$$= 28 \times 2^n = 224 \ ; \ 2^n = \frac{224}{28};$$
$$2^n = 8 \ ; \ 2^n = 2^3; \ \boxed{n=3}$$

۶ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$x+1=0 \ ; \ x=-1:$$

(باقیماندهٔ A) $R_A = 13(-1)^{1380} + 7(-1)^{1381} - 9 = -3$

(باقیماندهٔ B) $R_B = (-1)^2 + m(-1) + 1$

$$= 2 - m \ ; \ R_A = R_B;$$
$$-3 = 2 - m \ ; \ \boxed{m=5}$$

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

(می‌دانیم :

$$a = (-1)^{-3} = -1, (-1)^{\pm 2k} = 1 \ , \ (-1)^{\pm(2k+1)} = -1$$

$$b = 2^{-1} \ , \ c = 2^{-2}:$$

$$k = \left(\frac{3(-1)^3 (2^{-1})^{-7} (2^{-2})^2}{8^4 (-1)^{-2} (2^{-1})^{-3} (2^{-2})^{-4}} \right)^{-1+2} = \frac{(-3).2^{7-4}}{2^{12+3+8}}$$

$$k = (-3).2^{3-23} = (-3).2^{-20} = \frac{-3}{2^{20}} \ ; \ \boxed{k = \frac{-3}{2^{20}}}$$

۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

(مساحت مربع) $S = (x^{1380})^2 = x^{2760}$,

(مساحت مستطیل) $S' = (64x^{2416}).(4x^{345});$

$$S' = 2^8 x^{2761} \ , \ S = S' : \ x^{2760} = 2^8 x^{2761};$$

$$x^{2761-2760} = \frac{1}{2^8} \ ; \ x = \frac{1}{4 \times 64} \ ; \ 64p = 64(4x)$$

$$64p = 64(\frac{4}{4 \times 64}) = 1$$

$64p = 1$ (۶۴ برابر محیط مربعی به ضلع X)

۹ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

این برابری، چون به ازای هر مقدار X، همیشه برقرار است ؛ پس یک اتحاد است :

$$K(x^2 + 2x + 1) + S(x-1) \equiv 2x - 2$$

$$kx^2 + (2k+s)x + k - s \equiv 2x - 2$$

$$; \begin{cases} \boxed{k=0} \\ 2k + s = 2 \ , \ \boxed{s=2} \\ k - s = -2 \end{cases}$$

$$S^{s^k} + S^k + 1 = 2^{2^0} + 2^0 + 1 = 2^1 + 1 + 1 = 4$$

توجه: می‌توانستیم با قرار دادن x=۱ دربرابری، به نتیجهٔ k=۰ و با قرار دادن x=-۱ در برابری، به نتیجه S=۲ برسیم.

۱۰ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$T=2^{34}+2=2(2^{33}+1)=2\left[(2^{11})^3+1\right]$$
$$=2(2^{11}+1)\times((2^{11})^2-(2^{11})+1)$$

از این برابری نتیجه می‌شود که T بر $2(2^{11}+1)$ بخش‌پذیر است. همچنین با استفاده از اتحاد :

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1})$$

می‌توان نوشت :

$$T=2(2^{33}+1)=2((2^3)^{11}+1)$$
$$=2(2^3+1)(((2^3)^{10})-(2^3)^9+\cdots+1)=18k$$

بنابراین عدد T بر $18(2^{11}+1)$ بخش‌پذیر است.



ریاضیات ۳

۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5\Rightarrow\sqrt{2x+1}=5-\sqrt{x}\Rightarrow$$
$$(\sqrt{2x+1})^2=(5-\sqrt{x})^2\Rightarrow 2x+1=25+x-10\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow 10\sqrt{x}=24-x\Rightarrow 100x=(24-x)^2$$
$$\Rightarrow 576+x^2-48x=100x\Rightarrow x^2-148x+576=0$$
$$(x-4)(x-144)=0\Rightarrow x=4\quad x=144$$

پاسخ x=۱۴۴ در معادله صدق نمی‌کند و ریشهٔ خارجی است، و تنها پاسخ قابل قبول x=۴ می‌باشد.

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$-1\le y\le 1\Rightarrow -1\le\frac{x+2}{x-1}\le 1\Rightarrow$$
$$(\frac{x+2}{x-1})^2\le 1\Rightarrow (x+2)^2\le (x-1)^2\Rightarrow$$
$$x^2+4x+4\le x^2-2x+1\Rightarrow 6x\le -3\Rightarrow$$
$$x\le -\frac{1}{2}$$

۳ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است. $\pi\approx 3/14$ و $\sqrt{2}\approx 1/4$ ، در نتیجه $\frac{\pi}{3}<\sqrt{2}$ و لذا داریم :

$$f(\frac{\pi}{3})=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

۴ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است. شرط یک به یک بودن را می‌نویسیم :

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$$
$$x_1^2-2x_1=x_2^2-2x_2\Rightarrow (x_1-1)^2-1=(x_2-1)^2-1$$
$$\Rightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2$$

حال اگر x_1-1 و x_2-1 هر دو نامنفی یا هر دو نامثبت باشند، می‌توانیم از دو طرف رابطهٔ بالا جذر بگیریم و به برابریهای زیر برسیم :

$$x_1-1,x_2-1\ge 0\Rightarrow x_1-1=x_2-1\Rightarrow x_1=x_2$$
$$x_1-1,x_2-1\le 0\Rightarrow 1-x_1=1-x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

که در هر دو حال، تابع یک به یک خواهد بود. بنابراین دربازه‌های $[1,+\infty)$ و $(-\infty,1]$ و بازهٔ $[2,+\infty)$ که زیر مجموعه یکی از آنهاست، تابع یک به یک است. ولی دربازهٔ $(-\infty,2]$ تابع یک به یک نیست.

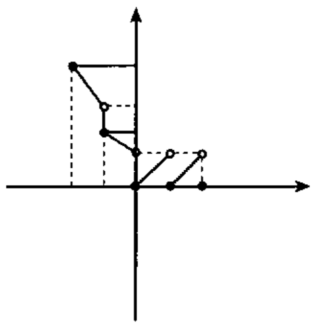
۵ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\frac{f(x+2)-f(x+1)}{f(x+3)-f(x)}$$
$$=\frac{\left[(x+2)^2+(x+2)\right]-\left[(x+1)^2+(x+1)\right]}{(x+3)^2+(x+3)-(x^2+x)}$$
$$=\frac{x^2+4x+4+x+2-x^2-2x-1-x-1}{x^2+6x+9+x+3-x^2-x}=\frac{2x+4}{6x+12}$$
$$=\frac{2(x+2)}{6(x+2)}=\frac{1}{3}$$

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است.

$-2\le x<-1$	$f(x)=-x+2$
$-1\le x<0$	$f(x)=-x+1$
$0\le x<1$	$f(x)=x$
$1\le x<2$	$f(x)=x-1$
$x=2$	$f(x)=0$

با توجه به ضوابط فوق، روشن است که نمودار تابع شامل دو پاره‌خط با شیب ۱- و دو پاره خط با شیب ۱ و یک نقطهٔ (۰ و ۲) است، لذا نیازی به رسم نمودار نمی‌باشد. اما برای اطلاع بیشتر نمودار تابع نیز رسم می‌شود :



۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

با توجه به هم دامنهٔ تابع که مجموعهٔ Z می‌باشد و همواره $[x]\in z$ ، روشن است که تابع پوشاست ؛ ولی یک به یک نیست ؛ زیرا به ازای همهٔ مقادیر $n\le x<n+1$ ، $[x]=n$ ، برای مثال، $f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{3})=0$

۸ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است.

$$A^2=\begin{bmatrix}2&3\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&3\\1&4\end{bmatrix}$$
$$B^2=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2\\-1&-2\end{bmatrix}$$
$$A^2-B^2=\begin{bmatrix}8&1\\2&6\end{bmatrix}\Rightarrow\left|A^2-B^2\right|=48-2=46$$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$A^2-2A=I\Rightarrow A(A-2I)=I, A.A^{-1}=I\Rightarrow$$
$$A-2I=A^{-1}\Rightarrow A-A^{-1}=2I$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است.
پاسخهای دستگاه از روی دستور کرامر به صورت زیر می‌باشد:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}},\ y=\frac{\begin{vmatrix}m & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}m & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}}$$

دترمینانهای صورت هر دو کسر بالا، برابر صفر است. (چرا؟)

بنابراین اگر دترمینانهای مخرج که یکسانند، مخالف صفر باشد، جواب منحصر به فرد دستگاه، $x=y=0$ خواهد بود؛ ولی اگر دترمینان مخرج کسرها نیز صفر شود، دستگاه معادله‌های مبهم شده و دارای بی‌شمار جواب خواهد بود، لذا جواب غیرصفر نیز دارد. پس می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix}m & 2\\ 2 & m\end{vmatrix}=0\Rightarrow m^2-4=0\Rightarrow m=\pm 2$$

۱۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است. از دستور کرامر استفاده می‌کنیم:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4 & -(5k+6)\\ -2 & k\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}k & -(5k+6)\\ 1 & k\end{vmatrix}}=\frac{4k-10k-12}{k^2+5k+6}=\frac{-6k-12}{(k+2)(k+3)}$$

مخرج کسر فوق به ازای $k=-2$ و $k=-3$ برابر صفر شده است، ولی به ازای $k=-2$ صورت کسر هم صفر می‌شود و دستگاه دارای بی‌شمار جواب می‌باشد؛ بنابراین تنها به ازای $k=-3$ دستگاه دارای جواب نیست.

۱۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح می‌باشد. شرط این که S تعریف شده باشد، آن است که عبارتهای زیر رادیکالها مثبت یا صفر باشند:

$$\frac{x-1}{x+1}\geq 0\ ,\ \frac{x+1}{x-1}\geq 0$$

از نامعادلهٔ اوّل داریم: $x\geq 1$ یا $x<-1$

و از دومی به دست می‌آید: $x\leq -1$ یا $x>1$ و از اشتراک دو جواب به دست می‌آید:

$x\in \mathbb{R}-[-1,1]\ ,\ x>1$ یا $x<-1$

۱۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است. از دستور $\log_b^a=\frac{\log a}{\log b}$ استفاده می‌کنیم:

$$\log_5^2=\frac{\log 2}{\log 5}=\frac{\log 2}{\log\frac{10}{2}}=\frac{\log 2}{\log 10-\log 2}=\frac{\log 2}{1-\log 2},$$
$$\frac{\log 2}{1-\log 2}=a$$
$$\Rightarrow \log 2=a-a\log 2\Rightarrow (a+1)\log 2=a\ ,\ \log 2=\frac{a}{a+1}$$

۱۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است.

$$\log_{3x-2}^{x^2}=2\Rightarrow x^2=(3x-2)^2\Rightarrow$$
$$x^2=9x^2-12x+4\Rightarrow 8x^2-12x+4$$
$$=0\Rightarrow 2x^2-3x+1=0$$
$$\Rightarrow x=1\quad x=\frac{1}{2}$$

هر دو جواب با توجه به دامنهٔ تعریف لگاریتم قابل قبول نیستند؛ زیرا باید $3x-2>0$، $3x-2\neq 1$ باشد.
در نتیجه: $x>\frac{2}{3}$ و $x\neq 1$؛ بنابراین معادلهٔ فوق ریشهٔ حقیقی ندارد.

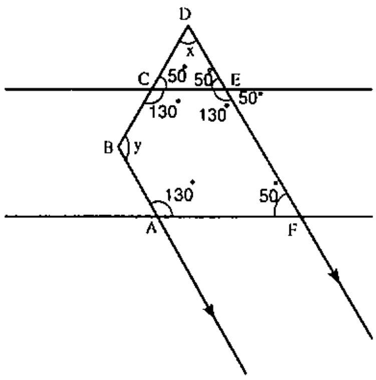
۱۵ـ گزینهٔ (۲) صحیح است.

$$\sqrt{(a-1)^2+(1+1)^2+(1-2)^2}=3$$
$$\Rightarrow (a-1)^2=4\Rightarrow a-1=\pm 2\Rightarrow a=3, a=-1$$



هندسهٔ ۱

۱ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا در مثلث CDE، اندازهٔ زاویهٔ D مساوی 80° است. پس $x=80^\circ$ و در پنج ضلعی محدب ABCEF، که مجموع زاویه‌هایش 540° است، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$، یعنی $y=100^\circ$ است؛ بنابراین $x+y=180^\circ$ است.



۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH، $MH=\frac{1}{2}AB$ و $NH=\frac{1}{2}AC$، و در مثلث ABC، $MN=\frac{1}{2}BC$ است؛ پس:

$$MH+MN+NH$$
$$=\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}BC+\frac{1}{2}AC$$
$$=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)$$

$\Rightarrow$ محیط مثلث $MM+$ = $\frac{1}{2}\times$ محیط مثلث ABC

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا بدون برداشتن قلم از روی صفحهٔ کاغذ، این شکل رسم نمی‌شود.

۴ ـ گزینهٔ (۴) درست است؛ زیرا داریم:

مستطیل $S=12\times 18=216$,

مثلث $S=\frac{1}{2}a.h_a\Rightarrow \frac{1}{2}\times 24\times h_a=12h_a$

$$\Rightarrow 216=12h_a\Rightarrow h_a=18$$

۵ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا داریم:

$$x(x+2)=\frac{1}{2}\times 6\times 8\Rightarrow x^2+2x-24=0\Rightarrow$$

قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع

$$x=-6<0\ ,\ x=4\Rightarrow x+2=4+2=6$$

۶ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا مساحت هر

چهارضلعی که قطرهایش بر هم عمود باشد، برابر نصف حاصلضرب اندازهٔ دو قطر آن است ؛ پس :

$S=\frac{1}{2}\times 36\times 24=432$ چهار ضلعی

۷ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

S شش ضلعی منتظم = S ذوزنقه

$S\Rightarrow \frac{1}{2}(8+12)\times 6=\frac{1}{2}\times 6\times a\times 4$

$\Rightarrow 60=12a\Rightarrow a=5$

اندازهٔ ضلع شش ضلعی منتظم

۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$\frac{x+2}{x}=\frac{x+4}{7/5}\Rightarrow x^2+4x=7/5x+15$

$\Rightarrow x^2-3/5x-15=0$

$\Rightarrow x=-2/5<0,\ x=6\Rightarrow AE=8,\ AC=14$

$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=(\frac{AE}{AC})^2=(\frac{8}{14})^2=\frac{16}{49}$

۹ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا شعاع قاعدهٔ استوانه محاط در این منشور، برابر نصف ضلع مربع قاعدهٔ منشور است و ارتفاع استوانه، برابر ارتفاع منشور است ؛ یعنی داریم :

$R=12\div 2=6,\ h=18$

حجم استوانه $=\pi R^2h=\pi(6)^2\times 18=648\pi$

۱۰ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا نسبت مساحت سطح دو کره، برابر مجذور نسبت شعاعهای آنهاست و نسبت حجم دو کره، برابر مکعب نسبت شعاعهای آنها ؛ پس داریم :

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{4}{9}=(\frac{2}{3})^2$

$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2}=\frac{2}{3}$

$\frac{V_1}{V_2}=(\frac{R_1}{R_2})^3=(\frac{2}{3})^3$

$=\frac{8}{17}$



ریاضیات ۵

۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$f(1)=1-2=-1,\ f(3)=3a+2,$

$f(1)f(3)=-5\Rightarrow$

$-3a-2=-5\Rightarrow a=1\Rightarrow 2a=2$

۲ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا در تابعهای اصم با فرجهٔ فرد، دامنهٔ تابع، همان دامنهٔ عبارت زیر رادیکال است و دامنهٔ تعریف دو جمله‌ای ۱-۲x نیز ℝ است.

۳ ـ گزینهٔ (۳) درست است ؛ زیرا داریم :

$(fog)(3)=f(g(3)),\ g(3)=\frac{1}{3-2}=1\Rightarrow$

$f(g(3))=f(1)=(1)^2-4\sqrt{1}=1-4=-3$

۴ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=ax+2+(2-3_a)$

$x+3=(2-2a)x+5$

$\Rightarrow (f+g)(-1)=(2-2a)(-1)+5=2a+3=5\Rightarrow a=1$

۵ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1-1)}{\sin 3x(\sqrt{x+1}+1)}=$

$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x(\sqrt{x+1}+1)}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

۶ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$\lim_{x\to 1^-}f(x)=3\Rightarrow 1-a=3\Rightarrow a=-2$

$\lim_{x\to 1^+}f(x)=3\Rightarrow b-1=3\Rightarrow b=4$

$\Rightarrow a+b=-2+4=2$

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$f'(x)=2\cos(2x-\frac{\pi}{6})-2\sin 2x\Rightarrow$

$f'(\frac{\pi}{2})=2\cos(n-\frac{\pi}{6})-2\sin\pi\Rightarrow$

$2\cos\frac{5\pi}{6}-2\sin\pi=2(\frac{-\sqrt{3}}{2})-2(0)=-\sqrt{3}$

۸ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$f'(x)=\frac{3(x-2)-1(3x-1)}{(x-2)^2}=\frac{-5}{(x-2)^2}\Rightarrow f'(x)<0$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

اولاً : مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ منحنی صدق می‌کند ؛ پس داریم :

(۱) $A=(3,-16)\xrightarrow{\text{در معادله}}-16=9a+3b-7\Rightarrow 9a+3b=-9$

ثانیاً : طول نقطهٔ ماکزیمم یا مینی‌موم A، ریشهٔ مشتق اول تابع است ؛ یعنی داریم :

(۲)

$f'(x)=2ax+b\Rightarrow 0=2a(3)+b\Rightarrow 6a+b=0$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود : a=1 و b=-6

۱۰ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا داریم :

$x=-1\xrightarrow{\text{در تابع}}y=-2-1-5-1=-9\Rightarrow$

نقطه تماس M=(-1,-9)

$y'=f'(x)=6x^2-2x+y\Rightarrow$ شیب در M $m=6(-1)^2-2(-1)+5=13$

$\Rightarrow y-y_1=m(x-x_1)\Rightarrow y+9=13(x+1)\Rightarrow y=13x+4$



حسابان ۱

۱ ـ گزینهٔ (۴)

گزینهٔ (۱) : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}$

گزینهٔ (۲) : $D_f=\mathbb{R}-\{-1\}$

گزینهٔ (۳) : $D_f=(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$

a و b ریشه‌های داخل رادیکال است، زیرا $\Delta>0$.

گزینهٔ (۴) :

$$f_{(x)}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|\quad D_f=\mathbb{R}$$

۲ ـ گزینهٔ (۳) برای این‌که f فرد باشد، باید

$$f(-x)+f(x)=0$$

$$f(-x)+f(x)=\log(\sqrt{a^2x^2+1}+3x)+\log(\sqrt{a^2x^2+1}+-3x)$$

$$f(-x)+f(x)=\log(a^2x^2+1-9x^2)=\log(1)=0$$

$$a^2=9\Rightarrow a=\pm3$$

۳ ـ گزینهٔ (۲)

$$R=P(a)=a^3+3a^2+3a=28$$

$$a^3+3a^2+3a+1=27\Rightarrow(d+1)^3=27\Rightarrow a+1=3\Rightarrow a=2$$

۴ ـ گزینهٔ (۲)

$$g(x)=f(\frac{1}{x})-4$$

$$f(\frac{1}{x})=y\Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{1}{f^{-1}(y)}$$

$$g(x)=y-4\Rightarrow g^{-1}(y-4)=x$$

$$g^{-1}(y-4)=\frac{1}{f^{-1}(y)}\quad y\xrightarrow{\text{تبدیل}}x+4$$

$$g^{-1}(x)=\frac{1}{f^{-1}(x+4)}$$

۵ ـ گزینهٔ (۳)

$$\text{Cot}x-\tan x=\frac{\text{Cox}}{\text{six}}-\frac{\text{Sin}x}{\text{Cox}}=\frac{\text{Cox}^2-\text{Sin}^2x}{\text{Sin}x\,\text{Cox}}=\frac{\text{Co}2x}{\frac{1}{2}\text{Sin}2x}=2\text{Cot}2x$$

۶ ـ گزینهٔ (۱)

$$\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{3x}-3}=\frac{0}{0}\times\frac{\sqrt{2x+3}+3}{\sqrt{2x+3}+3}\times\frac{\sqrt{3x}+3}{\sqrt{3x}+3}$$

$$=\lim\frac{(2x+3-9)(\sqrt{3x}+3)}{(3x-9)(\sqrt{2x+3}+3)}=\lim_{x\to3}\frac{2(x-3)(\sqrt{3x}+3)}{3(x-3)(\sqrt{2x+3}+3)}=\frac{2(6)}{3(6)}=\frac{2}{3}$$

$x\to3$

۷ ـ گزینهٔ (۴)

$$\lim_{x\to0}\frac{\text{Sin}2x}{\sqrt{1-\text{Cos}2x}}\sim\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{2x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{2}|x|}$$

حدّ راست

الف: $\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{\sqrt{2}|x|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

ب: $\lim_{x\to0^-}\frac{2x}{\sqrt{2}|x|}=\frac{-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$ حدّ چپ

۸ ـ گزینهٔ (۲)

$$f(x)=\frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x+\frac{3}{2}}}{(x+1)(x+2)(x-4)=0}$$

$x=-1\quad x\to-1\Rightarrow f(x)=\frac{0}{0}$

$=\frac{2\sqrt{\frac{1}{2}}}{-5}$ غیرقابل قبول

$x=-2\ ;\sqrt{x}=\sqrt{-2}$ غیرقابل قبول

$x=4\quad x\to4\Rightarrow f(x)\to\infty$ قابل قبول

۹ ـ گزینهٔ (۴)

$$\lim_{n\to2^+}f(x)=-1+a$$

$$\lim_{n\to2^-}f(x)=2+2a\quad 2+2a=-1+a\Rightarrow a=-3$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۱)

$$y=f(\sqrt[3]{x^2})\qquad f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$y'_x=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}f'(\sqrt[3]{x^2})=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}=\frac{2}{3x}$$

$$y'_x=1\quad=\frac{2}{3}$$



هندسه تحلیلی پیش‌دانشگاهی

۱ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است. راه اوّل، بین نقطه‌های داده شده، تنها نقطهٔ M´=(۵ و ۴- و ۰) است که بردار MM´=(۴ و ۲- و ۲-) بر صفحهٔ P عمود است.

راه دوم، مختصات وسط پاره خط MM´ در معادلهٔ صفحهٔ P، باید صدق کند، که این ویژگی تنها برای نقطهٔ (۰ و ۴ـ و ۵) صحیح است.

راه سوّم، مختصات نقطهٔ H پای عمودی را که از M بر صفحهٔ P رسم می‌شود، به‌دست می‌آوریم و آن‌گاه نقطهٔ M´ را طوری تعیین می‌کنیم که H وسط پاره‌خط MM´ باشد.

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ داریم :

$$M=(1,1,1),\ B=(a,-1,2),\ BM=3$$

$\Rightarrow AC$ وسط

$$\sqrt{(a-1)^2+(1+1)^2+(1-2)^2}=3$$

$$\Rightarrow(a-1)^2=4\Rightarrow a-1=\pm2\Rightarrow a=3,\ a=-1$$

۳ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است.

$$a=-2i+j-6k\Rightarrow-\frac{2}{3}a=\frac{4}{3}i-\frac{2}{3}j+4k$$

به طوری که دیده می‌شود، تصویر $-\frac{2}{3}a$ روی محور Zها برابر ۴+ است.

۴ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ داریم :

$$a=(-1,0,1),\ b=(2,2,2)\Rightarrow a\times b=(-2,4,-2)$$

$$c=(3,-1,4)\Rightarrow c=(a\times b)=(3)(-2)+(-1)(4)+(4)(-2)$$

$$=-6-4-8=-18$$

۵ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است.

$D: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1} \Rightarrow \vec{V}_D = (2,1,-1), A = (-2,1,3)$

$B = (-1,0,2) \in D, AH = d = \frac{|\vec{AB}\times\vec{V}|}{|\vec{V}|}$

$\vec{AB} = (1,-1,-1) \quad \vec{AB}\times\vec{V} = (2,-1,3) \Rightarrow$

$|\vec{AB}\times\vec{V}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} \quad |\vec{V}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\Rightarrow d = AH = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ داریم :

$\vec{V}_{P_1} = (1,0,1), \quad \vec{V}_{P_2} = (0,1,2), \quad A = (1,2,-4)$

بردار عمود بر صفحهٔ مورد نظر

$\vec{V}_{P_1} \times \vec{V}_{P_2} = (-1,-2,1)$

$\Rightarrow a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow$

$-1(x-1)-2(y-2)+1(z+4)=0 \Rightarrow -x-2y+z+9=0$

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است، فصل مشترک صفحه‌ای که به فاصلهٔ ۳ از صفحهٔ P و با ارتفاع از مبدأ بیشتر می‌باشد، با صفحهٔ P جواب مسأله است ؛داریم :

$3 = \frac{|2x+2y-z+4|}{\sqrt{4+4+1}} \Rightarrow |2x+2y-z+4| = 9 \Rightarrow$

$P_1: 2x+2y-z-5=0, P_2: 2x+2y-z+13=0$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+5}{7} = t \Rightarrow x = 2t+1, y = \\ 3t-1, z = 7t-5 \\ 2x+2y-z+13=0\end{cases}$$

$\Rightarrow 4t+2+6t-2-7t+5+13=0 \Rightarrow t=-6 \Rightarrow$

$A = (-11,-19,-47)$

۸ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است. باید بردارهای $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$ همراستا باشند.

$\vec{AB} = (4-a,-1-1,0-2) \Rightarrow \vec{AB} = (4-a,-2,-2)$

$\vec{AC} = (2-a,a+b-2,4-2) \Rightarrow \vec{AC} = (2-a,a+b-2,2)$

$\Rightarrow \frac{4-a}{2-a} = \frac{-2}{a+b-2} = \frac{-2}{2} \Rightarrow \begin{cases}4-a=-2+a\\ a+b-2=2\end{cases} \Rightarrow$

$a=3, b=1$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است. نقطهٔ برخورد صفحهٔ $p = x-2y+z+4=0$ با محور yها نقطهٔ $M=(0,2,0)$ است و صفحهٔ عمود بر محور yها در این نقطه، به معادلهٔ $y=2$ است.

۱۰ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ داریم :

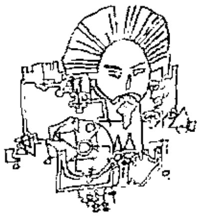
$$\begin{cases}x+z+4=0\\ 2x+y-z+4=0\\ -x+z=2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+z=-4\\ -x+z=2\end{cases} \Rightarrow z=-1 \Rightarrow$$

$x=-3, 2x+y-z+4=0 \Rightarrow$

$2(-3)+y-(-1)+4=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$

$M=(-3,1,-1)$

نقطهٔ همرسی سه صفحه



جبر خطی پیش‌دانشگاهی

۱ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا اگر در دترمینان دومی، جای ستون اول و سوم را عوض کنیم ؛ داریم :

$$\begin{vmatrix}2&5&4\\4&2&1\\1&7&2\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2&5&4\\4&2&1\\1&7&2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4&2&-1\\3&5&4\\6&10&8\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}4&2\\3&5\end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix}4&2&-1\\3&5&4\\3&5&4\end{vmatrix} + 12 = 12$$

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛زیرا :

$|(A^*)^T| = |A^*| = |A|^{n-1}, |A| = -1\times\begin{vmatrix}0&-2\\3&4\end{vmatrix} = -6$

$\Rightarrow |(A^*)^T| = (-6)^{3-1} = 36$

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا اگر A ماتریس از مرتبهٔ n باشد، داریم :

$|\alpha A| = \alpha^n|A|$ ؛ بنابراین :

$|\sqrt[3]{3}A| = (\sqrt[3]{3})^6|A| = 9\times3 = 27$

۴ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا گزینهٔ ۱ سه بردار در فضای برداری R^2 است که وابستهٔ خطی‌اند و بردارهای گزینه‌های ۲ و ۳ در یک راستا می‌باشند ؛ پس وابسته خطی هستند. در گزینهٔ (۴) داریم :

$$\begin{vmatrix}2&\frac{1}{2}\\6&3\end{vmatrix} = 6-3 = 3 \neq 0$$

پس بردارهای گزینهٔ (۴) مستقل خطی‌اند.

۵ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :

$f(2,1,-1) = 2f(1,0,0)+f(0,1,0)-f(0,0,1)$

$= 2(2,2)+(1,-1)-(-1,2) = (6,1)$

۶ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا A ماتریس از مرتبهٔ ۳×۲ است، پس $fog: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$، درنتیجه $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^k$ و $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^2$.

۷ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | f(x,y,z)=0\}$

$f(x,y,z)=(0,0) \Rightarrow (x,0)=(0,0) \Rightarrow x=0$

درنتیجه داریم :

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x=0\} = \{(0,y,z) | y,z \in \mathbb{R}\}$

هستهٔ نگاشت صفحه yoz است، پس بعد هسته برابر ۲ است.

۸ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ چون f نگاشت یک به یک است، بنابراین هستهٔ مجموعه‌ای تک‌عضوی، شامل $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ است.

۹ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$f(x,y)=(x',y') \Rightarrow \begin{cases} x+y=x' \Rightarrow x=x'-y' \\ y=y' \end{cases}$$

$$y=2x \Rightarrow y'=2(x'-y') \Rightarrow 2x'=3y'$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا می‌دانیم $f(ej)=A^j$ ، بنابراین داریم :

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix} \;;\; A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}$$

$$f^{-1}(3,-3)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1\\1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$$

۱۱ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا می‌دانیم $R_{2\pi}=I$ ، از طرفی داریم :

$$A=R_{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow A^8=R_{2\pi}=I$$

$$A^{1379}=(A^8)^{172}\times A^3=I^{172}\times A^3=A^3$$

$$A^3=\begin{bmatrix}\cos 135^\circ & -\sin 135^\circ\\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

۱۲ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

$$A^2+A=I \Rightarrow \begin{cases}A(A+I)=I\\(A+I)A=I\end{cases}\Rightarrow A^{-1}=A+I$$



حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱ ـ گزینهٔ (۳)، پس دنباله همگراست ؛ بنابراین کراندار است :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$$

$$a_n=\frac{n^2+1}{n^2+2}=\frac{n^2+2-1}{n^2+2}=1-\frac{1}{n^2+1}$$

باافزایش n، $\frac{1}{n^2+1}$ کاهش می‌یابد ؛ درنتیجه جمله‌های دنباله، به‌طور مرتّب افزایش می‌یابند، بنابراین دنباله صعودی است.

۲ ـ گزینهٔ (۲)

$$a_n=(\tfrac{1}{3})^{2k}(x-4)^k=(\tfrac{1}{9})^k(x-4)^k=(\tfrac{x-4}{9})^k$$

$$-1<r<1 \Rightarrow -1<\frac{x-4}{9}<1 \Rightarrow -9<x-4<9 \Rightarrow -5<x<13$$

توضیح سری $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{x-4}{9})^k$ برای این‌که همگرا باشد باید هندسی با $-1<r<+1$ باشد.

۳ ـ گزینهٔ (۴)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}[\sin x+\cos x]=\lim_{n\to\frac{\pi}{4}}[\sqrt{2}\sin x(x+\frac{\pi}{4})]$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}[\sqrt{2}\sin x(x+\frac{\pi}{4})]$$

$$=[\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}^-}{2}]=[1^-]=0 \quad \text{حدّراست}$$

$$\lim[\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})]$$

$$=[\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}^+}{2}]=[1^+]=1 \quad \text{حدّچپ}$$

۴ ـ گزینهٔ (۴)

$$f(x)=(x^2+ax+b)[x]+2x^2$$

برای این‌که تابع دراعداد صحیح $x=2$ و $x=1$ پیوسته باشد، باید جملهٔ $[x]$ حذف شود ؛ پس لازم است. $x^2+ax+b=0$ ، $x=1$ و $x=2$ جوابهای این معادله‌اند :

۵ ـ گزینهٔ (۲) درتابع درجهٔ سوّم نقطهٔ عطف وسط Max و Min است :

$$y=x^3-3x^2+m$$

$$x_F=-\frac{b}{3a}=-\frac{-3}{3}=1 \;,\; y_F=\frac{y_{Max}+y_{Min}}{2}=\frac{10}{2}=5$$

$$F|^{1}_{5}\xrightarrow{\text{درمعادله‌تا}} 5=1-3+m \Rightarrow m=7$$

۶ ـ گزینهٔ (۲)

$$f(x)=x^n \;,\; f'(x)=nx^{n-1} \;,$$

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$$

$$f'''(x)=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

چون درجهٔ $f(x)$ مورد سؤال است، لذا ضرایب را نمی‌نویسیم :

$$x^4(x^n)=x^{n-1}\times x^{n-2}\times x^{n-3}$$

$$\Rightarrow n+4=3n-6 \Rightarrow n-5$$

۷ ـ گزینهٔ (۴) : چون طول از مبدأ و عرض از مبدأ مماسها برابرند، پس مماسها موازی نیمسازها می‌باشند ؛ بنابراین $m=\pm1$

شیب مماسها = مشتق

معادلهٔ خطی که نقاط تماس را به‌هم وصل می‌کند :

$$y'_x=-\frac{x}{y}=\pm1 \Rightarrow y=\pm x$$

۸ ـ گزینهٔ (۱)

$$y=\frac{x^2}{\pm x}\Rightarrow y=\pm x$$

$$y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \quad x\to\pm\infty \;؛$$

۹ ـ گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^n[x-a]}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}(x-a)^{n-1}[x-a]=0 \;,\; y=\frac{x^2}{\pm x}\Rightarrow y=\pm x$$

باید $n-1\ge1$ یا $n\ge2$ تا جمله $(x-a)^{n-1}$ وجود داشته باشد.

۱۰ ـ گزینهٔ (۱)

$$y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}$$

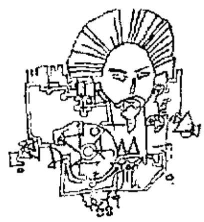
$$4096 = 2^{12}$$

$$y'_t = \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}\right)x'_t$$

$$= \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{2^{12}}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{2^{12}}}\right)\times 12$$

$$y'_t = \left(\frac{2}{3(2^4)} + \frac{3}{4(2^3)}\right)(12)$$

$$= \left(\frac{2^3}{2^4} + \frac{9}{2^3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{9}{8} = \frac{13}{8}$$



ریاضی عمومی۱

۱ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{158}{6} = 26/\overline{3}$$

$$\delta^2 = \frac{\sum(xi - \bar{x})^2}{n} = \frac{2007/34}{6} = 334/55\overline{6}$$

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{334/55\overline{6}} \sim 18/29$$

$$cv = \frac{\delta}{\bar{x}} = \frac{18/29}{26/3} = 0/69$$

۲ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا طول دسته‌ها از دستور $C = \frac{R}{K}$ به دست می‌آید؛ در صورتی که K دو برابر، آن گاه C نصف می‌شود.

۳ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$n(s) = \binom{12}{2} = \frac{12!}{2!\times 10!} = 66$$

دو مهره همرنگ نباشند؛ یعنی یک مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه باشد، بنابراین داریم:

$$n(A) = \binom{7}{1}\binom{5}{1} = 35$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{35}{66}$$

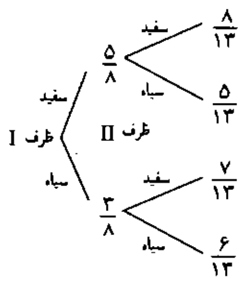
۴ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

مهره اول سفید $p(A) = \frac{6}{13}$

مهره دوم سفید $p(B) = \frac{6}{13}$

$$p(A \cap B) = P(A)\times P(B) = \left(\frac{6}{13}\right)^2$$

۵ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:



$$P(A) = \frac{5}{8}\times\frac{8}{13} + \frac{3}{8}\times\frac{7}{13} = \frac{61}{104}$$

۶ ـ گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا شرط این که دستگاه معادله‌های همگن، جواب غیر صفر داشته باشد، این است که دترمینان ضرایب آن برابر صفر باشد؛ بنابراین داریم:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(m-1) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow m = 3$$

۷ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$(m-1)x + 2y - m + 5 = 0$$

$$\Rightarrow mx - x + 2y - m + 5 = 0$$

$$\Rightarrow m(x-1) + (-x + 2y + 5) = 0$$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \\ -x + 2y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -2$$ معادله دسته‌خط

۸ ـ گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا در بسط $(a-b)^n$ جملهٔ kام به صورت زیر به دست می‌آید:

$$t_k = (-1)^{k+1}(k^n - 1)\,a^{n-(k-1)}\,b^{k-1}$$

$$t_k = (-1)^{k+1}(k^4 - 1)(2x)^{4-k+1}(3x^2)^{k-1}$$

$$t_k = (-1)^{k+1}(k^4 - 1)(2)^{5-k}(3)^{k-1}x^{k+3}$$

$$\Rightarrow x^{k+3} = x^6 \Rightarrow k = 3$$

ضریب $x^6 = \binom{4}{2}\times(2)^2\times(3)^2 = 216$

۹ ـ گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+1}{2n^2+n+3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

۱۰ ـ گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{array}{l|l} 3x^2 - mx + 1 & x - 1 \\ \underline{-3x^2 + 3x} & 3x + (3-m) \\ (3-m)x + 1 & \\ \underline{-(3-m)x + 3 - m} & \\ 4 - m & \end{array}$$

$$3x + 3 - m = 3x + 2$$

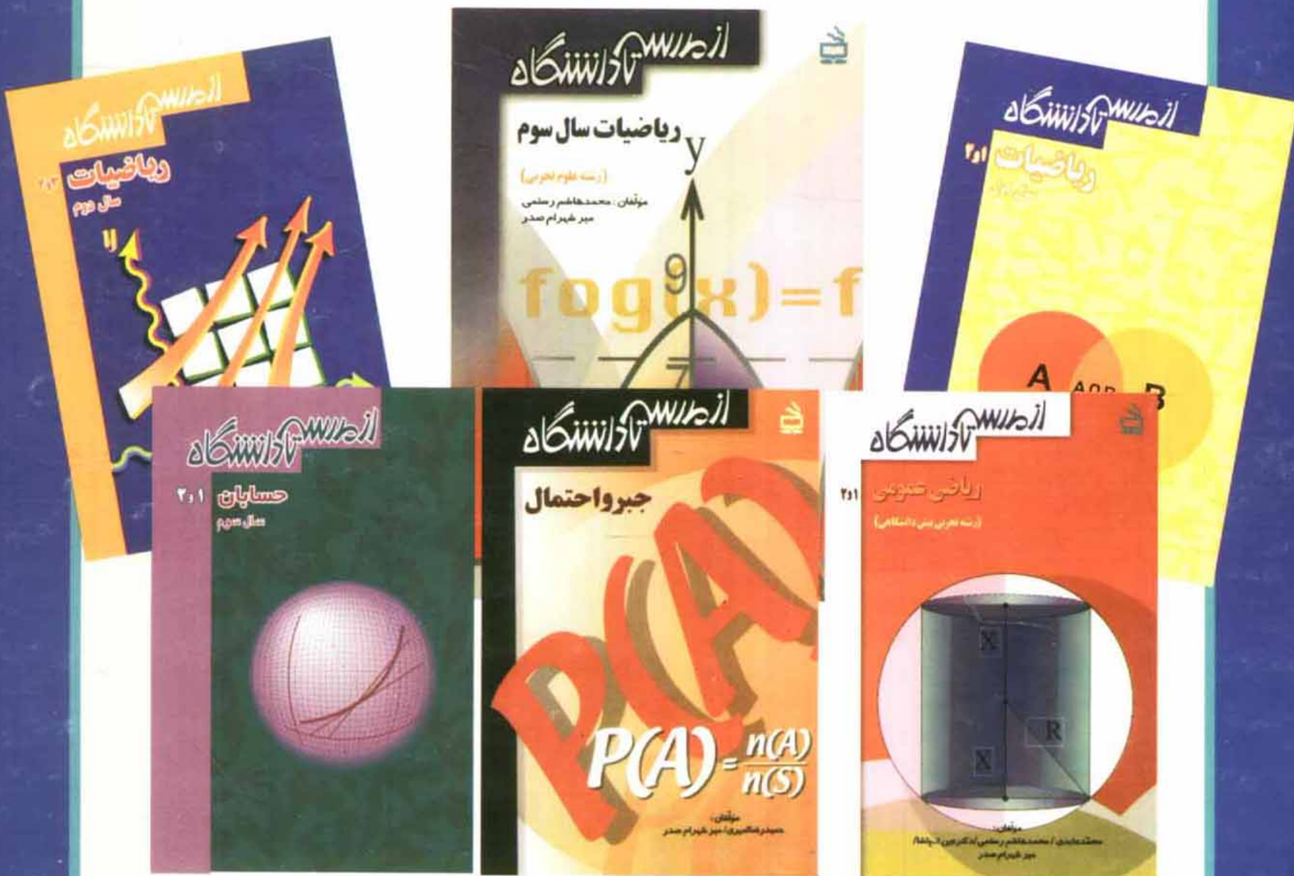
$$\Rightarrow 3 - m = 2 \Rightarrow m = 1$$

ناشر برگزیده
سالهای ۷۵،۷۳
۷۹

انتشارات مدرسه منتشر کرده است
سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

دانش آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته های پنهان در لابه لای این مفاهیم و قضیه ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه ای آشنا می شوند، تا هم برای پاسخ گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.



کتابهای زیر از این سری در دست چاپ است:

۱ - ریاضیات گسسته

۲ - هندسه تحلیلی و جبر خطی

انتشارات مدرسه

511574

کد ۹۵۳/۱

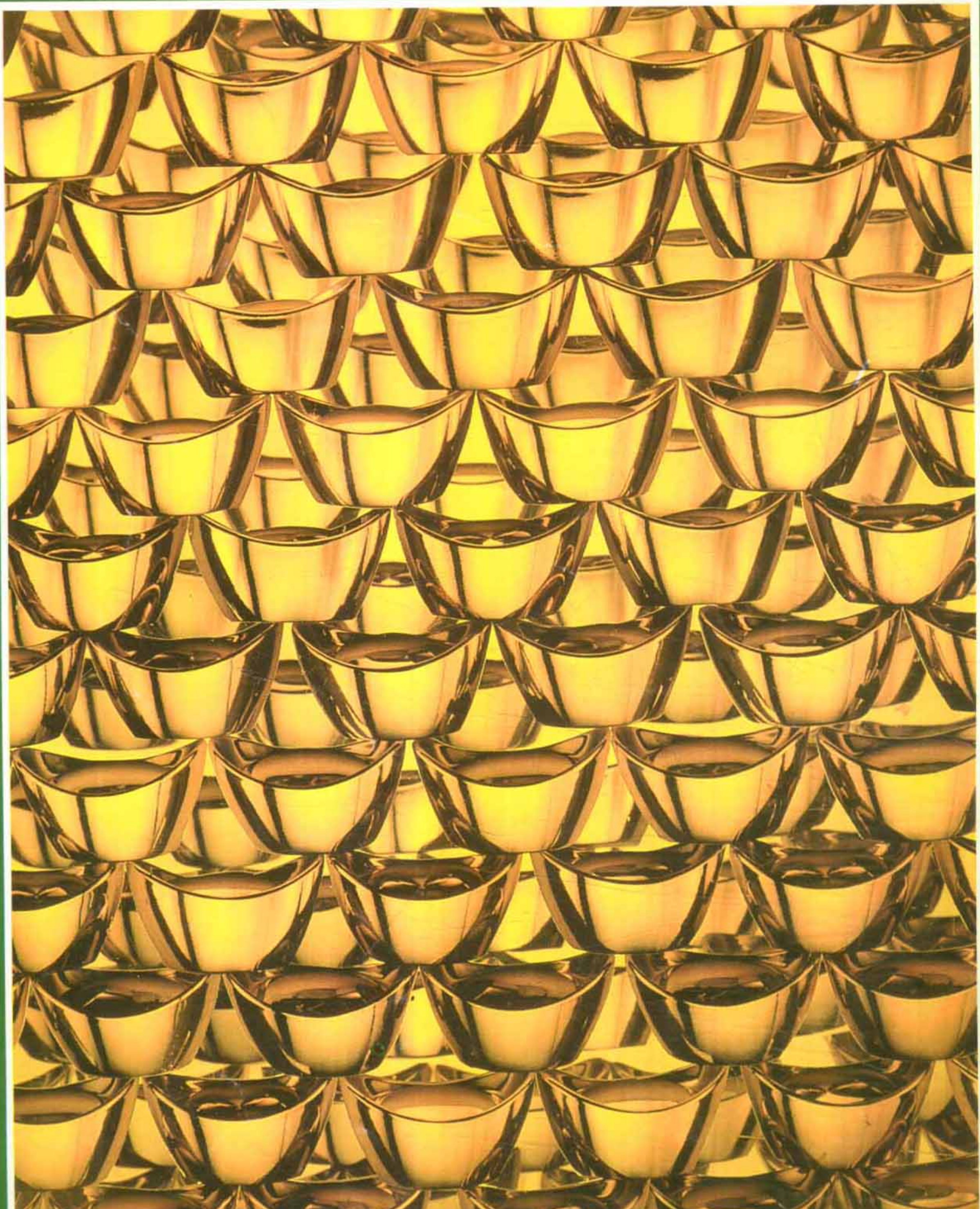
مجلّه ریاضی

برهان

۳۵

برای دانش آموزان دبیرستان

سال یازدهم ، شمارهٔ اول ، تابستان و پاییز ۱۳۸۰ ، بها ۳۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

برهان

سال یازدهم
تابستان ۱۳۸۰
شمارهٔ اول

وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز : انتشارات مدرسه

مدیر مسؤول : محمد صادق عزیزی

سردبیر: حمیدرضا امیری

مدیر داخلی : میرشهرام صدر

طراح گرافیک : فرشید پیمان پو

مدیر فنی : هوشنگ آشتیانی

رسام : فرشید پیمان پو

اعضای هیأت تحریریه : حمیدرضا امیری ، محمدهاشم رستمی ، احمد قندهاری ، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی ، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ، غلامرضا یاسی پور

(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)

چاپ و صحافی : چاپخانه مدرسه

نشانی : خیابان سپهبد قرنی ، خیابان سپند شرقی ، پلاک ۳۸، صندوق پستی : ۱۹۴۹ / ۱۳۱۵۵

تلفن : ۶ - ۸۸۹۶۷۶۵ ، دورنویس (فاکس) : ۸۹۰۳۸۰۹ ، تلفن امور مشترکین : ۹ - ۸۸۰۰۳۲۴

حرف اول ۱

۲ از تاریخ بیاموزیم (۹) / پرویز شهریاری

پاسخ مسأله مسابقه ای برهان ۳۲ / ۷

۸ مماس و قائم بر منحنی / احمد قندهاری

توزیع های گسسته ـ تابع متغیر تصادفی / حمید رضا امیری ۱۳

۱۷ مکان هندسی (۲٤) / محمد هاشم رستمی

آهنگ تغییر / یدالله ایلخانی پور ۲۰

۲۵ حل معادلهٔ همنهشتی ... / سید محمد رضا هاشمی موسوی

ملاّنصرالدین و مسألهٔ ... / غلامرضا یاسی پور ۳۰

۳۴ پاسخ مسأله مسابقه ای برهان ۳۳

همراه با درسهای ریاضیات (۲) / پرویز شهریاری ۳۵

۳۷ پارادکس شیپور گابریل / احمد قند هاری

بخشی از یک کتاب / ۳۹

۴۲ بحث در وجود و تعداد جوابهای ... / محمد حسین پور سعید

مسأله مسابقه ای برهان ۳۵/ ۴۳

۴۴ ترکیبیات (۲) / میر شهرام صدر

مسائل برای حل ۵۰

۵۳ پرسش های چهار گزینه ای

پاسخ تشریحی مسائل ۵۴

۶۲ پاسخ تشریحی پرسشهای چهار گزینه ای

برهان

تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آنها (برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آنها (برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و...)

برهان

هر سه ماه یک شماره منتشر می شود

- هیأت تحریریه در حک و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های مجله با رسم الخط انتشارات مدرسه به چاپ خواهد رسید.
- مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اوّل

می خواستم اعداد اول را درس بدهم، تاریخچهٔ مختصری از اعداد اول و کاربردهای آن را به عنوان «سنج» برای هم نهشتی هایی که در نظریهٔ رمزنگاری و رمزگشایی مورد استفاده قرار می گیرد را بازگو کردم، کم کم احساس کردم دانش آموزان نگاهشان عوض شده و گویی می خواهند حرفی بزنند، بالاخره یکی از آنها به خود جرأت داده و گفت ببخشید آقا، این اطلاعات به درد کنکور می خورد؟ جواب او را چه باید می دادم؟ از یک طرف حق داشت که نگران کنکورش باشد و از طرف دیگر، من هم به خودم حق می دادم تا برای ایجاد انگیزه و فهم عمیق مطالب از طرف دانش آموزانم مطالب جانبی در ارتباط با موضوع مطرح کنم.

مسألهٔ کنکور یا بهتر بگویم معضل کنکور، واقعاً به جایی رسیده که می توان گفت، «تیشه به ریشهٔ آموزش و پرورش می زند». بچه ها (و از آن بالاتر خانواده ها) از کلاس پنجم ابتدایی درگیر مسألهٔ کنکور هستند، و مرتب این جریان، دامن زده شده و همواره به سمتی می رود که هیچ نقطهٔ روشن و آینده نگری و حتی برنامه ریزی هدف دار در آن مشاهده نمی شود.

اصلاح این جریان و گزینش صحیح و برنامه ریزی شده، نیاز به عزم ملّی و اراده ای قوی دارد که در ملّتی استوار چون ملّت ایران یافت می شود، برای آگاهان نسبت به مسائل آموزش و پرورش و کلاسهای درس این موضوع قابل لمس است که کنکور موجب از بین رفتن بنیانها و ریشه های علم در ایران شده است و اگر امروز برای این موضوع، فکر اساسی نشود، فردا دیر است. فردایی که شما دانش آموزان و شما آینده سازان، باید به دست توانای خود و با قدرت علم و ایمان واقعی بسازید، فردایی که می بایست شرایط شکوفا شدن در آن برای شما ایجاد شود، فردایی که از دیروز و روزهای قبل به آن فکر کرده اید و هدف خود را امروز مشخص نکرده اید.

شما دانش آموزان باید حداکثر در سالهای اول و دوم دبیرستان علاقه های خود را شناخته و هدف خود، حتی شغل خود را تعیین کرده باشید، نه این که در زمان تعیین رشته، آن هم فقط با اسم رشتهٔ خود و احتمالاً شغل خود آشنا شوید.

عزیزان دانش آموز، در هر مقطعی از تحصیل که هستید به فکر شناسایی علاقه ها و رشته های مورد نظر خود باشید و امیدوار به آینده و سعی کنید مطالب را عمیق و با درک صحیح یاد بگیرید که در هر صورت می توانید از آنها استفاده کنید.

والسلام ـ سردبیر

ریاضیات ملتهای هند

(از: ا.ای. والودارسکی)



● پرویز شهریاری

ورود به مطلب

ملتهای هند در ژرفای تاریخ، دارای چنان فرهنگ غنی و ویژه‌ای بودند که اثر بی‌اندازه‌ای در پیشرفت فرهنگ ملتهای دیگر باقی گذاشت. کاوشهایی که در «مو هِن جُو دارو»، «هاراپ» و دیگر نقطه‌های سرزمین هند انجام گرفته، ثابت می‌کند که این نقطه‌ها، حتی در سه هزار سال پیش از میلاد، دارای کانالهای آبیاری و دستگاه آبرسانی شهری بوده‌اند و در بافندگی و هنرجواهرسازی، پیشرفت بسیار کرده بودند. در کاوشهای «مو هِنْ جُو دارُو» و «هاراپ» از جمله خط‌کشی به دست آمده که در دستگاه دهدهی، بخش‌بندی شده است.

از سدهٔ چهارم پیش از میلاد تا سدهٔ چهاردهم میلادی را، باید دوران موفّقیتهای بزرگ در زمینه‌های دستورزبان، پزشکی، ریاضیات، اخترشناسی و دیگر دانشها در هند دانست.در سده‌های چهارم و سوّم پیش از میلاد، «پانین» دانشمند هندی، «دستور» سانسکریت را پدید آورد. پیشرفتهایی که در دانشهای شیمی و گیاه‌شناسی شده بود، به تکامل دانش پزشکی یاری فراوان رساند.

بی‌تردید، اخترشناسی هندی، برنوشته‌های دانشمندان یونانی تکیه داشت؛ ولی دارای جنبه‌های بکر و تازه نیز بود. «آریابهاتا»ی اوّل، ریاضیدان و اخترشناس سده‌های پنجم و ششم میلادی، به کروی بودن زمین و گردش زمین به دور محور خود اعتقاد داشت. در نوشته‌های اخترشناسی هندی، حرکت ستارگان با دقت کافی محاسبه شده است؛ به همین دلیل، بسیاری از نوشته‌های اخترشناسی هندی، به زبانهای دیگر ترجمه شده است.

پیشرفت ریاضیات هندی، مانند همهٔ سرزمینهای دیگر، در آغاز از نیازهای زندگی سرچشمه می‌گرفت. برای ساختمانها لازم بود مسألهٔ مربوط به محاسبهٔ مساحت و حجم را حل کنند، تعداد مورد نیاز کارگرها را برآورد کنند، مزد آنها را بپردازند، پیشرفت داد و ستد کالا، حلّ مسأله‌های حساب بازرگانی را در برابر آنها گذاشت و... دانشهای دیگر و بویژه اخترشناسی هم به پیشرفت ریاضیات یاری رساندند؛ برای نمونه، یافتن ریشه‌های درست معادله‌های سیّال و پیشرفت مثلثات را باید از آن جمله دانست. باید توجه داشت، بیشتر ریاضیدانان، اخترشناس هم بودند.

نوشته‌های ریاضی را، مثل همهٔ نوشته‌های علمی، ادبی

و دینی، به «سانسکریت» می‌نوشتند. نقش زبان سانسکریت در هند، شبیه نقشی بود که زبان لاتینی در اروپای غربی سده‌های میانه داشت. موضوعهای ریاضی، اغلب کوتاه و بدون استدلال نوشته می‌شد. بسیاری از نوشته‌های ریاضی، به نظم درمی‌آمد و به صورت شعر ثبت می‌شد.

آگاهیهای زیادی از ریاضیات هندی در کتاب «قانون طنابها» (۵۰۰ تا ۷۰۰ سال پیش از میلاد) آمده است و در آن، از برخی ساختمانهای هندسی و نمونه‌هایی از بعضی محاسبه‌ها، جمع‌آوری شده است. بقیهٔ نوشته‌های هندی، مربوط به سده‌های پنجم تا شانزدهم میلادی است و در بسیاری از آنها، باید بخشهای مربوط به ریاضیات را، در بین نوشته‌های اخترشناسی یافت.

دستگاه قدیمی شمار

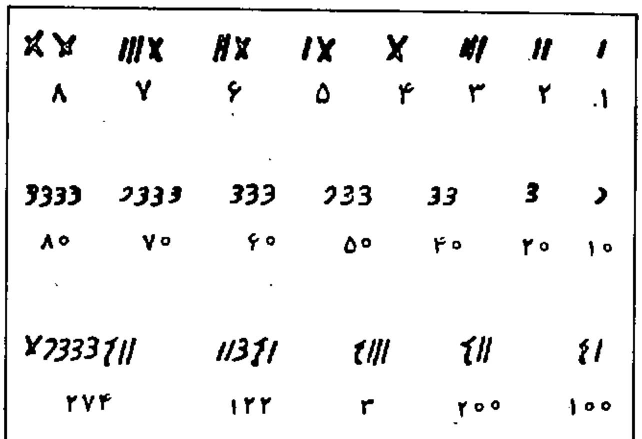
این مطلب روشن شده است که دستگاه عددنویسی دهدهی (که بر پایهٔ موضعی بودن رقمها تنظیم شده است) در هند به درجهٔ کمال خود رسید. ولی مسأله‌های مربوط به دستگاه شمار کهنتر هندی و اثری که در پیدایش دستگاه موضعی دهدهی داشته، کمتر روشن شده است.

در هند قدیم، دستگاه شمار غیرموضعی (نمادهای «کهاروشتا» و «برهما» دستگاه شمار لفظی و دستگاه شمار الفبایی) و همچنین، دستگاه شمار موضعی وجود داشته است. ویژگی دستگاه‌های شمار هندی در این است که اغلب با مبنای ۱۰ کار می‌کرده‌اند. ویژگی دیگر آن، در تکامل نامگذاری توان ۱۰ است. در زمانی که در یونان نامی برای بالاتر از 10^4 (میریاد) و در روم برای بالاتر از 10^3 (میل) نداشتند، در هند عددهای تا 10^{20} را نامگذاری کرده بودند.

به بررسی دستگاه‌های شمار غیر موضعی بپردازیم

رقمهای کهاروشتا در بسیاری نوشته‌ها که در شرق افغانستان امروزی و شمال پنجاب به‌دست آمده، به کار رفته است. این نوشته‌ها مربوط به سدهٔ چهارم پیش از میلاد تا سدهٔ سوّم میلادی است. در این دستگاه غیر موضعی دهدهی، برای هر یک از عددهای ۱، ۴، ۱۰، ۲۰ و ۱۰۰، نمادهایی وجود دارد و عددها از راست به چپ نوشته می‌شوند.

یکانها بر اساس قانون جمع و به یاری نمادهای ۱ و ۴



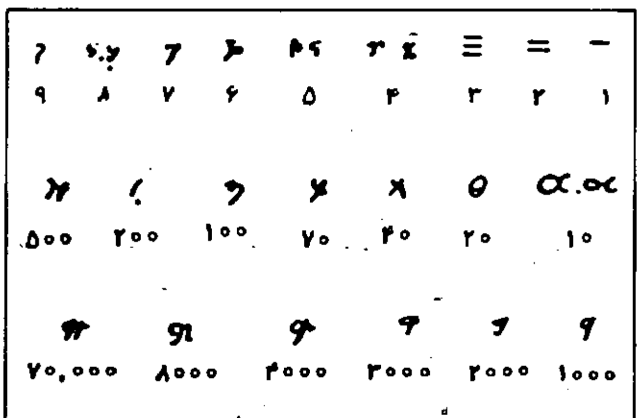
عدد نویسی کهاروشتا

نوشته می‌شد و دهگانها به یاری نمادهای ۱۰ و ۲۰، برای صدگان از قانون ضرب استفاده می‌کردند؛ یعنی نماد صد را می‌گذاشتند و در سمت راست آن، تعداد صدهای لازم را قرار می‌دادند. دستگاه شماری که براساس ضرب تنظیم شده باشد، به دستگاه موضعی نزدیکتر است تا دستگاهی که بر اساس قانون جمع شکل گرفته است.

تقریباً در سدهٔ ششم پیش از میلاد، در کنار رقمهای کهاروشتا، دستگاه عددنویسی دیگری هم به نام «برهما» به صورتی گسترده به کار می‌رفت. رقمهای برهما، در مقایسه با رقمهای کهاروشتا، دو ویژگی متفاوت داشت:

۱. از چپ به راست نوشته می‌شد.

۲. اگر در عددنویسی کهاروشتا، تنها ۵ نماد وجود داشت، رقمهای برهما برای واحد، ده، صد و هزار، نمادهای ویژه‌ای داشتند و در ضمن، عددهای ۴، ۵، ۸ و ۱۰ را با دو نماد مشابه نشان می‌دادند. در عددنویسی برهما، با آغاز از صد، قانون ضرب را به کار می‌بردند.



عددنویسی برهما

عدد نویسی برهما، نزدیک به هزار سال، بدون تغییر به کار می‌رفت، نمادهای نه‌گانه برای ۹ عدد طبیعی نخستین، دست‌کم از سدهٔ دوم پیش از میلاد، در بسیاری جاها وجود داشته است؛ ولی این نمادها، اغلب با توجه به قانون جمع به هم مربوط بودند. وجود نمادهای ویژه را برای عددهای از ۱ تا ۹، که یکی از ویژگیهای مهم در حساب هندی است، باید سرآغاز پیدایش عددنویسی دهدهی دانست.

دستگاه شمار لفظی، در هیچ کشوری به اندازهٔ هند، به طور گسترده به کار نمی‌رفت. در این‌جا رقمها، با واژه‌های مختلف بیان می‌شد؛ واحد را با واژه‌هایی بیان می‌کردند که معرّف یک چیز واحد و یگانه بود؛ مانند ماه یا زمین. «دو» را با نام چیزی بیان می‌کردند که همیشه با یک زوج از آنها برخورد می‌کنیم؛ مانند چشمها، لبها و غیره. ثبت عددها به این گونه، به غنای زبان سانسکریت و به ذخیرهٔ واژه‌های آن از جهت مترادفهای بسیار، کمک فراوان کرد. برای نمونه، برای «آسمان» ۹ واژهٔ مختلف و برای «زمین» ۱۱ واژهٔ مختلف داشتند. در این جا برخی واژه‌ها را که برای عدد به کار می‌بردند، می‌آوریم:

۰. تهی، آسمان، سوراخ، بی‌مرز (بیش از ۱۵ واژه)؛
۱. آغاز، ماه، زمین، بدن، برهمن (بیش از ۳۹ واژه)؛
۲. همزاد، چشمها، لبها، زوج (بیش از ۳۰ واژه)؛
۳. هدفها، آشتیها، زمانها، آتش (بیش از ۲۶ واژه)؛
۴. دریاها، دورانهای صلح، مرحله‌های زندگی، بخشهای عالم (بیش از ۲۹ واژه)؛
۵. تیرها، عنصرها، اندامهای حسی، قهرمانان افسانه‌ای مهابهارات (بیش از ۹ واژه)؛
۶. مزه‌ها، رنگها، بخشهای بدن (بیش از ۱۶ واژه)؛
۷. کوه‌ها، دانشمندان (بیش از ۲۸ واژه)؛
۸. خدایان، مارها، آرشها (بیش از ۲۶ واژه)؛
۹. الاهه‌ها (بیش از ۱۵ واژه)؛
۱۰. انگشتان، مظهرهای خدای ویشنا (بیش از ۱۰ واژه).

برای این که دستگاه لفظی را خوب بشناسیم، باید با فلسفه، ادب، اسطوره‌ها و افسانه‌های هندی آشنا باشیم. البته عملهای حساب را نمی‌توان به وسیلهٔ دستگاه عدد شماری لفظی انجام داد؛ از آنها تنها برای نوشتن عددها در رساله‌های ریاضی و اخترشناسی استفاده می‌کردند. استفاده از دستگاه لفظی، بسیار عمومی بود و امروز هم، کم و بیش آن را به کار می‌برند. ماده تاریخها را، اغلب از راست به چپ می‌نوشتند؛ گرچه گاه و از جمله در رسالهٔ «باهشالیسکا» (سده‌های ششم تا هشتم میلادی) عددها را از چپ به راست نوشته‌اند. با آغاز سده‌های چهارم و پنجم میلادی، دستگاه شمار لفظی به صورت موضعی درآمد و در آن، هر رقم (یعنی هر واژه) بسته به موضع خود، معناهای مختلفی داشت؛ در ضمن، از بیان مرتبه‌ها هم خودداری می‌شد. در کنار واژه‌هایی که به معنای رقم‌های مختلف بودند، از واژه‌هایی هم برای بیان صفر، به صورتی گسترده استفاده می‌شد.

نمونه‌هایی از نوشتن عدد را، با استفاده از دستگاه عددشماری موضعی لفظی می‌آوریم:

۱۲۳۰: آسمان (۰) - زمانها (۳) - لبها (۲) - زمین (۱)؛

۳۲۵۱۰۸: خدایان (۸) - آسمان (۰) - زمین (۱) - تیرها(۵) - لبها (۲) - زمانها (۳).

از دشواریهای دستگاه موضعی لفظی هندیها، این بود که برای نوشتن عددهای بزرگ، به جای زیادی نیاز داشتند، و این، برخلاف میل دانشمندان بود که می‌خواستند موضوعهای مربوط به دانش را، تا جایی که ممکن است کوتاه و فشرده بنویسند. به همین دلیل، برای تغییر دستگاه لفظی، در نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی، دستگاه‌شمار الفبایی پدید آمد. البته هندیها، از دستگاه الفبایی، مثل یونانیها و دیگران، در همه جا استفاده نمی‌کردند و تنها در نوشته‌های ریاضی و اخترشناسی به کار می‌بردند. در ضمن، دستگاه الفبایی‌شمار هم چندگونه بود؛ یکی از آنها شامل ۱۶ حرف صدادار و ۳۴ حرف بی‌صدای الفبای سانسکریت است؛ به این ترتیب که ۳۴ حرف بی‌صدا با نخستین حرف صدادار، معرّف عددهای از ۱ تا ۳۴، همان ۳۴ حرف بی‌صدا با دومین حرف صدادار، نمایندهٔ عددهای از ۳۵ تا ۶۸ و غیره بود. بنابراین، عددها به صورت:

$$۳۴(n-۱)+m$$

بودند که در آن، n شمارهٔ ردیف حرفهای صدادار و m شمارهٔ ردیف حرفهای بی‌صداست. برای نمونه ۳=گا («گ» حرف سوم بی‌صدا و «ا» حرف اوّل صدادار است)؛ ۱۴۲= چو («چ» حرف ششم بی‌صدا و «و» حرف پنجم صدادار).

دستگاه عددنویسی دهدهی موضعی هندیها، با چند شرط پذیرفته شده بود:

۱. نوشتن شکل ضربی مقدار ردیف در عدد؛
۲. حذف علامت واحد ردیف؛
۳. به کار بردن نماد صفر، برای ردیف‌های خالی؛
۴. پذیرفتن عدد ۱۰، به عنوان مبنای دستگاه‌شمار.

همهٔ این شرطها، در سده‌های نخستین میلادی، در دستگاه‌های عددنویسی رعایت می‌شد. به این ترتیب، به هر صورتی که در نظر بگیریم، دستگاه عددنویسی موضعی دهدهی، در دوره‌ای که از سدهٔ ششم میلادی تجاوز نمی‌کند، در هند پدید آمده بود.

حساب

همان‌طور که بیشتر موضوعها، در دورهٔ مقدماتی هندسهٔ امروزی، از طرحی پیروی می‌کند که اقلیدس ریخته است، حساب و بخشی از جبر ما، از هند سرچشمه گرفته است.

در حساب و برای عددهای درست و کسری، هشت عمل اساسی وجود دارد: جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به توان ۲ رساندن، ریشهٔ دوم گرفتن، به توان ۳ رساندن، ریشهٔ سوم گرفتن. دربارهٔ توانایی محاسبهٔ دانشمندان هندی، حقیقتی است که آنها، محاسبهٔ ریشهٔ سوم عددها، از عملهای عادی به شمار می‌رفت؛ در حالی که در اروپای غربی سده‌های میانه، کسی که می‌توانست توان دوم عددی را پیدا کند، ارج بسیار داشت.

محاسبه را روی صفحه‌ای که از ماسه یا خاک نرم پوشیده بود، انجام می‌دادند. عددها را با یک تکه چوب می‌نوشتند و برای این که عددها به هم نیامیزند و از یکدیگر جدا باشند، آنها را با اندازه‌های به اندازهٔ کافی بزرگ درنظر می‌گرفتند؛ بنابراین، برای به دست آوردن نتیجهٔ محاسبه، ناچار بودند عملهای بینابینی را پاک کنند، و همهٔ اینها در روش محاسبه اثر می‌گذاشت. عمل جمع را می‌توانستند، هم از راست به چپ، با آغاز از مرتبهٔ کوچکتر، و هم از چپ به راست، با آغاز از مرتبهٔ بزرگتر انجام دهند.

برای ضرب، روش مختلفی وجود داشت؛ ضرب را می‌شد از مرتبهٔ کوچکتر یا از مرتبهٔ بزرگتر آغاز کرد. بجز روش کلی ضرب، راه‌های ویژه‌ای هم وجود داشت، برای نمونه «شریدهارا» (سده‌های نهم و دهم میلادی)، عامل دوم ضرب را به ترتیب در یکان، دهگان، صدگان و هزارگان عامل اوّل، ضرب و سپس نتیجه‌ها را با هم جمع می‌کرد. مثال:

۱۲۹۶ × ۲۱ = (۱۰۰۰ + ۲۰۰ + ۹۰ + ۶) × ۲۱
= ۲۱۰۰۰ + ۴۲۰۰ + ۱۸۹۰ + ۱۲۶ = ۲۷۲۱۶

«بهاسکارا»ی دوم (سدهٔ دوازدهم میلادی) برای ساده‌تر کردن کار، یکی از عاملهای ضرب را به صورت مجموع یا تفاضل درمی‌آورد:

۱۳۵ × ۱۲ = ۱۳۵(۱۲ + ۸) - ۱۳۵ × ۸ ;
۱۳۵ × ۱۲ = ۱۳۵(۱۲ - ۲) + ۱۳۵ × ۲

برای تقسیم، شبیه راهی که امروز معمول است، عمل می‌کردند.

از آن جاکه ضمن عملهای حسابی، اغلب، عمل بینابینی را پاک می‌کردند، نمی‌شد به طور مستقیم، درستی نتیجه را آزمایش کرد. برای آزمایش درستی نتیجهٔ ضرب، تقسیم، توان و ریشه، به عمل وارون آن متوسل نمی‌شدند؛ بلکه از قاعدهٔ معروف به ۹، استفاده می‌کردند. این آزمایش بر این اساس است که باقیماندهٔ حاصل از تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیماندهٔ حاصل از تقسیم مجموع رقمهای آن عدد بر ۹. روشن است، «قاعدهٔ ۹» برای آزمایش درستی عمل کافی نیست و باید آن را با روش دیگری هم آزمایش کرد.

کسر از خیلی قدیم، در هند شناخته شده بود. در رسالهٔ «قانون طنابها» هم (که به سده‌های هفتم تا پنجم پیش از میلاد مربوط می‌شود) کسرها را به صورتی نوشته‌اند که با نمادهای امروزی شباهت زیادی دارد؛ مخرج کسر زیر صورت آن نوشته شده است، البته بدون خط کسری. هر کسر را از کسر دیگر، به وسیلهٔ خطهای راست افقی و قائم از هم جدا می‌کردند؛ نمادی برای جمع وجود نداشت و کسرها را برای جمع کردن به دنبال هم می‌نوشتند. مجموع $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ به این صورت نوشته می‌شد:

a	c	e
b	d	f

برای نماد تفریق، از نقطه یا عَلامتی شبیه یک صلیب کوچک استفاده می‌کردند. عبارت $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$ به این صورت

درمی‌آمد:

a	.c	+e
b	d	f

در کسر مرکب، بخش درست را روی کسر جا می‌دادند؛ کسر مرکب $a\frac{b}{c}$ را به این صورت می‌نوشتند:

a
b
c

گاهی عدد درست کسر مرکب را، با کسری که مخرجی برابر واحد داشت، نشان می‌دادند:

a	b
۱	c

یعنی $\frac{b}{c} + \frac{a}{1}$ که همان کسر مرکب $a\frac{b}{c}$ می‌شود. برای ضرب، کسرها را پشت سرهم می‌نوشتند، شبیه جمع:

a	c
b	d

و برای تقسیم، یکی را زیر دیگری:

a
b
c
d

یا

a
b
c
d

قاعدهٔ عمل با کسر، تقریباً تفاوتی با امروز ندارد. قاعدهٔ جمع کسرها به وسیلهٔ شریدهارا، این‌گونه شرح داده شده است: «کسرها را به یک مخرج تبدیل کنید، سپس صورتها را جمع کنید.» و برای قاعدهٔ ضرب: «صورتها را ضرب و بر حاصلضرب مخرجها تقسیم کنید تا حاصلضرب دو یا چند کسر به دست آید.»

به عنوان مخرج مشترک، در آغاز، حاصلضرب مخرجها را در نظر می‌گرفتند؛ ولی از آغاز سدهٔ نهم میلادی، کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرجها را پیدا می‌کردند. شریدهارا می‌نویسد: «برای این که دو کسر را با یک مخرج بنویسیم، در آغاز عامل مشترک دو مخرج را کنار می‌زنیم (اگر چنین عاملی وجود داشته باشد)، سپس عددی را که در هر مخرج می‌ماند، در صورت و مخرج کسر دیگر ضرب می‌کنیم.»

قاعدهٔ سه مقدار، پنج مقدار و غیره، وارون قاعدهٔ سه مقدار، مسأله‌های مربوط به «اختلاط» و «امتزاج» درصد و تقسیم به نسبت، جای مهمی را در حساب هندی داشتند. یونانیها و مصریها هم قاعدهٔ سه مقدار را به کار می‌بردند؛ ولی هندیها آن را همچون قانونی از حساب در نظر می‌گرفتند و از آن، به عنوان روشی برای حل، استفاده می‌کردند.

«قاعدهٔ سه مقدار» عبارت است از جست‌وجوی عدد x، به شرطی که با سه عدد دادهٔ شدهٔ a، b و c تشکیل یک تناسب بدهد:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

یک راه‌حل غیرعادی هم معمول بود. اگر مسأله‌ای منجر به حل معادلهٔ

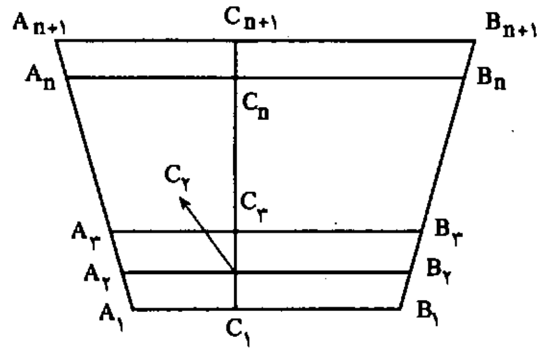
$$ax = c$$

می‌شد، پاسخ را به این صورت می‌نوشتند:

$$x = x_1 \cdot \frac{c}{c_1}$$

که در آن، x_1 عددی است دلخواه و c_1 مقدار متناظری است که از قرار دادن x_1 در معادله، برای c به دست می‌آید.

ریاضیدانان هندی، مسأله‌های مربوط به تصاعدهای حسابی و هندسی را حل می‌کردند؛ در ضمن، «شریدهارا»، تعبیر هندسی تصاعد حسابی را به صورت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی که ارتفاع آن برابر تعداد جمله‌های تصاعد است، داده است (شکل را ببینید). مساحت ذوزنقهٔ $A_1A_2B_2B_1$،



که ارتفاعی برابر واحد دارد ($|c_1c_2| = 1$)، عددی است برابر با جملهٔ اوّل تصاعد یعنی a؛ مساحت ذوزنقهٔ $A_1A_3B_3B_1$، که ارتفاعی برابر ۲ واحد دارد ($|c_1c_3| = 2$)، برابر است با

مجموع دو جملهٔ اوّل تصاعد یعنی $2a+d$ و غیره. سرانجام مساحت ذوزنقه $B_1B_{n+1}A_{n+1}A_1$ عددی است برابر با مجموع همهٔ جمله‌های تصاعد حسابی. شریدهارا، مجموع $S_n+\frac{p}{q}(a+nd)$ را برای تصاعدی حسابی، که تعداد جمله‌های آن عددی کسری و برابر $(n+\frac{p}{q})$ است، یافته است که در آن، S_n مجموع n جمله، و $\frac{p}{q}(a+nd)$ به معنای $\frac{p}{q}$ جملهٔ $(n+1)$ ام تصاعد است. شریدهارا، این مسأله را طرح و حل کرده است: «کارگری برای ماه اول $1\frac{1}{2}$ روپیه دریافت می‌کند. در هر یک از ماه‌های بعد، $\frac{1}{3}$ روپیه بیش از ماه قبل می‌گیرد. بعد از سه ماه‌ونیم، چه مبلغی گرفته است؟» و این طور عمل می‌کند:

$$S_3+\frac{1}{2}\left(1\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{3}\right)=5\frac{1}{2}+1\frac{1}{4}=6\frac{3}{4}\ \text{(روپیه)}$$



پاسخ مسأله مسابقه ای برهان ۳۲

حل: خط دلخواه d غیر موازی با خط Δ را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ برخورد آنها را I می‌نامیم. از رأسهای A، B، C، D، E و F خطهایی موازی Δ رسم می‌کنیم تا خط d را بترتیب در نقطه‌های A′، B′، C′، D′، E′ و F′ قطع کنند.

بنا به ویژگی خطهای موازی داریم:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}}=\frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}}\ ,\quad \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}}=\frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}}\ ,$$

$$\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}}=\frac{\overline{IC'}}{\overline{ID'}}\ ,\quad \frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}}=\frac{\overline{ID'}}{\overline{IE'}}\ ,$$

$$\frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}}=\frac{\overline{IE'}}{\overline{IF'}}\ ,\quad \frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}}=\frac{\overline{IF'}}{\overline{IA'}}$$

از ضرب کردن طرفهای متناظر رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

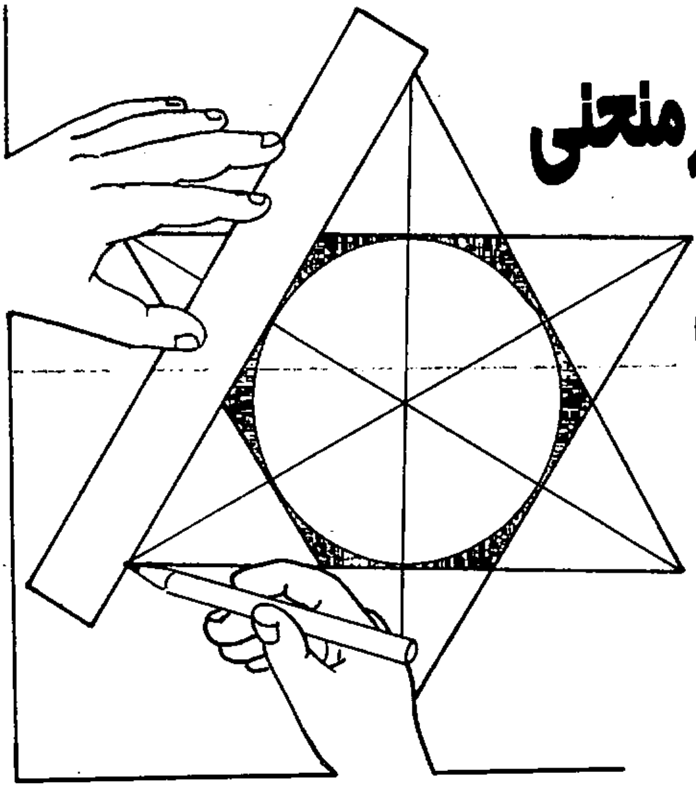
$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}}\times\frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}}\times\frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}}\times\frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}}\times\frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}}\times\frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}}=1$$

عکس این قضیه درست نیست؛ زیرا اگر رابطهٔ بالا برقرار باشد، الزامی وجود ندارد که نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1، E_1 و F_1 روی یک خط راست باشند. عکس این قضیه تنها در مورد مثلث درست است.

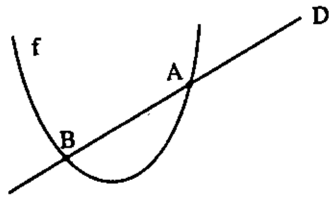
این قضیه تعمیم قضیهٔ منولائوس در مثلث است.

مماس و قائم بر منحنی

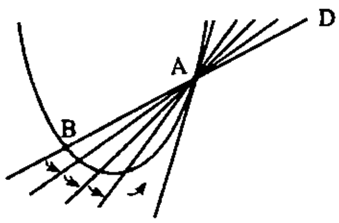
(قسمت اول)



● احمد قندهاری



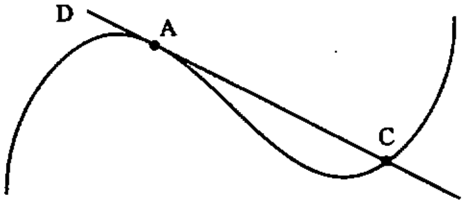
فرض می‌کنیم خط D نمودار تابع f را در دو نقطهٔ متمایز A و B قطع کند، اگر نقطهٔ A را ثابت نگه‌داریم و خط D را حول نقطهٔ A در جهت بیرون منحنی، آهسته آهسته به حرکت درآوریم، نقطهٔ B به نقطهٔ A نزدیک و نزدیکتر می‌شود. هر گاه نقطهٔ B بر نقطهٔ A منطبق شود، خط D یک وضعیت حدی پیدا می‌کند که آن را خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A گوییم.



پس می‌توان گفت:

تعریف: خط مماس بر منحنی، یک تابع حدّ قاطع است؛ وقتی دو نقطه تقاطع بر هم منطبق شوند. به عبارت دیگر، خط مماس، خطی است که منحنی تابع را در دو نقطهٔ منطبق بر هم قطع کند.

ممکن است خط مماس بر منحنی یک تابع، در نقطه‌ای مانند A ، نمودار تابع را در نقطهٔ دیگری مانند C قطع کند. (شکل زیر)



پیش از طرح مسائل مربوط به مماس بر منحنی، ریشهٔ مضاعف را بیان می‌کنیم.

ریشهٔ مضاعف

اگر $x = a$ ریشهٔ تکراری دفعات زوج یک معادله باشد، آنگاه $x = a$ را ریشهٔ مضاعف معادله گویند. سایر ریشه‌های معادله که این شرایط را ندارند، ریشهٔ سادهٔ معادله‌اند.

مثال (۱): ریشه‌های ساده و مضاعف معادلهٔ $(x^۲ - ۲\sqrt{۲}x + ۲)(x - \sqrt{۳}) = ۰$ را بیابید.

حل:

$$x^۲ - ۲\sqrt{۲}x + ۲ = ۰ \Rightarrow (x - \sqrt{۲})^۲ = ۰$$

$\Rightarrow x = \sqrt{۲}$ ریشهٔ مضاعف

$x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow x = \sqrt{۳}$ ریشهٔ ساده

توجه: اگر معادله درجه دوم، دو ریشه مساوی داشته باشد، آن ریشه را ریشه مضاعف گوییم.

مثال (۲): معادلهٔ $(x^۲ - ۵x + ۴)^۲(x^۲ - ۳x + ۲) = ۰$ چند ریشهٔ ساده و چند ریشهٔ مضاعف دارد؟

حل:

$$x^۲ - ۵x + ۴ = (x - ۱)(x - ۴)$$
$$x^۲ - ۳x + ۲ = (x - ۱)(x - ۲)$$

با جایگذاری در معادله داریم:

$$(x - ۱)^۲(x - ۴)^۲(x - ۱)(x - ۲) = ۰$$

$$(x - ۱)^۳(x - ۴)^۲(x - ۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & \text{ریشهٔ ساده} \\ x = ۴ & \text{ریشهٔ مضاعف} \\ x = ۲ & \text{ریشهٔ ساده} \end{cases}$$

* * *

قضیه: اگر معادلهٔ $P(x) = ۰$ ریشهٔ مضاعف $x = a$ داشته باشد، آنگاه $x = a$ ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $P'(x) = ۰$ است.

اثبات: فرض می‌کنیم

$$P(x) = (x - a)^{۲n} Q(x) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \; , \quad Q(a) \neq ۰$$

پس $x = a$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$ است. حال:

$$P'(x) = ۲n(x - a)^{۲n-۱} Q(x) + (x - a)^{۲n} Q'(x)$$
$$P'(x) = (x - a)^{۲n-۱} \left[۲n Q(x) + (x - a) Q'(x) \right]$$

اگر $P'(x) = ۰$، آنگاه $x = a$ ریشهٔ سادهٔ آن خواهد بود. اگر پرانتز دوم را برابر صفر قرار دهیم، ریشهٔ $x = a$ نخواهد داشت.

توجه: از این قضیه، در مسائل پارامتری درجهٔ دوم به بالا استفاده می‌کنیم.

مثال (۳): به ازای چه مقادیر m معادلهٔ $x^۳ - ۳x + m = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

حل: ریشه‌های سادهٔ معادله (۰ = مشتق) را پیدا می‌کنیم.

$$P(x) = x^۳ - ۳x + m$$

$$P'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases} \text{یا}$$

ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$ عدد ۱- یا عدد ۱ می‌باشد.

اگر ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$، عدد ۱ باشد، داریم:

$$x = ۱ \quad ; \quad P(۱) = ۱ - ۳ + m = ۰ \quad \Rightarrow \quad m = ۲$$

اگر ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$، عدد ۱- باشد، داریم:

$$x = -۱ \quad ; \quad P(-۱) = -۱ + ۳ + m = ۰ \quad \Rightarrow \quad m = -۲$$

پس اگر $m = ۲$، آنگاه ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$ عدد (۱) است. چنانچه $m = -۲$، آنگاه ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$، عدد (۱-) است.

* * *

مثال(۴): به ازای چه مقدار m معادلهٔ $x^۶ - ۱۹۲x + ۸۰m = ۰$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

حل: ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ (۰ = مشتق) ریشهٔ مضاعف معادلهٔ اصلی است.

$$P(x) = x^۶ - ۱۹۲x + ۸۰m = ۰$$
$$P'(x) = ۶x^۵ - ۱۹۲ = ۰ \Rightarrow x^۵ = ۳۲ \Rightarrow x = ۲$$

$x = ۲$ ریشهٔ سادهٔ معادلهٔ $P'(x) = ۰$ است، که ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $P(x) = ۰$ خواهد شد:

$$x = ۲ \quad ; \quad P(۲) = ۲^۶ - ۱۹۲(۲) + ۸۰m = ۰$$

$$۶۴ - ۳۸۴ + ۸۰m = ۰ \quad \Rightarrow \quad m = \frac{۳۲۰}{۸۰} = ۴$$

* * *

دوباره به تعریف خط مماس بر منحنی بر می‌گردیم. گفتیم که خط مماس بر منحنی یک تابع، نمودار تابع را در دو نقطهٔ

منطبق بر هم قطع می‌کند؛ یعنی اگر معادلهٔ خط مماس را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم (yها حذف)، معادله حاصل باید دو ریشهٔ برابر داشته باشد (ریشهٔ مضاعف داشته باشد).

مثال (۵): به ازای چه مقدار m خط $y = ۲x - m$، بر منحنی به معادلهٔ $y = x^۲ - ۲x$ مماس است.

حل: باید معادلهٔ تقاطع خط و منحنی، ریشهٔ مضاعف (دو ریشه برابر) داشته باشد.

$$\begin{cases} y = ۲x - m \\ y = x^۲ - ۲x \end{cases} \Rightarrow x^۲ - ۲x = ۲x - m \Rightarrow x^۲ - ۴x + m = ۰$$

$\Delta' = b'^۲ - ac = ۰ \Rightarrow ۴ - m = ۰ \Rightarrow m = ۴$; دو ریشه برابر

* * *

مثال (۶): به ازای چه مقدار m، منحنی تابع به معادلهٔ $f(x) = (x - ۱)(x^۲ + mx - ۴)$ بر محور xها مماس است.

حل: معادلهٔ محور xها $y = ۰$ است. باید معادلهٔ تقاطع خط و منحنی، دو ریشه برابر داشته باشد:

$$\begin{cases} f(x) = (x - ۱)(x^۲ + mx - ۴) \\ y = ۰ \end{cases} \Rightarrow (x - ۱)(x^۲ + mx - ۴) = ۰$$

این معادله باید دو ریشه برابر داشته باشد.

معادله $x^۲ + mx - ۴ = ۰$، دو ریشه متمایز دارد؛ زیرا:

$\Delta = m^۲ + ۱۶ > ۰$

پس این معادله، نمی‌تواند دو ریشه برابر داشته باشد.

ریشهٔ معادلهٔ $x - ۱ = ۰$، عدد (۱) است. حال m را چنان می‌یابیم که یکی از دو ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ + mx - ۴ = ۰$ عدد (۱) باشد.

$x = ۱ \;;\; x^۲ + mx - ۴ = ۰ \Rightarrow ۱ + m - ۴ = ۰ \Rightarrow m = ۳$

توضیح:

$$m = ۳ \;;\; \begin{aligned} &(x - ۱)(x^۲ + mx - ۴) = ۰ \\ &(x - ۱)(x^۲ + ۳x - ۴) = ۰ \\ &(x - ۱)(x - ۱)(x + ۴) = ۰ \end{aligned}$$

$$(x - ۱)^۲(x + ۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ & \text{ریشهٔ مضاعف} \\ x = -۴ & \text{ریشهٔ ساده} \end{cases}$$

مثال (۷): مقادیر m را چنان بیابید تا منحنی تابع به معادلهٔ $f(x) = (x^۲ - ۱)(x^۲ - ۶x + m)$ بر محور xها مماس باشد.

حل: معادلهٔ $(x^۲ - ۱)(x^۲ - ۶x + m) = ۰$ باید دو ریشهٔ برابر داشته باشد.

(الف $x^۲ - ۶x + m = ۰ \;;\; \Delta' = ۹ - m = ۰ \Rightarrow m = ۹$

(ب $x^۲ - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۱ \end{cases}$ یا

حال mها را چنان تعیین می‌کنیم که یکی از دو ریشهٔ معادلهٔ $x^۲ - ۶x + m = ۰$، عدد ۱ یا عدد ۱- باشد:

$$x = ۱ \;;\; \begin{aligned} &x^۲ - ۶x + m = ۰ \\ &۱ - ۶ + m = ۰ \Rightarrow m = ۵ \end{aligned}$$

$$x = -۱ \;;\; \begin{aligned} &x^۲ - ۶x + m = ۰ \\ &۱ + ۶ + m = ۰ \Rightarrow m = -۷ \end{aligned}$$

در نتیجه، اگر $m = ۹$ یا $m = ۵$ یا $m = -۷$، آن‌گاه منحنی f بر محور xها مماس است.

* * *

می‌دانیم اگر نقطه‌ای به طول a روی نمودار تابع مشتق‌پذیر f باشد (کافی است تابع f در یک همسایگی a مشتق‌پذیر باشد)، آن‌گاه $f'(a)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول a است و آن را با $m = f'(a)$ نشان می‌دهیم.

* * *

شیب خط مماس در نقطهٔ $A(a , b)$ واقع بر یک منحنی، برابر است با:

مشتق معادلهٔ منحنی به ازای مختصات نقطهٔ A (نقطهٔ A نقطه تماس است).

برای مثال، شیب خط مماس بر منحنی معادلهٔ $f(x) = x^۲ - ۴x + ۱$، در نقطه‌ای به طول صفر، واقع بر منحنی برابر $f'(۰)$ است.

$f'(x) = ۲x - ۴ \;;\; f'(۰) = ۰ - ۴ = -۴ = m$

مثال (۸): شیب خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $f(x,y) = -۲x + y^۲ - ۳y + ۸ = ۰$، در نقطه‌ای به عرض ۱ واقع بر منحنی را بیابید.

حل:

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{-۲}{۲y - ۳} = \frac{۲}{۲y - ۳}$$

$$m_{\text{مماس}} = \frac{2}{2(1)-3} = \frac{2}{-1} = -2$$

* * *

مثال (۹): شیب خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 2x - 7y = 0$ در نقطه‌ای به طول ۲ (با عرض بزرگتر) را بیابید.

حل:

$$x = 2 \;;\; 4(2)^2 + y^2 - 4 - 7y = 0 \Rightarrow$$

$$y^2 - 7y + 12 = 0 \Rightarrow (y-3)(y-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 4 \quad \text{قابل قبول} \end{cases}$$

$$y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{8x-2}{2y-7}$$

$$m_{\text{مماس}} = -\frac{8(2)-2}{2(4)-7} = -\frac{14}{1} = -14$$

* * *

بعکس، اگر مشتق معادلهٔ منحنی $f(x,y)=0$ یا $f(x)=0$ را برابر شیب خط مماس قرار دهیم، آنگاه:

الف) اگر عبارت مشتق برحسب x باشد، طول نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید.

ب) اگر عبارت مشتق برحسب y باشد، عرض نقطهٔ تماس به‌دست می‌آید.

ج) اگر عبارت مشتق برحسب x و y باشد، آنگاه رابطه‌ای بین مختصات نقاط تماس به‌دست می‌آید (اگر معادلهٔ حاصل برحسب x و y از درجهٔ اول باشد، معادلهٔ خطی است که از نقاط تماس می‌گذرد).

چنانچه این رابطه را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم، مختصات نقاط تماس به‌دست می‌آید.

مثال (۱۰): مختصات نقاطی از منحنی به معادلهٔ $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ را بیابید که شیب‌های خط‌های مماس بر منحنی در این نقاط، برابر $-\frac{4}{25}$ باشد.

حل: $f'(x) = m = -\frac{4}{25}$ ، $f'(x) = \frac{-4}{(2x-1)^2}$

$$\frac{-4}{(2x-1)^2} = \frac{-4}{25} \Rightarrow (2x-1)^2 = 25 \Rightarrow 2x-1 = \pm 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 3 , -2 \quad \text{طول‌های نقاط تماس}$$

$$f(3) = \frac{7}{5} \quad , \quad f(-2) = \frac{3}{5}$$

نقاط تماس عبارتند از: نقاط $\left(3, \frac{7}{5}\right)$ و $\left(-2, \frac{3}{5}\right)$.

* * *

مثال (۱۱): نقطه‌ای از منحنی به معادله $3x + y^2 - y - 2 = 0$ را بیابید که شیب خط مماس بر منحنی در آن نقطه برابر $-\frac{1}{5}$ باشد.

حل: شیب خط مماس $= y'_x = -\frac{3}{2y-1}$

عرض نقطهٔ تماس: $\frac{-3}{2y-1} = -\frac{1}{5} \Rightarrow 2y - 1 = 15 \Rightarrow y = 8$

$$y = 8 \xrightarrow{\text{درمعادلهٔ منحنی}} 3x + 64 - 8 - 2 = 0 \Rightarrow 3x = -54$$

$$\Rightarrow x = -18$$

پس نقطهٔ $(-18, 8)$ نقطهٔ تماس یا نقطهٔ مطلوب است.

* * *

مثال (۱۲): نقاطی از منحنی به معادلهٔ $2x^2 + y^2 = 3$ را بیابید که خط‌های مماس بر منحنی در آن نقاط، بر خط $2y - x + 4 = 0$ عمود باشد.

حل:

$$2y - x + 4 = 0 \Rightarrow m' = \frac{1}{2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -2$$

$$y'_x = -\frac{4x}{2y} = m_{\text{مماس}}$$

$$-\frac{2x}{y} = -2 \Rightarrow y = x$$

$y = x$ معادلهٔ خطی است که از نقاط تماس می‌گذرد (رابطهٔ بین مختصات نقاط تماس).

اگر این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع دهیم، مختصات نقاط تماس به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow 2x^2 + x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

طول‌های نقاط تماس

$$x = \pm 1 \quad , \quad y = \pm 1$$

نقاط تماس یا نقاط مطلوب، عبارتند از $(1, 1)$ و $(-1, -1)$.

* * *

حالت اوّل: طرز نوشتن معادلهٔ خط مماس بر منحنی، وقتی نقطه روی منحنی باشد.

۱. طول یا عرض معلوم نقطه را در معادلهٔ منحنی قرار می‌دهیم، عرض یا طول مجهول آن به‌دست می‌آید.

۲. به کمک مشتق، شیب خط مماس را می‌نویسیم.

۳. اگر نقطهٔ تماس را A بنامیم، از فرمول $y-y_A=m(x-x_A)$، معادلهٔ خط مماس را می‌نویسیم.

مثال (۱۳): معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y=\sqrt[3]{x^2}$ در نقطهٔ A به طول ۸ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل:

$$y_A=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4$$

$$y'_x=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad ; \quad m_{\text{مماس}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{3}$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-4=\frac{1}{3}(x-8) \Rightarrow y=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$$

معادلهٔ خط مماس بر منحنی در نقطهٔ A

مثال (۱۴): معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $x+y^2-y-4=0$ در نقطهٔ A به عرض ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل:

$$y_A=1\ ,\ x+1-1-4=0 \Rightarrow x_A=4$$

$$y'_x=-\frac{1}{2y-1} \quad ; \quad m_{\text{مماس}}=-\frac{1}{2-1}=-1$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-1=-1(x-4)$$

$$\Rightarrow y=-x+5$$ معادلهٔ خط مماس

* * *

مثال (۱۵): معادلهٔ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $xy+\sin(xy)-4y+4=0$ در نقطهٔ A به طول صفر را بنویسید.

حل:

$$x_A=0\ ,\ 0+\sin 0-4y+4=0 \Rightarrow y_A=1$$

$$y'_x=-\frac{y+y\cos(xy)}{x+x\cos(xy)-4}$$

$$A\Big|_1^0 \xrightarrow{\text{در عبارت } y'_x} m_{\text{مماس}}=-\frac{1+\cos 0}{0+0-4}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-1=\frac{1}{2}(x-0)$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+1$$ معادلهٔ خط مماس

* * *

مثال (۱۶): معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y=x+\text{Arctan}\,x$ در نقطه A به طول ۱ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل:

$$x_A=1\ ,\ y_A=1+\text{Arctan}\,1=1+\frac{\pi}{4}=\frac{4+\pi}{4}$$

$$y'_x=1+\frac{1}{1+x^2} \quad ; \quad m_{\text{مماس}}=1+\frac{1}{1+1}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-\frac{4+\pi}{4}=\frac{3}{2}(x-1)$$

$$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{4+\pi}{4}$$ معادلهٔ خط مماس

ادب ریاضی

«من نمی‌دانم به چه صورتی ممکن است در نظر جهانیان جلوه‌گر شوم؛ اما به نظر خودم چنین می‌آید که همچون کودک خردسالی هستم که در ساحل دریا به بازی مشغولم و گاه‌بیگاه، سنگریزه‌ای صافتر از سنگهای دیگر یا صدفی زیباتر از صدفهای دیگر به دست می‌آورم؛ در حالی که اقیانوس عظیم حقیقت در مقابل من گسترده است و مرا بر آن آگاهی نیست.»

ـ نیوتون

توزیع های گسسته - تابع متغیر تصادفی



● حمیدرضا امیری

پیشنیاز

اگر بتوانیم اعضای مجموعه‌ای را که با آن سر و کار داریم، شمارش کنیم،این مجموعه به اصطلاح، یک **مجموعهٔ گسسته** نامیده می‌شود، حال اگر یک پدیدهٔ تصادفی رخ دهد؛ به طوری که همهٔ حالت‌های ممکن در به وقوع پیوستن این پدیده، مجموعه‌ای گسسته تشکیل دهد، (اعضای آن قابل شمارش باشند) این مجموعه را **فضای نمونه‌ای گسسته** می‌نامیم و آن را بیشتر با S نمایش می‌دهیم. برای مثال، وقتی یک تاس را می‌اندازیم، همهٔ حالت‌های ممکن، عبارت است از ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶؛ پس $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ ، یا وقتی دو تاس را با هم می‌اندازیم (یا تاسی را دو بار می‌اندازیم)، اگر هر حالت ممکن را به صورت زوج مرتّب (a ، b) و نمایش دهیم که $۱ \le a \le ۶$ و $۱ \le b \le ۶$، در این صورت، S دارای ۳۶ عضو به شکل (a , b) بوده و در واقع $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\} \times \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$.

حال اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیدهٔ تصادفی باشد، هر زیرمجموعهٔ S مانند A، یک **پیشامد تصادفی از فضای** نمونه‌ای S نامیده شده است که احتمال به وقوع پیوستن A یا احتمال رخداد پیشامد A را با P(A) نمایش می‌دهیم و از رابطهٔ $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ محاسبه می‌کنیم. توجه دارید که **تابع احتمال**، تابعی است که دامنهٔ تعریف آن، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های S است که البته خود S را نیز شامل می‌شود. به‌عنوان مثال، وقتی یک تاس را می‌ریزیم ، S دارای ۶ عضو بوده و P(S) یعنی مجموعهٔ زیرمجموعه‌های S دارای $۶۴ = ۲^۶$ عضو است؛ یعنی برای این پدیده، تابع احتمال P می‌تواند روی ۶۴ عضو اثر کند. به مثالهای زیر توجه کنید:

$$S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

I) $A = \{۱,۲\} \subseteq S$ یا $A \in P(S)$

$$P(A) = P(\{۱\}) + P(\{۲\}) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۶}$$

$II)\ B = \{x \in S \mid (x-۲)(x-۵)(x-۶) = ۰\} = \{۲,۵,۶\}$

$P(B) = \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۳}{۶}$ یا $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳}{۶}$

لازم است به این نکته توجه کنید که متغیرهای تابع احتمال P، یعنی اعضای P(S) که تعداد آنها ۶۴ است، **متغیرهایی قطعی** محسوب می‌شوند؛ یعنی برای مثال، $A = \{۱,۲\}$ قطعاً زیر مجموعهٔ S است و تابع احتمال P، قطعاً روی A اثر کرده و حاصل تأثیر P روی A، یعنی P(A) همان $\frac{۲}{۶}$ است.

حال اگر S فضای نمونه‌ای یک پدیده بوده و تابعی چون X را از خود S به IR تعریف کنیم؛ یعنی $X : S \to IR$، در این صورت، دامنهٔ متغیر برای تابع X مجموعهٔ S بوده و متغیرهای این تابع، یعنی اعضای S، به شکل تصادفی به‌دست می‌آیند. برای مثال، اگر S را فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس در نظر بگیریم، در این صورت، وقتی تاس را می‌ریزیم، در نهایت، یکی از اعضای S آن هم به شکل تصادفی رخ خواهد داد. پس این متغیرها تصادفی به دست می‌آیند و به همین دلیل، X را **تابع متغیر تصادفی** می‌نامیم.

در یک تابع متغیر تصادفی مانند X، تأثیر X روی هر یک از متغیرها قطعی نبوده و به صورت تصادفی رخ می‌دهد. بنابراین اعضای مجموعهٔ برد تابع X نیز به شکلی تصادفی و هر یک با احتمالی تولید خواهند شد. به مثال زیر دقت کنید:

فرض کنیم $S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس باشد و تابع متغیر تصادفی X را با چند ضابطه، به صورت $X(۱) = X(۲) = ۰$ ، $X(۳) = ۱$ ، $X(۴) = ۲$ و $X(۵) = X(۶) = ۳$ تعریف کرده باشیم. در این صورت، اگر از ما سؤال شود که آیا قطعاً تابع X روی عدد ۱ اثر می‌کند، جواب خواهیم داد خیر. اگر تاس ۱ بیاید، تابع X روی آن اثر می‌کند. پس در واقع، $\frac{۱}{۶}$ احتمال دارد تابع X روی ۱ اثر کند و نیز $\frac{۱}{۶}$ احتمال دارد روی عدد ۲ اثر کند. پس می‌توان گفت $\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۶}$. احتمال دارد عدد صفر در بُرد تابع X تولید شود یا $\frac{۱}{۶}$ احتمال دارد عدد ۱ در برد تابع X تولید شود؛ بنابراین اگر جدولی شامل دو سطر تشکیل دهیم که سطر اوّل آن، مربوط به مقادیر بُرد تابع (x_iها) و سطر دوم آن، مربوط به احتمال‌های به‌وجود آمدن هر یک از آن مقادیر (p_iها) باشد، به چنین جدولی، جدول توزیع احتمال گفته می‌شود، که برای مثال قبل خواهیم داشت:

x_i	۰	۱	۲	۳
p_i	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۲}{۶}$

تذکر مهم

همواره حاصل جمع p_iها برابر ۱ است؛ یعنی $\sum_{i=۱}^{n} p_i = ۱$

که در این مثال، $\sum_{i=۱}^{۴} p_i = \frac{۲}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} + \frac{۲}{۶} = ۱$

حال سعی می‌کنم با ذکر مثال‌های متنوع، مفهوم تابع متغیر تصادفی و مفهوم تابع توزیع احتمال را بیشتر بسط داده و سپس به برخی کاربردهای آن بپردازم.

مثال (۱): یک سکّهٔ سالم را ۴ بار پرتاب می‌کنیم. روی فضای نمونه‌ای حاصل مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد رو شدنهای H در این ۴ بار پرتاب تعریف می‌کنیم:

$S = \{(a,b,c,d) \mid a,b,c,d \in \{H,T\}\}$

$X : S \longrightarrow IR$

$X(a,b,c,d) = K$

(که K تعداد H در ۴ بار پرتاب است.)

واضح است که K می‌تواند مقادیر ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ را اختیار کند؛ یعنی در ۴ بار پرتاب، یا اصلاً H نداریم یا یک H یا دو H یا سه H و یا چهار H داریم. برای مثال داریم:

$X(T,T,T,T) = ۰ \quad , \quad X(H,T,T,T) = ۱$

$X(H,T,H,T) = X(H,H,T,T) = ۲$

بنابراین، جدول توزیع احتمال برای این مثال، به شکل زیر است:

x_i	۰	۱	۲	۳	۴
p_i	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$

تعداد حالت‌های یک H در ۴ پرتاب $= \binom{۴}{۱} = ۴$

تعداد حالت‌های دو H در ۴ پرتاب $= \binom{۴}{۲} = ۶$

تعداد حالت‌های سه H در ۴ پرتاب $= \binom{۴}{۳} = ۴$

مثال (۲): یک جفت تاس را با هم می‌ریزیم و روی فضای نمونه‌ای حاصل تابع متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. جدول توزیع احتمال را برای این تابع رسم کنید:

$S=\{(a,b)\mid 1\le a\le 6\,,\,1\le a\le 6\}$

$X:S\longrightarrow \mathbb{R}$

$X(a,b)=a+b$

برای مثال:

$X(2,3)=X(3,2)=5\,,\,X(1,1)=2\,,\,X(6,6)=12,\ldots$

بدیهی است که تابع X، می‌تواند مقادیر ۲، ۳، ... و ۱۲ را تولید کند.

x_i	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

مثال (۳): در مثال (۲) مطلوب است محاسبهٔ $P(2\le x<5)$.

منظور از $P(x=2)$ احتمال تولید عدد ۲ در برد تابع X است. پس:

$$P(2\le x\le 5)=P(x=2)+P(x=3)+P(x=4)$$
$$=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}=\frac{6}{36}$$

مثال (۴): در مثال (۲) تابع متغیر تصادفی Y را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. جدول توزیع احتمال را برای این تابع رسم کنید.

$Y:S\longrightarrow \mathbb{R}$

$Y(a,b)=\mathrm{Max}\,\{a,b\}$

برای مثال:

$Y(2,3)=\mathrm{Max}\,\{2,3\}=3$

$Y(1,6)=\mathrm{Max}\,\{1,6\}=6$

$Y(1,1)=\mathrm{Max}\,\{1,1\}=\mathrm{Max}\,\{1\}=1$

همان طور که مشاهده می‌کنید، تابع Y می‌تواند مقادیر ۱، ۲،... و ۶ را تولید کند و برای مثال داریم:

$P(Y=2)=P\{(1,2),(2,1),(2,2)\}=\frac{3}{36}$

پس جدول توزیع احتمال این تابع، به شکل زیر است:

y_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

مثال (۵): در یک جعبه، ۷ سیب موجود است، که ۳ تای آنها خرابند. اگر از این جعبه ۳ سیب را تصادفی خارج کنیم و روی فضای نمونه‌ای حاصل مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد سیب‌های خراب در برداشت ۳ سیب تعریف کنیم، جدول توزیع احتمال و ضابطهٔ تابع توزیع احتمال را بنویسید.

واضح است که تعداد سیب‌های خراب در برداشت ۳ سیب، یا صفر است یا ۱ یا ۲ و یا ۳. پس مقادیر برد تابع X، اعداد صفر تا ۳ است.

(ضابطهٔ تابع توزیع احتمال) $P(X=x_i)=\dfrac{\binom{3}{x_i}\times\binom{4}{3-x_i}}{\binom{7}{3}}$

$$\Rightarrow P(X=0)=\frac{\binom{3}{0}\times\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}=\frac{4}{35}\,,$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{3}{1}\times\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}=\frac{18}{35}\,,$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{3}{2}\times\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}}=\frac{12}{35}\,,$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{3}{3}\times\binom{4}{0}}{\binom{7}{3}}=\frac{1}{35}\,,$$

x_i	۰	۱	۲	۳
p_i	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

مثال (۶): سکّه‌ای طوری ساخته شده است که در آن $P(H)=\frac{3}{5}$ است. اگر این سکّه را به دفعات دلخواه پرتاب کرده و مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌ها تعریف کنیم تا اوّلین T ظاهر شود، در این صورت، مقادیر بُرد تابع و سپس جدول توزیع احتمال را برای آن رسم کنید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$X(T)=1\quad,\quad X(H,T)=2\quad,\quad X(H,H,T)=3,$

$X(H,H,H,T)=4\quad,\quad\ldots$

بنابراین برد تابع، مجموعهٔ اعداد طبیعی بوده که مجموعه‌ای نامتناهی است.

وقتی مقدار X برابر با ۳ می‌شود؛ یعنی در پرتاب سوّم T ظاهر شده، پس باید در دو پرتاب قبل، سکّه H آمده باشد.

x_i	1	2	3	4	5	...
p_i	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^4\times\frac{2}{5}$	

$$\left(\Sigma p_i=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\dots=\frac{\text{جمله‌اول}}{\text{قدرنسبت}-1}=\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{5}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}}=1\right)$$

مثال (۷): بهزاد و مهرداد، به ترتیب تاسی را می‌ریزند و با هم قرار می‌گذارند که هر کس برای اوّلین بار ۶ آورد، برنده است. اگر اوّل بهزاد بازی را شروع کند، احتمال برنده شدن مهرداد را محاسبه کنید.

برای حلّ این مسأله، فرض می‌کنیم که تاسی را به دفعات دلخواه پرتاب کرده و روی فضای نمونه‌ای حاصل، مقدار تابع متغیر تصادفی X را تعداد پرتاب‌ها تعریف می‌کنیم تا اوّلین ۶ ظاهر شود. در این صورت، مقدار X می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ یا... باشد، که به ترتیب نشان دهندهٔ آن است که در پرتاب اوّل ۶ آمده یا در پرتاب دوم ۶ آمده (در پرتاب اول ۶ نیامده و در بار دوم ۶ آمده) یا در پرتاب سوم ۶ آمده (در دو پرتاب اول و دوم ۶ نیامده و در پرتاپ سوم ۶ آمده) یا... .

بنابراین مقادیر برد تابع (x_iها) عبارتند از ۱، ۲، ۳ و... .

حال با رسم جدول توزیع احتمال و مدل‌سازی مسأله روی جدول، می‌توان به راحتی مسأله را حل کرد:

x_i	1	2	3	4	5	6	...
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^5\times\frac{1}{6}$	...

واضح است که مکان‌های فرد در x_iها متعلق به بهزاد و مکان‌های زوج، به مهرداد تعلّق دارد؛ یعنی مهرداد می‌تواند در بار دوم پرتاب تاس یا بار چهارم یا... برنده شود. پس احتمال برنده شدن مهرداد، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P(\text{برنده شدن مهرداد})=P(x=2)+P(x=4)+P(x=6)+\dots$$

$$=\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^3\times\frac{1}{6}+\dots=\frac{\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{5}{11}$$

(همان‌طور که مشاهده کردید، احتمال برنده شدنِ مهرداد $\frac{5}{11}$ بوده و احتمال برنده شدن بهزاد $1-\frac{5}{11}=\frac{6}{11}$ است و دلیل بیشتر بودن احتمال برنده شدن بهزاد، این است که او بازی را شروع کرده!)

مثال(۷): روی دو وجه یک تاس، عدد ۱، روی دو وجه دیگر آن، عدد ۲ و روی دو وجه دیگر آن، عدد ۳ را نوشته و آن را سه بار می‌ریزیم، اگر مقدار تابع متغیر تصادفی X را مجموع سه عدد رو شده در سه پرتاب تعریف کنیم، مقادیر برد تابع X و جدول توزیع احتمال را برای آن تشکیل دهید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$$X(2,1,1)=2+1+1=4$$

$$X(1,1,1)=1+1+1=3 \quad , \quad X(3,3,3)=9$$

بنابراین برد تابع X، عبارت است از مجموعهٔ $\{3,4,\dots,9\}$، و جدول توزیع احتمال آن، به شکل زیر حاصل می‌شود:

x_i	3	4	5	6	7	8	9
p_i	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$

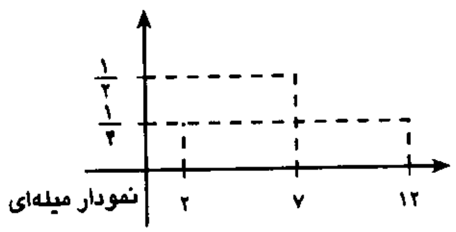
(واضح است که تاس مورد نظر، فضای نمونه‌ای به شکل $S=\{1,2,3\}$ داشته، که چون سه بار ریخته شده است، فضای نمونه‌ای حاصل دارای $27=3\times3\times3$ عضو است.

مثال (۸): روی یک طرف سکه‌ای عدد ۱ و طرف دیگر آن عدد ۶ را نوشته‌ایم. اگر این سکّه را دوبار پرتاب و مقدار تابع متغیر تصادفی X را مجموعه اعداد ظاهر شده در این ۲ پرتاب تعریف کنیم، مقادیر برد X را به دست آورده و جدول توزیع احتمال را برای آن تشکیل دهید و نمودار میله‌ای آن را رسم کنید.

با توجه به تعریف تابع X داریم:

$$X(1,1)=2 \quad , \quad X(6,6)=12 \quad , \quad X(1,6)=X(6,1)=7$$

x_i	2	7	12
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$



تمرین

در مثال قبل، اگر سکّه را سه بار پرتاب می‌کردیم، مقادیر برد تابع X و جدول توزیع احتمال آن، به چه صورتی تغییر می‌کرد؟

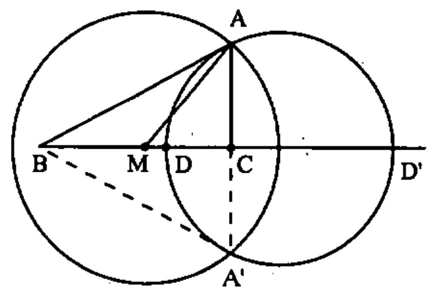
دایره آپولونیوس (۲۴)

مکان هندسی

● محمدهاشم رستمی

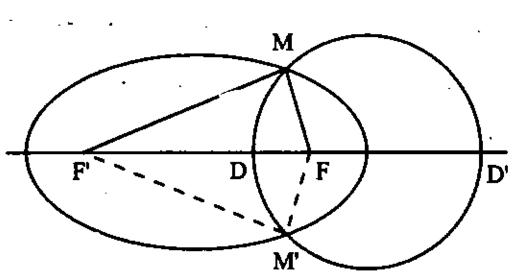
مــــثال (۴): از مــثلث ABC، انـدازۀ ضـلع BC = a و $\frac{AB}{AC} = \frac{b}{c}$ و طول میانۀ رأس A(m_a) معلوم است؛ مثلث را رسم کنید.

حل: ابتدا پاره خط BC را به طول a رسم می‌کنیم.



چون $\frac{AB}{AC} = \frac{b}{c} = k$ است، پس مکـان هـندسی رأس A، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط BC را بـه نسـبت x تـقسیم می‌کند. با مشخص کردن نقطه‌های D و D′ که پاره خط BC را به نسبت $\frac{b}{c} = k$ تقسیـم می‌کند، دایره‌ای به قطر DD′ را رسم می‌کنیم. از طرفی $AM = m_a$ معلوم است؛ پس مکان هندسی دیگر رأس A، دایره‌ای به مرکز نقطۀ M وسط پاره‌خط BC و به شعاع m_a است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم. نقطۀ برخورد این دو دایره، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم تـا مثلث ABC رسم شود. در صورت متقاطع بودن دو دایرۀ مکان هندسی، مسأله دارای دو جواب برابر است.

مثال (۵): یک بیضی به کانون‌های F و F′ و عدد ثابت ۲a در صفحۀ P داده شده است. نقطه‌ای از این بـیضی را تـعیین کنید که نسبت فاصله‌اش از دو کانون F و F′، برابر ۲a باشد.



حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطۀ ثابت F و F′، برابر مقدار ثابت ۲a است، دایره‌ای است که قطرش پاره خط FF′ را به نسبت ۲a تقسیم مـی‌کند. ایـن دایـره (دایـرۀ بـه قـطر DD′) را رسـم مـی‌کنیم. نقطه‌های برخـورد ایـن دایـره بـا بـیضی داده شـده، جـواب مسأله‌اند. ($\frac{DF'}{DF} = \frac{D'F'}{D'F} = ۲a$)

مثال (۶): دو نقطهٔ $A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B، برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

حل: فرض می‌کنیم $M(x, y)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{1}{2}$ است؛ در این صورت داریم:

$A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ و $M(x, y) \Rightarrow$

$MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$ و $MB=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow 4(x+1)^2+4(y-2)^2=(x-3)^2+y^2$$

$$\Rightarrow 3x^2+3y^2+14x-16y+11=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+\frac{14}{3}x-\frac{16}{3}y+\frac{11}{3}=0$$

معادلهٔ دایره آپولونیوس

مثال (۷): خط $D: y-4x+4=0$ و دو نقطهٔ $A(-4, 0)$ و $B(0, 3)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۳ باشد.

حل: معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس ـ یعنی دایره‌ای که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت ۳ تقسیم می‌کند ـ را می‌نویسیم و نقطهٔ برخورد آن با خط D را می‌یابیم. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد. خواهیم داشت:

$A(-4, 0)$ و $B(0, 3)$ و $M(x, y) \Rightarrow$

$MA=\sqrt{(x+4)^2+y^2}\ ,\ MB=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB}=3 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-3)^2}}=3$$

$$\Rightarrow 9x^2+9(y-3)^2=(x+4)^2+y^2 \Rightarrow 8x^2+8y^2-8x-54y+65=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x-\frac{27}{4}y+\frac{65}{8}=0$$ معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-\frac{27}{4}y+\frac{65}{8}=0 \\ y=4x-4 \Rightarrow x^2+(4x-4)^2-x-\frac{27}{4}(4x-4)+\frac{65}{8}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 17x^2-60x+\frac{409}{8}=0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2=\frac{+30\pm\sqrt{247}}{17} \Rightarrow y_1, y_2=\frac{120\pm4\sqrt{247}}{17}-4$$

$M_1\left(\frac{30+\sqrt{247}}{17}, \frac{52+4\sqrt{247}}{17}\right)$ و

$M_2\left(\frac{30-\sqrt{247}}{17}, \frac{52-4\sqrt{247}}{17}\right)$ نقطه‌های جواب مسأله

مثال (۸): سه نقطهٔ $A(2, -1)$، $B(-2, 3)$ و $C(-4, 0)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر $\sqrt{2}$ باشد.

حل: نقطهٔ برخورد عمودمنصّف پاره خط AB، با دایرهٔ آپولونیوسی که قطرش پاره خط BC را به نسبت $\sqrt{2}$ تقسیم می‌کند، جواب مسأله است. بنابراین، معادلهٔ این دو مکان هندسی را می‌نویسیم و نقطهٔ برخوردشان را تعیین می‌کنیم.

$A(2, -1)$ و $B(-2, 3) \Rightarrow$ AB وسط $M(0, 1)$ و

$$m_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$m_{AB}=\frac{3+1}{-2-2}=-1 \Rightarrow$$ عمودمنصف AB

$$m=+1 \Rightarrow y-1=1(x-0)$$

$y=x+1$ معادلهٔ عمودمنصّف پاره خط AB

$B(-2, 3)$ و $C(-4, 0)$ و $M(x, y)$ و $k=\sqrt{2}$

$\Rightarrow MB=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$ و $MC=\sqrt{(x+4)^2+y^2}$

$$\frac{MB}{MC}=\sqrt{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}=\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2(x+4)^2+2y^2=(x+2)^2+(y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+12x+6y+19=0$$ معادلهٔ دایره آپولونیوس

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 + 12x + 6y + 19 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + (x+1)^2 + 12x + 6(x+1) + 19 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 20x + 26 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x + 13 = 0$$

$$\Rightarrow x_1, x_2 = -5 \pm 2\sqrt{3} \text{ و } y_1, y_2 = -4 \pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow M_1(-5 + 2\sqrt{3}, -4 + 2\sqrt{3}) \text{ و}$$

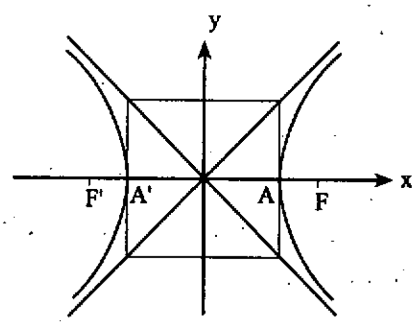
نقطه‌های جواب مسأله $M_2(-5 - 2\sqrt{3}, -4 - 2\sqrt{3})$

مثال (۹): هذلولی به معادلهٔ $x^2 - y^2 = 4$ داده شده است.

الف) این هذلولی را رسم کنید و مختصات مرکز، رأس‌ها و کانون‌های آن را بیابید.

ب) مختصات نقطهٔ E مزدوج توافقی نقطهٔ F نسبت به دو رأس A و A' را بیابید و معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF را بنویسید.

پ) نقطه‌ای روی هذلولی بالا بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A' برابر $3 - 2\sqrt{2}$ باشد.



حل: الف) $x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\Rightarrow$ O مرکز هذلولی $\Big|$ $a^2 = b^2 = 4$ ،

$$\Rightarrow a = b = 2 \Rightarrow c = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

و

$A(2, 0)$ و $A'(-2, 0)$ و $F(2\sqrt{2}, 0)$ و $F'(-2\sqrt{2}, 0)$

ب) بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی داریم:

$$\overline{OE} \cdot \overline{OF} = \overline{OA}^2 \Rightarrow \overline{OE} \times c = a \Rightarrow \overline{OE} = \frac{a^2}{c}$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow E \left| \begin{array}{l} \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ 0 \end{array} \right.$$

وسط پاره خط EF O' $\left| \begin{array}{l} x = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \end{array} \right.$

$$R = O'E = O'F = a\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}a = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

شعاع دایرهٔ به قطر EF $= \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow$$

معادلهٔ دایرهٔ به قطر EF $\quad \left(x - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2}$

پ) دو نقطهٔ E و F پاره خط AA' را به نسبت $3 - 2\sqrt{2}$ تقسیم می‌کنند؛ زیرا داریم:

$$\frac{FA}{FA'} = \frac{EA}{EA'} = \frac{c - a}{c + a} = \frac{a\sqrt{2} - a}{a\sqrt{2} + a}$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = 3 - 2\sqrt{2}$$

بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A' برابر $3 - 2\sqrt{2}$ است، دایرهٔ به قطر EF است. لذا نقطهٔ برخورد این دایره با هذلولی را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = x^2 - 4 \\ (x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (x - \frac{3\sqrt{2}}{2})^2 + x^2 - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3\sqrt{2}x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ و } x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow y^2 = -4 \text{ و } x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow M_1\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و } M_2\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

نقطه‌های جواب مسأله



● یدا... ایلخانی پور

آهنگ تغییر

(برای دانش آموزان سال سوم دبیرستان رشته ریاضی)

می‌دانید که چگونه از مشتق برای تعیین شیب خط مماس بر منحنی در یک نقطه استفاده می‌شود. اکنون مورد استعمال دیگری از مشتق را در نظر می‌گیریم و آن، تعیین میزان یا آهنگ تغییر یک متغیر نسبت به متغیر دیگری است، که متغیر دیگر، متغیر مستقل می‌باشد.

این میزانهای تغییر، یا آهنگ تغییر را می‌توان در مباحث مختلف، از جمله میزان رشد جمعیت، میزان تولید، افزایش یا کاهش سطح و حجم، سرعت، شتاب و غیره به کاربرد.

الف) آهنگ متوسط تغییر

فرض کنیم مکان یک جسم متحرکی مانند M در هر زمان t، به صورت یکنواخت، تابع مشتق‌پذیر $S = f(t)$ باشد. بنابراین در لحظهٔ t_1، مکان جسم $S_1 = f(t_1)$ است و در لحظهٔ t_2، مکان جسم $S_2 = f(t_2)$ است. آهنگ متوسط تغییر مکان جسم M در فاصلهٔ زمانی t_1 تا t_2، همان سرعت متوسط M است و برابر است با:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$$

که

$$\Delta S = S_2 - S_1 \ , \ \Delta t = t_2 - t_1$$

ΔS را تغییر مکان و Δt را تغییر زمان می‌نامیم. پس نسبت تغییرات مکان جسم M به تغییرات زمان، در بازهٔ زمانی $[t_1 , t_2]$ برابر است با آهنگ متوسط تغییر مکان جسم M نسبت به تغییر زمان t.

تعریف: اگر $y = f(x)$ معادله‌ای باشد که در هر لحظه، رابطهٔ تغییرات y وابسته به تغییرات x را نشان دهد، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ را آهنگ متوسط تغییر y نسبت به x دربازهٔ $[x, x + \Delta x]$ می‌نامیم. (نسبت تغییرات متغیر وابسته به تغییرات متغیر مستقل)

(تذکر: اگر x زمان و y مکان یک جسم متحرک باشد، این آهنگ تغییر، سرعت متوسط جسم نیز نامیده می‌شود.)

مثال: غلظت یک دارو در خون یک بیمار، پس از ۱۰ دقیقه، ۲ میلیگرم و پس از ۴۰ دقیقه، ۵۲ میلیگرم در دقیقه بوده است. آهنگ متوسط تغییر غلظت خون بیمار دربازهٔ [۱۰ , ۴۰]، چه قدر است؟

حل: $\Delta y = ۵۲ - ۲ = ۵۰ \; , \; \Delta x = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۵۰}{۳۰} = ۱/۶۶ \frac{mg}{m}$ میلیگرم در دقیقه

مثال: آهنگ تغییر متوسط درجهٔ حرارت سانتیگراد به درجهٔ حرارت فارنهایت را به دست آورید؛ در صورتی که $C = \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)$ باشد.

حل: کافی است $\frac{\Delta C}{\Delta F}$ را حساب کنیم.

$$\frac{\Delta C}{\Delta F} = \frac{C(F + \Delta F) - C(F)}{\Delta F}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۹}(F + \Delta F - ۳۲) - \frac{۵}{۹}(F - ۳۲)}{\Delta F}$$

$$= \frac{\frac{۵}{۹}(F + \Delta F - ۳۲ - F + ۳۲)}{\Delta F}$$

$$= \frac{۵}{۹} \cdot \frac{\Delta F}{\Delta F} = \frac{۵}{۹}$$

نکته: اگر $y = f(x)$ معادلهٔ مسیر یک متحرک باشد، وقتی x به اندازهٔ Δx تغییر کند، y به اندازهٔ $f(x+\Delta x) - f(x)$ تغییر می‌کند. این تغییر Δy را تغییر واقعی f می‌نامند، که این تغییر واقعی، وقتی Δx خیلی کوچک باشد، تقریباً با $f'(x)$، یعنی مشتق f در نقطهٔ x برابر است.

ب) آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر

تعریف: اگر $y = f(t)$ معادلهٔ تغییر یک کمیت در هر لحظهٔ t باشد، نسبت تغییرات y (یا تغییرات f) در واحد زمان، برابر است با آهنگ آنی تغییر آن کمیّت.

یعنی: $\frac{\Delta y}{۱} = \frac{f(t + ۱) - f(t)}{۱}$

چون $\Delta t = ۱$ کوچک است، مقدار Δy تقریباً با $f'(t)$ برابر است؛ یعنی $\Delta y \simeq f'(t)$؛ پس آهنگ آنی تغییر f در لحظهٔ t، برابر است با $f'(t) = \lim_{\Delta t \to ۰} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ که همان **سرعت لحظه‌ای** یک متحرّک در لحظهٔ t است. (f در بازهٔ $[t, t + \Delta t]$ مشتق‌پذیر است.)

مثال: معادلهٔ حرکت یک اتومبیل در هر لحظهٔ t، عبارت است از $f(t) = ۸۰t - ۴۰۰ \, Ln(t + ۵)$، سرعت لحظه‌ای این اتومبیل یا آهنگ آنی تغییر مکان اتومبیل، وقتی $t = ۱$، چه قدر است؟

حل: $f'(t) = ۸۰ - ۴۰۰(\frac{۱}{t + ۵}) = ۸۰(۱ - \frac{۵}{t + ۵})$

$f'(۱) = ۸۰(۱ - \frac{۵}{۶}) = ۸۰ - \frac{۴۰۰}{۶} = \frac{۴۸۰ - ۴۰۰}{۶}$

$= \frac{۸۰}{۶} = ۱۳/۳ m/s$

نکته (۱): اگر $y = f(x)$ معادلهٔ یک تابع مشتق‌پذیر باشد، $f'(x)$ را آهنگ تغییر آنی f نسبت به متغیر مستقل x در نقطهٔ x می‌نامیم.

مثال: یک قطره نفت به شکل دایره، روی سطح آب در حال پخش شدن است. آهنگ تغییر سطح قطرهٔ نفت نسبت به شعاع، وقتی شعاع آن ۲ سانتیمتر است، چه قدر است؟

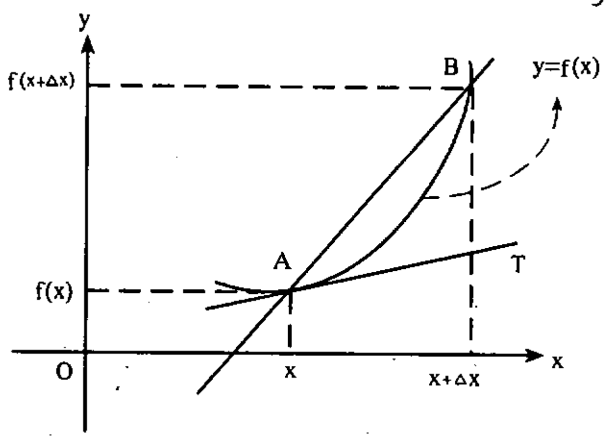
حل: سطح قطرهٔ نفت برابر سطح دایره است؛ یعنی $S(r) = \pi r^۲$ آهنگ تغییر سطح نسبت به شعاع

$S'(r) = ۲\pi r$

$S'(۲) = ۴\pi$

یعنی، سطح قطره وقتی شعاع آن برابر ۲ سانتیمتر است، به ازای هر واحد افزایش شعاع ۴π سانتیمتر مربع افزایش می‌یابد.

نکته (۲): مانند شکل تعبیر هندسی، آهنگ متوسط تغییر تابع f نسبت به x در بازهٔ $[x, x + \Delta x]$، عبارت است از شیب خط قاطعی که از نقاط $A(x, f(x))$ و $B(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ می‌گذرد و آهنگ آنی تغییر تابع f نسبت به x در نقطهٔ $A(x, f(x))$، عبارت است از شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ A.



نکته (۳): هر وقت از آهنگ تغییر صحبت می‌شود، منظور، آهنگ آنی تغییر است؛ مگر این که از آهنگ متوسط تغییر نام برده شود.

مثال: میزان افزایش مساحت یک مکعب به طول یال x را نسبت به x، وقتی بیابید که x مساوی ۲ سانتیمتر باشد.

حل: سطح مکعب برابر است با $S(x) = ۴x^۲$؛ پس:

$S'(x) = ۸x$

$S'(2) = 8 \times 2 = 16\ cm^2$

یعنی، وقتی یک سانتیمتر به طول ضلع مکعب افزوده می‌شود، به سطح آن $16\ cm^2$ افزوده می‌شود.

میزانهای مرتبط یا کمیّتهای وابسته (قاعدهٔ زنجیر)

اگر y متغیر وابسته به x، به وسیلهٔ تابع $y = f(x)$ باشد و x نیز خود متغیر وابسته به t (t معمولاً زمان است) باشد؛ یعنی $x = y(t)$، در این صورت، آهنگ تغییر f نسبت به t (y نسبت به t) از قاعدهٔ زنجیر (مشتق تابع مرکّب) استفاده می‌شود؛ یعنی:

$$y' = (fog)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t)$$

یا

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \times \frac{dx}{dt}$$

یا

$$y'_t = y'_x \times x'_t$$

این نوع میزان تغییر یا آهنگ تغییر را میزانهای مرتبط یا کمیّتهای وابسته گویند.

مثال: یک بالون کروی، در حال باد شدن است. اگر آهنگ افزایش شعاع آن $0/1\,m/s$ باشد، هنگامی که شعاع آن ۲ متر است، حجم آن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

حل: کافی است $\frac{dv}{dt}$ را حساب کنیم؛ ولی داریم:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt}$$

که

$$\frac{dr}{dt} = 0/1\ ,\ v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dr} = 4\pi r^2$$

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt}$$

$$= 4\pi \times 2^2 \times 0/1 = 16\pi \times 0/1 = 1/6\pi\ \frac{m^3}{s}$$

نکته مهم: برای حلّ مسائل آهنگ یا نرخ تغییرات روند زیر را انجام می‌دهیم.

الف) به تمام کمیّتهایی که داده شده‌اند یا باید تعیین شوند، علامت (**متغیری**) نسبت می‌دهیم و در صورت امکان، برای مسأله شکل رسم می‌کنیم تا کمیتها را شناسایی کنیم.

ب) معادله‌ای می‌نویسیم که ارتباط کمیّتها را تعیین کند.

ج) کمیتهای مستقل و وابسته را تعیین می‌کنیم.

د) از کمیتهای وابسته دو طرف معادله نسبت به کمیت مستقل، طبق قاعدهٔ زنجیر و یا ضمنی مشتق می‌گیریم.

هـ) همهٔ مقادیر متغیرهای داده شده را در معادلهٔ مشتق جایگذاری می‌کنیم و سپس نسبت به میزان تغییر (آهنگ تغییر) مطلوب حل می‌کنیم.

مثال: یک ظرف دارای ۴۰ لیتر آب است، در لحظهٔ $t = 0$، یک سوراخی در ظرف ایجاد می‌کنیم. اگر حجم آب باقیمانده در ظرف، پس از t ثانیه، از رابطهٔ $V = 40\left(1 - \frac{t}{100}\right)^2$ به دست آید.

الف) با چه آهنگی پس از گذشت ۱ دقیقه، آب از ظرف خارج می‌شود؟

ب) در چه زمانی، آهنگ آنی تغییر V برابر آهنگ متوسط تغییر آن از $t = 0$ تا $t = 100$ ثانیه است؟

حل: آهنگ خروج آب در لحظهٔ $t = 1$ دقیقه، برابر است با $V'(60)$

$$V'(t) = 80\left(-\frac{1}{100}\right)\left(1 - \frac{t}{100}\right) \qquad (t = 60\ \text{ثانیه})$$

$$V'(60) = 80\left(-\frac{1}{100}\right)\left(1 - \frac{60}{100}\right) = 80\left(\frac{-40}{100^2}\right)$$

$$V'(60) = \frac{-32 \times 100}{100^2} = -0/32$$

(علامت منفی، به دلیل خروج آب است.)

نکته: آهنگ تغییر چون مانند بردار سرعت است، می‌تواند منفی یا مثبت باشد؛ چون جهت دارد.

ب) شرط این که آهنگ آنی برابر آهنگ متوسط شود، باید:

$$V'(t) = \frac{V(100) - V(0)}{100}$$

$$\frac{-80}{100}\left(1 - \frac{t}{100}\right) = \frac{40\left(1 - \frac{100}{100}\right)^2 - 40(1-0)^2}{100}$$

$$-\frac{8}{10}\left(1 - \frac{t}{100}\right) = \frac{-40}{100} = -\frac{4}{10}$$

$$2\left(1 - \frac{t}{100}\right) = 1 \Rightarrow 1 - \frac{t}{100} = \frac{1}{2}$$

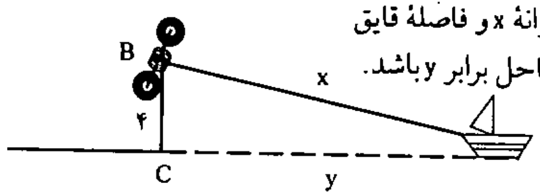
$$\frac{t}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow t = 50$$

پس در ثانیهٔ پنجاهم، آهنگ آنی و متوسط در بازهٔ $[0, 100]$ برابر می‌شود.

مثال: یک قایق چوبی به وسیلهٔ طنابی که با سرعت ۳ متر

بر دقیقه، به دور یک استوانه می‌پیچد به ساحل کشیده می‌شود. قایق با چه سرعتی (آهنگ نزدیک شدن قایق) در لحظه‌ای که ۲۵ متر تا ساحل فاصله دارد، به ساحل نزدیک می‌شود؛ در صورتی که استوانه در ارتفاع ۴ متری از سطح آب نصب شده باشد؟

حل: فرض می‌کنیم مانند شکل طول طناب، بین قایق و استوانهٔ x و فاصلهٔ قایق تا ساحل برابر y باشد.



کافی است $\frac{dy}{dt}$ را حساب کنیم.

طبق شکل و مثلث قائم الزاویه داریم: $x^2 - 4^2 = y^2$

طبق قاعدهٔ زنجیر داریم: $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$

$2x\frac{dx}{dt} = 2y\frac{dy}{dt}$

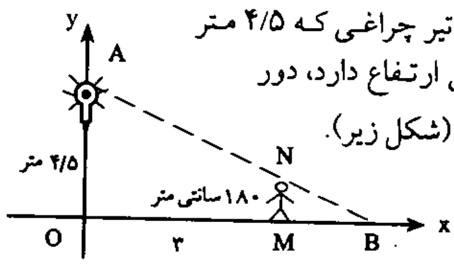
و $\frac{dx}{dt} = 3$ متر بر دقیقه که

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

$y = 25$ و $x = \sqrt{25^2 + 4^2}$ پس:

$\frac{dy}{dt} = 3 \times \frac{\sqrt{625 + 16}}{25} \simeq 3.03$ متر در دقیقه

مثال: مردی به قد ۱۸۰ سانتیمتر با سرعت ۱۵۰ سانتیمتر بر ثانیه، از تیر چراغی که ۴/۵ متر از زمین ارتفاع دارد، دور می‌شود (شکل زیر).



الف) نوک سایه‌اش با چه آهنگی از چراغ دور می‌شود؟

ب) آهنگ تغییر طول سایه‌اش، چه قدر است؟

حل: فرض کنیم $x = OB$ طول سایهٔ به علاوهٔ فاصلهٔ شخص از تیر چراغ باشد،

$MN = 180cm$ = طول شخص

$y = OM$ فاصلهٔ شخص تا چراغ

$OA = 450cm$ = طول پایهٔ چراغ

الف) کافی است $\frac{dx}{dt}$ را حساب کنیم. طبق نسبت تشابه در مثلثهای OAB و MNB داریم:

$$\frac{MN}{OA} = \frac{MB}{OB} \Rightarrow \frac{180}{450} = \frac{x-y}{x}$$

پس:

$$\frac{2}{5} = \frac{x-y}{x} \Rightarrow 5x - 5y = 2x$$

یا:

$$x = \frac{5}{3}y$$

چون $\frac{dy}{dt} = 150$، پس $\frac{dx}{dt} = \frac{5}{3}$ ، $\frac{dy}{dt} = \frac{5}{3} \times 150$؛

بنابراین $\frac{dx}{dt} = 250cm/s$

ب) طول سایهٔ MB را y در نظر می‌گیریم.

$$\frac{y}{x} = \frac{180}{450} \Rightarrow y = \frac{2}{5}x \quad \text{و} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

پس: آهنگ افزایش طول سایهٔ شخص

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{5} \times 150 = 60cm/s$$

تست: آهنگ آنی افزایش حجم یک کره، وقتی شعاع آن برابر ۱۰ سانتیمتر است، کدام است؟ در صورتی که شعاع آن با آهنگ ۰/۲ سانتیمتر در ثانیه افزایش یابد؟

۱) 400π ۲) 40π ۳) 80π ۴) 120π

جواب گزینهٔ ۳ است.

حل: $v(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$، $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt}$

$$= 4\pi \times 100 \times \frac{2}{10} = 80\pi \ cm^3/s$$

تست: یک نردبان به طول ۴/۵ متر، به دیواری تکیه دارد. اگر پای نردبان از پای دیوار با سرعت ۶۰ سانتیمتر در ثانیه دور شود، سر نردبان با چه آهنگی به پایین دیوار کشیده می‌شود، وقتی پای آن ۱/۵ متر از دیوار فاصله دارد؟

۱) $-15\sqrt{2}$ cm/s ۲) $15\sqrt{2}$ cm/s

۳) $\frac{15}{\sqrt{2}}$ cm/s ۴) $-\frac{15}{\sqrt{2}}$ cm/s

جواب گزینهٔ ۱ است.

حل: فاصلهٔ پای نردبان تا دیوار را x و فاصلهٔ سرنردبان تا پای دیوار را y می‌نامیم. طول نردبان برابر ۴/۵ متر است. کافی است $\frac{dy}{dt}$ را حساب کنیم؛ ولی داریم $x^2 + y^2 = (4.5)^2$، پس:

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y} \times 60$$

چون $x = 1.5$ متر و $\frac{dx}{dt} = 60$ ، پس:

$$y = \sqrt{(4.5)^2 - (1.5)^2} = 3\sqrt{2} \text{ متر}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-150}{300\sqrt{2}} \times 60 = \frac{-30}{\sqrt{2}} = -15\sqrt{2} \ cm/s$$

نکته: در مسائل اقتصادی، با سه تابع به نامهای: **تابع هزینه** C(x)، **تابع درآمد** R(x) **و تابع سود** P(x) سروکار داریم.

اگر **هزینهٔ متوسط، درآمد متوسط و سود متوسط**

خواسته شود، نسبتهای $\frac{C(x)}{x}$، $\frac{R(x)}{x}$ و $\frac{P(x)}{x}$ را حساب می‌کنیم، و اگر هزینه نهایی خواسته شود $C'(x)$ را محاسبه می‌کنیم. رابطهٔ بین سه تابع فوق به صورت زیر است:

$P(x)= R(x) - C(x)$

مثال: کارخانه‌ای برای تولید x ساعت مچی، $C(x)$ تومان هزینه می‌کند که $C(x) = ۲۰۰۰ + ۱۰x + \frac{x^۲}{۱۰۰}$

الف) برای تولید صفر ساعت، چه میزان باید هزینه کند؟ (هزینهٔ اولیّه)

ب) هزینهٔ نهایی چیست؟

ج) هزینهٔ نهایی وقتی $x = ۵۰$ چیست؟ هزینهٔ تولید ۵۱امین ساعت چیست؟

حل: الف) $C(۰)= ۲۰۰۰$

ب) $C'(x) = ۱۰ + \frac{x}{۵۰} \Rightarrow C'(۵۰) = ۱۰ + ۱ = ۱۱$

ج) $C(۵۱) - C(۵۰) =$

$۲۰۰۰ + ۱۰ (۵۱) + \frac{(۵۱)^۲}{۱۰۰} - ۲۰۰۰ - ۱۰(۵۰) - \frac{(۵۰)^۲}{۱۰۰}$

$=۱۰+\frac{۱}{۱۰۰} (۵۱ - ۵۰)(۵۱ + ۵۰) = ۱۰ + ۱/۰۱ = ۱۱/۰۱$

هزینهٔ واقعی ۵۱ امین ساعت.

تمرین

۱. نقطهٔ M روی مسیری به معادلهٔ $y = \sqrt{x^۲+۱}$ در حرکت است. هنگامی که M در نقطهٔ به طول ۷ قرار دارد، اگر x با آهنگ $۱۰\sqrt{۲}$ متر در ثانیه تغییر کند، y با چه آهنگی تغییر می‌کند؟ در چه نقطه‌ای آهنگ تغییر y دو برابر آهنگ تغییر x می‌شود؟

۲. سود هفتگی یک شرکت به وسیلهٔ تعداد تولید x رادیو، P تومان می‌باشد که از فرمول $P(x)= ۷۵x - ۰/۰۳x^۲-۱۵۰۰۰$ معین می‌شود. وقتی سطح تولید به ۱۰۰۰ رادیو در هفته می‌رسد، میزان تغییر سود را حساب کنید.

۳. یک بشکهٔ بنزین در حال خالی شدن است. اگر پس از t ثانیه، G گالن بنزین در بشکه موجود باشد و $G(t) = ۳(۱۵-t)^۲$. (G تعداد گالن بنزین موجود برحسب t است.)

الف) آهنگ متوسط تخلیهٔ بنزین در طول ۱۲ ثانیه چه قدر است؟

ب) آهنگ آنی تخلیهٔ بنزین، پس از ۱۲ ثانیه چه قدر است؟

۴. یک بالن کروی، پر از هواست. اگر هوای آن با آهنگ ۸ سانتیمتر مکعب در دقیقه نشت کند، وقتی شعاع آن ۱۵ سانتیمتر است، آهنگ کاهش شعاع آن چه قدر است؟

۵. یک ظرف قیفی با آهنگ ۳ سانتیمتر مکعب در ثانیه از آب پر می‌شود. ارتفاع این ظرف ۱۰ و شعاع قاعدهٔ آن ۵ سانتیمتر است. آهنگ بالا آمدن سطح آب وقتی این سطح ۴ سانتیمتر بالا آمده باشد، چه قدر است؟

۶. یک بشکهٔ استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ ۳۰۰ سانتیمتر با آهنگ ۸ متر مکعب در دقیقه از گندم پر می‌شود، سرعت افزایش عمق گندم چه قدر است؟

۷. اگر شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ میلیمتر در ثانیه افزایش یابد، آهنگ تغییر حجم کره، وقتی مساحت سطح آن برابر ۱۰ میلیمتر مربع است، چه قدر است؟

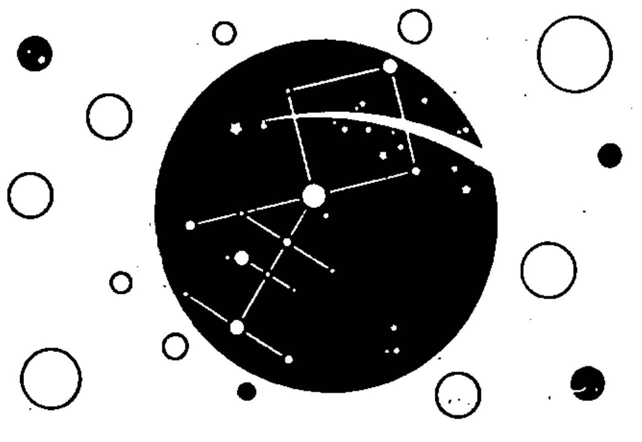
۸. شعاع دایره‌ای در حال بزرگ شدن را بیابید که آهنگ تغییر مساحتش دو برابر آهنگ تغییر شعاعش باشد.

۹. ذرّه‌ای در امتداد منحنی $y = ۲x^۳ - ۳x^۲ + ۴$ در حرکت است. در لحظه‌ای که $x=۲$ است، مؤلفهٔ x ذرّه با آهنگ $\frac{۱}{۲}$ واحد در ثانیه افزایش می‌یابد. آهنگ تغییر y در این لحظه، چه قدر است؟

۱۰. یک هواپیما که در ارتفاع ۴ کیلومتری زمین، به موازات زمین در پرواز است از روی ایستگاه رادار می‌گذرد. پس از لحظه‌ای، رادار نشان می‌دهد که هواپیما ۵ کیلومتر دور شده است و فاصلهٔ هواپیما تا ایستگاه، به میزان ۳۰۰کیلومتر در ساعت افزایش می‌یابد. سرعت حرکت افقی هواپیما در آن لحظه چه قدر است؟

۱۱. دختر بچه‌ای بادبادکی را در ارتفاع ۹۰ متری پرواز می‌دهد. باد آن را با سرعت ۷/۵ متر در ثانیه، به طور افقی از وی دور می‌کند. وقتی بادبادک در فاصلهٔ ۱۵۰ متری از او است، سرعت رها شدن نخ از دست وی، باید چه قدر باشد؟

۱۲. ذرّه‌ای روی مسیر $۵xy^۳ - ۸y^۲ = ۸$ حرکت می‌کند، اگر مؤلّفه x با سرعت ۶m/s افزایش یابد، هنگامی که ذرّه در نقطهٔ (۲, ۱) قرار دارد، مؤلّفه y با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



حل معادلهٔ همنهشتی[1] به توسط جدول

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

(برای دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی)

رشته ریاضی



در معادلهٔ همنهشتی:

$$ax \overset{n}{\equiv} c \qquad (1)$$

عدد n را سنج یا پیمانه یا هنگ (mod)، x را مجهول، a را ضریب مجهول و c را عدد ثابت همنهشتی می‌نامیم.

می‌دانیم با فرض $(a,n)=1$ و با توجه به معکوس ضربی a یعنی a^{-1} (وارون ضربی a در همنهشتی):

$$a^{-1}.a \overset{n}{\equiv} 1$$

معادلهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x \overset{n}{\equiv} a^{-1}.c \quad ;$$

$$x = kn + a^{-1}.c \qquad (k \in Z)$$

بنابراین برای حلّ معادلهٔ (۱)، کافی است معکوس a را محاسبه کنیم.

می‌دانیم، معکوس a (وارون ضربی a) از معادلهٔ همنهشتی زیر محاسبه می‌شود:

$$x_1 = a^{-1} \quad ; \quad ax_1 \overset{n}{\equiv} 1 \qquad (2)$$

در معادلهٔ (۲) اگر $a > n$ و r_1 باقیماندهٔ حاصل تقسیم $a : n$ باشد، می‌توان نوشت:

$$r_1 x_1 \overset{n}{\equiv} 1 \qquad (3)$$

معادلهٔ همنهشتی (۳) را می‌توان به صورت معادلهٔ سیّال زیر نوشت:

$$r_1 x_1 - nx_2 = 1 \quad ;$$

$$nx_2 - r_1 x_1 = -1 \quad ;$$

$$nx_2 \overset{r_1}{\equiv} -1 \qquad (4)$$

---

۱. Congruence (سازگاری، موافقت و تطبیق شیئی با شیء دیگر)

با توجه به $n > r_1$ و با فرض این که r_2 باقیماندهٔ حاصل تقسیم $n : r_1$ باشد، می‌توان نوشت:

$$r_2 x_2 \overset{r_1}{\equiv} -۱ \qquad (۵)$$

مطابق مرحلهٔ پیش معادلهٔ همنهشتی (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$r_1 x_3 \overset{r_2}{\equiv} ۱ \qquad (۶)$$

به همین ترتیب، اگر این عمل را ادامه دهیم، ضریب مجهول، برابر یک خواهد شد و با بازگشت به مرحله‌های پیش، به روش بازگشتی می‌توان x را حساب کرد. (توجه: تمام عملیات فوق را توسط یک جدول چهارسطری انجام می‌دهیم.) این جدول، دارای چهار سطر است که پس از چهار مرحله تکمیل می‌شود؛ به طور مثال، معادلهٔ همنهشتی $۱۹۹۹x \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۳۵۷$ را با استفاده از جدول حل می‌کنیم:

$\times n_i$	۱۳۷۸	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	۱	-	۱	
$\div a_i$	۶۲۱	۱۳۶	۷۷	۵۹	۱۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	(۵۳۷)	۲۴۲	۵۳	۳۰	۲۳	۷	۲	۱	۱	

توجه: هر ستون جدول، یک معادلهٔ همنهشتی را مشخص می‌کند.

دراین مثال چون $a = ۱۹۹۹ > n = ۱۳۷۸$، پس باید باقیماندهٔ تقسیم $a : n$ را حساب کرده و در دومین خانهٔ سطر اوّل (از سمت چپ) کنار n (پیمانه) بنویسیم.

پیش از تشریح جدول، این نکته را یادآور می‌شویم که برای حلّ هر معادلهٔ همنهشتی، ابتدا لازم است شرط $(a,n) = ۱$ را بررسی کنیم. در معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{n}{\equiv} c$، اگر $(a,n) = d$ در این صورت، معادله وقتی جواب دارد که c بر d بخش‌پذیر باشد ($d | c$).

بنابراین، برای بررسی شرط $(a,n) = ۱$، ابتدا همیشه تقسیمهای متوالی را به صورت زیر انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را به ترتیب، در سطر اول جدول می‌نویسیم. در صورتی که سطر اول جدول به عدد یک ختم شود، نشان دهندهٔ این است که شرط $(a,n) = ۱$ برقرار است، و در صورتی که به عدد صفر ختم شود و عدد پیش از صفر، عددی بزرگتر از یک باشد، آن عدد بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و n است.

مرحلهٔ (۱): تقسیمهای متوالی را به‌صورت زیر انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را در سطر اوّل جدول درج می‌کنیم.

۱۹۹۹ | ۱۳۷۸ ، ۱ ؛ ۱۳۷۸ ؛ (۶۲۱) و ۱۳۷۸ | ۶۲۱ ، ۲ ؛ ۱۲۴۲ ؛ (۱۳۶) و

۶۲۱ | ۱۳۶ ، ۴ ؛ ۵۴۴ ؛ (۷۷) و...و ۳ | ۲ ، ۱ ؛ ۲ ؛ (۱)

مرحلهٔ (۲): عدد ثابت همنهشتیها را که به طور متناوب ۱ و ۱- است، از سمت چپ به راست در سطر دوم جدول (سطر c_i) می‌نویسیم.

مرحلهٔ (۳): از اوّلین باقیماندهٔ (۶۲۱) تا آخرین باقیماندهٔ (۱) را باردیگر در سطر سوّم (سطر a_i) نظیر سطر اوّل n_i می‌نویسیم.

مرحلهٔ (۴): آخرین خانهٔ سطر چهارم در سمت راست جدول (سطر x_i) را همیشه برابر عدد ثابت (۱+ یا ۱-) آن ستون، واقع در سطر دوم در نظر می‌گیریم. این توضیح لازم است که در سطر اوّل با شرط $(a,n) = ۱$ عدد ۱ ظاهر می‌شود و در نتیجه، عمل تقسیم به پایان می‌رسد.

برای تکمیل سطر چهارم (سطر x_i) از سمت راست به شکل M متوالی (مطابق شکل و در جهت پیکانها) به این ترتیب عمل می‌کنیم (عمل مربوط به هر سطر، ابتدای هر سطر نوشته شده است):

$$\frac{(۱)۳-۱}{۲} = ۱ \text{ و } \frac{۱(۵)+۱}{۳} = ۲ \text{ و } \frac{۲(۱۸)-۱}{۵} = ۷ \text{ و } \frac{۷(۵۹)+۱}{۱۸} = ۲۳ \text{ و...و}$$

آخرین عدد از سمت راست در سطر چهارم (۵۳۷) را در عدد ثابت همنهشتی ضرب می‌کنیم:

$$۱۱۲۵ \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۷۲۸۷۰۹ = ۵۳۷(۱۳۵۷) \qquad ۵۳۷ = \frac{۲۴۲(۱۳۷۸)+۱}{۶۲۱}$$

به بیان دیگر، باقیماندهٔ حاصل از تقسیم عدد (۱۳۵۷)۵۳۷ یا ۷۲۸۷۰۹ بر ۱۳۷۸، جواب معادلهٔ همنهشتی است:

$x = ۱۱۲۵$ (جواب اصلی معادله)

بدیهی است که جواب عمومی معادله، به ازای مقادیر صحیح دلخواه k، چنین است:

$x = ۱۳۷۸k + ۱۱۲۵$ (جواب عمومی معادله)

مثال (۱): معادلهٔ همنهشتی زیر را حل کنید.

$$۲۶x \overset{۱۹}{\equiv} ۱۷$$

حل: چون $۱۹ = n > ۲۶ = a$ ابتدا باقیماندهٔ حاصل از تقسیم $۱۹ \div ۲۶$ را در سمت راست سنج (۱۹) می‌نویسیم. سپس تقسیم‌های متوالی را انجام می‌دهیم و باقیمانده‌های حاصل را در سطر اوّل جدول درج می‌کنیم:

$$(-۸) \times ۱۷ = -۱۳۶ \overset{۱۹}{\equiv} ۱$$

با توجه به همنهشتی بالا، جواب اصلی مثبت معادله چنین است:

$$x = ۸(۱۹) - ۱۳۶ = ۱۵۲ - ۱۳۶ = ۱۶$$

$$\boxed{x = ۱۶}$$

$\times n_i$	۱۹	۷	۵	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۷	۵	۲	۱	
x_i	(-۸)	-۳	-۲	-۱	

مثال (۲): وارون عدد ۱۹۹۹ به پیمانهٔ ۱۹۸۰ را بیابید.

حل: بیان ریاضی مسأله، معادلهٔ همنهشتی زیر است:

$$۱۹۹۹x \overset{۱۹۸۰}{\equiv} ۱$$

چون $۱۹۸۰ = n > ۱۹۹۹ = a$، باقیمانده تقسیم $۱۹۸۰ \div ۱۹۹۹$ را در سمت راست پیمانهٔ (۱۹۸۰) می‌نویسیم و سپس تقسیمهای متوالی را انجام می‌دهیم.

توجه: چون همیشه جواب مثبت معادله مورد نظر است، بنابراین، کافی است عدد سنج (۱۹۸۰) را به عدد (۵۲۱-) بیفزاییم تا جواب اصلی معادله به دست آید:

جواب: $x = ۱۹۸۰ - ۵۲۱ = ۱۴۵۹$

$\times n_i$	۱۹۸۰	۱۹	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۱۹	۴	۳	۱	
x_i	(-۵۲۱)	-۵	-۱	-۱	

پس معکوس ضربی عدد ۱۹۹۹ به پیمانهٔ ۱۹۸۰ عدد ۱۴۵۹ است.

مثال (۳): معادلهٔ همنهشتی زیر را از نظر وجود یا عدم جواب بررسی کنید.

$$۲۶۸۰x \overset{۳۹۵۳}{\equiv} ۱۷۶$$

حل: ابتدا با تقسیمهای متوالی و درج باقیمانده‌ها، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۳۹۵۳ و ۲۶۸۰ را به دست می‌آوریم.

$\times n_i$	۳۹۵۳	۲۶۸۰	۱۲۷۳	۱۳۴	(۶۷)	۰
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	

با توجه به جدول داریم: $(۲۶۸۰, ۳۹۵۳) = ۶۷$

چون عدد ثابت معادله (۱۷۶) بر ۶۷ بخش‌پذیر نیست، معادله دارای جواب نیست.

مثال (۴): معادلهٔ همنهشتی زیر را حل کنید.

$$۱۳۷۸x \overset{۷۷}{\equiv} ۷$$

حل: با تشکیل جدول معادله را حل می‌کنیم:

$$(۱۳۷۸ \overset{۷۷}{\equiv} ۶۹)$$

$\times n_i$	۷۷	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۶۹	۸	۵	۳	۲	۱	
x_i	(-۲۹)	-۲۶	-۳	-۲	-۱	-۱	

یکی از جوابهای معادله از بی‌شمار جواب، چنین است:

$$x_1 = (-۲۹)(۷) = -۲۰۳$$

چون جواب مثبت معادله در نظر است، بنابراین ضریب مثبتی از سنج را به این جواب می‌افزاییم:

$$x = ۳(۷۷) - ۲۰۳ = ۲۳۱ - ۲۰۳ = ۲۸ \quad ;$$

$$\boxed{x = ۲۸ \text{ (جواب اصلی)}}$$

مثال (۵): معکوس (وارون ضربی) عدد ۳۴ به پیمانهٔ ۴۱ را بیابید.

حل: این مسأله، معادل با همنهشتی زیر است:

$$۳۴x \overset{۴۱}{\equiv} ۱$$

با تشکیل جدول، معادله را حل می‌کنیم:

$\times n_i$	۴۱	۳۴	۷	۶	۱
$+c_i$	۱	-۱	۱	-۱	
$\div a_i$	۳۴	۷	۶	۱	
x_i	(-۶)	-۵	-۱	-۱	

با توجه به جدول، جواب $x_1 = -۶$ به دست می‌آید که

برای یافتن جواب مثبت، کافی است عدد سنج را به آن بیفزاییم.

$x = ۴۱ - ۶ = ۳۵ \quad ; \quad \boxed{x = ۳۵}$

بنابراین معکوس عدد ۳۴ به پیمانهٔ ۴۱، عدد ۳۵ است.

تمرین

معادله‌های همنهشتی زیر را حل کنید:

۱) $۴۴۱x \overset{۲۷۳}{\equiv} ۲۱$ (جواب: $x = ۵$)

۲) $۷۹x \overset{۹}{\equiv} ۱$

۳) $۱۳۷۸x \overset{۱۳۵۷}{\equiv} -۹$

۴) $۱۹۹۹x \overset{۲۹۹۹}{\equiv} ۲۰۰۰$

۵) $۱۹۹۹x \overset{۱۳۷۸}{\equiv} ۱۳۵۷$ (جواب: $x = ۱۱۲۵$)

۶) $۱۳۱۳x \overset{۱۰۲۷}{\equiv} -۲۶$ (جواب: $x = ۴۳$)

توجه: این جدول، کاربردهای بسیاری دارد که در این جا به طور اختصار، کاربرد جدول را در حلّ معادله‌های سیّال خطی تشریح می‌کنیم. از این جدول برای شناسایی اعداد اوّل و یافتن معادل عددهای توانی و... نیز می‌توان استفاده کرد.

حل معادله‌های سیّال خطی چند مجهولی به کمک جدول $(ax + by + cz + ... = d)$

معادلهٔ سیّال دو مجهولی را به صورت عمومی زیر در نظر می‌گیریم:

$(a,b) = ۱ \quad ; \quad ax + by = c \qquad (۱)$

معادلهٔ (۱) را به صورت معادلهٔ همنهشتی زیر می‌نویسیم:

$(x, y \in Z) \quad , \quad ax \overset{b}{\equiv} c \qquad (۲)$

اینک معادلهٔ (۲) را از طریق جدول حل کرده و از آن جا مقدار x را تعیین می‌کنیم. سپس از رابطهٔ $y = \frac{c - ax}{b}$، مقدار y را نیز به دست می‌آوریم.

مثال (۱): معادلهٔ سیّال زیر را حل کنید.

$۲۵x - ۱۷y = ۳ \qquad (۱)$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادلهٔ همنهشتی زیر می‌نویسیم:

$۲۵x \overset{۱۷}{\equiv} ۳ \qquad (۲)$

حال در این جا، معادلهٔ همنهشتی (۲) را به توسط جدول حل می‌کنیم:

$\times n_i$	۱۷	۸	۱
$+c_i$	۱	۱-	
$\div a_i$	۸	۱	
x_i	(۲-)	۱-	

$x_1 = ۳(-۲) = -۶$

$x = ۱۷ - ۶ = ۱۱$

$x = ۱۱ \quad ; \quad y = ۱۶$

توجه: با در دست داشتن یک جواب اختصاصی معادلهٔ (۱)، می‌توانیم جواب عمومی معادله را بنویسیم؛ زیرا اگر $\alpha , \beta \in Z$، یک جواب اختصاصی معادله باشد؛ در این صورت:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a\alpha + b\beta = c \end{cases} \quad ;$$

با فرض $(a,b) = ۱$، از تفاضل دو معادلهٔ دستگاه، خواهیم داشت:

$y = \beta - \frac{a}{b}(x - \alpha)$

برای این که $y \in Z$، لازم است که داشته باشیم:

$\frac{x - \alpha}{b} = t \in Z \quad ; \quad x = \alpha + bt$

بنابراین، با فرض $t \in Z$، جوابهای معادلهٔ (۱) از معادله‌های زیر به دست می‌آید:

$x = \alpha + bt \quad , \quad y = \beta - at \qquad (۳)$

بنابر معادله‌های (۳)، جواب عمومی معادلهٔ $۲۵x - ۱۷y = ۳$، چنین است:

$x = ۱۱ - ۱۷t \, , \, y = ۱۶ - ۲۵t \; (t \in Z)$

مثال (۲): معادلهٔ سیّال زیر را حل کنید.

$۱۳۴۰x - ۳۹۵۳y = ۴۶۹$

حل: ابتدا معادله را به صورت معادلهٔ همنهشتی زیر می‌نویسیم:

$۱۳۴۰x \overset{۳۹۵۳}{\equiv} ۴۶۹ \qquad (۱)$

حال باید حاصل (۳۹۵۳ , ۱۳۴۰) را به دست آوریم:

$\times n_i$	۳۹۵۳	۱۳۴۰	۱۲۷۳	۶۷	۰
$+c_i$	۱	۱-	۱	۱-	

چون سطر اول به صفر ختم شده است، نتیجه می‌شود که عددهای ۱۳۴۰ و ۳۹۵۳ دارای عامل مشترک ۶۷ می‌باشند:

$(۱۳۴۰ , ۳۹۵۳) = ۶۷$

از طرفی چون $۷ = ۶۷ \div ۴۶۹$ ؛ بنابراین، معادلهٔ (۱) را می‌توان به ۶۷ ساده کرد:

$$۲۰x \overset{۵۹}{\equiv} ۷ \qquad (۲)$$

در این جا، برای حلّ معادلهٔ (۲)، جدول را تشکیل می‌دهیم:

$\times n_i$	۵۹	۲۰	۱۹	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	
$\div a_i$	۲۰	۱۹	۱	
x_i	(۳)	۱	۱	

با توجه به جدول، می‌توان نوشت:

$$x = ۳ \times ۷ = ۲۱$$

با داشتن مقدار x، می‌توان مقدار y را محاسبه کرد:

$$y = \frac{۲۰x - ۷}{۵۹} = \frac{۲۰(۲۱) - ۷}{۵۹} = \frac{۴۱۳}{۵۹} = ۷$$

بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است:

$$x = ۲۱ - ۵۹t \quad ; \quad y = ۷ - ۲۰t$$

مثال: جوابهای صحیح و مثبت معادلهٔ سیّال زیر را به دست آورید.

$$۷x + ۱۱y + ۲۶z = ۱۳۰ \qquad (۱)$$

حل: بزرگترین ضریب مجهولها، ضریب z است؛ بنابراین، باید داشته باشیم:

$$۷ + ۱۱ + ۲۶z \leq ۱۳۰ \quad ; \quad z \leq ۴$$

پس، می‌توان نوشت:

$$z_۱ = ۱ \ : \ ۷x_۱ + ۱۱y_۱ = ۱۰۴ \ ; \ ۷x_۱ \overset{۱۱}{\equiv} ۱۰۴ \qquad (۲)$$

با تشکیل جدول خواهیم داشت:

$\times n_i$	۱۱۰	۷	۴	۳	۱
$+c_i$	۱	−۱	۱	−۱	
$\div a_i$	۷	۴	۳	۱	
x_i	(−۳)	−۲	−۱	−۱	

$$x_۱ = (-۳)(۱۰۴) = -۳۱۲$$

با توجه به همنهشتی زیر:

$$-۳۱۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۷$$

مقادیر $x_۱$ و $y_۱$ چنین است:

$$x_۱ = ۷ \quad , \quad y_۱ = ۵$$

به همین ترتیب:

$$Z_۲ = ۲ \ : \ ۷x_۲ + ۱۱y_۲ = ۷۸ \ ; \ ۷x_۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۷۸ \qquad (۳)$$

در این معادلهٔ همنهشتی، ضریب مجهول ($x_۲$) برابر ۷ و پیمانهٔ همنهشتی برابر ۱۱ مطابق با همنهشتی (۲) می‌باشد، بنابراین جواب معادلهٔ (۳) با توجه به جدول اخیر، چنین است:

$$x_۲ = (-۳)(۷۸) = -۲۳۴ \overset{۱۱}{\equiv} ۸ \quad , \quad y_۲ = ۲$$

معادلهٔ (۱) به ازای $Z_۳ = ۳$ و $Z_۴ = ۴$، جواب صحیح ندارد. پس، معادله دارای دو دسته جواب اختصاصی (۱، ۵، ۷) و (۲، ۲ ، ۸) می‌باشد، که می‌توان با استفاده از این جواب‌های اختصاصی، جواب‌های عمومی معادله را نیز به دست آورد.

تمرین

۱. با فرض $d = (۳۹۹,۵۸۹)$، عددهای صحیح r و s را چنان بیابید که معادلهٔ زیر برقرار باشد.

$$۳۹۹r + ۵۸۹s = d$$

۲. معادله‌های سیّال زیر را حل کنید.

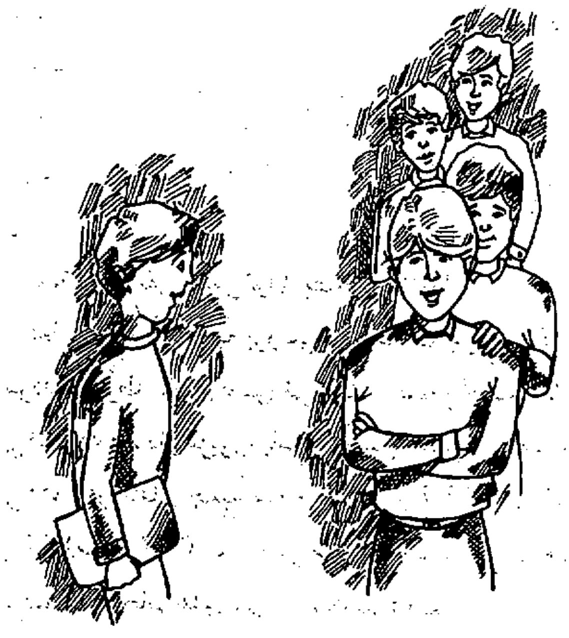
۱) $۷x + ۵y = ۱۹$

۲) $۱۰x + ۸۶y = ۵۰۰$

۳) $۴x + ۳y - ۵z = ۲$

۴) $x + ۲y + ۳z + ۴t = ۱۰$

۵) $x - y + z - t + u = ۱$



(قسمت دوم)

ریاضیات تفریحی

شیر، شتر و کاهو

ملانصرالدین و مسأله



یان استیوارت

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

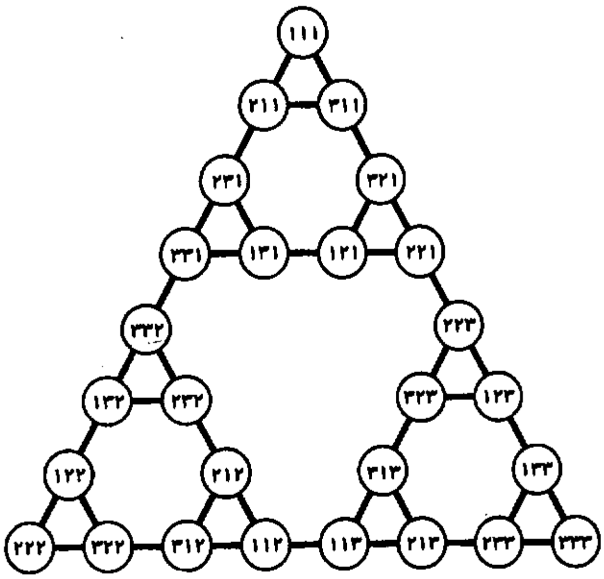
مسألهٔ ۳

تمام مکان‌ها، بجز سه مکان، دقیقاً سه حرکت قانونی به دست می‌دهند، در حالی که سه مکان دیگر، تنها دو حرکت قانونی به دست می‌دهند؛ چرا؟

تکلیف بعدی، به توجه و دقت، اما اندکی فکر، نیاز دارد. ۲۷ نقطه بر تکه کاغذی رسم و آنها را با ۲۷ مکان مشخص و خط‌هایی برای نمایش حرکت‌های قانونی رسم می‌کنیم. اوّلین هجومم به این مسأله، با توده‌ای از خطوط ماکارونی مانند متوقف شد. اما پس از اندکی تفکر، با تجدید آرایش رأس‌ها و یال‌ها، برای اجتناب از روی هم قرار گرفتن، به شکل ۴ انجامید.

شکلی که تقریباً نمی‌تواند تصادفی باشد!

اما پیش از آن که به بررسی این مطلب بپردازیم که چرا نمودار مربوطه دارای صورتی چنین منظم است، ملاحظه می‌کنیم که نمودار مزبور، پاسخ پرسش اصلی‌مان را به دست می‌دهد. در انتقال جمیع سه قرص از میلهٔ ۱ (مکان ۱۱۱) به میلهٔ ۲ (مکان ۲۲۲)، صرفاً در مسیر یال سمت چپ حرکت کرده، جا به جایی‌های زیر را انجام می‌دهیم:



شکل (۴) نمودار هانوی ۳ـقرصی، صورتی بسیار ظریف دارد. چرا؟

۲۲۲ → ۱۲۲ → ۱۳۲ → ۳۳۲ → ۳۳۱ → ۲۳۱ → ۲۱۱ → ۱۱۱

در واقع، با مراجعه به نمودار، آشکار می‌شود که می‌توانیم از هر مکان به مکان دیگر برویم. این نیز واضح است که سریع‌ترین مسیر کدام است.

مسألهٔ ۴

الف) *سریع‌ترین مسیر از ۲۱۱ به ۲۱۲ کدام است؟*

ب) *سریع‌ترین مسیر از ۲۱۱ به ۲۱۳ کدام است؟*

یک پرسش عمیق‌تر: توضیح ساختار قابل توجه شکل (۴) چیست؟

نمودار مورد بحث، شامل سه کپی از نمودار کوچکتری است که برای تشکیل یک مثلث با سه یال منفرد به هم وصل شده‌اند. اما هر نمودار کوچکتر، به نوبهٔ خود، دارای ساختار سه‌تایی مشابهی است. چرا تمام موارد در سه‌تایی‌ها ظاهر می‌شوند و چرا تکّه‌ها به این ترتیب، به هم وصل شده‌اند؟

در صورتی که نمودار هانوی ۲ـقرصی را رسم کنیم، متوجه می‌شویم که دقیقاً مشابه بخش سوّم و بالایی شکل (۴) است. حتی شماره‌های رئوس یکسانند؛ با این استثنا که ۱های پایانی، حذف شده‌اند.

در واقع، می‌توان این موضوع را به سادگی و **بدون** رسم مجدد نمودار ملاحظه کرد؛ چه می‌توان بازی هانوی ۲ـقرصی را با سه قرص نیز انجام داد. تنها کافی است که قرص سوّم را نادیده بگیریم. برای انجام دادن این کار، فرض می‌کنیم قرص ۳، بر میلهٔ ۱ قرار داشته باشد. در این صورت، بازی هانوی ۳ـقرصی را انجام می‌دهیم؛ اما توجه‌مان را تنها به دنباله‌های سه رقمی‌ای معطوف می‌کنیم که به ۱ ختم شده باشند؛ از قبیل ۱۳۱ یا ۲۲۱. این دنباله‌ها دقیقاً همان دنباله‌های بخش سوم و بالایی شکلند.

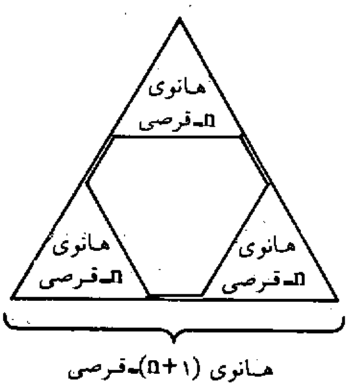
به همین ترتیب، هانوی ۳ـقرصی با قرص ۳ی ثابت، بر میلهٔ ۲ـهانوی ۲ـقرصی تغییر قیافه داده، نظیر بخش سوم چپ پایین شکل است و هانوی ۳ـقرصی با قرص ۳ی ثابت بر میلهٔ ۳، نظیر سوّمین بخش راست پایین آن می‌شود.

این مطلب توضیح می‌دهد که چرا سه کپی از نمودار هانوی ۲ـقرصی، در نمودار هانوی ۳ـقرصی مشاهده می‌شود.

اندکی تفکر بیشتر نشان می‌دهد که این سه زیر نمودار «Subgraph» خود، توسط سه یال منفرد در کلّ معمّا به هم وصل شده‌اند. برای وصل کردن زیر نمودارهای مزبور، باید قرص ۳ را **جابه‌جا** کنیم. اما چه وقت می‌توانیم این کار را انجام دهیم؟ تنها زمانی که یک میله خالی باشد، یکی شامل قرص ۳ و دیگری شامل تمام قرص‌های باقی‌مانده باشد! در این صورت است که می‌توانیم قرص ۳ را به میلهٔ خالی منتقل کرده، میله‌ای خالی (میله‌ای که قرص را از آن برداشته‌ایم) ایجاد کنیم و قرص‌های دیگر را دست نخورده باقی بگذاریم. شش مورد از چنین مکان‌هایی موجود است و حرکت‌های ممکن آنها را دو به دو به هم وصل می‌کند.

همین استدلال، دربارهٔ هر تعداد قرص به کار می‌رود. برای مثال، نمودار هانوی ۴ـقرصی، شامل سه کپی از نمودار ۳ـقرصی است که در گوشه‌ها مانند مثلثی به هم وصل شده‌اند. هر زیر نمودار، یک هانوی ۴ـقرصی را با قرص ۴ ثابت بر یکی از میله‌ها مشخص می‌کند؛ اما این بازی در واقع، همان هانوی ۳ـقرصی تغییر قیافه داده است و چنین است اوضاع بقیه (شکل ۵).

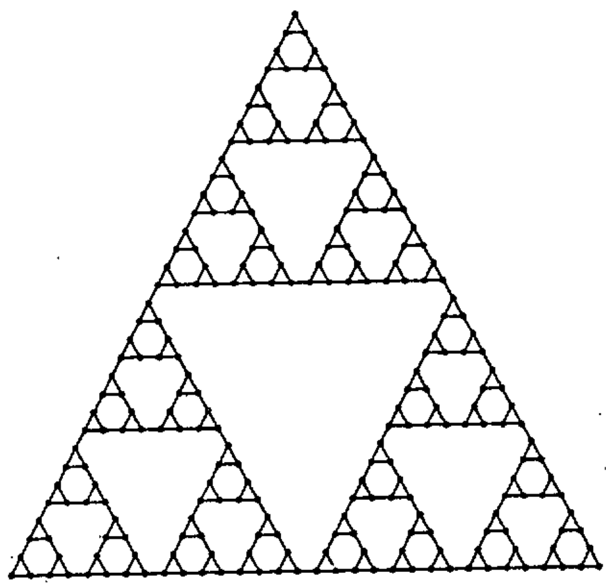
در این مورد، باید گفت که معمّای برج هانوی، دارای ساختاری برگشتی «recursive structure» است؛ به این ترتیب که، جواب هانوی (n+۱)ـقرصی با استفاده از پاسخ هانوی nـقرصی و طبق قاعده‌ای ثابت، معین می‌شود. ساختار برگشتی مزبور، توضیح می‌دهد که چرا نمودار هانوی (n+۱)ـقرصی را می‌توان از نمودار هانوی nـقرصی ساخت. تقارن مثلثی «Triangular Symmetry» مزبور، به این علت ایجاد می‌شود که قاعده‌های مربوطه در مورد میله‌های ۱، ۲ و ۳ دقیقاً به یک نحوه به کار می‌روند.



شکل (۵) ساختار برگشتی هانوی nـقرصی

در این صورت، می‌توان با استفاده از کاربرد مکرر این قاعده در مورد نمودار هانوی ۰ـقرصی ـ که نقطه‌ای منفرد

است ـ نمودار براهمای ۶۴ـقرصی یا هانویی با هر تعداد قرص دلخواه،استنتاج کرد. برای مثال، شکل (۶) نمودارهانوی ۵ـقرصی را نشان می‌دهد، که با استفاده از ساختار برگشتی مزبور رسم شده است. اندیشه به جای زورا رسم هانوی ۵ـقرصی با فهرست کردن تمام ۲۴۳ مکان ممکن و یافتن جمیع حرکت‌های بین آنها ساعت‌ها وقت می‌گیرد و احتمالاً چندین اشتباه نیز در مسیر رخ می‌دهد.



شکل (۶) نمودار هانوی ۵ـقرصی شبیه برخالی، معروف به واشرسرپینسکی است.

مسألهٔ ۵

در یک هانوی nـقرصی، کمترین تعداد حرکات لازم برای انتقال جمیع n قرص از یک میله به میلهٔ دیگر، چقدر است؟

مسألهٔ ۶

در یک هانوی nـقرصی، چند حرکت متمایز (یعنی، یال‌های نمودار مربوطه) موجود است؟

مسألهٔ ۷

رأس‌های شکل (۶) را برچسب نزده‌ایم. نگران نشوید؛ چون نمی‌خواهیم شما این کار را انجام دهید! اما مایلیم نشان دهید که این کار را می‌توان اصولاً انجام داد. برای برچسب زدن به هانوی (۱ + n)ـقرصی، قاعده‌ای با این فرض به دست آورید که چگونگی برچسب زدن به نمودار هانوی nـقرصی را می‌دانید.

ملاحظهٔ نهایی

همچنان که تعداد قرص‌ها بیشتر و بیشتر می‌شود، نمودار مربوطه، پیچیده‌تر و پیچیده‌تر شده، شباهت بیشتری به واشرسرپینسکی پیدا می‌کند.[1] شکل مزبور، یک برخال «fractal» است.

شیء هندسی، دارای ساختاری مفصل با تناسب کامل است. دستاورد فوق، دستاوردی جالب و شگفت‌آور است؛ زیرا معمّای مزبور، تقریباً یک قرن پیش از کشف برخال‌ها ابداع شده است. نتیجهٔ مزبور برهان دیگری است بر وحدت قابل توجه ریاضیات، و گذشته از این، دارای کاربرد شگفت‌انگیز زیر است.

داستان از این قرار است که اندکی پس از انتشار اوّلیه این فصل در شمارهٔ اوت ۱۹۸۹ Science Pourla، به کنگرهٔ بین‌المللی ریاضیات در **کیوتو** رفتم و در آن‌جا با ریاضیدانی آلمانی موسوم به **آندریاس هینتز** (Andreas Hinz) آشنا شدم. وی مشغول کار محاسبهٔ فاصلهٔ متوسط بین دو نقطهٔ واشرسرپینسک ی به ضلع واحد بود. یکی از متخصصانی که مورد پرسش قرار گرفته بود، گفت کاری «بس مشکل» است. دیگری جواب داد «بدیهی، و برابر $\frac{8}{15}$ است»؛ اما در تحلیل دقیق‌تر، اثبات مربوطه به دست نیامد.

خود هینتز، فرمولی برای تعداد متوسط حرکات بین، مکان‌های واقع در معمای برج هانوی به دست آورده بود.

در واقع هینتز و مستقل از او، **چان هات ـ تونگ** «Chan Hat – Tung»، فرمولی دقیق برای تعداد متوسط حرکات بین مکان‌های هانوی nـقرصی یافته بودند.

تعداد **کل** حرکات (با استفاده از کوتاه‌ترین مسیرها) بین جمیع جفت‌های ممکن مکان‌ها توسط فرمول حیرت‌آور زیر به دست می‌آید.

---

۱. ر.ک. Game , Set , and Math, chapler 9.

$$\frac{466}{885}18^n - \frac{1}{3}9^n - \frac{3}{5}3^n +$$
$$\left[\frac{12}{29}+\frac{18}{1003}\sqrt{17}\right]\left[\frac{1}{2}(5+\sqrt{17})\right]^n +$$
$$\left[\frac{12}{29}-\frac{18}{1003}\sqrt{17}\right]\left[\frac{1}{2}(5-\sqrt{17})\right]^n$$

فرمولی که آن را به عنوان مثالی از مواردی در نظر می‌گیرم که ریاضیدانان به آنها می‌رسند.

هینتز و چان، متوجه ارتباط این مطلب با واشر سرپینسکی نشدند. اوّلی، با مطالعهٔ مقالهٔ من، ملاحظه کرد که می‌تواند این محاسبه را در مورد برج هانوی به کار برد. در این مورد، به دلیل این که 3^n مکان موجود است، فاصله متوسط بین دو مکان، مجانب $\frac{466}{885}2^n$ است، مقداری که با چشم پوشی از جمیع جملات به استثنای اوّلین (و بزرگترین) جملهٔ فرمول و تقسیم بر 3^n به دست می‌آید.

این مطلب، بدان معناست که نسبت پاسخ دقیق و مقدار تقریبی مورد بحث، چون n بسیار بزرگ شود، به ۱ میل می‌کند. اکنون، طول ضلع نمودار، 2^n است و با تقسیم بر آن، برای برابر کردن ضلع مزبور با ۱، پاسخ $\frac{466}{885}$ را در حدّ بی‌نهایت قرص به دست می‌آوریم. اما نمودار مربوط به هانویِ با بی‌نهایت قرص، همان واشر مورد بحث است. بنابراین، فاصلهٔ متوسط بین دو نقطه در یک واشر سرپینسکی واحد، **دقیقاً** $\frac{466}{885}$ است.

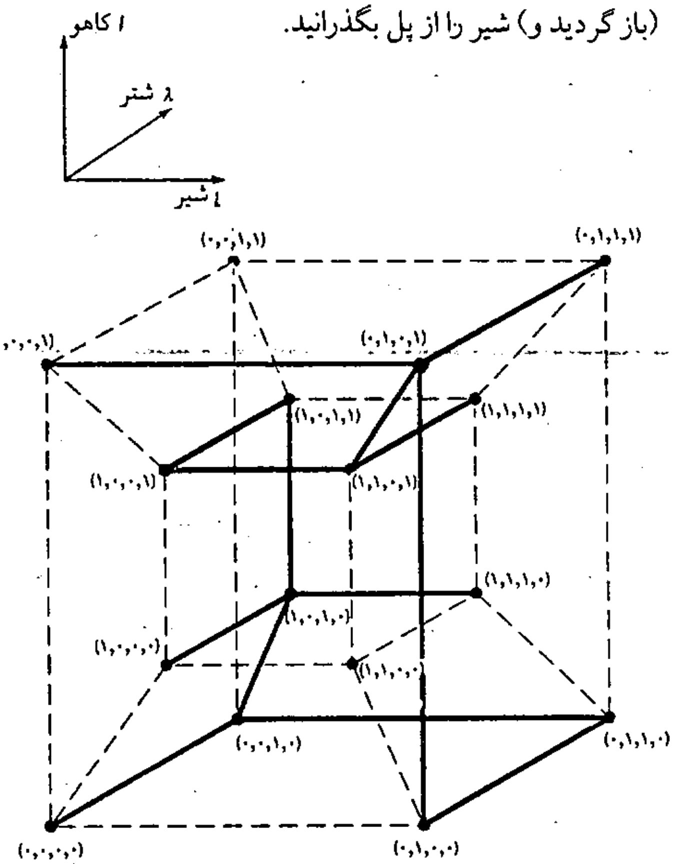
این مقدار ۲ درصدی، از مقدار پیشنهادی متخصص دوم کمتر است. در این صورت، چه کسی می‌گوید ریاضیدانان خلاق، بازده جدّی ندارند؟ از لحاظ آمار نیز هینتز ثابت کرد که واریانس فاصلهٔ مورد نظر، دقیقاً $\frac{904,808,312}{14,448,151,575}$ است. سفارش من به تمام افرادی که در ریاضیات به دنبال اعداد خارق‌العاده‌اند، این است که این دو عدد را نیز به کلکسیون خود اضافه کنیم.

پاسخ‌ها

۱. در این حال، نمودار مربوطه، یک ابر مکعب در فضای نهنگ ـ شیر ـ لاما ـ کاهو، با یال‌های گوناگون حذف شده، چون در شکل (۷) است. یکی از پاسخ‌های ممکن به صورت زیر است:

شتر را به آن طرف ببرید.

(بازگردید و) شیر را از پل بگذرانید.



شکل (۷) ابر مکعب مربوط به معمّای نهنگ ـ شیر ـ شتر ـ کاهو. یال‌های خط چین ممنوع و یال‌های پر مجازند.

شتر را بازگردانید.

کاهو را به آن طرف ببرید.

(بازگردید و) نهنگ را از پل بگذرانید.

شتر را به آن طرف ببرید.

راه حلّ شش حرکتی دیگری نیز موجود است، می‌توانید آن را بیابید.

۲. نمودار مربوطه، نسبتاً بزرگ است؛ با طوقه‌ها و بن‌بست‌های بسیار. برای رسم آن، به ورقه‌ای بزرگتر از این صفحه نیاز داریم و تازه برای به دست دادن پاسخ موجود نیز جا نمی‌شود. اما به هر حال، روشی سریع‌تر برای حل این معمّا وجود دارد؛ زیرا معمّای مورد بحث، صورتی تغییر شکل داده از معمّای شیر ـ شتر ـ کاهو است. در این مورد، تیره‌ترین بلوک، از آن شتر است.

۳. در حالت عمومی، هر میله قرص متفاوت شکل، واقع بر بالای خود دارد. در این صورت، **سه حرکت** ممکن موجود

است؛ قرص کوچکتر به یکی از دو قرص دیگر منتقل می‌شود یا قرص متوسط روی بزرگترین قرص قرار می‌گیرد. اگر یکی از میله‌ها خالی باشد، باز هم سه حرکت وجود دارد: یا یکی از دو قرص بالایی را بر میلهٔ خالی قرار می‌دهیم، یا قرص کوچکتر را بالای قرص بزرگتر قرار می‌دهیم. اما زمانی که دو میله خالی شدند (و تمام قرص‌ها را بر میله‌ای منفرد توده کردیم)، تنها دو حرکت می‌ماند: قرص بالایی را بر یکی از دو سوزن تهی قرار می‌دهیم.

.۴

۲۱۱→۲۳۱→۳۳۱→۳۳۲→۲۳۲→۲۱۲

۲۱۱→۳۱۱→۳۲۱→۲۲۱→۲۲۳→۳۲۳→۳۱۳→۲۱۳

۵. تعداد رأس‌های واقع در امتداد هر ضلع نمودار در هر مرحله، دو برابر می‌شود، بنابراین در مورد هانوی n-قرصی، برابر ۲^n است. مسأله تعداد **یال‌های** واقع در امتداد یک ضلع را می‌خواهد، که یک واحد کمتر از این مقدار، یعنی $۲^n - ۱$ است.

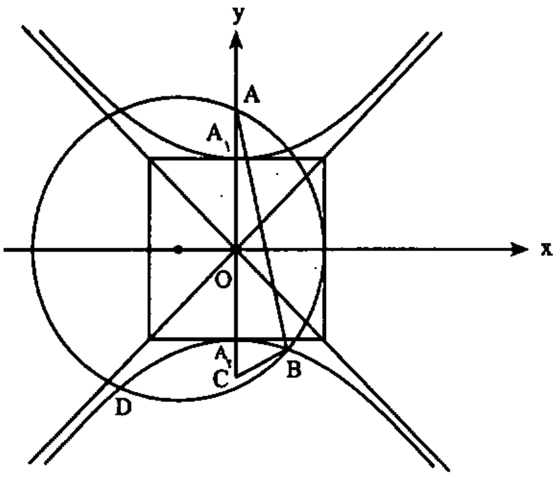
۶. فرض می‌کنیم در نمودار n-قرصی، E_n یال موجود باشد. ساختار برگشتی مربوطه، مستلزم این است که $E_n + ۱ = ۳E_n + ۳$؛ گذشته از این، $E_۱ = ۳$؛ بنابراین:

$$E_n = ۳ + ۳^۲ + ۳^۳ + ... + ۳^n = (۳^{n+۱} - ۳) / ۲$$

۷. زیر نمودار بالایی هانوی (n+۱)-قرصی را درست مانند مورد هانوی n-قرصی، اما با یک، ۱ اضافه در پایان آن برچسب بزنید. برای به دست آوردن زیر نمودار چپ پایین، زیر نمودار بالایی را به اندازهٔ °۱۲۰، در جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت بگردانید و ۱ را به ۲، ۲ را به ۳ و ۳ را به ۱ تبدیل کنید. برای به دست آوردن زیر نمودار راست پایین، °۱۲۰ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران داده، ۱ را به ۳، ۳ را به ۲ و ۲ را به ۱ تبدیل کنید.

پاسخ مسأله مسابقه ای برهان ۳۳

حل: از رابطه داده شده نتیجه می‌شود: $AD - DC = AB - BC$ یا $AD - DC = d - d' = k$؛ یعنی تفاضل فاصله‌های نقطه D از دو نقطه ثابت A و C برابر با مقدار ثابت $d - d' = k$ می‌باشد؛ لذا نقطه D متعلق به هذلولی است که A و C کانونها و $d - d' = k$ مقدار ثابت (تفاضل فاصله‌های هر نقطه هذلولی از دو کانون) آن می‌باشد. نقطه D محل تلاقی هذلولی با دایره است.



تعیین نقطه D: نقطه O وسط پاره‌خط AC مرکز هذلولی است:

$$۲c = AC \Rightarrow OA = OC = c$$

$A_۱$ و $A_۲$ رأسهای هذلولی می‌باشند:

$$OA_۱ = OA_۲ = \frac{d - d'}{۲} = \frac{۲a}{۲} = a$$

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ \Rightarrow b = \sqrt{c^۲ - a^۲} \qquad AD > CD$$

باید توجه داشت که چهار نقطه تقاطع وجود دارد، ولی با توجه به موقعیت نقطه D و $AD > CD$، نقطه D روی کمان طرف چپ وتر AC کاملاً مشخص می‌شود.

همراه با درسهای ریاضیات (۲)

حساب به عنوان نظام اصلی ریاضیات



● پرویز شهریاری

۱. خلاصه موضوع

حساب (یونانی «آرتیموس» به معنای عدد)، دانش عدد، ویژگیهای آن و انجام عمل روی آن است. حساب در هر گام زندگی مورد نیاز است و هرکسی از هر تخصصی نیازمند است تا از آن استفاده کند. نمی‌توان فرهنگ انسانی را بدون در نظر گرفتن حساب تصور کرد و به این دلیل است که هر انسانی، باید با دقت و علاقه حساب را یاد بگیرد.

حساب، کهن‌ترین شاخه در بین همهٔ شاخه‌های ریاضیات است و سرچشمه‌های آن به ژرفای تاریخ بازمی‌گردد. همهٔ ملتهای کهن و از آن جمله مصری‌ها، بابلی‌ها، ایرانی‌ها، هندی‌ها و یونانی‌ها به حساب توجه داشتند. این ملت‌ها برای شمردن، اندازه گرفتن و ساختمان خود، به حساب نیازمند بودند. از جمله، مصری‌ها برای ساختن هرم‌های مشهور خود، باید حساب می‌کردند چند قطعه سنگ لازم دارند و بلندی هر قطعه و سطح قاعدهٔ آن، چه قدر باید باشد.

۲. پیدایش عدد درست و دستگاه‌های عدد شماری

ریاضیات، همچون سایر دانش‌های کهن، از دورانی آغاز می‌شود که دربارهٔ آن، هیچ نوشته‌ای نداریم؛ زیرا در زمانی به وجود آمد که هنوز بشر برای ثبت خاطره‌های خود، نمادهایی در نظر نگرفته بود. ولی نتیجهٔ بررسی یادگارهایی که باقی‌مانده است، زبان آنها و همچنین روند تکاملی زبان، به ما این امکان را می‌دهد که حساب، و به طور کلی ریاضیات، تا چه اندازه کند پیش رفته است. در ضمن، روشن شده است که انسان با چه مشقتی و در طول هزاران سال توانسته است به مفهوم‌های اصلی حساب و ریاضیات پی ببرد. با چه رنجی و در طول چه زمانی توانسته است به تدریج و به کندی با اساسی‌ترین مفهوم ریاضیات، یعنی عدد آشنا شود.

عدد، مقیاس و واحدی است برای شمردن و اندازه‌گیری هر آنچه که در پیرامون ماست. شمردن و اندازه‌گیری، سرچشمهٔ پیدایش عدد است؛ بنابراین باید در رأس مفهوم‌های ریاضی بررسی شود.

امّا مطالعهٔ غیر مستقیم، نمی‌تواند پاسخ روشن و دقیقی به ما بدهد که عدد، چه زمانی و چگونه پدید آمد؛ زیرا ملت‌هایی که در مرحلهٔ بالایی از تمدن قرار داشتند، تنها زمانی به مطالعهٔ ملت‌های دیگر پرداختند که آنها از نظر فرهنگی در سطحی پایین‌تر بودند؛ یعنی وقتی که از آتش استفاده می‌کردند، ساختمانهای نخستین سنگی را برای زندگی ساخته بودند، تیر و کمان را به کار می‌بردند، ظرف چوبی و دیگر وسیله‌ها را ساخته بودند و از قایق‌های ابتدایی استفاده می‌کردند. با چه قوم‌هایی سروکار داشتند؛ چون هر کدام از آنها در سطحی از پیشرفت ریاضیات بودند. مطالعهٔ فرهنگ ملت‌هایی هم که در

درجهٔ پایینی از تمدن قرار دارند، می‌تواند ما را یاری کند تا پیشرفت ریاضیات را در سده‌ها و هزاره‌های گذشته بهتر درک کنیم.

با جمع‌بندی همهٔ اینها، می‌توانیم به اندازهٔ کافی، سندهایی دربارهٔ تکامل ریاضیات، یا بهتر بگوییم، مفهوم‌های نخستین ریاضیات در گذشتهٔ دور را به دست آوریم.

سخت‌ترین مرحله‌ای که بشر ضمن رسیدن به مفهوم عدد گذرانده است، جدا کردن واحد از «بسیار» بوده است، به احتمالی، این جریان در دورانی که هنوز بشر از اجداد خود جدا نشده بود، اتفاق افتاد. وقتی انگشت خود را به طرف چیزی نشانه می‌رفت، یکی را در برابر «مجموعه» می‌گذاشت. هنوز هم وقتی کودک تازه زبان بازکرده است و می‌گوید «دوتا»، منظورش «خیلی» است نه «دوتا» به مفهومی که ما می‌فهمیم.

برای نمونه، قبیلهٔ «بوتوکود» در برزیل (این قبیله در جریان هجوم اروپایی‌ها، به کلی نابود شد)، تنها عدد «یک» و «بسیار» را می‌شناختند. مفهوم عدد «دو» وقتی به وجود آمد که در هر دست، یک چیز را نگه داشته بودند. در این مرحله، عدد «دو» مترادف با «دو دست» بوده که در هر کدام از آنها، «یکی» را نگه داشته بودند. در این مرحله، هر وقت می‌خواست عدد «دو» را بیان کند، دو دست خود را بالا می‌آورد. برای بیان مفهوم «سه»، به دشواری بیشتری برخورد می‌کرد: انسان سه دست ندارد؛ این دشواری وقتی برطرف شد که سوّمین چیز را روی پای خود قرار داد. بنابراین، عدد «سه» مترادف بود با دو دست و یک پا. مفهوم «چهار» ساده‌تر به دست آمد: چهار به معنای این بود که در هر دست و روی هر پا، یک چیز را نگه می‌داشت. در این مرحله، نامی برای عددها نداشت و آنها را روی دستها و پاها می‌گذاشت یا با اشاره نشان می‌داد.

تکامل بعدی شمارش، به احتمال زیاد، مربوط به دورانی است که انسان با نوعی کار، مثل شکار و ماهیگیری، آشنا شد. انسان برای به دست آوردن اینها، ابزارهایی تهیه کرده بود. بجز این، وقتی به نقطه‌های سرد مهاجرت کرده بود، ناچار شد برای مصون بودن از سرما، لباس و پوست تهیه کند.

رفته رفته اجتماع اولیه بغرنج‌تر می‌شد، تنوّع غذاها بیشتر می‌شد و لباس و اسلحه رو به کمال می‌رفت. در این وضعیت، انسان ناچار بود به نحوی حساب اموال مشترک را نگه دارد، نیروی دشمن را که برای به دست آوردن سرزمین تازه، مجبور به جنگ یا دفاع بود، محاسبه کند. شمارش هم نمی‌توانست در «چهار» متوقف بماند و به ناچار پیشتر و پیشتر می‌رفت.

در ریاضیات، نخستین انتزاع به وجود آمد؛ به این ترتیب که چیزهای شمردنی را با چیزهای دیگری عوض کرد و بین آنها تناظر یک به یک برقرار کرد؛ سنگریزه‌ها، علامت‌ها، گره‌ها و غیره. هر سنگ یا هر گره، نمایندهٔ یک عنصر از چیز شمردنی بود. این گونه شمردن تا امروز هم، اثر خود را در بین ملت‌ها باقی گذاشته است. این وسیله، بعدها در شکل تکاملی خود، یعنی چرتکه ظاهر شد، که امروز هم می‌توان نمونه‌های آن را در بعضی جاها دید. (به ویژه در چین و ژاپن)

تکامل شمارش، وقتی سرعت گرفت که انسان متوجه شد می‌تواند چیزها را با نزدیک‌ترین وسیله به خودش، یعنی انگشتان دست مقایسه کند. در این جا، هر انگشت نقش واحد را به عهده داشت. شمردن با انگشتان، موجب شد که شمارش تا پنج بالا برود؛ زیرا در هر دست، فقط پنج انگشت وجود داشت. ابتدا انگشتان یک دست و سپس انگشتان هر دو دست و در آخر، انگشتان دست و پا مورد استفاده قرار گرفت (انسان در آغاز، کفش به پا نداشت و به این ترتیب بین انگشتان دست و پا تفاوتی نمی‌دید). هنوز هم کودکان ما، برای محاسبه، از انگشتان پا استفاده می‌کنند. بومیان امریکای جنوبی، با تناظر انگشتان دست با انگشتان پا، شمارش می‌کردند.

در این دوران، اقتصاد بسیار ابتدایی بود و از جمله، وقتی غذا یا لباسی که در جنگ به غنیمت گرفته بودند، به سادگی قابل تقسیم بود، به همین دلیل، نیازی به نامگذاری عددها نداشته و بیشتر با ایما و اشاره انجام می‌شد. برای مثال، ساکنان بومی جزیره‌های «آن دامان» (پراکنده در خلیج بنگال اقیانوس هند) که اکنون اجتماع آنها پراکنده شده است، برای بیان عددها، واژه نداشتند و ضمن شمردن با حرکت و اشاره، آن را روشن می‌کردند.

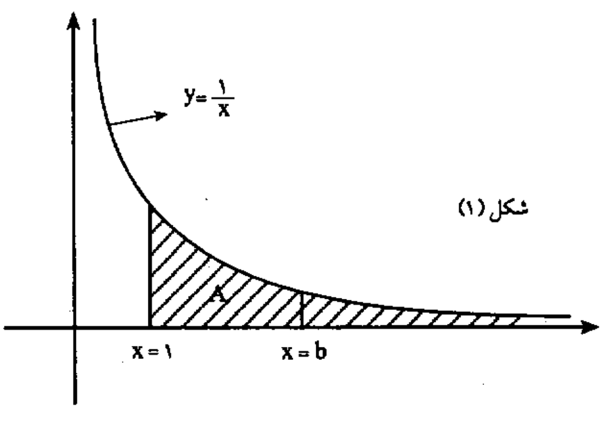
پارادکس شیپور گابریل[۱]

● احمد قندهاری

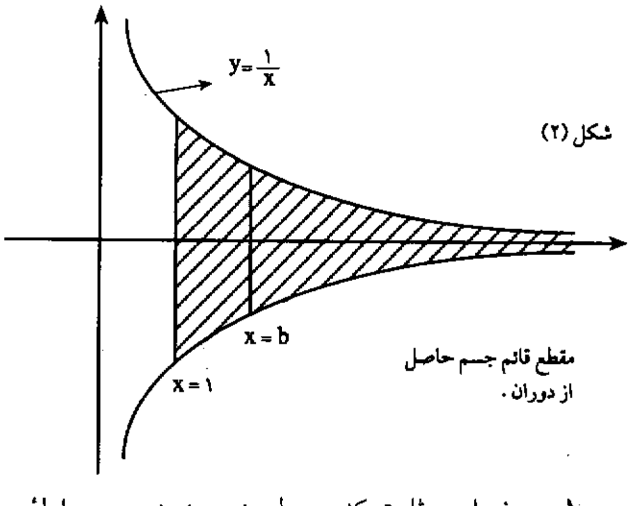


در این مقاله، این تناقض وجود دارد که: یک بار ثابت می‌شود، تمام رنگ‌های دنیا برای رنگ کردن یک سطح کافی نیست و از طرف دیگر، ثابت می‌شود با مختصر رنگی، می‌توان همان سطح را رنگ کرد. طرح مسأله به صورت زیر است.

تابع حقیقی با ضابطهٔ $x > 0$ ، $y = \frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم، نمودار تابع را در صفحهٔ محورهای مختصات رسم می‌کنیم.



شکل (۱)



شکل (۲)

۱. می‌خواهیم ثابت کنیم سطح زیر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{1}{x}$، $x \geq 1$ و محور xها را نمی‌توان با همهٔ رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

۲. جسم نامتناهی حاصل از دوران این سطح حول محور xها را با π واحد مکعب رنگ می‌توان رنگ کرد. (که در این صورت، سطح جانبی جسم حاصل، هم رنگ خواهد شد.)

---

۱. ریاضیدان ایتالیایی Gabriel

۳. سطح جانبی این جسم حاصل از دوران این سطح را نمی‌توان با همهٔ رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

حل(۱): در حقیقت سؤال این است که آیا سطح A در شکل (۱) متناهی است؟

اگر سطح متناهی باشد، می‌توان آن را رنگ کرد؛ چنانچه سطح نامتناهی باشد، با همهٔ رنگ‌های دنیا نمی‌توان آن را رنگ کرد. حال به محاسبهٔ اندازهٔ سطح A می‌پردازیم.

$$\text{اندازهٔ } A = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} Ln(x)\Big|_1^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty}(Ln\,b - Ln\,1) = \lim_{b\to+\infty}(Ln\,b) = +\infty$$

پس مقدار سطح A نامتناهی است و نمی‌توان آن را با همهٔ رنگ‌های دنیا رنگ کرد.

حل(۲): حال حجم جسم حاصل از دوران سطح نامتناهی A را حول محور xها محاسبه می‌کنیم:

$$\text{حجم جسم نامتناهی} = \lim_{b\to+\infty}\pi\int_1^b y^2 dx = \lim_{b\to+\infty}\pi\int_1^b \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\pi\left(-\frac{1}{x}\right)_1^b = \lim_{b\to+\infty}\pi\left(-\frac{1}{b}+1\right) = \pi \quad \text{واحد مکعب}$$

پس حجم جسم نامتناهی حاصل از دوران سطح نامتناهی A حول محور xها، برابر ۵ واحد مکعب است. پس می‌توان آن را با π واحد مکعب رنگ، پر از رنگ کرد. در این صورت، سطح جانبی جسم هم رنگی خواهد شد؛ در حالی‌که نصف مقطع عرضی آن را که همان سطح نامتناهی A باشد، نمی‌توان رنگ کرد. [حل (۱)]

در ریاضی، این جسم به شیپور گابریل معروف است.

حل (۳): سطح جانبی جسم نامتناهی را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{اندازهٔ سطح جانبی} = S = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b 2\pi y\, dS\,,$$

$$dS = \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$S = \lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$= \lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_1^b \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x}dx$$

$$S = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}dx$$

محاسبهٔ این انتگرال مشکل است، ولی توجه داشته باشیم که:

$$\frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x} \quad \text{پس:}$$

$$S > \lim_{b\to+\infty} 2\pi\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}(2\pi Ln\,b) = +\infty$$

پس سطح جانبی جسم، نامتناهی است و همهٔ رنگ‌های دنیا برای رنگ کردن آن کافی نیست؛ در حالی‌که در حلّ (۲) نتیجه گرفتیم که سطح جانبی به همراه حجم جسم با π واحد مکعب رنگ، رنگی خواهد شد.

پیچ تقر اندیشه

بزرگترین عدد درستی که باید، به ازای جمیع مقادیر عدد درست n، حاصل $n^5 - 5n^3 + 4n$ باشد، چیست؟

جواب: ۱۲۰

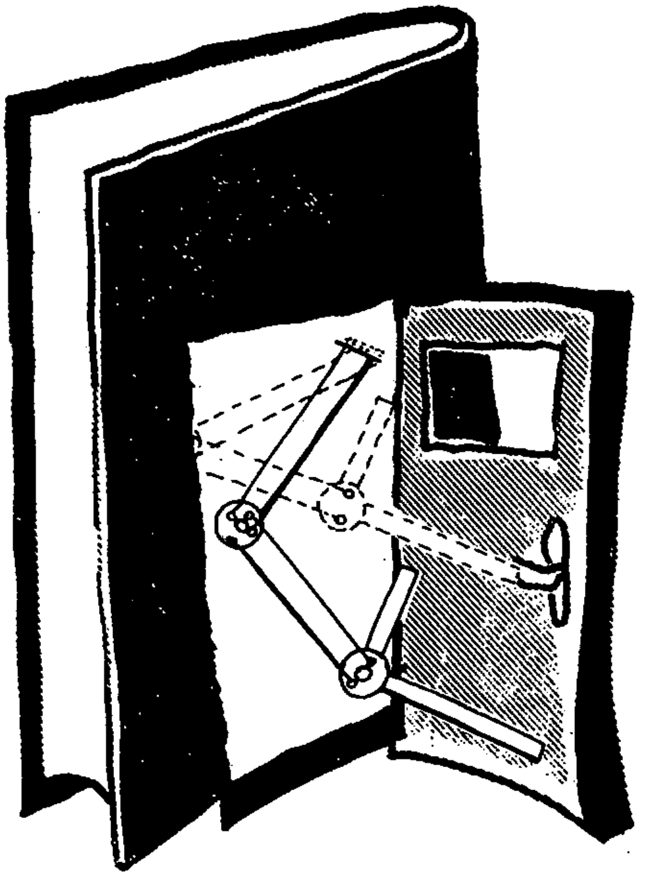
حل:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4)$$
$$= n(n^2-1)(n^2-4)$$
$$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$$

ملاحظه می‌کنیم که $(n^5 - 5n^3 + 4n)$ برابر حاصلضرب پنج عدد صحیح متوالی است؛ بنابراین بر ۵ بخش‌پذیر است. گذشته از این، حاصلضرب مزبور باید شامل یک جفت عدد صحیح زوج متوالی باشد، و یکی از این اعداد صحیح بر ۴ بخش‌پذیر است. حاصلضرب مورد بحث باید دست کم شامل مضربی از ۳ نیز باشد. بنابراین: $(n^5 - 5n^3 - 4n)$

همواره مضربی از ۱۲۰ = ۳ × ۲ × ۴ × ۵ است.

بخشی از یک کتاب



آشنایی بیشتر با کتاب هندسه دلپذیر

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی)

کتاب «هندسه دلپذیر» اثر دکتر احمدشرف‌الدین در دو سال و چند ماه پیش از سوی انتشارات مدرسه به چاپ رسید و مورد استقبال فراوان استادان، دبیران، دانشجویان و دانش‌آموزان قرار گرفت. سازمان آموزش فنی و حرفه‌ای نیز از این کتاب استقبال کرد و برای کتابخانه‌های مراکز آموزش فنی و حرفه‌ای نسخه‌های متعددی از این کتاب تهیه کرد (بخش دوم این کتاب که اساس هندسی دستگاه‌های صنعتی را شرح می‌دهد مورد توجه آن سازمان است).

آقای دکتر شرف‌الدین طی سالها، تحقیقات متعددی در هندسه عرضه کرده‌اند و به‌علاوه تاکنون به طرح چند دستگاه صنعتی نایل آمده‌اند. از جملهٔ آنها طرح یک ماشین‌حساب آنالوژیک است که در مجله A.I.C.A ارگان انجمن بین‌المللی ماشینهای حساب آنالوژیک به چاپ رسیده است. توفیق آقای دکتر شرف‌الدین در ارائه تحقیقات متعدد در هندسه و طرح چند دستگاه صنعتی موجب شد که تصمیم بگیرند که اساس هندسی دستگاه‌های صنعتی را بررسی کنند و چند سال به بررسی اساس هندسی دستگاه‌های صنعتی پرداختند و سرانجام نتیجه بررسی‌های خود را در کتاب «هندسه دلپذیر» عرضه کردند.

در بخش دوم کتاب هندسهٔ دلپذیر، مؤلف اساس هندسی بیش از چهل دستگاه صنعتی را شرح کرده‌اند (در حدود ۱۷۰ صفحه). تعداد کمی از این دستگاه‌ها در بعضی کتابها یاد شده است آن هم با توضیح بسیار اندک. آقای دکتر شرف‌الدین دربارهٔ اساس هندسی این دستگاه‌ها توضیح کافی داده‌اند. عدهٔ زیادی از این دستگاه‌های صنعتی به وسیله آقای دکتر شرف‌الدین تحلیل شده است؛ مثلاً برهانی که برای ساختمان درهای کشویی عرضه شده است اقتباس از هیچ منبعی نیست. برای تحلیل هندسی ساختمان چند نوع بالابر، بسیاری از آنها را از نزدیک مشاهده کرده و با افرادی که آنها را به‌کار می‌برند، گفت‌وگو کرده‌اند و از کارخانه سازنده شکل‌های مربوط را تقاضا کرده و سپس به تحلیل هندسی این دستگاه‌ها پرداخته‌اند.

در بخش اول کتاب هندسهٔ دلپذیر که «هندسهٔ دلها» نامیده شده است، چنین آمده است «نقوش هندسی کاشیکاریهای اماکن متبرکه و قالیهای نفیس، هندسه‌ای است که با زبان هنر بیان شده است و چون هنر زبان همگانی جهان است، می‌توان این هندسه را با احساس در افق گسترده‌ای عرضه کرد. کودک، جوان و پیر ازهر قوم و متکلم به هر زبان، کر و لال، در یک نگاه چند ثانیه‌ای، مجذوب و مسحور نقوش هندسی کاشیکاری‌های اماکن متبرکه و قالیهای نفیس ایرانی می‌شوند؛ چرا که این آثار هندسه دلهاست» و سپس اضافه کرده‌اند که در سال دو هزار میلادی که به عنوان سال جهانی ریاضی معرفی شده، لازم است هنگام معرفی آثار ریاضیدانهای ایرانی نظیر خوارزمی، ابوریحان، خیام، غیاث‌الدین جمشید کاشانی و ...، آثار استادان نقش آفرین ایرانی در زمینه کاشیکاریها و قالیها نیز معرفی شود.

در بخش سوم کتاب، مثالهایی برای طرح و حل مسائل جبر و آنالیز با هندسه ارائه شده است.

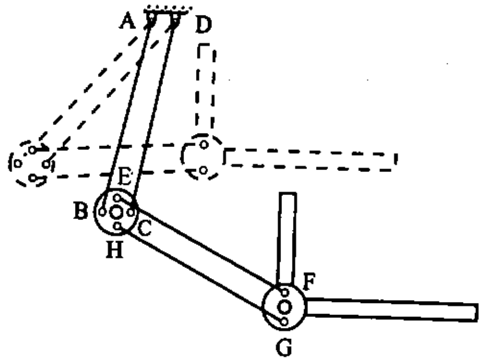
در بخش چهارم، چند حکم هندسه که از آن نتایج فلسفی مهم و جالب حاصل می‌شود، مطرح شده است.

در سطور زیر دو نمونه از دستگاه‌های صنعتی را که در کتاب هندسهٔ دلپذیر اساس هندسی آنها شرح داده شده است، یاد می‌کنیم. مثال اول، اساس هندسی دستگاه است که روی میز نقشه کشی نصب می‌کنند و به کمک آن خطهای موازی رسم می‌کنید. مثال دوم، اساس هندسی دستگاهی است که حرکت چرخشی را به حرکت راستخط تبدیل می‌کند.

اساس هندسی میز نقشه کشی

در شکل زیر یک مکانیزم را که موجب حرکت موازی می‌شود و در میزهای نقشه‌کشی به کار گرفته می‌شود، شرح می‌دهیم. در این شکل A و D دو پایه ثابت‌اند. دو میله AB و CD دارای طول‌های مساوی‌اند و در A و D به پایه‌ها لولا شده‌اند. همین دو میله در B و C به پولک (رینگ) BC لولا شده‌اند. فاصله دو لولای A و D مساوی با فاصله دو لولای B و C اختیار شده است. چون در چهارضلعی ABCD اضلاع روبه‌رو دو به دو مساوی‌اند، پس این چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است (بنا بر قضیه ۲ از فصل ۳).

اگر رینگ BC را حرکت دهیم، امتداد خط BC همواره ثابت می‌ماند؛ زیرا خط BC با خط AD موازی است و خط AD دارای وضع ثابت است.



روی رینگ BC دو نقطه E و H به طور قرینه در دو طرف مرکز رینگ انتخاب شده‌اند، به طوری که خط EH بر خط BC عمود است، روی پولک FG دو نقطه F و G به طور قرینه نسبت به مرکز رینگ در اختیار است، به طوری که پاره‌خط FG برابر با طول پاره‌خط EH باشد. دو میله EF و GH با طول‌های مساوی اختیار شده‌اند. این دو میله در نقاط E، F، G و H به دو رینگ لولا شده‌اند. شکل EFGH متوازی‌الاضلاع است؛ زیرا اضلاع روبه‌روی آن، ذوبه دو مساوی‌اند. دو خط‌کش طوری به رینگ FG وصل شده‌اند که یکی از آنها در امتداد خط FG و دیگری عمود بر خط FG است.

اگر رینگ FG را روی صفحه میز حرکت دهیم، امتداد خط FG همواره ثابت می‌ماند. برای اثبات می‌گوییم خط FG موازی با خط EH است و خط EH عمود بر خط AD است، پس خط FG عمود بر خط AD است. چون خط AD دارای وضعیت ثابت است، پس امتداد خط متحرک FG با حرکت رینگ FG ثابت می‌ماند.

بنابراین با حرکت رینگ FG امتدادهای دو خط کش متصل به رینگ ثابت می‌ماند و منظور از طرح مکانیزم مشروح در بالا همان ثابت نگاه داشتن امتدادهای دو خط کش است.

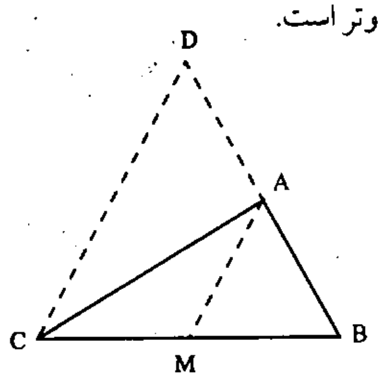
اتصال دو متوازی‌الاضلاع لولایی با رینگ BC امکان می‌دهد که رینگ FG در بخش وسیعی از صفحه حرکت کند و لذا دستگاه امکان پوشش گسترده‌ای را به خط‌کش می‌دهد.

مکانیزمی برای تبدیل حرکت چرخشی به حرکت راستخط

در مطالبی که خواهد آمد ابتدا یک خاصیت مثلث قائم‌الزاویه را شرح می‌دهیم و سپس کاربرد آن را در صنعت یاد می‌کنیم. در پایان، مسأله جالبی را که ابوالوفاء بوزجانی طرح کرده است که با شکل مکانیزم یاد شده بسیار نزدیک است، شرح می‌دهیم.

۱. خاصیتی از مثلث قائم‌الزاویه

الف) قضیه: در مثلث قائم‌الزاویه طول میانه وارد بر وتر نصف طول وتر است.



برهان: مثلث قائم الزاویه ABC را که در زاویهٔ A قائمه است در نظر می‌گیریم. میانه AM را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$(1)\quad \overline{AM} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$$

ضلع BA را در جهت B به A به اندازه خود ادامه می‌دهیم تا نقطه D به دست آید، یعنی $\overline{AD} = \overline{AB}$. دو مثلث قائم‌الزاویه BAC و DAC مساوی‌اند (ض.ز.ض)، پس:

$$(2)\quad \overline{CD} = \overline{CB}$$

پاره‌خط AM وسط ضلع DB از مثلث DBC را به وسط ضلع BC از آن مثلث وصل می‌کند. پس طول پاره‌خط AM نصف طول ضلع سوم، یعنی ضلع CD است:

$$(3)\quad \overline{AM} = \frac{1}{2}\,\overline{CD}$$

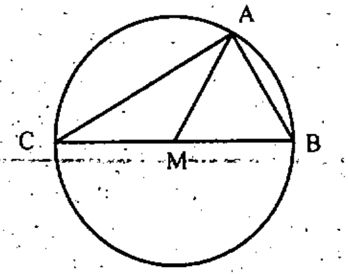
از دو رابطه (۲) و (۳) رابطه (۱) نتیجه می‌شود.

ب) قضیه: اگر در مثلثی طول میانه وارد بر یک ضلع، نصف طول آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

برهان: مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که طول میانه AM برابر نصف طول ضلع BC است:

$$\overline{AM} = \frac{1}{2}\,\overline{BC}$$

دایره‌ای به مرکز M و شعاع MA رسم می‌کنیم. این دایره بر دو نقطه B و C می‌گذرد (زیرا بنابه فرض $\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC}$).

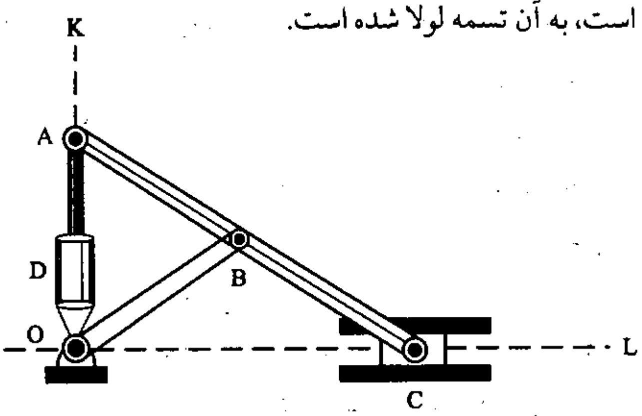


در دایره مذکور BC قطر است و زاویه BAC زاویه محاطی مقابل به این قطر است، پس زاویه BAC قائمه است.

۲. کاربرد صنعتی قضیه بالا

در سطور زیر کاربرد صنعتی قضیه دوم را شرح می‌دهیم.

دستگاهی که در شکل زیر نموده شده است یک حرکت چرخشی را به یک حرکت راستخط تبدیل می‌کند. در این شکل نقطه O نمایش یک پایه ثابت است و تسمه OB در نقطه O به این پایه لولا شده است. طول تسمه OB نصف طول تسمه AC است. تسمه OB در نقطه B که وسط تسمه AC است، به آن تسمه لولا شده است.



هنگامی که تسمه OB را دور لولای ثابت O بچرخانیم کشوی C روی خط راست OL حرکت می‌کند و نقطه A انتهای تسمه BA که انتهای دسته پیستون سیلندر روغنی D است، خط راست OK را که از نقطه O بر خط راست OL عمود است، می‌پیماید. نقش سیلندر روغنی آن است که حرکت نقطه A به طور آهسته و ملایم انجام گیرد.

بحث در وجود و تعداد جوابهای معادله سیاله تحت فضای محدود

● محمدحسین پورسعید ـ گروه ریاضی دانشگاه لرستان

می‌دانیم که معادله سیاله خطی $ax + by = n$ در Z دارای جواب است اگر و فقط اگر $d = (a,b), d|n$ (که در آن «.|.» نماد عاد کردن و d بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است) ولی در صورت اعمال محدودیت روی فضای در برگیرنده x و y و حتی در صورت وجود شرط فوق ممکن است معادله تحت فضای محدود دارای جواب نباشد و در حقیقت شرط فوق، شرطی لازم و نه کافی جهت وجود جواب خواهد بود. به عنوان مثال، معادله $3x + 4y = 2$ را در نظر می‌گیریم؛ چون $(3,4) = 1$ و $1|2$ معادله در Z جواب دارد. با این وجود جوابی صحیح و نامنفی برای این معادله موجود نیست.

نظر به این که در معادله $ax + by = n$ شرط $d = (a,b), d|n$ لازمه وجود جواب در فضای محدود است، می‌توان با تقسیم دو طرف معادله بر عدد d معادله‌ای جدید در نظر گرفت به طوری که ضرایب x و y نسبت به هم اول باشند، بنابراین در معادله $ax + by = n$ با فرض این که a و b متباین و

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \in Z \ ، \quad a_1 \le x \le a_2 \ ، \quad a_3 \le y \le a_4$$

در وجود و تعداد جوابهای معادله تحت محدودیت فوق بحث می‌کنیم.

بدون این که خللی به کلیت مسأله وارد آید، فرض می‌کنیم که a عددی مثبت است (در صورت منفی بودن a به‌طور معادل می‌توان معادله $-ax - by = -n$ را در نظر گرفت). به واسطه تباین a و b بدیهی است که معادله در Z جواب دارد. اگر (x_0, y_0) را یکی از جوابها بدانیم، سایر جوابها را در Z می‌توان بر اساس معادلات زیر تعیین نمود. (ر.ک.[۱]).

$$x = x_0 + kb \quad , \quad y = y_0 - ka \ ، \quad k \in Z$$

بنابراین شرط وجود جواب تحت فضای محدود مفروض این است که بتوان مقداری برای $k \in Z$ پیدا کرد به‌طوری‌که:

$$a_1 \le x_0 + kb \le a_2 \quad , \quad a_3 \le y_0 - ka \le a_4$$

برای b دو حالت در نظر گرفته و مطلب را پی می‌گیریم.

الف) اگر $b > 0$ و تعریف کنیم:

$$M_1 = \mathrm{Max}\left\{\frac{a_1 - x_0}{b}, \frac{y_0 - a_4}{a}\right\} \quad ,$$

$$M_2 = \mathrm{Min}\left\{\frac{a_2 - x_0}{b}, \frac{y_0 - a_3}{a}\right\}$$

شرط وجود جواب این است که بازه $[M_1, M_2]$ شامل عددی صحیح یا به‌طور معادل $[M_2] + [-M_1]$ عددی نامنفی باشد که در این صورت تعداد جوابها برابر با $[M_2] + [-M_1] + 1$ خواهد بود.

ب) اگر $b>۰$ و تعریف کنیم:

$$M_۳=\text{Max}\left\{\frac{a_۲-x_۰}{b}\ ,\ \frac{y_۰-a_۴}{a}\right\}\quad ,$$

$$M_۴=\text{Min}\left\{\frac{a_۱-x_۰}{b}, \frac{y_۰-a_۳}{a}\right\}$$

شرط وجود جواب این است که بازه $[M_۳,M_۴]$ شامل عددی صحیح یا به طور معادل حاصل $[M_۴]+[-M_۳]$ عددی نامنفی باشد که در این صورت تعداد جوابها برابر است با $[M_۴]+[-M_۳]+۱$. به عنوان مثال، معادله $۱۵x+۲۴y=۶۹$ را در فضای محدود $-۷۳\le x\le ۱۸۹$ و $۱۵\le y\le ۳۸۱$ درنظر می‌گیریم. چون $(۱۵,۲۴)=۳ , ۳|۶۹$ معادله در Z جواب دارد؛ بنابراین به طور معادل، معادله $۵x+۸y=۲۳$ را در نظر گرفته که یکی از جواب‌ها به صورت $(x_۰,y_۰)=(۳,۱)$ است.

حال با توجه به مثبت بودن b مقادیر $M_۱$ و $M_۲$ را می‌یابیم:

$$M_۱=\text{Max}\left\{\frac{-۷۳-۳}{۸}\ ,\ \frac{۱-۳۸۱}{۵}\right\}=-\frac{۱۹}{۲}\quad ,$$

$$M_۲=\text{Min}\left\{\frac{۱۸۹-۳}{۸}, \frac{۱-۱۵}{۵}\right\}=-\frac{۱۴}{۵}$$

$$[M_۲]+[-M_۱]=\left[\frac{-۱۴}{۵}\right]+\left[\frac{۱۹}{۲}\right]=-۳+۹=۶$$

بنابراین تحت محدودیت مفروض نیز معادله دارای $۶+۱=۷$ جواب است.

با بهره‌گیری از کتاب «حل مسأله از طریق مسأله» (ر.ک.[۲]) و مطالب فوق، جهت تعیین تعداد جوابهای صحیح نامنفی نامعادله $ax+by\le n$ با شرط $a|n\ ,\ b|n$ می‌توان روشی مناسب ارائه نمود.

به عنوان مثال، در تعیین تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادله سیاله $۷x+۱۱y+z=۷۷۰$ یا به طور معادل تعداد جوابهای صحیح نامنفی نامعادله $۷x+۱۱y\le ۷۷۰$ می‌توان تعداد نقاط مشبکه زیر خط $y=\frac{۷۷۰-۷x}{۱۱}$ و نقاط واقع بر آن را در فاصله $x=۰$ تا $x=۱۱۰$ در نظرگرفت. بدیهی است که تعداد نقاط واقع بر خط $y=\frac{۷۷۰-۷x}{۱۱}$ در فاصله مورد نظر، برابر با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله سیاله $۷x+۱۱y=۷۷۰$ می‌باشد. با استفاده از مطالب مطرح شده، می‌توان نشان داد که این تعداد برابر با ۱۱ مورد است.

از طرفی تعداد نقاط مشبکه واقع بر خط، زیر و بالای خط در فاصله $۰\le x\le ۱۱۰$ و $۰\le y\le ۷۰$ برابر است با $(۱۱۰+۱)(۷۰+۱)=۷۸۸۱$. بنابراین اگر M را تعداد جوابهای نامعادله $۷x+۱۱y\le ۷۷۰$ بدانیم، خواهیم داشت:

$$M=\frac{۷۸۸۱}{۲}+\frac{۱۱}{۲}=۳۹۴۶$$

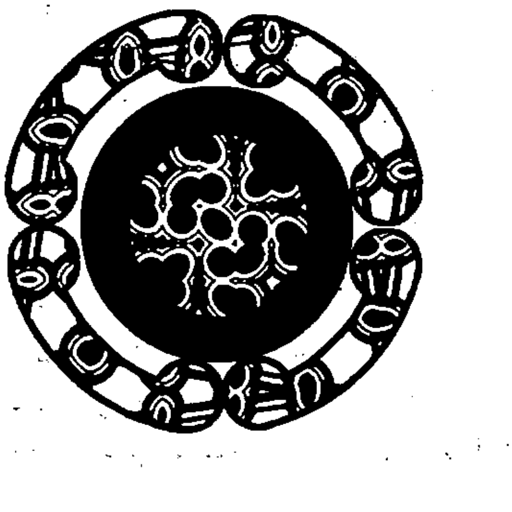
مراجع

[۱]. ریاضیات گسسته دوره پیش دانشگاهی، چاپ پنجم، ۱۳۷۸، صفحات ۵۴ و ۵۵.

[۲]. کتاب «حل مسأله از طریق مسأله» تألیف: لورن سی. لارسن ترجمه علی ساوجی. چاپ اول، ۱۳۷۷، صفحات ۱۰ و ۱۱.

مسأله مسابقه ای برهان ۳۵

ثابت کنید مجموعه عددهای طبیعی به فرم $۳-۲^n$ $(n\in N)$ که هر دو عضو آن نسبت به هم اول هستند، یک مجموعهٔ نامتناهی است، یعنی بی‌شمار عدد طبیعی به فرم $۳-۲^n$ یافت می‌شوند که همگی دو به دو نسبت به هم اول باشند.



ترکیبات ۲

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی)



رابطه‌ها و گراف‌های جهتدار و ماتریسها

میر شهرام صدر

در این مقاله، خواص رابطه‌ها را به کمک گراف‌های جهتدار و ماتریس متناظر با یک رابطه بررسی خواهیم کرد. برای این منظور، ابتدا گراف جهتدار را معرفی می‌کنیم.

گراف جهتدار

فرض کنیم V یک مجموعهٔ ناتهی و متناهی باشد و مجموعهٔ E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $V \times V$ ؛ یعنی $E \subseteq V \times V$ ؛ در این صورت، گراف G متناظر با V و E یک گراف جهتدار نامیده می‌شود و آن را با نماد $G = (V , E)$ نمایش می‌دهیم. در این گراف، V مجموعهٔ رأس‌ها و E مجموعهٔ یال‌هاست.

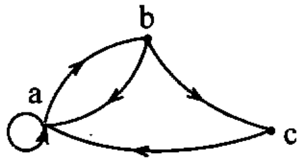
چون در حالت کلی (a , b) با (b , a) برابر نیست؛ بنابراین جهتدار بودن گراف، از تعریف زوج مرتّب به دست می‌آید و داریم:

$((a,b) \in E) \Leftrightarrow$ (یک یال جهتدار بین a و b در جهت a به b وجود دارد.)

تذکر: اگر در گراف جهتدار $G = (V , E)$ داشته باشیم، $(a , a) \in E$، آنگاه یال جهتداری از a به خودش وصل می‌کنیم و به آن **طوقه** می‌گوییم.

مثال: اگر $V = \{a , b , c\}$ و $E = \{(a , a) , (a , b) , (b , c) , (c , a) , (b , a)\}$، آنگاه گراف $G = (V , E)$ را رسم کنید.

حل: چون مجموعهٔ V سه عضو دارد، پس گراف دارای ۳ رأس است که ابتدا رأس‌ها را رسم می‌کنیم، سپس یال‌های جهتدار را با توجه به زوج‌های مرتّب مجموعهٔ E رسم می‌کنیم.



مرتبه و اندازهٔ گراف جهتدار

در گراف جهتدار $G = (V , E)$، تعداد اعضای مجموعهٔ V، یعنی تعداد رأس‌ها را مرتبهٔ G و تعداد اعضای مجموعهٔ E، یعنی تعداد یال‌ها را اندازهٔ G می‌نامیم.

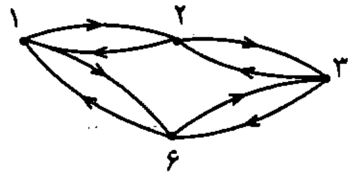
فرض کنیم R یک رابطهٔ m عضوی، روی مجموعهٔ n عضوی $A = \{a_1 , a_2 , ... , a_n\}$ باشد، $(m \le n^2)$ متناظر با این رابطه، می‌توان یک گراف جهتدار رسم کرد؛ به طوری که این گراف از مرتبهٔ n یعنی دارای n رأس a_1 ، a_2 ، ... ، a_n و اندازهٔ m است، یعنی اگر a_iRa_j $(1 \le i , j \le n$ و $i \ne j)$ آنگاه یال جهتداری از a_i به a_j رسم می‌کنیم. هرگاه a_iRa_i آنگاه یک طوقه در رأس a_i رسم می‌کنیم.

مثال: فرض کنیم $A = \{1 , 2 , 3 , 6\}$، رابطهٔ R را روی A به صورت $\{(x , y) \mid (x + y)$ فرد باشد$\} = A$ تعریف می‌کنیم، گراف جهتدار R را رسم کنید.

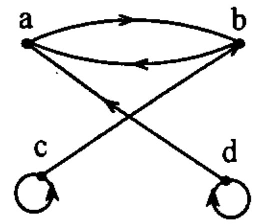
حل: ابتدا رابطهٔ R را روی A می‌نویسیم، سپس متناظر با آن یک گراف رسم می‌کنیم:

R = {(۱,۲),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۶),(۶,۱),(۶,۳)}

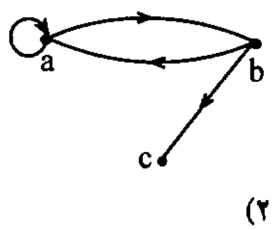
برای این منظور ابتدا چهار رأس در نظر می‌گیریم و اگر aRb آن‌گاه یال جهتداری از a به b رسم می‌کنیم:



مثال: متناظر با گراف‌های جهتدار زیر، رابطه‌ها را بنویسید.



۱)

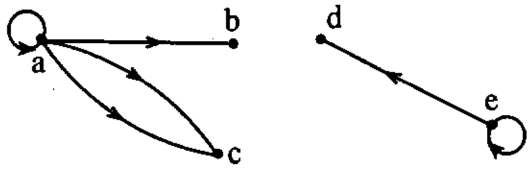


۲)

$R_1 = \{(a , b) , (b , a) , (d , a) , (c , b) , (c , c) , (d , d)\}$

$R_2 = \{(a , a) , (a , b) , (b , a) , (b , c)\}$

مثال: گراف جهتدار متناظر با رابطهٔ R روی مجموعهٔ A = {a,b,c,d,e} به صورت زیر است، رابطهٔ R را بنویسید.



حل: چون در رأس‌های a و e طوقه داریم، پس (a , a) ∈ R و (e , e) ∈ R و از a به b یال داریم؛ پس (a , b) ∈ R، از a به c و از c به a یال داریم؛ پس (a , c) ∈ R و (c , a) ∈ R، از e به d یال داریم؛ پس (e , d) ∈ R؛ بنابراین داریم:

$R = \{(a , a), (e , e) , (a , b) , (a , c) , (c , a) , (e , d)\}$

تشخیص خواص رابطه‌ها به‌کمک گراف جهتدار

فرض کنیم A یک مجموعه و R رابطه‌ای روی A باشد. چنانچه گراف جهتدار متناظر با رابطهٔ R را رسم کنیم، خواهیم داشت:

۱. رابطهٔ R **انعکاسی** یا **بازتابی** است؛ هرگاه تمام رأس‌های گراف متناظر با R دارای طوقه باشند.

۲. رابطهٔ R **تقارنی** است؛ هرگاه برای a , b ∈ A، اگر از a به b یالی داشته باشیم، آن‌گاه باید از b به a نیز یال وجود داشته باشد.

۳. رابطهٔ R **تعدی** است؛ هرگاه برای a , b , c ∈ A، اگر از a به b و از b به c یال‌هایی وجود داشته باشد، آن گاه از a به c نیز یال موجود باشد.

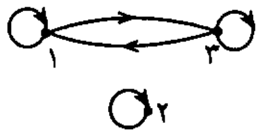
۴. رابطهٔ R **پادتقارنی** است، هرگاه برای a , b ∈ A که a ≠ b، اگر از a به b یال وجود داشته باشد، آن‌گاه از b به a یال موجود نباشد.

مثال: کدام یک از رابطه‌های زیر روی A = {۱,۲,۳}، خاصیت پادتقارنی دارد؟

۱. $R_1 = \{(۱ , ۱) , (۲ , ۲) , (۳ , ۳) , (۱ , ۳) , (۳ , ۱)\}$

۲. $R_2 = \{(۱ , ۱) , (۱ , ۲) , (۳ , ۳) , (۳ , ۲) , (۳ , ۱)\}$

حل: ۱. گراف متناظر با رابطهٔ R_1 به صورت زیر است:



با توجه به گراف، ملاحظه می‌کنیم که از ۱ به ۳ یال داریم و از ۳ به ۱ نیز یال داریم؛ پس R_1 پادتقارنی نیست.

۲. گراف متناظر با رابطهٔ R_2 به صورت زیر است:



باتوجه به گراف، ملاحظه می‌کنیم که R_2 پادتقارنی است.

مثال: رابطهٔ R روی مجموعهٔ A = {-۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲} به صورت xRy ⇔ |x| = |y| تعریف شده است:

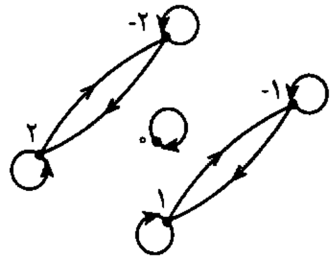
الف ـ گراف جهتدار متناظر با R را رسم کنید.

ب ـ آیا R رابطهٔ هم‌ارزی است؟

حل: الف ـ ابتدا رابطهٔ R را با زوج‌های مرتّب مشخص می‌کنیم:

R = {(-۲ , -۲) , (-۲ , ۲) , (۲ , -۲) , (۲ , ۲) , (-۱ , -۱) , (-۱ , ۱) , (۱ , -۱) , (۱ , ۱) , (۰ , ۰)}

سپس متناظر با رابطهٔ بالا، گراف جهتدار رسم می‌کنیم:



ب ـ هر رأس دارای طوقه است؛ پس R بازتابی است. چون از ۲ به ۲-، از ۲- به ۲، از ۱ به ۱- و از ۱- به ۱ یال داریم، بنابراین R تقارنی است. R تعدی است؛ زیرا:

۲R۲ و ۲R−۲ ⟵ −۲R−۲ و −۲R۲

۱R۱ و ۱R−۱ ⟵ −۱R−۱ و −۱R۱

در نتیجه، R رابطهٔ هم ارزی است.

رابطه‌ها و ماتریس‌ها

فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ n عضوی $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ باشد، متناظر با این رابطه، ماتریس مربعی $M = [m_{ij}]_{n\times n}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که اگر $(a_i,a_j)\in R$ آنگاه درایه ij ام ماتریس M، یعنی m_{ij} برابر ۱ است و اگر $(a_i , a_j) \notin R$ آنگاه $m_{ij} = ۰$؛ بنابراین درایه‌های ماتریس متناظر با رابطه به صورت زیر است:

$$m_{ij} = \begin{cases} ۱ & a_iRa_j \\ ۰ & a_i \not R a_j \end{cases}$$

مثال: رابطهٔ $R = \{(c , b) , (a , c) , (a , a) , (c , c)\}$ را روی $A = \{a,b,c\}$ در نظر بگیرید، ماتریس متناظر با این رابطه را بنویسید.

حل: چون مجموعهٔ A سه عضوی است، پس ماتریس M از مرتبهٔ ۳ است؛ بنابراین داریم:

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

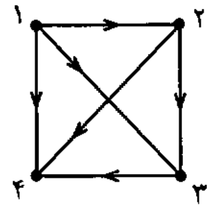
چون aRa پس درایه‌ای که در محلّ برخورد سطر a و ستون a قرار دارد، برابر ۱ است، به همین ترتیب، درایه‌هایی که در محلّ برخورد سطر a و ستون c، سطر c و ستون b، سطر c و ستون c قرار دارند، برابر ۱ هستند و بقیهٔ درایه‌های ماتریس، برابر صفرند.

مثال: رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ به صورت $R = \{(x , y) \mid x , y \in A , x < y\}$ است؛ گراف جهتدار و ماتریس متناظر با این رابطه را مشخص کنید.

حل: الف ـ ابتدا رابطهٔ R را با زوج‌های مرتّب مشخص می‌کنیم:

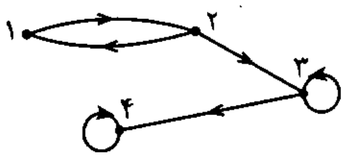
$$R = \{(۱ , ۲) , (۱ , ۳) , (۱ , ۴) , (۲ , ۳) , (۲ , ۴) , (۳ , ۴)\}$$

سپس متناظر با رابطهٔ بالا، گراف جهتدار و ماتریس را مشخص می‌کنیم:



$$M = \begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال: فرض کنید $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ و R رابطه‌ای است که گراف جهتدار آن در شکل زیر رسم شده است؛ ماتریس متناظر با این رابطه کدام است؟



حل: چون ۱R۲ پس $m_{۱۲} = ۱$، ۲R۱ پس $m_{۲۱} = ۱$، ۲R۳ پس $m_{۲۳} = ۱$، ۳R۳ پس $m_{۳۳} = ۱$، ۳R۴ پس $m_{۳۴} = ۱$، ۴R۴ پس $m_{۴۴} = ۱$ و بقیهٔ درایه‌ها صفرند؛ بنابراین داریم:

$$M = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال: فرض کنیم $A = \{۱ , x , ۴\}$ یک مجموعه سه عضوی و $x \in \mathbb{N}$ و رابطهٔ R را روی A به صورت $xRy \Leftrightarrow x|y$ تعریف می‌کنیم، هرگاه ماتریس متناظر با این رابطه به صورت

$$M = \begin{array}{c} \\ ۱ \\ x \\ ۴ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ۱ & x & ۴ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

باشد، مقدار x را محاسبه کنید.

حل: با توجه به سطر دوّم ماتریس M داریم: $x|۴$، چون A سه عضوی است، پس $x \neq ۱ , ۴$ و $x \in \mathbb{N}$، در نتیجه $x = ۲$.

تشخیص خواصّ رابطه‌ها به کمک ماتریس‌های متناظر با رابطه‌ها

فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی و R رابطه‌ای روی A باشد. چنانچه ماتریس متناظر با رابطهٔ R برابر $M = [m_{ij}]_{n\times m}$ باشد $(۱ \le i , j \le n)$، خواهیم داشت:

۱. رابطهٔ R **انعکاسی** یا **بازتابی** است؛ هرگاه همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس، برابر ۱ باشند.

۲. رابطهٔ R **تقارنی** است؛ هرگاه ماتریس متناظر با آن متقارن باشد، در این صورت خواهیم داشت:

$$m_{ij} = 1 \Leftrightarrow m_{ji} = 1 \quad , \quad m_{ij} = 0 \Leftrightarrow m_{ji} = 0$$

یا به طور کلی برای هر $1 \leq i , j \leq n$ داشته باشیم: $m_{ij} = m_{ji}$

۳. رابطهٔ R **تعدّی** است؛ هرگاه در ماتریس متناظر با آن داشته باشیم:

$$m_{ij} = 1 \text{ و } m_{jk} = 1 \Rightarrow m_{ik} = 1$$

۴. رابطهٔ R **پادمتقارن** است؛ هرگاه در ماتریس متناظر با آن اگر برای $i \neq j$ داشته باشیم $m_{ij} = 1$، آن گاه $m_{ji} = 0$. همچنین می‌توان گفت برای $i \neq j$ داشته باشیم: $m_{ij} \times m_{ji} = 0$.

مثال: فرض کنید $A = \{a , b , c , d\}$ و $R = \{(d,d),(a,a),(a,b),(c,c),(b,a),(b,b)\}$ یک رابطه روی A باشد، با استفاده از ماتریس مجاورت گراف، نشان دهید R روی A یک رابطهٔ هم ارزی است.

حل: چون مجموعهٔ A دارای ۴ عضو است، پس ماتریس متناظر با رابطه از مرتبهٔ ۴ × ۴ است، با توجه به رابطهٔ R داریم:

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

چون همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M برابر ۱ است، پس R دارای خاصیت بازتابی است و از طرفی $M^T = M$، یعنی برای هر $1 \leq i , j \leq 4$ داریم: $m_{ij} = m_{ji}$؛ در نتیجه، رابطهٔ R دارای خاصیت تقارنی است و همچنین رابطهٔ R تعدی است؛ زیرا داریم:

$$m_{12} = 1 \text{ و } m_{21} = 1 \Rightarrow m_{11} = 1 \text{ و } m_{22} = 1$$

مثال: رابطهٔ R در مجموعهٔ $A = \{-2 , -1 , 0 , 1 , 2\}$ به صورت $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$ تعریف شده است:

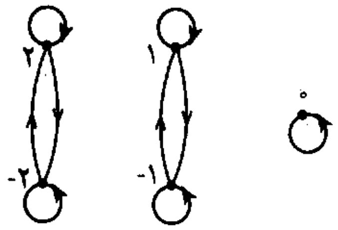
الف ـ گراف متناظر با این رابطه را رسم کنید.

ب ـ ماتریس متناظر با این رابطه را تشکیل دهید.

ج ـ به کمک ماتریس بررسی کنید که آیا R روی A یک رابطهٔ هم ارزی است.

حل: الف ـ ابتدا رابطهٔ R را روی A مشخص می‌کنیم، سپس با استفاده از آن، گراف متناظر با رابطه را رسم می‌کنیم:

$$R = \{(-2 , -2) , (-2 , 2) , (-1 , -1) , (-1 , 1) , (0 , 0) , (1 , -1) , (1 , 1) , (2 , -2) , (2 , 2)\}$$



چون در هر رأس طوقه داریم، پس R دارای خاصیت بازتابی است، از طرفی، چون از ۲ به ۲- و از ۲- به ۲ و از ۱ به ۱- و از ۱- به ۱ یال‌هایی داریم، پس R تقارنی است. همچنین R دارای خاصیت تعدّی است؛ زیرا از ۲ به ۲- و از ۲- به ۲ یال داریم، و ملاحظه می‌کنیم که در رأس‌های ۲ و ۲- طوقه وجود دارد. همین‌طور از ۱ به ۱- و از ۱- به ۱ یال داریم و ملاحظه می‌کنیم که در رأس‌های ۱ و ۱- طوقه وجود دارد.

ب ـ چون مجموعهٔ A دارای ۵ عضو است، پس ماتریس متناظر با رابطه از مرتبهٔ ۵ × ۵ است؛ با توجه به R داریم:

$$M = \begin{array}{c} \\ -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ملاحظه می‌کنیم که همهٔ درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M، برابر ۱ است؛ پس R خاصیت بازتابی دارد. همچنین $M^T = M$، یعنی M متقارن است؛ در نتیجه R دارای خاصیت تقارنی است. R دارای خاصیت تعدی است؛ زیرا:

$$m_{15} = 1 \ , \ m_{51} = 1 \Rightarrow m_{11} = 1 \ , \ m_{55} = 1$$

$$m_{42} = 1 \ , \ m_{24} = 1 \Rightarrow m_{44} = 1 \ , \ m_{22} = 1$$

اکنون تعداد رابطه‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی روی یک مجموعهٔ n عضوی را که با استفاده از رابطه‌ها به‌دست آورده‌ایم، به کمک ماتریس متناظر با رابطه بسیار ساده‌تر بیان می‌کنیم.

تعداد رابطه‌های بازتابی، تقارنی و پادتقارنی به کمک ماتریس‌ها

خاصیت بازتابی. فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، می‌دانیم ماتریس متناظر با این رابطه، مربعی از مرتبهٔ n است؛ یعنی دارای n^2 درایه است. بجز درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس، می‌دانیم تعداد بقیهٔ درایه‌ها برابر با $n^2 - n$ است، حال اگر رابطهٔ R بازتابی باشد، پس درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و بقیهٔ درایه‌ها می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ باشند، اکنون اگر درایه‌های روی غیر قطر اصلی را با مربع مشخص کنیم، در صورتی که R بازتابی باشد، درایه‌های روی

قطر اصلی عدد ۱ و بقیهٔ درایه‌ها، یعنی داخل مربع‌ها می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ قرار گیرند؛ بنابراین هر مربع با دو حالت پُر می‌شود، پس طبق اصل ضرب، تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعهٔ n عضوی A، برابر با 2^{n^2-n} است.

$$M=\begin{bmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{2} & \cdots & \boxed{2} \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{2} & \cdots & \boxed{2} \\ \boxed{2} & \boxed{2} & 1 & \cdots & \boxed{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

تعداد رابطه‌های بازتابی روی مجموعهٔ n عضوی

$$=\underbrace{2\times 2\times \ldots \times 2}_{\text{مرتبه}(n^2-n)}=2^{n^2-n}$$

خاصیت تقارنی. فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n وجود دارد که تعداد درایه‌های بالا قطر اصلی یا پایین قطر اصلی آن برابر $\frac{1}{2}(n^2-n)$ است و تعداد درایه‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی ماتریس برابر $\frac{1}{2}(n^2-n)+n=\frac{1}{2}(n^2+n)$ است. اکنون اگر رابطهٔ R تقارنی باشد، آنگاه درایه‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی، می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ باشند، بنابراین اگر هر درایهٔ ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های بالا (یا پایین) و روی قطر اصلی، هر کدام با ۲ حالت ۰ یا ۱ پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

$$M=\begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{2} & \cdots & \boxed{2} \\ \square & \boxed{2} & \boxed{2} & \cdots & \boxed{2} \\ \square & \square & \boxed{2} & \cdots & \boxed{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \square & \square & \square & \cdots & \boxed{2} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

تعداد رابطه‌های تقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

$$=\underbrace{2\times 2\times \ldots \times 2}_{\text{مرتبه}\ \frac{1}{2}(n^2+n)}=2^{\frac{1}{2}(n^2+n)}$$

چون ماتریس M متقارن است، یعنی $M=M^T$؛ بنابراین داریم: $m_{ij}=m_{ji}$، یعنی برای محاسبهٔ تعداد رابطه‌های تقارنی، فقط کافی است مربع‌های بالا (یا پایین) قطر را علاوه بر مربع‌های روی قطر اصلی در نظر بگیریم.

خاصیت تقارنی و بازتابی. اگر ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n متناظر با رابطهٔ R، روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، و R دارای خواص بازتابی و تقارنی باشد، آنگاه درایه‌های روی قطر اصلی برابر ۱ و درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی برابر ۰ یا ۱ هستند ؛ بنابراین اگر هر درایهٔ ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با ۲ حالت ۰ یا ۱ پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

$$M=\begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{2} & \cdots & \boxed{2} \\ \square & \boxed{1} & \boxed{2} & \cdots & \boxed{2} \\ \square & \square & \boxed{1} & \cdots & \boxed{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \square & \square & \square & \cdots & \boxed{1} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

تعداد رابطه‌های تقارنی و بازتابی روی مجموعهٔ n عضوی

$$=\underbrace{2\times 2\times 2\times \ldots \times 2}_{\text{مرتبه}\ \frac{1}{2}(n^2-n)}=2^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

خاصیت پادتقارنی. فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n وجود دارد. در صورتی که R رابطهٔ پادتقارنی باشد، آنگاه درایه‌های روی قطر اصلی، می‌توانند عددهای ۰ یا ۱ باشند و برای درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی سه حالت وجود دارند، که عبارتند از: $m_{ij}=1 \Rightarrow m_{ji}=0$ یا $m_{ij}=0 \Rightarrow m_{ji}=0$ یا $m_{ij}=0 \Rightarrow m_{ji}=1$؛ بنابراین اگر هر درایهٔ ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های روی قطر اصلی هر کدام با ۲ حالت و مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با ۳ حالت پُر می‌شوند؛ بنابراین داریم:

تعداد رابطه‌های پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

$$=\underbrace{2\times 2\times 2\times \ldots \times 2}_{\text{مرتبه}\ n}\times\underbrace{3\times 3\times 3\times \ldots \times 3}_{\text{مرتبه}\ \frac{1}{2}(n^2-n)}=2^n\times 3^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

مسأله: فرض کنیم A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، چند رابطه روی A می‌توان تعریف کرد که بازتابی و پادتقارنی باشند؟

حل: متناظر با رابطهٔ بازتابی و پادتقارنی R روی مجموعهٔ A، ماتریس مربعی M از مرتبهٔ n را در نظر بگیریم. چون R بازتابی است، پس درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس M، همگی برابر ۱ هستند. از طرفی، R پادتقارنی است؛ پس برای

درایه‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، سه حالت وجود دارد. بنابراین اگر هر درایهٔ ماتریس را با یک مربع مشخص کنیم، مربع‌های روی قطر اصلی، هر کدام فقط با یک حالت و مربع‌های بالا (یا پایین) قطر اصلی، هر کدام با ۳ حالت پُر می‌شوند، در نتیجه داریم:

تعداد رابطه‌های بازتابی و پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی

$$= \underbrace{۱\times۱\times۱\times\dots\times۱}_{n\ \text{مرتبه}} \times \underbrace{۳\times۳\times۳\times\dots\times۳}_{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)\ \text{مرتبه}} = ۳^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)}$$

نکته: تعداد رابطه‌هایی که تقارنی و پادتقارنی روی مجموعهٔ n عضوی A باشند، برابر با ۲^n است؛ زیرا اگر متناظر با این رابطه، یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n در نظر بگیریم، درایه‌های روی قطر اصلی، می‌توانند ۰ یا ۱ باشند و بقیهٔ درایه‌ها برابر ۰ هستند.

مثال: اگر مجموعه‌ای دارای ۱۰ زیرمجموعهٔ ۳ عضوی باشد، چند رابطهٔ پاد متقارن و بازتابی می‌توان روی آن مجموعه نوشت؟

حل: می‌دانیم که اگر A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی آن $(k \le n)$ از ترکیب $\binom{n}{k}$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$\binom{n}{۳}=۱۰ \Rightarrow \frac{n!}{۳!(n-۳)!}=۱۰ \Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{۳!(n-۳)!}=۱۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۶۰=۵\times۴\times۳ \Rightarrow n=۵$$

تعداد رابطه‌های بازتابی و پاد تقارنی روی مجموعه ۳ عضوی $= ۳^{\frac{۱}{۲}(۳^۲-۳)} = ۳^۳ = ۲۷$

مثال: تعداد رابطه‌های بازتابی و شامل دو زوج مرتّب (a , b) و (c , d) روی یک مجموعه، برابر $۲^{۱۸}$ است. چند رابطهٔ پادتقارنی که شامل یک زوج مرتّب (a , b) است، روی این مجموعه می‌توان نوشت؟ $(a \ne b , c \ne d)$

حل: می‌دانیم تعداد رابطه‌های بازتابی روی یک مجموعهٔ n عضوی که شامل k زوج مرتّب $(k \le n^۲ - n)$ باشند، برابر با $۲^{(n^۲-n)-k}$ است؛ بنابراین داریم:

$$۲^{(n^۲-n)-۲} = ۲^{۱۸} \Rightarrow n^۲ - n - ۲۰ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = ۵ \in \mathbb{N} & \text{قابل قبول} \\ n = -۴ \notin \mathbb{N} & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

از طرفی تعداد رابطه‌های پادتقارنی که شامل یک زوج مرتّب (a , b) با شرط $(a \ne b)$ است، برابر با $۲^n \times ۳^{\frac{۱}{۲}(n^۲-n)-۱}$ است، بنابراین داریم:

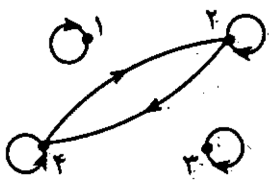
$$n=۵ \Rightarrow ۲^۵\times۳^{\frac{۱}{۲}(۵^۲-۵)-۱} = ۲^۵\times۳^۹$$

مثال: روی مجموعهٔ $A = \{a , b , c , d , e\}$ چند رابطهٔ بازتابی می‌توان نوشت که شامل (a , c) باشند؛ ولی شامل (c,a) نباشند؟

حل: اگر متناظر با این رابطه، یک ماتریس در نظر بگیریم، درایه‌های روی قطر اصلی، عدد ۱ هستند و درایهٔ متناظر با (a,c) عدد ۱ و درایهٔ متناظر با (c , a) عدد ۰ است؛ بنابراین $(n^۲ - n)-۲$ درایه می‌توانند ۰ یا ۱ باشند؛ در نتیجه داریم:

$$۲^{(n^۲-n)-۲} = ۲^{(۵^۲-۵)-۲} = ۲^{۱۸}$$

مثال: رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴\}$ با گراف جهتدار زیر تعریف شده است، [۲] (دستهٔ هم‌ارزی ۲) را مشخص کنید.



حل: ابتدا رابطهٔ متناظر با گراف بالا را می‌نویسیم:

$$R = \{(۱ , ۱), (۲ , ۲), (۲ , ۴), (۴ , ۲), (۴ , ۴), (۳ , ۳)\}$$

سپس طبق تعریف کلاس یا دسته هم ارزی داریم:

$$[۲] = \{x \in A \mid xR۲\} = \{x \in A \mid (x , ۲) \in R\} = \{۲ , ۴\}$$

مثال: مجموعهٔ $A = \{-۱ , ۰ , ۱ , ۲ , ۳\}$ و رابطهٔ R روی A به صورت $R = \{(x , y) : |x| = |y|\}$ تعریف شده است:

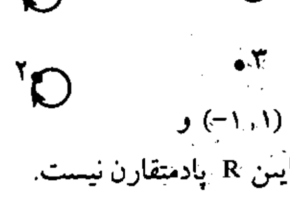
الف ـ گراف جهتدار متناظر با R را بنویسید.

ب ـ با استفاده از گراف جهتدار متناظر با R، تحقیق کنید R پادمتقارن است یا خیر؟

حل: الف ـ ابتدا رابطهٔ R را با زوج‌های مرتّب مشخص می‌کنیم:

$$R = \{(-۱ , -۱), (-۱ , ۱), (۱ , -۱), (۱ , ۱), (۰ , ۰), (۲ , ۲)\}$$

سپس گراف متناظر با R را رسم می‌کنیم:



ب ـ چون $(-۱ , ۱) \in R$ و $(۱ , -۱) \in R$ بنابراین R پادمتقارن نیست.



ریاضی سال اول

۱. برای مجموعهٔ $A = \{\phi\}$، مطلوب است تعیین مجموعهٔ $P(P(A))$.

۲. کدام یک از مجموعه‌های زیر نسبت به هیچ یک از دو عمل جمع و ضرب، بسته نیست؟

۱) $\{1, -1\}$

۲) $\{0\}$

۳) مجموعهٔ اعداد صحیح منفی

۴) مجموعهٔ اعداد گنگ

۳. کسر اعشاری $1/4\overline{81}$ را به صورت متعارفی تبدیل کنید.

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کرده و با یک توان بنویسید؟

۱) $\dfrac{5^{11} \times 3^{11}}{15^{7} \times 15^{4}}$ ۲) $\dfrac{(x^3)^2 \times (x^2)^3}{(x^3)^{-2} \times (x^2)^{-3}}$

۵. عدد صحیح r را از هر یک از تساوی‌های زیر به دست آورید:

۱) $(5^{r-2})^2 = 25^{2r+2}$

۲) $(2^{3r-1})^2 = 2^r \times (2^4)^r$

۶. تقسیم زیر را انجام داده و خارج قسمت و باقیمانده را مشخص کنید: $a^5 + b^5 \div a + b$

۷. حاصل عبارت زیر را به کمک اتحادها به دست آورید:

$(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x - 1)$

۸. عبارت جبری زیر را به حاصلضرب عوامل، تجزیه کنید:

$x^5 + x^4 + 1$

۹. عملیات جبری زیر را انجام داده و نتیجه را کاملاً ساده کنید:

$$\frac{x^3 + 1}{(x + 2)(x^2 - x + 1)} + \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 3} - \frac{x^2 + 5x}{x^3 + x^2 - 2x}$$

۱۰. ب.م.م و ک.م.م دو عبارت جبری $x + y + xy + 1$ و $x^4 + x$ را به دست آورید.

ریاضی سال دوم

۱. جواب‌های معادلهٔ $\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{8}{x^2-4}$ را به دست آورید.

۲. مجموعهٔ مقادیر a را به دست آورید که به ازای آنها معادله درجه دوم $x^2 + 4x + a + 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی منفی و متمایز باشد.

۳. ثابت کنید سه جمله‌ای

$(k^2 - k + 1)x^2 - 2(k^2 - 1)x + (k^2 + k + 1)$

به ازای جمیع مقادیر k و x همواره مثبت است. $(k \neq 0)$

۴. نشان دهید تابع‌های $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = x^3 + 3 \end{cases}$ و $\begin{cases} g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = \sqrt[3]{x - 3} \end{cases}$ وارون یکدیگرند.

۵. وارون‌پذیری تابع f با ضابطهٔ:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}-\{1\} \to \mathbb{R}-\{2\} \\ f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1} \end{cases}$$

را تحقیق نموده و ضابطه وارون آن را به دست آورید.

۶. دامنهٔ تعریف تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}}$ را به دست آورید.

۷. دستگاه معادلات زیر را با استفاده از ماتریس وارون، حل کنید.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

۸. m را طوری به دست آورید که دستگاه معادلات $\begin{cases} -4x + my = -2 \\ (m - 1)x + my = 2 \end{cases}$ دارای جواب نباشد.

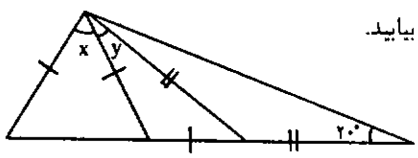
۹. درستی تساوی زیر را نشان دهید:

$$\frac{\cot g 170^\circ \cot g 100^\circ - \sin 290^\circ \cos 200^\circ}{\sin 160^\circ \sin 70^\circ} = tg 20^\circ$$

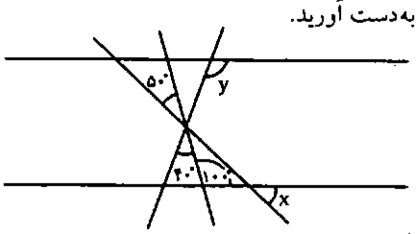
۱۰. برای تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^2 + x$ حدود x را طوری بیابید که f صعودی باشد. (با تشکیل $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ و صرف نظر کردن از مقادیر کوچک Δx)

هندسهٔ ۱

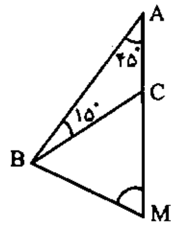
۱. در شکل پاره‌خط‌های مشخص شده با علامت (/) با هم، و پاره‌خط‌های مشخص شده با علامت (//) نیز با هم برابرند. اندازهٔ x و y را بیابید.



۲. با توجه به شکل داده شده نسبت $\dfrac{x}{y}$ را به‌دست آورید.

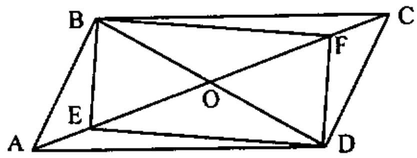


۳. در مثلث ABC، $\hat{A} = ۴۵^\circ$ و $\hat{B} = ۱۵^\circ$ است. بر امتداد ضلع AC از طرف C نقطهٔ M را چنان اختیار می‌کنیم که CM = ۲AC باشد. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ را تعیین کنید.

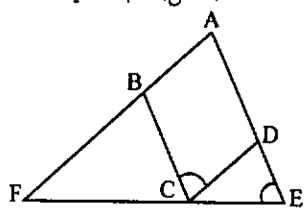


۴. ثابت کنید که اگر در دو مثلث، دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از آن دو ضلع، نظیر به نظیر متساوی باشند آن دو مثلث همنهشتند.

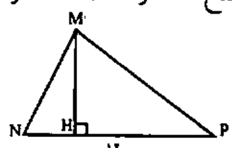
۵. در متوازی‌الاضلاع ABCD قطر AC بزرگتر از قطر BD است. از نقطهٔ O محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع دوپاره‌خط OE = OF را به اندازهٔ نصف قطر BD جدا می‌کنیم. ثابت کنید که چهارضلعی BEDF مستطیل است.

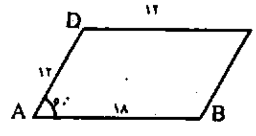


۶. چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع و AF = FE است (شکل)، ثابت کنید که $\hat{E} = \hat{C}$.

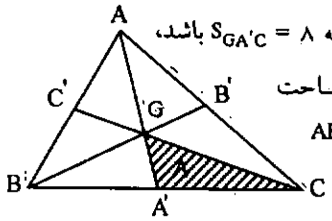


۷. مثلث MNP به قاعدهٔ NP = ۱۲ هم‌ارز متوازی‌الاضلاع ABCD است که در آن AB = ۱۸، AD = ۱۲ و $D\hat{A}B = ۶۰^\circ$ است. اندازهٔ ارتفاع MH از مثلث MNP را تعیین کنید.

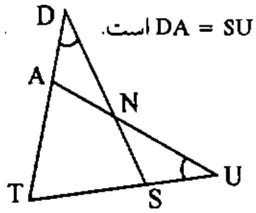




۸. مثلث ABC داده شده است. میانه‌های AA′، BB′ و CC′ در نقطه G همرسند. در صورتی‌که $S_{GA'C} = ۸$ باشد، اندازهٔ مساحت مثلث ABC را بیابید.



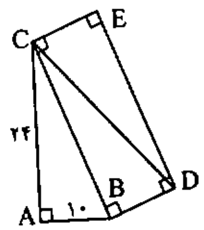
۹. در شکل $\hat{D} = \hat{U}$ و DT = TU است. ثابت کنید که DA = SU است.



۱۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، داده شده است. AB = ۱۰ cm و AC = ۲۴ cm است. روی وتر BC مستطیلی به مساحت ۲۶۰cm² می‌سازیم.

الف ـ اندازهٔ ضلع دیگر این مستطیل را تعیین کنید.

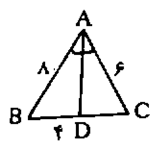
ب ـ طول قطر این مستطیل را به دست آورید.



هندسهٔ ۲

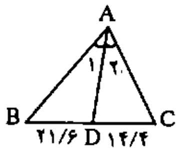
۱. شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی یک ذوزنقه متساوی‌الساقین را مشخص کنید.

۲. در شکل زیر، AD نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC است. اگر AB = ۸، AC = ۶



و DB = ۴ باشد، اندازهٔ پاره‌خط DC و از آن جا محیط مثلث ABC را تعیین کنید.

۳. اندازهٔ دو پاره‌خطی که نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث ABC روی ضلع BC ایجاد کرده است، مساوی ۱۴/۴ و ۲۱/۶ سانتیمتر است. در صورتی که محیط این مثلث مساوی ۸۶ سانتیمتر باشد، اندازهٔ ضلعهای مثلث را تعیین کنید.

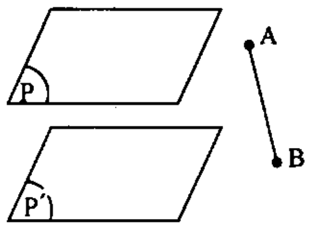


۴. قضیهٔ زیر را به صورت قضیهٔ شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید که عکس آن قضیه شرطی است یا نه؟ در صورتی که یک قضیه نباشد، یک مثال نقض بزنید.

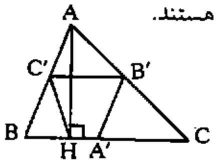
الف ـ هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

ب ـ هر دو چهارضلعی همنهشت مساحتهای برابر دارند.

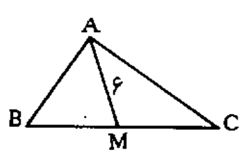
۵. دو نقطهٔ A و B و دو صفحهٔ متوازی P و P′ داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو نقطهٔ A و B متساوی‌الفاصله و همچنین از دو صفحهٔ P و P′ به یک فاصله باشد.



۶. ثابت کنید که در هر مثلث، وسطهای سه ضلع و پای یک ارتفاع، رأس‌های یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند.

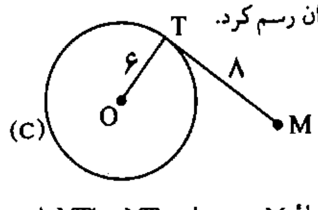


۷. طول میانهٔ AM از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$)، مساوی ۶ است و این میانه

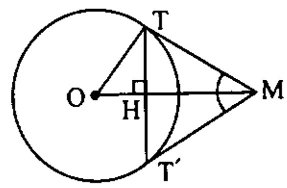


زاویهٔ قائمه را به نسبت ۱:۲ تقسیم کرده است. اندازهٔ مساحت این مثلث را تعیین کنید.

۸. دایرهٔ $C(O , 6)$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ این دایره را تعیین کنید که از آن نقطه مماسهایی به طول ۸ بر این دایره می‌توان رسم کرد.



۹. از نقطهٔ M دو مماس MT و MT' را بر دایرهٔ $C(O , 12)$ رسم کرده‌ایم، درصورتی که $T\hat{M}T'=60°$ باشد؛ طول مماس MT، طول وتر MM' و اندازهٔ تصویر OT روی OM را به دست آورید.



۱۰. از مثلث ABC اندازهٔ سه میانه $AA' = m_a$، $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

جبر و احتمال

۱. برای هر عدد طبیعی n با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

$$\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\dots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{2(3n+2)}$$

۲. برای هر عدد طبیعی n به کمک استقرا ریاضی، درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(1+\sqrt{2})^n \ge 1+\sqrt{2}n$$

۳. با استفاده از اصل استقرا ریاضی، ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n، $4^{2n}-1$، بر ۵ بخش‌پذیر است: $4^{2n}-1=5r$

۴. با استفاده از استدلال برهان خُلف، نشان دهید اگر n^2 مضربی از ۵ باشد، آنگاه n نیز مضربی از ۵ است.

۵. الف ـ روش استدلال برهان خُلف را بیان کنید.

ب ـ $\sqrt{3}$ عدد گنگ است و a یک عدد گویا؛ ثابت کنید $\sqrt{3}-a$ عدد گنگ است.

۶. ثابت کنید $\sqrt[3]{3}$ گنگ است.

۷. با استفاده از استدلال استنتاجی، ثابت کنید حاصلضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آنهاست.

۸. کدام یک از احکام زیر صحیح است، احکام صحیح را اثبات کنید و برای ردّ احکام ناصحیح، مثال نقض آورید.

الف ـ اگر x گنگ و y گنگ باشد، آنگاه x.y گنگ است.

ب ـ اگر x گویا و y گویا باشد، آنگاه x+y گویاست.

۹. در داخل جعبه‌ای، ۷ مهره به رنگ‌های سبز، سفید و آبی وجود دارد. این مهره‌ها را در دو جعبه قرار می‌دهیم. ثابت کنید که یکی از این دو جعبه، حدّاقل دارای دو مهره همرنگ است.

۱۰. درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حدّاقل فاصلهٔ دو نقطه از این ۱۰ نقطه، کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{3}$ است.

حسابان

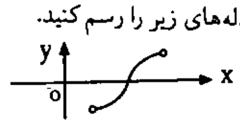
۱. دامنهٔ تابع‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

ب) $f(x)=\sqrt{[x]-[x^2]}$

۲. معادلهٔ $|-x^2+2x|=x^2-2x$ را حل کنید.

۳. اگر نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر باشد، نمودار معادله‌های زیر را رسم کنید.



الف) $y=f(x)+|f(x)|$

ب) $y=f(|x|)$

۴. اگر $fog(x)=x-1$ و $g(x)=1-\sqrt{x}$، ضابطهٔ f را حساب کنید.

۵. ماکزیمم و مینیمم مقدار y در $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$ را حساب کنید.

۶. نمودارهای معادله‌های توابع زیر را به کمک نمودار $f(x)=x^2$ رسم کنید.

الف) $y=-\frac{1}{f(x)+1}$

ب) $y=f(x-1)+1$

۷. نمودار تابع $f(x)=\sin x-|\sin x|$ را رسم کنید.

۸. چند جمله‌ای درجه سوّمی پیدا کنید که بر $(x+1)^2$ بخشپذیر و باقیماندهٔ آن بر x^2-x، برابر $7x+1$ باشد.

۹. حد تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x+1}, & x\neq -1\\ 5, & x=1\end{cases}$ را در نظر بگیرید. متغیر x در چه بازه‌ای تغییر کند تا فاصلهٔ $|f(x)-(-2)|$ از $\frac{1}{100}$ کمتر باشد.

۱۰. حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ ب) $\lim_{x\to2}\frac{x^5-32}{x^2-4}$

ج) $\lim_{x\to2^-}\frac{[x+[x+[x]]]}{[-x]-4}$

ریاضی سال سوم تجربی

۱. الف ـ مجموعهٔ زیر را به صورت فاصله نشان دهید.

$A=\{x \mid x\le 1 , x>2\}$

ب ـ فاصله‌های زیر را به صورت مجموعه نشان دهید.

I) $B=]-3,2]$ II) $C=[-2,+\infty)$

۲. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ زیر را تعیین کنید و روی محور اعداد نشان دهید.

$$-1<\frac{3x+1}{2}-\frac{3}{5}\le 3$$

۳. تابع f با قانون $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x>1\\ -x+2, & x<1\\ 6, & x=1\end{cases}$ داده شده است، مقدارهای $f(0)$، $f(\sqrt{2}-1)$، $f(\sqrt{2}+1)$ و $f(-1)\times f(1)$ را تعیین کنید.

۴. در تابع f با قانون $f(x)=\begin{cases}\sin(2x-\frac{\pi}{3}), & x\ge\frac{\pi}{6}\\ \frac{1}{\cos 2x}, & x<\frac{\pi}{6}\end{cases}$؛ مقدارهای $f(\frac{\pi}{6})$، $f(\frac{\pi}{3})$ و $f(0)$ را تعیین کنید.

۵. دو تابع $y = x^3 - 3x + c$ و $y = ax + b$ داده شده‌اند. ضریب‌های a، b و c را چنان بیابید که این دو تابع در سه نقطه به طول‌های ۱-، ۰ و ۱+ متقاطع باشند.

۶. دامنهٔ تعریف هر یک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف- $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{\sqrt{1 - |x|}}$

ب- $g(x) = \log_{x-1}(9 - x^2)$

۷. اگر $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x, & x > 3 \\ 3x + 1, & x \le 3 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x > 3 \\ -3x + 4, & x \le 3 \end{cases}$ باشد، ضابطهٔ تابع‌های $f \pm g$ را به دست آورید.

۸. اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد، ضریب‌های a، b و c را طوری تعیین کنید که $(gof)(x) = -2x^2 - x$ باشد.

۹. مطلوب است محاسبهٔ:

الف- $\lim_{x\to 2} f(x) = \sqrt{x - 2}$

ب- $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x > \frac{\pi}{6} \\ \cos x, & x \le \frac{\pi}{6} \end{cases}$

۱۰. تابع f با قانون $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 1, & x > -2 \\ -2x^2 + a, & x \le -2 \end{cases}$ داده شده است. ضریب‌های a و b را چنان بیابید که $\lim_{x\to -2^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -6$ باشد.

پرسشهای چهارگزینه‌ای

ریاضی عمومی ۱

۱. خانواده‌ای دارای ۴ فرزند است. اگر فرزند اول و آخر همجنس باشند، احتمال آن که ۳ فرزند این خانواده دختر باشند چقدر است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{16}$

۲. در یک جدول داده‌های آماری مرکز دسته (نشان دسته) اول و سوم به ترتیب ۸ و ۱۶ است، مرکز دستهٔ دهم کدام است؟

۱) ۴۴ ۲) ۴۸ ۳) ۸۰ ۴) ۸۸

۳. احتمال بروز عوارض جانبی در مصرف نوعی دارو در مورد هر بیمار ۱۰٪ می‌باشد، هرگاه شش بیمار از این دارو استفاده کنند، احتمال آن که کمتر از دو نفر دچار عوارض جانبی شوند، چقدر است؟

۱) $0/6 \times 0/9^5$ ۲) $0/9^5$ ۳) $1/2 \times 0/9^5$ ۴) $1/5 \times 0/9^5$

۴. اتومبیلی که در جاده‌ای بین شهری در حال تردد است، ۵٪ احتمال دارد که دچار تصادف شود و همین احتمال در صورت ناهموار بودن جاده ۱۵٪ می‌باشد. همچنین می‌دانیم که ۲۰٪ جاده‌ها ناهموارند. اگر در یک جاده معین تصادفی رخ داده باشد، چقدر احتمال دارد که جاده ناهموار بوده باشد؟

۱) ۳۰٪ ۲) ۶۰٪ ۳) ۵۰٪ ۴) ۲۵٪

۵. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^2 + 4x - 1 = 0$ باشند، مقدار $\dfrac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2}$ چقدر است؟

۱) $-\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{15}{4}$ ۳) $\frac{17}{4}$ ۴) $-\frac{17}{4}$

۶. از دستگاه معادلات زیر $x_1 + x_2 + x_3$ کدام است؟

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 9 \end{cases}$$

۱) ± 2 ۲) -2 ۳) 2 ۴) $\frac{1}{2}$

۷. خطوط $y = 2x + m$ و $y = mx + 2$ یکدیگر را روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کنند. m کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۳ ۴) ۳-

۸. به ازای چه مقدار n در بسط $\left(3x^2 - \frac{4}{x^2}\right)^n$ جملهٔ یازدهم فاقد x می‌باشد؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۲ ۳) ۲۵ ۴) ۳۵

۹. معادلهٔ $\log_x^{(2x+1)} - \log_x^{(x-2)} = 1$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۰. کدام دنبالهٔ زیر صعودی و کراندار است؟

۱) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ ۲) $a_n = \frac{n+1}{n-1}$

۳) $a_n = \sin\frac{\pi}{n}$ ۲) $a_n = n^2$

دیفرانسیل و انتگرال (۱)

۱. دنبالهٔ $\left\{\dfrac{(n+1)^n(2n+5)}{4n^{n+1}}\right\}$ همگرا به کدام عدد است؟

۱) ۰ ۲) e ۳) $\frac{e}{2}$ ۴) 2e

۲. سری $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$:

۱) همگرا به ۰ است ۲) همگرا به ۱ است

۳) همگرا به $\frac{1}{2}$ است ۴) واگراست

۳. اگر $\lim_{x\to-\infty}(x^2 + 2x) = +\infty$، آن‌گاه برای هر $N > 0$ داریم:

۱) $x > \sqrt{N+1} + 1 \Rightarrow x^2 + 2x > N$

۲) $x < -(\sqrt{N+1} - 1) \Rightarrow x^2 + 2x > N$

۳) $x < \sqrt{N+1} + 1 \Rightarrow x^2 + 2x > N$

۴) $x < -(\sqrt{N+1} + 1) \Rightarrow x^2 + 2x > N$

۴. اگر $\lim_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{x^2 + 1}{9x^2 + ax + b} = +\infty$، آن‌گاه (a + b) کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۵- ۳) ۶- ۴) ۶

۵. اگر $f(x) = \begin{cases} x - 2 & x > 0 \\ x + 5 & x \le 0 \end{cases}$، آن‌گاه $\lim_{x\to 2} f(f(f(f(x))))$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۲- ۴) ۱

۶. تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x - 1)[x]$ در بازهٔ]۰ , ۳[در چند نقطه ناپیوسته است؟

۱) یک نقطه ۲) دو نقطه

۳) سه نقطه ۴) چهار نقطه

۷. اگر $\frac{\pi}{2} \le x < \frac{3\pi}{2}$ و $f(x) = \sqrt{x - 1}$، در این صورت f(cot x) در کدام بازه پیوسته است؟

۱) $\frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{4}$ ۲) $\frac{3\pi}{4} \le x < \pi$

۳) $\pi < x \le \frac{5\pi}{4}$ ۴) $\frac{5\pi}{4} \le x < \frac{3\pi}{2}$

۸. منحنی به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - 20}{x - 2}}$ چند مجانب دارد؟

۱) یک ۲) دو ۳) سه ۴) صفر

۹. اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $\lim_{h\to 0} \dfrac{2f(x - 3h) - 2f(x + 2h)}{-2h}$ برابر است با:

۱) $6f'(x)$ ۲) $-6f'(x)$

۳) $5f'(x)$ ۴) $-3f'(x)$

۱۰. جسمی روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ حرکت می‌کند، در نقطهٔ معینی از آن، شیب خط مماس بر منحنی $\frac{1}{4}$ و طول موضع با آهنگ ۲ متر در ثانیه کاهش می‌یابد؛ در همان نقطه، عرض موضع با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۱) $\frac{1}{2}$ متر در ثانیه ۲) $-\frac{1}{2}$ متر در ثانیه
۳) ۲ متر در ثانیه ۴) ۲− متر در ثانیه

ریاضیات گسسته

۱. کدام گزاره درست است؟

۱) هر گراف همبند که لااقل یک دور به طول بزرگتر یا مساوی با ۳ داشته باشد همیلتنی است.

۲) اگر گراف G درخت نباشد آن گاه حداقل یک دور دارد.

۳) اگر گراف G فقط یک رأس از درجه ۱ داشته باشد، درخت نیست.

۴) هر درخت حداقل دو رأس از درجهٔ ۱ دارد.

۲. در گراف کامل K_p اگر اندازه q باشد و $p = q$ در این صورت $p + q$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۶ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

۳. اگر p عددی اول باشد و a عددی صحیح و a مضرب p نباشد و داشته باشیم $p \mid (23)^{17} a$ در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $p \mid 17$ ۲) $(p , 17) = 1$
۳) $p = 1$ یا $p = 17$ ۴) $p = 23$

۴. اگر $(a + b) = s$ و $(a , b) = d$ در این صورت حاصل $[s , d]$ کدام است؟ $(a , b \in N)$

۱) $[a , b]$ ۲) d ۳) s ۴) ab

۵. اگر a و b هر دو اعداد صحیح و دارای یک شمارندهٔ مشترک اوّل باشند و داشته باشیم $ra + sb = 13$ در این صورت کدام گزینه درست است؟

۱) $(a , b) = 1$ ۲) $(a , b) = 2$
۳) $(a , b) = 13$ ۴) $(a , b) = (r , s)$

۶. باقیماندهٔ تقسیم عدد $A = \sum_{k=1}^{46} (k!)^{220}$ بر عدد ۲۳ کدام است؟

۱) ۲۲ ۲) صفر ۳) ۲− ۴) ۲۱

۷. اگر $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت رابطهٔ R_1 باشد و M_2 ماتریس مجاورت رابطهٔ R_2 باشد و داشته باشیم $M_2 << M_1$ در این صورت حداکثر تعداد اعضای رابطهٔ R_2 کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) 2^4 ۴) 2^5

۸. تفاضل تعداد حالتهایی که می‌توان ۵ کتاب یکسان را به دلخواه بین سه نفر تقسیم کرد با تعداد حالتهایی که می‌توان ۴ جایزهٔ متمایز را به دلخواه بین سه نفر تقسیم کرد، چقدر است؟

۱) ۳۰ ۲) ۶۰ ۳) صفر ۴) ۱۷

۹. چه تعداد عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی با ۱۳۸۰ وجود دارد که بر ۳ یا ۷ بخش‌پذیر می‌باشند؟

۱) ۶۸۴ ۲) ۷۸۴ ۳) ۵۹۶ ۴) ۵۹۲

۱۰. یک تاس را دوبار می‌اندازیم و پیشامدهای A و B را به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌کنیم «تاس اول ۴ بیاید» و «مجموع دو تاس ۷ باشد». در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) A و B مستقل‌اند ۲) A و B وابسته‌اند
۳) $p(A) = \frac{1}{3}$ ۴) $p(B) = \frac{1}{36}$

۱۱. در جعبهٔ A_1، ۵ مهرهٔ سیاه و ۶ مهرهٔ سفید و در جعبهٔ A_2، ۷ مهرهٔ سیاه و ۴ مهرهٔ سفید وجود دارد، یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که سفید است، چقدر احتمال دارد این مهره از جعبهٔ A_1 باشد؟

۱) $\frac{6}{10}$ ۲) $\frac{6}{9}$ ۳) $\frac{21}{45}$ ۴) $\frac{24}{45}$

۱۲. یک جفت تاس را آن‌قدر می‌اندازیم تا برای اولین بار هر دو با هم ۶ بیایند و متغیر تصادفی x را تعداد پرتابها تعریف می‌کنیم تا به این منظور برسیم ($x = 2$ یعنی در پرتاب دوم هر دو تاس ۶ آمده و در پرتاب اول هر دو ۶ نیامده). چقدر احتمال دارد تا در حداکثر ۳ پرتاب به چنین منظوری برسیم؟

۱) $\frac{(36)^2 + 36 + (35)^2}{(36)^3}$

۲) $\frac{(36)^3 + (36)^2 + 36}{(36)^4}$

۳) $\frac{(36)^2 + 36 \times 35}{(36)^3}$

۴) $\frac{(36)^2 + 36 \times 35 + (35)^2}{(36)^3}$

پاسخ تشریحی مسائل ریاضی سال اول

۱. $A = \{\phi\} \Rightarrow p(A) = \{\phi , \{\phi\}\} \Rightarrow$
$P(p(A)) = \{\phi , \{\phi\} , \{\{\phi\}\} , \{\phi , \{\phi\}\}\}$

لازم به ذکر است که چون مجموعه A یک عضو دارد، لذا ۲ زیر مجموعه داشته و $p(A)$ دو عضو دارد (تهی و مجموعهٔ A) و در نتیجه $P(p(A))$، $2^2 = 4$ زیر مجموعه داشته و $P(p(A))$ چهار عضو دارد.

۲. مجموعهٔ (۱) نسبت به جمع بسته نیست ($-1 + 1 = 0$) ولی نسبت به ضرب بسته است. مجموعه (۲) نسبت به هر دو عمل جمع و ضرب بسته است. مجموعهٔ (۳) نسبت به عمل جمع بسته است (مجموع هر دو عدد منفی عددی منفی است)، ولی نسبت به ضرب بسته نیست (حاصلضرب دو عدد منفی، عددی مثبت است). تنها مجموعهٔ (۴) است که نسبت به هیچ یک از دو عمل جمع و ضرب بسته نیست؛ زیرا مجموع دو عدد گنگ ممکن است عددی گویا باشد (به عنوان مثال، $(-\sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \in Q$) همچنین حاصلضرب دو عدد گنگ نیز ممکن است گویا باشد (به عنوان مثال، $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2 \in Q$).

۳. $1/4\overline{81} = x \Rightarrow 10x = 14/\overline{81}$,

$$1000x = 1481/\overline{81} \Rightarrow 990x = 1467$$

$$\Rightarrow x = \frac{1467}{990} = \frac{163}{110}$$

۴. الف ـ

$$\frac{5^{11}\times 3^{11}}{15^{7}\times 15^{2}} = \frac{(5\times 3)^{11}}{15^{9}} = \frac{15^{11}}{15^{9}} = 15^{2}$$

ب ـ

$$\frac{(x^{3})^{2}\times (x^{2})^{3}}{(x^{3})^{-2}\times (x^{2})^{-3}} = \frac{x^{6}\times x^{6}}{x^{-6}\times x^{-6}} = \frac{x^{12}}{x^{-12}} = x^{12-(-12)} = x^{24}$$

۵. الف ـ

$$(5^{r-2})^{2} = 25^{2r+2}$$

$$\Rightarrow 5^{2r-4} = 5^{4r+4}$$

$$\Rightarrow 2r - 4 = 4r + 4 \Rightarrow 2r = -6 \Rightarrow r = -3$$

ب ـ

$$(2^{3r-1})^{2} = 2^{r}\times (2^{4})^{r} \Rightarrow 2^{6r-2} = 2^{4r+r}$$

$$\Rightarrow 6r - 2 = 5r \Rightarrow r = 2$$

۶.

$$\begin{array}{l|l} a^{5} + b^{5} & a + b \\ \hline -a^{5} \mp a^{4}b & a^{4} - a^{3}b + a^{2}b^{2} - ab^{3} + b^{4} \\ \hline -a^{4}b + b^{5} & \\ \pm a^{4}b \pm a^{3}b^{2} & \\ \hline a^{3}b^{2} + b^{5} & \\ -a^{3}b^{2} \mp a^{2}b^{3} & \\ \hline -a^{2}b^{3} + b^{5} & \\ \pm a^{2}b^{3} \pm ab^{4} & \\ \hline ab^{4} + b^{5} & \\ -ab^{4} \mp b^{5} & \\ \hline 0 & \end{array}$$

خارج قسمت $a^{4} - a^{3}b + a^{2}b^{2} - ab^{3} + b^{4}$

باقیمانده: صفر

۷.

$$(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x - 1) =$$

$$(x^{2} + 3x + 2)(x^{2} + 3x - 4) =$$

$$(x^{2} + 3x)^{2} + (2 - 4)(x^{2} + 3x) - 8 =$$

$$x^{4} + 6x^{3} + 9x^{2} - 2x^{2} - 6x - 8 =$$

$$x^{4} + 6x^{3} + 7x^{2} - 6x - 8$$

۸.

$$x^{5} + x^{4} + 1 =$$

$$x^{5} + x^{4} + x^{3} - x^{3} + 1 =$$

$$x^{3}(x^{2} + x + 1) - (x^{3} - 1) =$$

$$x^{3}(x^{2} + x + 1) - (x - 1)(x^{2} + x + 1) =$$

$$(x^{2} + x + 1)(x^{3} - x + 1)$$

۹.

$$\frac{x^{3} + 1}{(x + 2)(x^{2} - x + 1)} + \frac{x - 3}{x^{2} - 4x + 3} - \frac{x^{2} + 5x}{x^{3} + x^{2} - 2x} =$$

$$\frac{(x + 1)(x^{2} - x + 1)}{(x + 2)(x^{2} - x + 1)} + \frac{(x - 3)}{(x - 3)(x - 1)} - \frac{x(x + 5)}{x(x^{2} + x - 2)} =$$

$$\frac{x + 1}{x + 2} + \frac{1}{x - 1} - \frac{x + 5}{(x - 1)(x + 2)} =$$

$$\frac{(x + 1)(x - 1) + (x + 1) - (x + 5)}{(x - 1)(x + 2)} =$$

$$\frac{x^{2} - 1 + x + 1 - x - 5}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x^{2} - 4}{(x-1)(x+2)} =$$

$$\frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x - 2}{x - 1}$$

۱۰.

$$x^{4} + x = x(x^{3} + 1) =$$

$$x(x + 1)(x^{2} - x + 1) \quad x + y + xy + 1 =$$

$$(x + 1) + y(x + 1) =$$

$$(x + 1)(y + 1)$$

و $(x + 1) =$ ب.م.م

$x(x + 1)(x^{2} - x + 1)(y + 1) =$ ک.م.م

ریاضی سال دوم

۱.

$$\frac{x - 2}{x + 2} + \frac{x}{x - 2} = \frac{8}{x^{2} - 4} \Rightarrow$$

$$\frac{(x - 2)^{2} + x(x + 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \frac{8}{x^{2} - 4} \Rightarrow$$

$$\frac{x^{2} - 4x + 4 + x^{2} + 2x}{x^{2} - 4} = \frac{8}{x^{2} - 4}$$ و

$$x^{2} - 4 \neq 0 \Rightarrow 2x^{2} - 2x + 4 = 8 \Rightarrow$$

$$2x^{2} - 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^{2} - x - 2 = 0$$

$\Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$ یا $x = -1$

پاسخ $x = 2$ غیر قابل قبول است؛ زیرا مخرج دو تا از کسرها را مساوی صفر می‌کند، لذا مجموعه جواب معادله به صورت $\{-1\}$ می‌باشد.

۲. برای آن که معادله فوق دارای دو ریشه حقیقی و متمایز باشد کافی است $\Delta > 0$ باشد و برای آن که هر دو ریشه منفی باشند، باید مجموع دو ریشه $(-\frac{b}{a})$ منفی و حاصلضرب دو ریشه $(\frac{c}{a})$ مثبت باشد:

$$x^{2} + 4x + a + 2 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4(a + 2) > 0 \Rightarrow 4(a + 2) < 16$$

$$\Rightarrow a + 2 < 4 \Rightarrow a < 2$$

و $-4 < 0$ = مجموع دو ریشه

$a + 2 > 0 \Rightarrow a > -2$ = حاصلضرب دو ریشه

و از اشتراک دو مجموعه، جواب فوق نتیجه می‌شود: $-2 < a < 2$

۳. کافی است نشان دهیم که دلتای سه‌جمله‌ای منفی و ضریب x^{2} مثبت است:

$$\Delta = 4(k^{2} - 1)^{2} - 4(k^{2} - k + 1)(k^{2} + k + 1) =$$

$$4\left[k^{4} - 2k^{2} + 1 - (k^{2} + 1)^{2} + k^{2}\right] =$$

$$4\left[k^{4} - 2k^{2} + 1 - k^{4} - 2k^{2} - 1 + k^{2}\right] =$$

$$4\left[-5k^{2}\right] = -20k^{2} < 0$$

ضریب x^{2} نیز سه جمله‌ای $k^{2} - k + 1$ است که این سه جمله‌ای نیز همواره مثبت است؛ زیرا دلتای آن $(1 - 4 < 0)$ و ضریب k^{2} نیز مثبت است. به این ترتیب حکم مسأله ثابت می‌شود.

۴. کافی است نشان دهیم:

$$fog(x) = gof(x) = x$$

$$fog(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x - 3})$$

$$(\sqrt[3]{x - 3})^{3} + 3 = x - 3 + 3 = x$$

$$gof(x) = g(f(x)) = g(x^{3} + 3) =$$

$$\sqrt[3]{x^{3} + 3 - 3} = \sqrt[3]{x^{3}} = x$$

۵. نشان می‌دهیم f یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1 + 3}{x_1 - 1} = \frac{2x_2 + 3}{x_2 - 1} \Rightarrow$$

$$(2x_1 + 3)(x_2 - 1) = (x_1 - 1)(2x_2 + 3) \Rightarrow$$

$$2x_1x_2 - 2x_1 + 3x_2 - 3 = 2x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2 - 3$$

$$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس f یک به یک و لذا وارون‌پذیر است. اکنون با تعویض نقش x و y و تعیین y، ضابطهٔ وارون f را نیز به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x + 3}{x - 1} \Rightarrow x = \frac{2y + 3}{y - 1}$$

$$\Rightarrow xy - x = 2y + 3$$

$$\Rightarrow (x - 2)y = x + 3 \Rightarrow y = \frac{x + 3}{x - 2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R} - \{1\} \\ f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2} \end{cases}$$

۶. باید داشته باشیم $x \ge 0$ و نیز $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \ge 0$؛ چون $\sqrt{x}+1 > 0$ (چرا؟) لذا کافی است، $\sqrt{x}-1 \ge 0$ باشد و از آن جا $\sqrt{x} \ge 1$ و $x \ge 1$، بنابراین داریم: $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \ , \ x \ge 1\}$

۷.

$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -4-3 = -7 \ne 0$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x=2 \ , \ y=1$$

۸. از قاعدهٔ گرامر استفاده می‌کنیم:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & m \\ 2 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -4 & m \\ m-1 & m \end{vmatrix}} = \frac{-2m-2m}{-4m-m^2+m} = \frac{-4m}{-m^2-3m}$$

حال برای آن که دستگاه دارای جواب نباشد، باید $-m^2-3m=0$ و $-4m \ne 0$ باشد.

$$-m^2-3m=0 \Rightarrow m(-m-3)=0$$

$$\Rightarrow m=0 \quad \text{یا} \quad m=-3$$

و چون باید $-4m \ne 0$ باشد، لذا تنها جواب $m=-3$ قابل قبول است.

۹. به ترتیب می‌نویسیم:

$$\frac{\text{cotg}170^\circ \ \text{cotg}100^\circ - \sin290^\circ \cos200^\circ}{\sin160^\circ \sin70^\circ} =$$

$$\frac{\text{cotg}(180-10)\text{cotg}(90+10)-\sin(270+20)\cos(180+20)}{\sin(180-20)\sin(90-20)} =$$

$$\frac{(-\text{cotg}10)(-\text{tg}10)-(-\cos20)(-\cos20)}{(\sin20)(\cos20)} =$$

$$\frac{\text{tg}10 \ \text{cotg}10 - \cos^2 20}{\sin20 \cos20} = \frac{1-\cos^2 20}{\sin20 \cos20} =$$

$$\frac{\sin^2 20}{\sin20 \cos20} = \frac{\sin20}{\cos20} = \text{tg}20$$

۱۰.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-x^2-x}{\Delta x} =$$

$$\frac{x^2+\Delta x^2+2x\Delta x+x+\Delta x-x^2-x}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta x(\Delta x+2x+1)}{\Delta x} =$$

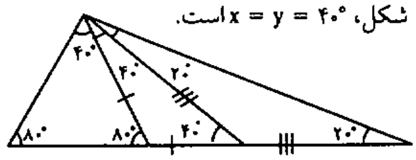
$\Delta x + 2x + 1$ و $\Delta x = 0$

$$\Rightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

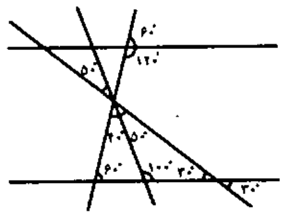
$$2x+1>0 \Rightarrow x > \frac{-1}{2}$$

هندسهٔ ۱

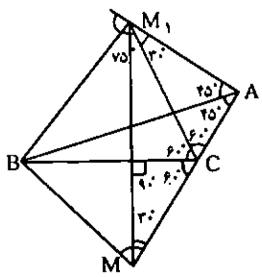
۱. با توجه به مثلثهای متساوی‌الساقین در شکل، $x = y = 40^\circ$ است.



۲. با توجه به تساوی زاویه‌های ایجاد شده بین دو خط متوازی و قاطعهای رسم شده اندازهٔ $x = 30^\circ$ و $y = 120^\circ$ و از آن جا $\frac{x}{y} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ است.

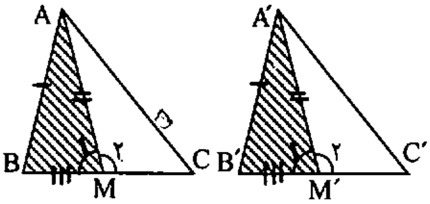


۳. قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به ضلع BC را M_1 می‌نامیم. از M_1 به B و C وصل می‌کنیم چون $B\hat{C}M = 60^\circ$ و $B\hat{C}A = 120^\circ$ است. به دلیل تقارن محوری $B\hat{C}M_1 = 60^\circ$ و از آن جا $M_1\hat{C}A = 60^\circ$ می‌باشد. از طرفی $M_1C = CM = 2AC$ است،



بنابراین مثلث M_1AC در رأس A قائمه، یعنی $M_1\hat{A}C = 90^\circ$ است. بنابراین $B\hat{A}C = B\hat{A}M_1 = 45^\circ$، یعنی BA نیمساز زاویهٔ درونی A از مثلث M_1AC است. از طرفی BC نیمساز زاویهٔ M_1CM، یعنی نیمساز برونی رأس C از مثلث M_1AC است. در نتیجه نقطهٔ B روی نیمساز خارجی زاویهٔ M_1 از مثلث M_1AC است که چون $C\hat{M}_1A = 30^\circ$ است، پس $B\hat{M}_1C = 75^\circ$ و در نتیجه $B\hat{M}C = 75^\circ$ است؛ زیرا $B\hat{M}C = B\hat{M}_1C$ است.

۴. در دو مثلث ABC و A'B'C' فرض می‌کنیم که $AB = A'B'$، $BC = B'C'$ و $AM = A'M'$ باشد. دو مثلث ABM و A'B'M'



به دلیل برابری سه ضلع، همنهشتند، زیرا $AB = A'B'$، $AM = A'M'$ و $BM = \frac{BC}{2} = \frac{B'C'}{2} = B'M'$ است. در نتیجه $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$ است. بنابراین $\hat{M}_2 = \hat{M}'_2$ و از آن جا دو مثلث AMC و A'M'C' به دلیل برابری دو ضلع و زاویهٔ بین آنها همنهشتند؛ زیرا $AM = A'M'$، $MC = \frac{BC}{2} = \frac{B'C'}{2} = M'C'$ و $\hat{M}_2 = \hat{M}'_2$. در نتیجه $AC = A'C'$ است. پس دو مثلث ABC و A'B'C' به دلیل تساوی سه ضلع، همنهشتند.

۵. چهار ضلعی BFDE به دلیل آن که دو قطرش منصف یکدیگرند، متوازی الاضلاع است که چون با هم مساوی نیز می‌باشند، پس مستطیل است.

۶. مثلث AFE در رأس F متساوی‌الساقین است. بنابراین $\hat{E} = \hat{A}$ (۱) است؛ از طرفی به دلیل متوازی‌الاضلاع بودن چهار ضلعی ABCD، $\hat{A} = \hat{C}$ (۲) است. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{E} = \hat{C}$، و حکم ثابت است.

۷. بنا به فرض مسأله داریم:

$$S_{ABCD} = S_{MNP}$$

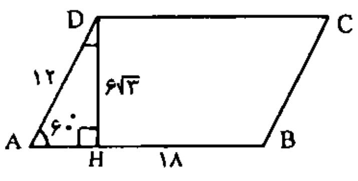
$$\Rightarrow AB \ . \ AD \sin60^\circ = \frac{1}{2} NP \times MH$$

$$\Rightarrow 18 \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 12 \times MH$$

$$\Rightarrow 108\sqrt{3} = 6MH \Rightarrow MH = \frac{108\sqrt{3}}{6}$$

$$\Rightarrow MH = 18\sqrt{3}$$

نکته. برای محاسبهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع ABCD می‌توانیم ارتفاع DH را رسم



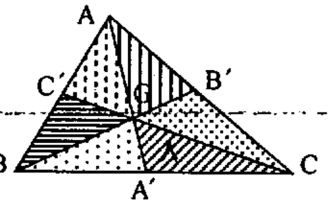
کنیم. در مثلث قائم الزاویهٔ ADH داریم:

$DH = AD \times \sin ۶۰^\circ = ۱۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳}$

از آن جا:

$S_{ABCD} = AB \times DH = ۱۸ \times ۶\sqrt{۳} = ۱۰۸\sqrt{۳}$

۸. می‌دانیم که میانه‌های هر مثلث، آن مثلث را به شش مثلث هم‌ارز افراز (تقسیم) می‌کنند



که مساحت هر کدام، $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث داده شده است. یعنی داریم:

$S_{GA'C} = S_{GA'B} = S_{GB'C} = S_{GB'A} = S_{GC'A} = S_{GC'B} = \frac{۱}{۶}S_{ABC}$

بنابراین خواهیم داشت:

$S_{ABC} = ۶S_{GA'C} = ۶ \times ۸ = ۴۸$

۹. دو مثلث DTS و ATU به دلیل برابری دو زاویه و ضلع بین، همنهشتند. زیرا داریم:

$\hat{D} = \hat{U}$ و $\hat{T} = \hat{T}$ و $DT = TU$

در نتیجه $AT = TS$ است. از آن جا:

$DT - AT = TU - TS \Rightarrow AD = SU$

۱۰. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) داریم:

$BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ = ۱۰۰ + ۵۷۶ = ۶۷۶$

$\Rightarrow BC = ۲۶$

از آن جا داریم:

$S_{مستطیل} = BC \times BD$

$\Rightarrow ۲۶۰ = ۲۶ \times BD \Rightarrow BD = ۱۰$

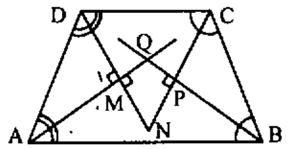
$\Rightarrow$ قطر مستطیل $= CD = \sqrt{BC^۲ + BD^۲}$

$= \sqrt{۶۷۶ + ۱۰۰} = \sqrt{۷۷۶}$

$\Rightarrow$ قطر مستطیل $= ۲\sqrt{۱۹۴}$

هندسهٔ ۲

۱. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD به قاعده‌های AB و CD را در نظر می‌گیریم و نیمسازهای زاویه‌های درونی آن را رسم می‌کنیم و چهار ضلعی حاصل از برخورد آنها را MNPQ می‌نامیم(شکل). چون $\hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{D} = ۱۸۰^\circ$ است، پس:



$\frac{\hat{B}}{۲} + \frac{\hat{C}}{۲} = \frac{\hat{A}}{۲} + \frac{\hat{D}}{۲} = ۹۰^\circ$

$\Rightarrow A\hat{M}D = B\hat{P}C = ۹۰^\circ$

$\Rightarrow Q\hat{M}N + Q\hat{P}N = ۹۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ$

بنابراین چهارضلعی MNPQ محاطی است.

از طرفی مثلثهای AQB و DNC متساوی‌الساقین و مثلثهای AMD و BPC همنهشتند. بنابراین MQ = PQ و MN = NP است. در نتیجه:

$QM + NP = QP + NM$

و بنابراین چهارضلعی MNPQ محیطی می‌باشد. پس چهارضلعی MNPQ هم محاطی و هم محیطی می‌باشد.

۲. بنا به ویژگی نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث داریم:

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۴}{DC} = \frac{۸}{۶} \Rightarrow DC = ۳ \Rightarrow$

$BC = DB + DC = ۴ + ۳ = ۷$

از آن جا محیط مثلث برابر است با:

$AB + AC + BC = ۸ + ۶ + ۷ = ۲۱$

۳. بنا به ویژگی نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث داریم:

$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{۲۱/۶}{۱۴/۴}$

$\Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow c = \frac{۳}{۲}b \qquad (۱)$

همچنین داریم:

$BC = DB + DC = ۲۱/۶ + ۱۴/۴ = ۳۶ = a$

$AB + AC + BC = ۸۶ \Rightarrow$

$c + b + a = ۸۶ \ (۲) \Rightarrow$

(۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{۳}{۲}b + b + ۳۶ = ۸۶$

$\Rightarrow \frac{۵}{۲}b = ۵۰ \Rightarrow b = ۲۰$

$\Rightarrow c = \frac{۳}{۲} \times ۲۰ = ۳۰$

۴. الف. **قضیه.** اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، آن گاه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

قضیهٔ عکس. اگر نقطه‌ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آن گاه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

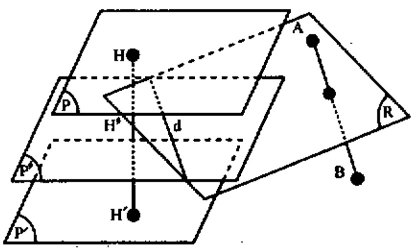
به طوری که می‌دانیم قضیه بالا و عکس آن هر دو درست هستند و می‌توانیم آن را به صورت **یک قضیه دو شرطی** بیان کنیم.

قضیه. شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، آن است که از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله باشد.

ب. **قضیه.** اگر دو چهارضلعی همنهشت باشند، آن گاه مساحت آنها برابر است.

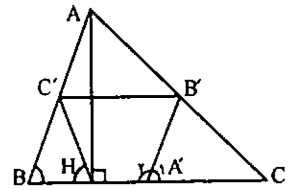
عکس قضیه. اگر دو چهارضلعی مساحتهای برابر داشته باشند آن‌گاه آن دو چهارضلعی همنهشتند. بدیهی است که عکس این قضیه درست نیست، یعنی یک قضیه درست نیست؛ زیرا دو چهارضلعی می‌توانند مساحتهای برابر داشته باشند، امّا همنهشت نباشند. به عنوان مثال یک مستطیل به ابعاد ۴ و ۹ با مربعی به ضلع ۶ معادل است، امّا همنهشت نیستند و یا متوازی‌الاضلاعی به ضلع ۱۲ و ارتفاع ۸ با ذوزنقه‌ای به قاعده‌های ۲۰ و ۲۸ و ارتفاع ۴ معادل است، امّا این دو چهار ضلعی همنهشت نیستند.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو صفحهٔ موازی P و P′ به یک فاصله است، صفحه‌ای است موازی این دو صفحه، بین این دو صفحه و به یک فاصله از آنهاست. این صفحه را P″ می‌نامیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. این صفحه را نیز رسم می‌کنیم و صفحهٔ R می‌نامیم.



فصل مشترک این صفحه با صفحهٔ P″ خط d جواب مسأله است. بدیهی است مسأله در صورتی جواب دارد که دو صفحهٔ R و P″ متوازی نباشند. در صورت انطباق این دو صفحه تمام نقطه‌های واقع در صفحهٔ مشترک جواب مسأله‌اند.

۶. نخست ثابت می‌کنیم که این چهارضلعی ذوزنقه است و سپس متساوی‌الساقین بودن آن را ثابت می‌کنیم:



پاره‌خط $B'C'$ که وسط‌های دو ضلع AC و AB را به هم وصل می‌کند موازی BC است. بنابراین چهارضلعی $A'B'C'H$ ذوزنقه است. از طرفی $A'B'$ موازی AB است پس (۱) $\hat{A'}_۱ = \hat{B}$ است. از طرفی در مثلث قائم الزاویهٔ ABH ، HC' میانه وارد بر وتر است. پس مساوی نصف آن می‌باشد. در نتیجه مثلث BHC' متساوی‌الساقین است یعنی (۲) $\hat{B} = B\hat{H}C'$ است. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\hat{A'}_۱ = B'\hat{H}C'$ است. در نتیجه مکمل‌های این دو زاویه نیز برابرند، یعنی $B'\hat{A'}H = C'\hat{H}A'$ و بنابراین ذوزنقه $A'B'C'H$ متساوی‌الساقین است.

۷. میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس $AM = MB = MC = ۶$ است. از طرفی مثلث AMB متساوی‌الاضلاع است؛ زیرا $B\hat{A}M = ۶۰°$ است، بنابراین $AB = BM = AM = ۶$ است. از آن جا داریم:

$BC = ۱۲$ و $AB^۲ + AC^۲ = BC^۲$

$\Rightarrow ۳۶ + AC^۲ = ۱۴۴ \Rightarrow AC^۲ = ۱۰۸$

$\Rightarrow AC = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB \,.\, AC$

$= \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۶\sqrt{۳} = ۱۸\sqrt{۳}$

۸. از نقطهٔ M به O مرکز دایره وصل می‌کنیم. داریم:

$OM = \sqrt{OT^۲ + MT^۲} = \sqrt{۳۶ + ۶۴} = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰ =$ مقدار ثابت

چون نقطهٔ O ثابت است؛ پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۱۰ است.

۹. زاویهٔ $O\hat{M}T = ۳۰°$ و زاویهٔ $O\hat{T}M = ۹۰°$ است. پس در مثلث قائم الزاویهٔ OMT داریم:

$OM = ۲OT = ۲ \times ۱۲ = ۲۴ \Rightarrow$

$MT = \sqrt{OM^۲ - OT^۲} = \sqrt{۲۴^۲ - ۱۲^۲} =$

$\sqrt{۵۷۶ - ۱۴۴} = \sqrt{۴۳۲} = ۱۲\sqrt{۳}$

همچنین در مثلث قائم الزاویه OTH $(\hat{H} = ۹۰°)$ داریم: $O\hat{T}H = O\hat{M}T = ۳۰°$

$\Rightarrow OH = \frac{OT}{۲} = \frac{۱۲}{۲} = ۶$

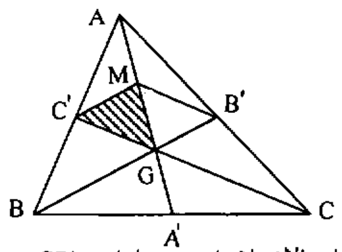
$\Rightarrow TH = \sqrt{OT^۲ - OH^۲} = \sqrt{۱۲^۲ - ۶^۲}$

$= \sqrt{۱۴۴ - ۳۶} = \sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$

$\Rightarrow TT' = ۲TH = ۲ \times ۶\sqrt{۳} = ۱۲\sqrt{۳}$

نکته. چون مثلث TMT' متساوی‌الساقین $(MT = MT')$ و زاویهٔ رأس آن $T\hat{M}T' = ۶۰°$ است، پس متساوی‌الاضلاع است. بنابراین $TT' = MT = MT' = ۱۲\sqrt{۳}$ است. از این ویژگی برای محاسبهٔ TT' نیز می‌توان استفاده کرد.

۱۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانه‌های AA' ، BB' و CC' را رسم کرده، محل تلاقی آنها را G می‌نامیم. وسط پاره‌خط GA را M نامیده از M به B' و C' وصل می‌کنیم. چهار ضلعی $GB'MC'$ که قطرهای آن منصف یکدیگرند،



متوازی‌الاضلاع است. بنابراین $MC' = GB'$ است. در نتیجه مثلث GMC' با معلوم بودن اندازهٔ سه‌ضلعش قابل رسم است. زیرا داریم

$MC' = GB' = \frac{۱}{۳} BB' = \frac{۱}{۳} m_b$ و

$GC' = \frac{۱}{۳} CC' = \frac{۱}{۳} m_c$ و

$GM = \frac{۱}{۲} GA = \frac{۱}{۳} AA' = \frac{۱}{۳} m_a$. بنابراین

برای رسم مثلث ABC نخست مثلث GMC' را با معلوم بودن اندازهٔ سه‌ضلعش رسم می‌کنیم. سپس MG را از دو طرف به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطه‌های A و A' به دست آیند. از A به C' وصل کرده به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا رأس B به دست آید. از B به A' وصل می‌کنیم و به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا رأس C به دست آید. از C به A وصل می‌کنیم مثلث ABC جواب مسأله است.

جبر و احتمال

۱.ابتدا صحیح بودن حکم را به ازای $n = ۱$ نشان می‌دهیم.

$n = ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲ \times ۵} = \frac{۱}{۲(۳ + ۲)} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۱۰}$

سپس فرض می‌کنیم حکم به ازای $n = k$ صحیح باشد:

فرض استقرا: $n = k \Rightarrow \frac{۱}{۲ \times ۵} + \frac{۱}{۸ \times ۱۱} + \frac{۱}{۸ \times ۱۱} + ... + \frac{۱}{(۳k - ۱)(۳k + ۲)} = \frac{k}{۲(۳k + ۲)}$

حال ثابت می‌کنیم حکم به ازای $n = k + ۱$ نیز صحیح است:

حکم استقرا: $n = k + ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲\times۵} + \frac{۱}{۸\times۱۱} + \frac{۱}{۸ \times ۱۱} + ... + \frac{۱}{(۳k - ۱)(۳k + ۲)} + \frac{۱}{(۳k + ۲)(۳k + ۵)} = \frac{k + ۱}{۲(۳k + ۵)}$

برای اثبات این حکم، کافی است مجموع k جملهٔ اول را از فرض استقرا جایگزین کنیم و صحیح بودن برابری زیر را اثبات نماییم:

$$\frac{k}{۲(۳k + ۲)} + \frac{۱}{(۳k + ۲)(۳k + ۵)} = \frac{k + ۱}{۲(۳k + ۵)}$$

اثبات برابری اخیر نیز به سادگی و با جمع دو کسر سمت چپ انجام می‌شود:

$$\frac{k}{۲(۳k + ۲)} + \frac{۱}{(۳k + ۲)(۳k + ۵)} =$$

$$\frac{k(۳k + ۵) + ۲}{۲(۳k + ۲)(۳k + ۵)} = \frac{۳k^۲ + ۵k + ۲}{۲(۳k + ۲)(۳k + ۵)} =$$

$$\frac{۳k^۲ + ۳k + ۲k + ۲}{۲(۳k + ۲)(۳k + ۵)} =$$

$$\frac{۳k(k + ۱) + ۲(k + ۱)}{۲(۳k + ۲)(۳k + ۵)} = \frac{k + ۱}{۲(۳k + ۵)}$$

۲. صحیح بودن حکم به ازای $n = ۱$ واضح است:

$n = ۱ \Rightarrow (۱ + \sqrt{۲})^۱ \geq ۱ + \sqrt{۲}$

با فرض صحیح بودن حکم به ازای $n = k$ نتیجه می‌شود:

فرض‌استقرا: $n = k \Rightarrow (۱ + \sqrt{۲})^k \geq ۱ + \sqrt{۲}k$

حال باید صحیح بودن حکم به ازای $n = k + ۱$ با فرض صحیح بودن به ازای $n = k$ ثابت شود؛ یعنی:

حکم استقرا: $n = k + ۱ \Rightarrow (۱ + \sqrt{۲})^{k+۱} \geq ۱ + \sqrt{۲}\,(k + ۱)$

با ضرب دو طرف فرض در $(1+\sqrt{2})$ نتیجه می‌شود:

$$(1+\sqrt{2})^{k+1} \ge (1+\sqrt{2}k)(1+\sqrt{2})$$

اینک با توجه به این فرض و برای اثبات حکم، کافی است که صحیح بودن نابرابری زیر ثابت شود:

$$(1+\sqrt{2}k)(1+\sqrt{2}) \ge 1+\sqrt{2}(k+1)$$

که اثبات این نامساوی نیز به کمک استدلال برگشتی و به صورت زیر، مقدور است:

$$(1+\sqrt{2}k)(1+\sqrt{2}) \ge 1+\sqrt{2}(k+1)$$
$$\Rightarrow 1+\sqrt{2}+\sqrt{2}k+2k \ge 1+\sqrt{2}k+\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow 2k \ge 0 \Rightarrow k \ge 0$$

که صحیح بودن حکم اخیر واضح است. برگشت‌پذیر بودن مراحل، به سادگی روشن است.

۳. صحیح بودن حکم، به ازای $n=1$ برقرار است: $4^2-1=15=5\times 3$

حال فرض می‌کنیم حکم به ازای $n=k$ صحیح باشد و داشته باشیم: $5r=4^{2k}-1$ و ثابت می‌کنیم $5r'=4^{2(k+1)}-1$ و برای این منظور، دو طرف فرض را در 4^2 ضرب می‌کنیم:

$$4^{2k}-1=5r \Rightarrow 4^2(4^{2k}-1)=80r$$
$$\Rightarrow 4^{2k+2}-16=80r$$
$$4^{2(k+1)}-1=15+80r=5\underbrace{(3+16r)}_{r'}=5r'$$

۴. فرض می‌کنیم n^2 مضرب ۵ بوده و n مضرب ۵ نباشد؛ پس باید در تقسیم بر ۵، به باقیمانده‌ای غیر از صفر و کوچک‌تر از ۵ برسد؛ یعنی داریم:

$$n=5q+r\ ,\ 0<r<5$$

از این جا داریم:

$$n^2=25q^2+10rq+r^2=$$
$$5(5q^2+2rq)+r^2=5r+r^2$$

اما به سادگی و با امتحان، می‌توان تحقیق کرد که $0<r<5$ (یعنی ۴، ۳، ۲، ۱ = r) باشد، هرگز r^2 مضرب ۵ نخواهد شد؛ بنابراین n^2 مضرب ۵ نیست و این خلاف فرض است.

۵. الف ـ در روش برهان خُلف، حکم را ناصحیح فرض کرده و بر این اساس و به کمک این فرض و قضایای دیگر، به نتیجه‌ای ناصحیح یا خلاف فرض می‌رسیم.

ب ـ از برهان خُلف کمک می‌گیریم، فرض کنیم $a-\sqrt{3}$ عددی گویا باشد، بنابراین می‌توان آن را به صورت یک کسر گویا نوشت: $a-\sqrt{3}=\frac{p}{q}$

و چون $a\in Q$، بنابراین $a=\frac{m}{n}$ و از آن جا:

$$\sqrt{3}=-\frac{p}{q}+\frac{m}{n}=\frac{-np+mq}{nq}=\frac{r}{s}$$

یعنی $\sqrt{3}$ را نیز می‌توان به صورت یک کسر گویا نوشت و این با فرض گنگ بودن عدد $\sqrt{3}$ متناقض است.

۶. از برهان خُلف کمک می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\sqrt{3}$ گویا باشد. در این صورت، حتماً می‌توان $\sqrt{3}$ را مساوی با یک کسر گویای ساده شده که صورت و مخرج آن نسبت به هم اوّل هستند، تبدیل کرد؛ یعنی:

$$\sqrt{3}=\frac{p}{q}\ ,\ (p\ ,\ q)=1$$

($(p\ ,\ q)$ یعنی بزرگترین مقسوم علیه مشترک دوُ عدد p و q) و از آن جا داریم:

$$p=\sqrt{3}q \Rightarrow p^2=3q^2$$

و از آن جا p^2 مضرب ۳ است، لذا p نیز مضرب ۳ است (این موضوع را در انتها اثبات می‌کنیم)؛ یعنی می‌توان نوشت: $p=3k$ و از جایگذاری این مقدار در تساوی $p^2=3q^2$، خواهیم داشت:

$$p^2=3q^2 \Rightarrow (3k)^2=3q^2 \Rightarrow$$
$$9k^2=3q^2 \Rightarrow q^2=3k^2$$

یعنی q^2 مضرب ۳ است. پس q هم مضرب ۳ است؛ یعنی: $q=3k'$

بنابراین p و q هر دو مضرب ۳ شدند و این با اوّل بودن آنها نسبت به هم تناقض دارد؛ چرا که در این صورت، حداقل داریم: $(p\ ,\ q)=3$

در حلّ این مسأله، از این موضوع استفاده کردیم که اگر مربع عددی مضرب ۳ باشد، خود این عدد نیز مضرب ۳ است. اثبات این موضوع نیز به کمک برهان خُلف در زیر می‌آید:

فرض کنیم $x^2=3k$، می‌خواهیم ثابت کنیم $x=3t$، فرض کنیم x مضرب ۳ نباشد، پس باقیماندهٔ تقسیم آن بر ۳، مساوی یک و یا دو است؛ یعنی $x=3t+1$ یا $x=3t+2$ که در این صورت خواهیم داشت:

$$x=3t+1 \Rightarrow x^2=9t^2+6t+1=$$
$$3\overbrace{(3t^2+2t)}^{k}+1=3k+1$$
$$x=3t+2 \Rightarrow x^2=9t^2+12t+4=$$
$$3(3t^2+4t+1)+1=3k+1$$

که در هر دو صورت، x^2 مضرب ۳ نخواهد بود و این خلاف فرض است که $x^2=3k$، بنابراین x باید مضرب ۳ باشد.

۷. آنچه باید اثبات شود، به صورت زیر است:

$$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$$

و برای این منظور می‌نویسیم:

$$(x-y)^2\ge 0 \Rightarrow x^2+y^2-2xy\ge 0 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2\ge 2xy \Rightarrow xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$$

۸. حکم (الف) صحیح نیست. مثال‌های نقض بسیاری می‌توان نوشت؛ به عنوان مثال، با فرض $x=2-\sqrt{3}$ و $y=2+\sqrt{3}$ که هر دو عددهایی گنگ هستند، داریم:

$$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$$

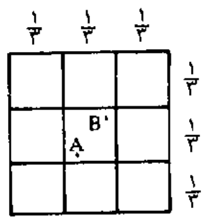
یعنی xy عددی گویاست (و گنگ نیست) ولی حکم (ب) همیشه صحیح است. برای اثبات به کمک استدلال استنتاجی، فرض می‌کنیم x و y دو عدد گویا باشند.

$$x=\frac{m}{n}\ (m\ ,n\in Z\ ,n\neq 0)\ ,\ y=\frac{p}{q}$$
$$(p\ ,q\in Z\ ,\ q\neq 0) \Rightarrow$$
$$x+y=\frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{mq+np}{nq}=\frac{a}{b}$$
$$(a\ ,b\in Z\ ,b\neq 0) \Rightarrow x+y\in Q$$

لازم به ذکر است که فرض $a\ ,b\in Z$ با توجه به بسته بودن مجموعهٔ Z نسبت به دو عمل جمع و ضرب نتیجه‌گیری شده است و نیز فرض $b\neq 0$ با توجه به آن که $q\neq 0$ و n به دست آمده است.

۹. چون ۷ مهره در سه رنگ مختلف داریم، بنابراین طبق تعمیم یافتهٔ اصل لانه کبوتری، سه تا از این مهره‌ها همرنگ هستند (زیرا اگر ۷ کبوتر به سمت سه لانه پرواز کنند، حدّاقل سه تای آنها وارد یک لانه می‌شوند)، پس سه تا از این مهره‌ها یک رنگ دارند. اکنون وقتی هفت مهره را در دو جعبه قرار می‌دهیم، این سه مهره باید وارد دو جعبه شوند و دوباره به کمک اصل لانه کبوتری، دوتای آنها باید وارد یک جعبه شوند، لذا در یکی از جعبه‌ها حدّاقل دو مهره همرنگ هستند.

۱۰. مطابق شکل، با رسم خطوط موازی، مربع را به ۹ مربع کوچک به ضلع $\frac{1}{3}$ تفکیک می‌کنیم. اکنون ۱۰ نقطه درون این مربع انتخاب کرده‌ایم. طبق اصل لانه کبوتری، حدّاقل دو نقطه از این نقاط، درون یکی از مربع‌های کوچک واقع می‌شوند و فاصلهٔ این دو نقطه، کوچک‌تر از طول قطر این مربع‌هاست. برای مثال، اگر این دو نقطه مطابق شکل نقاط A و B باشند، می‌توان نوشت:



$$AB < \sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} \Rightarrow AB < \sqrt{\frac{2}{9}} \Rightarrow AB < \frac{\sqrt{2}}{3}$$

حسابان

۱. الف ـ برای یافتن دامنهٔ تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ دو شرط را باید در نظر گرفت؛ یکی این که مخرج کسر صفر نشود و دیگر این که زیر رادیکال با فرجهٔ زوج منفی نشود؛ پس:

$$D_f=\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{|x|-x} \neq 0 \text{ و } |x|-x>0\}$$

اکنون کافی است نامعادلهٔ $|x|>x$ و $|x|-x \neq 0$ را حل کنیم. این نامعادله‌ها به ازای $x \geq 0$ برقرار نیست و به ازای $x<0$ برقرار است.

$$\begin{cases} x<0 \longrightarrow |x|>x \\ x \geq 0 \longrightarrow |x|=x \end{cases}$$

پس: $D_f=\{x \in \mathbb{R} : x<0\}=(-\infty,0)$

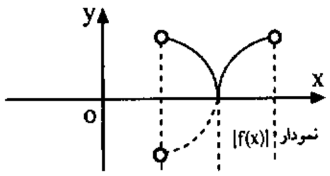
۲. چون $-x^2+2x=-(x^2-2x)$، با انتخاب $y=-x^2+2x$ داریم $|y|=-y$؛ بنابراین باید $y \leq 0$، یعنی نامعادلهٔ $-x^2+2x \leq 0$ را حل می‌کنیم.

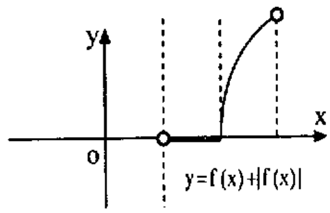
$$x(-x+2) \leq 0 \longrightarrow x=0 \text{ یا } x=2$$

x		۰		۲	
$-x+2$	+		+		−
x	−		+		+
$-x^2+2x$	− جواب		+		− جواب

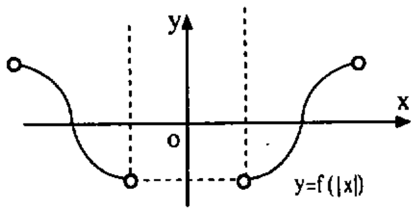
پس جواب به صورت $(-\infty,0] \cup [2,+\infty)$ است.

۳. الف ـ نمودار $|f(x)|$ را رسم و با نمودار $f(x)$ در راستای محور yها جمع می‌کنیم.





ب ـ برای رسم نمودار $f(|x|)$ نمودار $f(x)$ نسبت به محور yها تقارن پیدا می‌کند.



۴. $g(x)=1-\sqrt{x}\ ,\ fog(x)=x-1$

با فرض $t=1-\sqrt{x}$ داریم:

$$f(1-\sqrt{x})=x-1$$

$$\sqrt{x}=1-t \longrightarrow x=(1-t)^2$$

پس: $f(t)=(1-t)^2-1=1+t^2-2t-1$

$f(t)=t^2-2t$ یا $\boxed{f(x)=x^2-2x}$

۵. ابتدا عبارت $\sin x+\sqrt{3}\cos x$ را ساده و به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$\sin x+\sqrt{3}\cos x=\sin x+\tan\frac{\pi}{3}\cos x$$

$$=\sin x+\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\cdot\cos x$$

$$=\frac{\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sin(x+\frac{\pi}{3})}{\frac{1}{2}}=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$$

از طرفی: $-1 \leq \sin(x+\frac{\pi}{3}) \leq 1$

پس: $-2 \leq 2\sin(x+\frac{\pi}{3}) \leq 2$

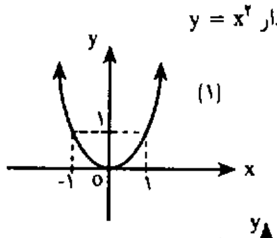
یا $-2 \leq y \leq 2$

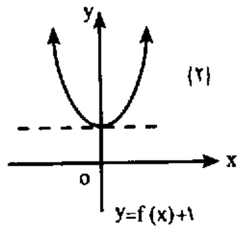
بنابراین مقدار ماکزیمم y، ۲ و مقدار می‌نیمم y، ۲− است.

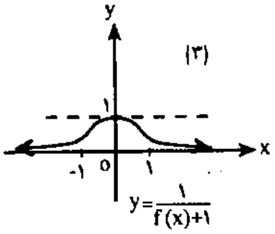
نکته. اگر $y=a\sin x+b\cos x$ آن گاه $\sqrt{a^2+b^2}$ مقدار ماکزیمم و $-\sqrt{a^2+b^2}$ مقدار می‌نیمم y است.

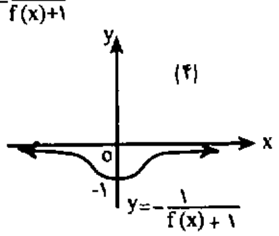
۶. مراحل رسم، به ترتیب به صورت زیر است:

الف ـ نمودار $y=x^2$





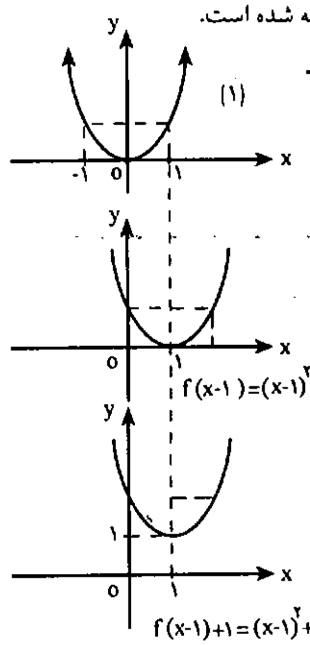




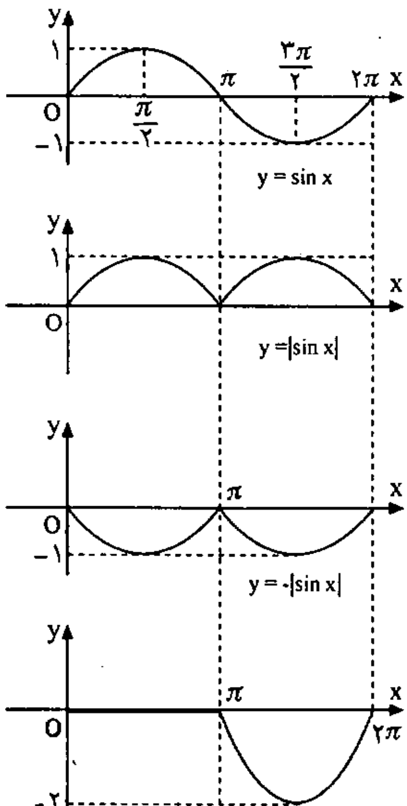
توضیح این که برای رسم نمودار $f(x)=x^2+1$ نمودار x^2 یک واحد به سمت بالای محور yها انتقال یافته است. برای رسم نمودار $\frac{1}{f(x)+1}$،

نمودار $\frac{1}{y}$ که $y = x^2 + 1$ رسم شده است، یعنی yها، معکوس شده‌اند، و برای رسم نمودار $-\frac{1}{f(x)+1}$، نمودار $y = \frac{1}{f(x)+1}$ نسبت به محور xها قرینه شده است.

ب-



۷. $f(x) = \sin x - |\sin x|$



۸. چند جمله‌ای درجه ۳ را به صورت f(x) در نظر می‌گیریم. چون بر $(x + 1)^2$ بخش‌پذیر است، پس:

$f(x) = (x+1)^2 (cx + d) =$

$cx^3 + (2c + d)x^2 + (c + 2d)x + d \quad (1)$

از طرفی:

$f(x) = (x^2 - x)(mx + n) + 7x + 1$

$= mx^3 + (n - m)x^2 + (7 - n)x + 1 \quad (2)$

از مقایسهٔ (۱) و (۲) داریم:

$m = c, d = 1$

پس: $\begin{cases} 2c + d = n - m \\ c + 2d = 7 - n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + 1 = n - m \\ m + 2 = 7 - n \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3m - n = -1 \\ m + n = 5 \end{cases} \longrightarrow 4m = 4$ و $\boxed{m = 1}$ $\boxed{m = 4}$

پس: $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

۹. $\left|f(x) - (-2)\right| = \left|\frac{x^2 - 1}{x + 1} - (-2)\right|$

$= \left|\frac{x^2 - 1}{x + 1} + 2\right| = \left|\frac{x^2 - 1 + 2x + 2}{x + 1}\right|$

$= \left|\frac{(x+1)^2}{x + 1}\right| = |x + 1| < \frac{1}{100}$

$-\frac{1}{100} < x + 1 < \frac{1}{100} \longrightarrow$

$-\frac{1}{100} - 1 < x < \frac{1}{100} - 1$

پس: $\frac{-101}{100} < x < \frac{-99}{100}$

۱۰. الف- $\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

از روش گویا کردن حل می‌کنیم تا عامل ابهام از بین برود.

$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1} =$

$\lim_{x\to1} \frac{(\sqrt[3]{x} - 1)(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})} =$

$\lim_{x\to1} \frac{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x})} =$

$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3}$

ب- $\lim_{x\to2} \frac{x^5 - 32}{x^2 - 4} =$

$\lim_{x\to2} \frac{(x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)}{(x - 2)(x + 2)} =$

$\frac{5 \times 16}{4} = 20$

ج- $\lim_{x\to2^-} \frac{[x + [x + [x]]]}{[-x] - 4} =$

$\lim_{x\to2^-} \frac{3[x]}{[-x] - 4} = \lim_{x\to2^-} \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$

توجه: $x \to 2^- \equiv x < 2 \equiv -x > -2 \to \begin{matrix} [x] = 1 \\ [-x] = -2 \end{matrix}$

ریاضی سال سوم تجربی

۱. الف- $A =]-\infty, 1] \cup]2, +\infty[$

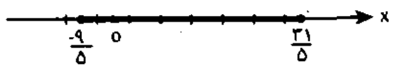
ب- I) $B = \{x \mid x \in R, -3 < x \le 2\}$

II) $C = \{x \mid x \in R, x \ge -2\}$

۲. داریم:

$-1 < \frac{15x + 5 - 6}{10} \le 3 \Rightarrow -10 < 15x - 1 \le 30$

$\Rightarrow -9 < 15x \le 31 \Rightarrow \frac{-9}{5} < x < \frac{31}{5}$



۳. داریم:

$0 < 1 \Rightarrow f(0) = -(0) + 4 = 4$

$\sqrt{2} - 1 < 1 \Rightarrow f(\sqrt{2} - 1) =$

$-(\sqrt{2} - 1) + 4 = -\sqrt{2} + 5$

$\sqrt{2} + 1 > 1 \Rightarrow f(\sqrt{2} + 1) =$

$(\sqrt{2} + 1)^2 + 1 = 4 + 2\sqrt{2}$

$-1 < 1 \Rightarrow f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

$f(1) = 6 \Rightarrow f(1)(-1) = 5 \times 6 = 30$

۴. داریم:

$f(\frac{\pi}{6}) = \sin(2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \sin 0 = 0$

$f(\frac{\pi}{3}) = \sin(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f(0) = \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1$

۵. عددهای ۱-، ۰ و ۱ ریشه‌های معادلهٔ برخورد دو تابع داده شده‌اند. پس باید در آن معادله صدق کنند. بنابراین می‌توان نوشت:

$\begin{cases} y = x^3 - 3x + c \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^3 - 3x + c = ax + b \Rightarrow$

$x^3 - (3 + a)x + c - b = 0$

معادله طولهای نقطه‌های برخورد

$x = 1 \xrightarrow{\text{در معادله}} 1 - 3 - a + c - b = 0$

$\Rightarrow a + b - c = -2 \quad (1)$

$x = 0 \xrightarrow{\text{در معادله}} c - b = 0 \Rightarrow c = b \quad (2)$

$x = -1 \xrightarrow{\text{در معادله}} -1 + 3 + a + c - b = 0$

$\Rightarrow a + c - b = -2 \quad (3)$

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$a = -۲$ و $b = c$

به طوری که دیده می‌شود شرط جواب مسأله آن است که $a = -۲$ و $b = c$ باشد، بدیهی است که این بدین معناست که کافی است $b = c \in \mathbb{R}$ باشد.

۶. الف ـ دامنهٔ این تابع $f(x) = \frac{x^۲ + x + ۲}{\sqrt{۱ - |x|}}$ مقدارهایی از x است که زیر رادیکال مثبت باشد؛ یعنی داشته باشیم: $۱ - |x| > ۰$

$\Rightarrow |x| < ۱ \Rightarrow -۱ < x < ۱$

ب ـ دامنهٔ این تابع $g(x) = \log_{x-۱}(۹ - x^۲)$ جواب دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} ۹ - x^۲ > ۰ \\ x - ۱ > ۰ \end{cases}$$

از آن جا داریم:

$$\begin{cases} ۹ - x^۲ > ۰ \\ x - ۱ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^۲ < ۹ \\ x > ۱ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -۳ < x < ۳ \\ x > ۱ \end{cases} \Rightarrow ۱ < x < ۳$$

۷. با توجه به ضابطه‌های داده شده برای دو تابع f و g داریم:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) =$

$$\begin{cases} ۲x^۲ + x - x^۲ - x \ , \ x > ۳ \\ ۳x + ۱ - ۳x + ۴ \ , \ x \leq ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = \begin{cases} x^۲ \ , \ x > ۳ \\ ۵ \ , \ x \leq ۳ \end{cases}$$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) =$

$$\begin{cases} ۲x^۲ + x + x^۲ + x \ , \ x > ۳ \\ ۳x + ۱ + ۳x - ۴ \ , \ x \leq ۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) - g(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + ۲x \ , \ x > ۳ \\ ۶x - ۳ \ , \ x \leq ۳ \end{cases}$$

۸. با استفاده از دو تابع f و g، تابع (gof) را محاسبه و با (gof) داده شده در مسأله، متحد قرار می‌دهیم:

$f(x) = x + ۱ \ , \ g(x) = ax^۲ + bx + c$ و

$(gof)(x) = -۲x^۲ - x \Rightarrow (gof)(x) =$

$g(f(x)) = a(x + ۱)^۲ + b(x + ۱) + c \Rightarrow$

$(gof)(x) = ax^۲ + (۲a + b)x + a + b + c$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ ۲a + b = -۱ \\ a + b + c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۲ \\ b = ۳ \\ c = -۱ \end{cases}$$

۹. الف ـ دامنهٔ این تابع $x \geq ۲$ است. بنابراین وقتی $x \to ۲^-$، این تابع حد چپ ندارد؛ امّا حد راست دارد و مقدار آن برابر صفر است؛ زیرا داریم:

$$\lim_{x \to ۲^+} \sqrt{x - ۲} = ۰$$

بنابراین تابع $f(x) = \sqrt{x - ۲}$ وقتی $x \to ۲$، دارای حد نیست.

ب ـ چون $\frac{\pi}{۶} < \frac{\pi}{۳}$ است، با توجه به ضابطهٔ داده شده برای تابع f داریم:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۳}} f(x) = f(\frac{\pi}{۳}) = \sin ۲(\frac{\pi}{۳}) = \sin \frac{۲\pi}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۰. با توجه به قانون داده شده برای تابع f داریم:

$$\lim_{x \to -۲^+} f(x) = a(-۲)^۲ + b(-۲) - ۱ = ۵$$

$$\Rightarrow ۴a - ۲b = ۶ \qquad (۱)$$

$$\lim_{x \to -۲^-} f(x) = -۲(-۲)^۲ + a = -۶$$

$$\Rightarrow -۸ + a = -۶ \Rightarrow a = ۲ \qquad (۲)$$

(۱) و $(۲) \Rightarrow ۸ - ۲b = ۶ \Rightarrow$

$۲b = ۲ \Rightarrow b = ۱$

پاسخ تشریحی پرسش‌های چهارگزینه‌ای

ریاضی عمومی ۱

۱. پاسخ صحیح گزینهٔ (۲) است. اگر A پیشامد آن باشد که خانواده دارای ۳ فرزند دختر باشد و B پیشامد همجنس بودن فرزندان اول و آخر باشد، هدف مسأله تعیین $p(A|B)$ می‌باشد و برای تعیین $p(A|B)$ باید $p(A \cap B)$ و $p(B)$ را به دست آورد. $p(B)$ احتمال همجنس بودن فرزندان اول و آخر (هر دو پسر و یا هر دو دختر) است که به کمک قضیهٔ احتمال کل به دست می‌آید:

$$p(B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

و $p(A \cap B)$، احتمال آن است که فرزندان اول و آخر همجنس و سه فرزند دختر باشند که این تنها به دو صورت ممکن است. فرزندان اول و دوم و چهارم دختر باشند و یا فرزندان اول و سوم و چهارم دختر باشند و به این ترتیب داریم:

$$p(A \cap B) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} +$$

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱}{۸}$$

$$\Rightarrow p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۴}$$

۲. پاسخ صحیح گزینهٔ (۱) است.

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{نشان دسته اول} - \text{نشان دسته دوم}}{۲} =$$

$$\frac{۱۶ - ۸}{۲} = ۴$$

$۳۶ = ۴ \times (۱ - ۱۰) =$ فاصله دسته دهم از دسته اول

$\Rightarrow$ نشان دسته دهم $= ۸ + ۳۶ = ۴۴$

۳. پاسخ صحیح گزینهٔ (۴) است. برای تعیین احتمال آن که کمتر از دو نفر دچار عوارض جانبی شوند، یعنی ۰ یا ۱ نفر دچار عارضه شوند از دستور توزیع احتمال دوجمله‌ای استفاده می‌کنیم:

$$p(A) = \binom{۶}{۱}(۰/۱)^۱(۰/۹)^۵ + \binom{۶}{۰}(۰/۱)^۰(۰/۹)^۶$$

$$= ۰/۶ \times ۰/۹^۵ + ۰/۹^۶ = ۰/۹^۵ (۰/۶ + ۰/۹)$$

$$= ۱/۵ \times ۰/۹^۵$$

۴. پاسخ صحیح گزینهٔ (۲) است. اگر A پیشامد آن باشد که اتومبیل تصادف کند و B پیشامد ناهموار بودن جاده باشد، می‌توان نوشت:

$p(A) = ۰/۰۵ \ , \ p(A|B) = ۰/۱۵ \ ,$

$p(B) = ۰/۲۰$

$p(A) \times p(B|A) = p(B) \times p(A|B) \Rightarrow$

$$p(B|A) = \frac{۰/۲۰ \times ۰/۱۵}{۰/۰۵} = ۰/۶۰$$

۵. گزینهٔ (۴) درست است. با فرض $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ و $P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$ در معادلهٔ فوق داریم:

$$\frac{\alpha^۳ - \beta^۳}{\alpha^۲ - \beta^۲} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^۲ + \alpha\beta + \beta^۲)}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} =$$

$$\frac{\alpha^۲ + \alpha\beta + \beta^۲}{\alpha + \beta} = \frac{(\alpha + \beta)^۲ - \alpha\beta}{\alpha + \beta} =$$

$$\alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} = S - \frac{P}{S} = -۴ - \frac{-۱}{-۴} =$$

$$-۴ - \frac{۱}{۴} = -\frac{۱۷}{۴}$$

۶. گزینهٔ (۳) درست است.

$$\begin{cases}-x_1 + x_2 + x_3 = -1\\ x_1 - x_2 + x_3 = 5\\ x_1 + x_2 - x_3 = 9\end{cases}$$

سه رابطه را با هم جمع می‌کنیم $x_1 + x_2 + x_3 = 13$

۷. گزینهٔ (۲) درست است. مختصات محل تلاقی $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) و خط $y = 2x + m$ را پیدا می‌کنیم و جواب‌ها را در معادله خط $y = mx + 2$ قرار می‌دهیم، جواب‌های حاصل ۱- و ۲ است. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

$$\begin{cases}y = 2x + m\\ y = x\end{cases} \Rightarrow A\begin{vmatrix}-m\\-m\end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$-m = -m^2 + 2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}m=-1\\ m=2\end{cases}$$

۸. گزینهٔ (۳) درست است، جملهٔ $k + 1$ ام از بسط $(a + b)^n$ از دستور $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ به دست می‌آید. بنابراین جملهٔ یازدهم بسط $\left(3x^2 - \frac{4}{x^3}\right)^n$ برابر است با:

$$T_{11} = \binom{n}{10} (3x^2)^{n-10} \left(-\frac{4}{x^3}\right)^{10}$$

و لذا نمای x در این عبارت برابر است با: $2(n - 10) - 30$ و در جمله فاقد x نمای x مساوی صفر است، بنابراین داریم:

$$2n - 20 - 30 = 0 \Rightarrow n = 25$$

۹. گزینهٔ (۲) درست است.

$$\log_x^{(2x+1)} - \log_x^{(x-2)} = \log_x^{\frac{2x+1}{x-2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2x + 1}{x - 2} = x$$

$$x^2 - 2x = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$\Delta = 16 + 4 = 20 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

از این دو جواب، پاسخ $x = \frac{4 - \sqrt{20}}{2}$ غیرقابل‌قبول است، زیرا در دامنهٔ عبارت‌های لگاریتمی صدق نمی‌کند ($x > 0$ و $x - 2 > 0$ و $2x + 1 > 0$) پس معادله تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد.

۱۰. گزینهٔ (۱) درست است.

$$a_n = \frac{n - 1}{n + 1} = \frac{n + 1 - 2}{n + 1} = 1 - \frac{2}{n + 1}$$

اکنون با زیاد شدن n، $\frac{2}{n + 1}$ مرتباً کوچک می‌شود و لذا $1 - \frac{2}{n + 1}$ زیاد می‌شود، پس a_n صعودی است. حال چون دنباله صعودی است، پس جمله اول آن کوچک‌ترین جمله است و چون دنباله a_n به عدد ۱ همگراست ($\lim_{n\to\infty} a_n = 1$) لذا کران بالای آن نیز مساوی ۱ است:

$$a_1 = 0 \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 1 \Rightarrow 0 \le a_n < 1$$

لازم به ذکر است که پاسخ گزینهٔ (۲) یک دنبالهٔ نزولی است، گزینهٔ (۳) نیز همچنین و گزینهٔ (۴) صعودی است، ولی کراندار از بالا نیست.

$$(\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty)$$

دیفرانسیل و انتگرال ۱

۱. گزینهٔ (۳)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n + 1)^n (2n + 5)}{4n^{n+1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n + 1)^n}{n^n} \times \frac{2n + 5}{4n}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \frac{2n + 5}{4n} = e\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e}{2}$$

۲. گزینهٔ (۴)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{k} - \frac{1}{k + 1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right)$$

چون سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ سری نیمساز است، پس واگراست، در نتیجه مجموع دو سری واگراست

(سری $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1$)

۳. گزینهٔ (۴)

$$\forall N > 0 \; \exists M > 0 \ni x < -M \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x > N$$

$$(x + 1)^2 > N + 1 \Rightarrow \underset{x\to-\infty}{|x + 1|} > \sqrt{N + 1} \Rightarrow$$

$$-x - 1 > \sqrt{N + 1} \Rightarrow -x > \sqrt{N + 1} + 1$$

$$\Rightarrow x < -(\sqrt{N + 1} + 1)$$

۴. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{x\to\frac{1}{3}} \frac{x^2 + 1}{9x^2 + ax + b} = +\infty$$

$$\Rightarrow 9x^2 + ax + b \equiv (3x - 1)^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 + ax + b \equiv 9x^2 - 6x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases}a = -6\\ b = 1\end{cases} \Rightarrow a + b = -5$$

۵. گزینهٔ (۱)

$$f(x) = \begin{cases}x - 2 & , x > 0\\ x + 5 & , x \le 0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to3} \left(f\left(f\left(f(f(x))\right)\right)\right) = \lim_{x\to3} f\left(f(f(1))\right) =$$

$$\lim_{x\to3} f(f(-1)) = \lim_{x\to3} f(4) = 2$$

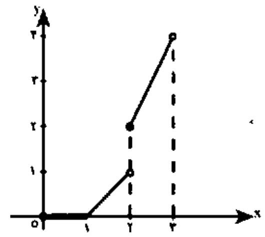
۶. گزینهٔ (۱)

$$f(x) = (x - 1)\lfloor x \rfloor$$

$$0 \le x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$$

$$1 \le x < 2 \Rightarrow f(x) = x - 1$$

$$2 \le x < 3 \Rightarrow f(x) = 2x - 2$$

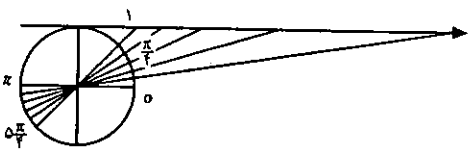


به طوری که نمودار نشان می‌دهد، تابع در $x=2$ ناپیوسته است.

۷. گزینهٔ (۳)

$$f(\cot x) = \sqrt{\cot x - 1} \quad \text{و} \quad \cot x \ge 1$$

با توجه به شکل و شرط مسأله $\pi < x \le \frac{5\pi}{4}$



۸. گزینهٔ (۳)

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 20}{x - 2}} \quad x \to 2^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$$

پس مجانب قائم $x = 2$ است.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 20 & x - 2 \\ \hline -12 & x^2 + 2x + 4\end{array}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4 + \frac{-12}{x - 2}}$$

$x \to \pm\infty \Rightarrow y = \pm(x + 1)$ مایل

۹. گزینهٔ (۳)

$$\lim_{h\to0} \frac{2f(x - 3h) - 2f(x + 2h)}{-2h} = \frac{0}{0}$$

$$H : \lim_{h\to0} \frac{-6f'(x - 3h) - 4f'(x + 2h)}{-2} =$$

$$\frac{-6f'(x) - 4f'(x)}{-2} = 5f'(x)$$

۱۰. گزینهٔ (۱)

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{4} \\ x'_t = 2 \\ y'_t = ? \end{cases} \qquad y = f(x) \qquad y'_t = f'(x) \cdot x'_t$$

$y'_t = \frac{1}{4}(2) = \frac{1}{2}$ متر در ثانیه

ریاضیات گسسته

۱. گزینهٔ (۳). زیرا طبق قضیه اگر G یک درخت باشد از مرتبهٔ $P \geq 2$ لااقل دو رأس از درجهٔ ۱ دارد و در این گزینه چون یک رأس درجهٔ ۱ دارد پس مرتبهٔ آن، یعنی $P \geq 2$ است. در مورد گزینهٔ (۴) درخت T_1 رأسی از درجهٔ ۱ ندارد و در مورد گزینه (۲) ممکن است گرافی درخت نباشد، ولی دور نداشته باشد مانند  یعنی ممکن است گرافی ناهمبند باشد.

۲. گزینهٔ (۲). زیرا تنها گراف کامل که در آن مرتبه و اندازه برابر هستند K_3 می‌باشد  که در این حالت $p + q = 3 + 3 = 6$

۳. گزینهٔ (۴). زیرا با توجه به فرض $a \nmid p$ پس $(p,a) = 1$ و چون $p \mid (23)^{17} \times a$ پس باید $p \mid 23^{17}$ بنابراین نتیجه می‌شود که $p \mid 23$ و چون ۲۳ اول است، پس $p = 1$ یا $p = 23$ که با توجه به اول بودن p باید $p = 23$.

۴. گزینهٔ (۳). زیرا با توجه به این که $(a,b) = d$ پس داریم:

$$\begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow d \mid a + b \Rightarrow d \mid s \Rightarrow [d,s] = s$$

۵. گزینهٔ (۳). زیرا اگر فرض کنیم $(a,b) = d$ در این صورت خواهیم داشت:

$$(a,b) = d \quad \left.\begin{matrix} d \mid a \\ d \mid b \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \mid ra + sb = 13 \Rightarrow$$

$d \mid 13 \Rightarrow d = 1$ یا $d = 13$

از طرفی چون a و b دارای یک شمارندهٔ مشترک اول هستند، پس $d \neq 1$ لذا باید $d = 13$.

نکته. در حالت کلی، هرگاه a و b دو عدد صحیح و داشته باشیم $ra + sb = P$ و P عددی اول باشد در این صورت $(a,b) = 1$ یا $(a,b) = P$.

۶. گزینهٔ (۱). زیرا می‌دانیم هر یک از اعداد !۱ و !۲ و !۳ و... و !۲۲ فاقد عامل ۲۳بوده و نسبت به ۲۳ اول می‌باشند، پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$(1!)^{22} \overset{23}{\equiv} 1 \Rightarrow (1!)^{220} \overset{23}{\equiv} 1$$

$$(2!)^{22} \overset{23}{\equiv} 1 \Rightarrow (2!)^{220} \overset{23}{\equiv} 1$$

$$\vdots$$

$$(22!)^{22} \overset{23}{\equiv} 1 \Rightarrow (22!)^{220} \overset{23}{\equiv} 1$$

از طرفی هر یک از اعداد !۲۳ و !۲۴ و... و !۴۶ دارای عامل ۲۳ برده و بر ۲۳ بخش‌پذیرند، پس از هر توانی بر ۲۳ بخش‌پذیرند بنابراین داریم:

$$A = (1!)^{220} + (2!)^{220} + \dots + (22!)^{220} + (23!)^{220} + \dots + (46!)^{220} \overset{23}{\equiv} \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{22} + 0 + \dots + 0 \Rightarrow A \overset{23}{\equiv} 22$$

۷. گزینهٔ (۱). زیرا با توجه به رابطهٔ $M_1 \ll M_2$ واضح است که درآیه‌های متناظر با هر درآیهٔ صفر در ماتریس M_1 می‌بایست در ماتریس M_2 نیز صفر باشند، ولی به ازای درآیه‌های ۱ در ماتریس M_1 می‌توان در ماتریس M_2 صفر یا یک قرار داد که چون حداکثر تعداد اعضای R_2 مورد نظر است ۱ قرار می‌دهیم که در این صورت حداکثر ۴ عضو می‌توان برای R_2 در نظر گرفت.

۸. گزینهٔ (۲). زیرا تعداد حالتهایی که ۵ شیء یکسان را می‌توانیم بین ۳ نفر تقسیم کنیم برابر است با تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ و تعداد حالتهایی که می‌توان ۴ شیء متمایز را بین سه نفر تقسیم کرد برابر است با 3^4 پس:

$$3^4 - \binom{7}{2} = 81 - 21 = 60$$

۹. گزینهٔ (۴). زیرا اگر فرض کنیم $A = \{1 \leq n \leq 1380 \mid 3 \mid n\}$ و $B = \{1 \leq n \leq 1380 \mid 7 \mid n\}$ در این صورت $|A \cup B|$ مورد نظر است:

$|A| = \frac{1380}{3} = 460$ و $|B| = [\frac{1380}{7}] = 197$

$$|A \cap B| = [\frac{1380}{[3,7]}] = [\frac{1380}{21}] = 65$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| =$$

$$460 + 197 - 65 = 592$$

۱۰. گزینهٔ (۱). زیرا:

$P(A) = \frac{1}{6}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$\Rightarrow$ A و B مستقل هستند

۱۱. گزینهٔ (۱). چون تعداد مهره‌های دو جعبه در کلّ با هم برابر است، پس کافی است تعداد مهره‌های سفید جعبهٔ A_1 را بر تعداد کلّ مهره‌های سفید در دو جعبه تقسیم کنیم که عدد $\frac{6}{10}$ به دست می‌آید. (توجه دارید که اگر تعداد مهره‌ها در دو جعبه برابر با هم نبود می‌بایست از قاعدهٔ بیز استفاده شود و روش ذکر شده، جواب صحیح را حاصل نمی‌کرد.)

روش دوم: (استفاده از قاعدهٔ بیز)

A = مهره از جعبهٔ A_1 باشد

B = مهره سفید باشد

$$P(A \mid B) = \frac{P(A) \times P(B \mid A)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{6}{11}}{\frac{1}{2} \times \frac{6}{11} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{11}}$$

$$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{\frac{6}{11}}{\frac{10}{11}} = \frac{6}{10}$$

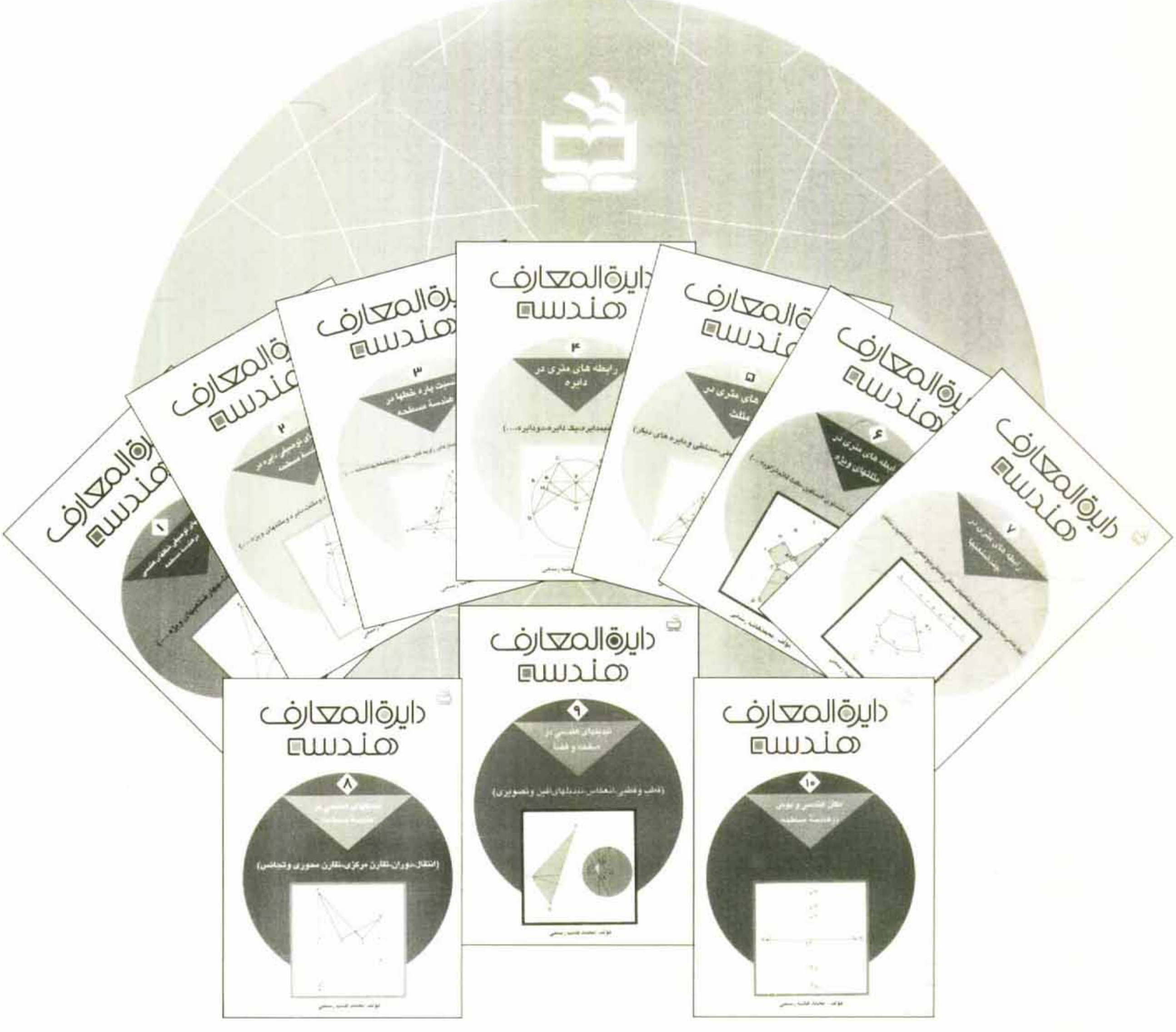
۱۲. گزینهٔ (۴). با توجه به جدول توزیع احتمال و این که می‌بایست $P(x=1) + P(x=2) + P(x=3)$ را به دست آوریم، داریم:

x_i	۱	۲	۳
P_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{35}{36} \times \frac{1}{36}$	$(\frac{35}{36})^2 \times \frac{1}{36}$

x_i	۴	۵	...
P_i	$(\frac{35}{36})^3 \times \frac{1}{36}$	$(\frac{35}{36})^4 \times \frac{1}{36}$	...

$$P(A) = \frac{1}{36} + \frac{35}{(36)^2} + \frac{35^2}{(36)^3}$$

$$= \frac{(36)^2 + 36 \times 35 + (35)^2}{(36)^3}$$



ناشر برگزیده
سالهای ۷۵،۷۳
۷۹

انتشارات مدرسه منتشر کرده است
سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

دانش‌آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته‌های پنهان در لابه‌لای این مفاهیم و قضیه‌ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه‌ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه‌ای آشنا می‌شوند، تا هم برای پاسخ‌گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.



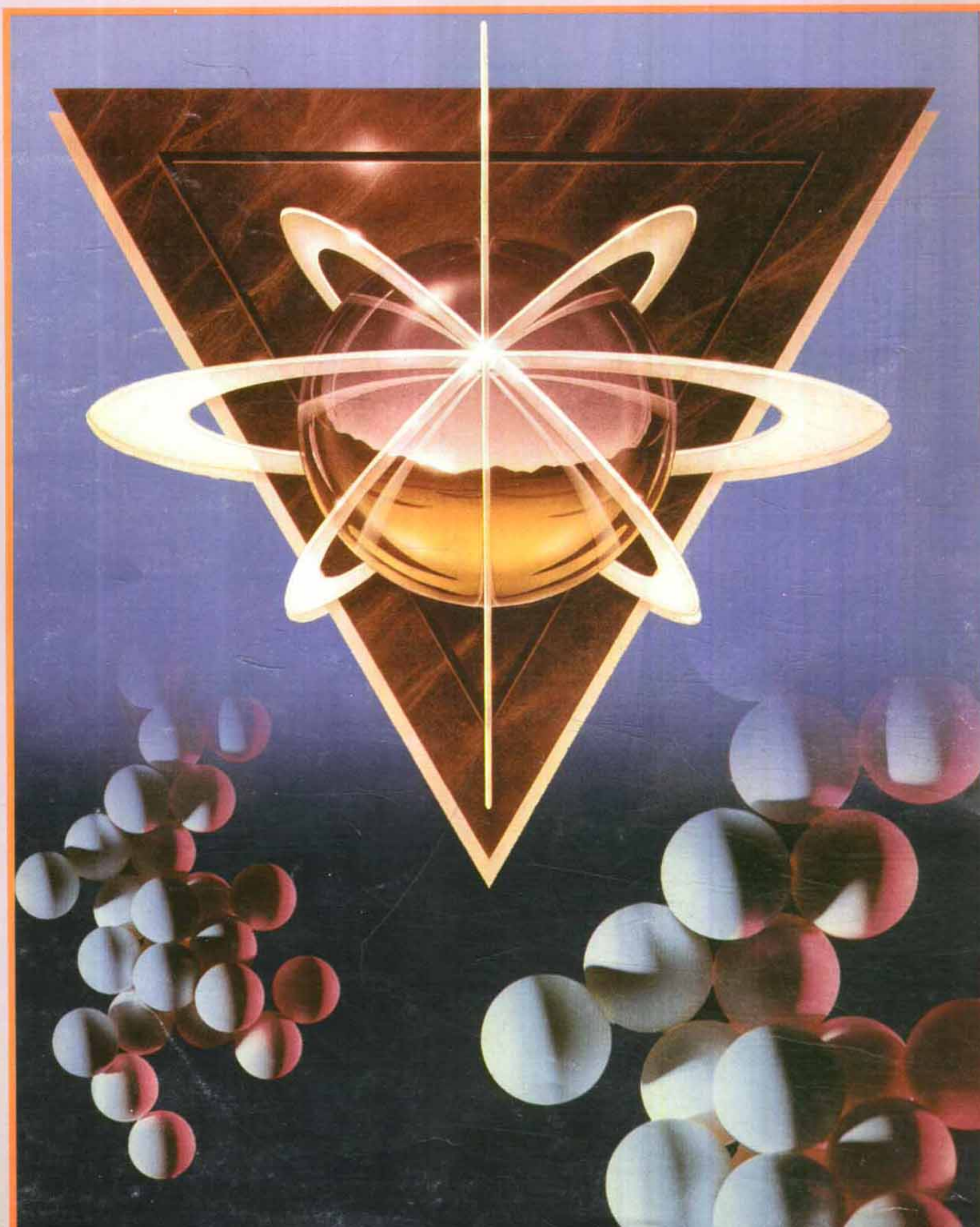
مجله ریاضی

برهان

۳۶

برای دانش آموزان دبیرستان

سال یازدهم، شمارهٔ دوم، زمستان ۱۳۸۰، بها ۳۰۰۰ ریال



بسم الله الرحمن الرحیم

برهان

سال یازدهم
زمستان ۸۰
شمارهٔ دوم

انتشارات مدرسه
وابسته به وزارت آموزش و پرورش

صاحب امتیاز : انتشارات مدرسه
مدیر مسؤول : محمد صادق عزیزی
سردبیر: حمیدرضا امیری
مدیر داخلی : میرشهرام صدر
طراح گرافیک : فرشید پیمان پو
مدیر فنی : هوشنگ آشتیانی
رسام : سید جعفر طرازانی
اعضای هیأت تحریریه : حمیدرضا امیری ، محمدهاشم رستمی، احمد قندهاری ، میرشهرام صدر، هوشنگ شرقی، سیدمحمدرضا هاشمی موسوی ، غلامرضا یاسی پور
(با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری)
چاپ و صحافی : چاپخانه مدرسه

نشانی : خیابان سپهبد قرنی ، خیابان سپند شرقی ، پلاک ۳۸، صندوق پستی: ۱۹۴۹ / ۱۴۱۵۵
تلفن: ۶ - ۸۸۹۶۷۶۵ ، دورنویس (فاکس): ۸۹۰۳۸۰۹ ، تلفن امور مشترکین: ۹ - ۸۸۰۰۳۲۴

حرف اول ۱
۲ از تاریخ بیاموزیم (۱۰)/ پرویز شهریاری
مماس و قائم بر منحنی/ احمد قندهاری ۸
۱۲ ریاضیات ایران در دورهٔ اسلامی/ اسفندیار معتمدی
آلگوریتمی برای گرافیکال بودن.../ حمید رضا امیری ۱۶
۱۸ مکان هندسی/ محمد هاشم رستمی
ترکیبیات (۲)/ میر شهرام صدر ۲۲
۲۶ تعیین ریشهٔ سوم یک عدد/ محمد حسین پور سعید
مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۳۶/ ۲۷
۲۸ مسأله پریش ها / هوشنگ شرقی
معادلهٔ خط (قسمت اوّل) / رضا پیکر ۳۵
۴۰ محاسبه محیط بیضی/ سید محمد رضا هاشمی موسوی
پاسخ مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۲۴/ ۴۲
۴۳ ریاضیات تفریحی / غلامرضا یاسی پور
همراه با درسهای ریاضیات (۲)/ پرویز شهریاری ۵۰
۵۳ ریاضی را چگونه یاد بگیریم/ احمد قندهاری
مسائل برای حل وپرسش های چهار گزینه ای/ ۵۴
۵۹ پاسخ مسائل و پرسش های چهار گزینه ای

برهان

تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

- نگارش مقاله‌های کمک‌درسی
(شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتابهای ریاضی دبیرستان)
- طرح مسائل کلیدی به‌همراه حل آنها
(برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه‌ای به‌همراه حل آنها
(برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی
(مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی واجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات ، آموزش مسائل کامپیوتر و...)

برهان

هر سه ماه یک شماره منتشر می شود

- هیأت تحریریه در حکّ و اصلاح و حذف واضافه مقاله‌ها آزاد است.
- مقاله‌های مجله با رسم‌الخط انتشارات مدرسه به‌چاپ خواهد رسید.
- مقاله‌های وارده باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجله در کتابها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق مأخذ بلامانع است.

حرف اوّل

«مملکت ما، مملکت امام حسین علیه‌السلام است.»

مقام معظم رهبری

سالی که در پیش رو داریم یعنی سال ۱۳۸۱ هجری شمسی سالی است که دوبار در آن سالروز عاشورای حسینی را به سوگ می‌نشینیم و عزادار فرزند فاطمه (س) و اهل بیت او خواهیم بود.

عزاداری برای امام حسین علیه‌السلام بزرگ و کوچک، پیر و جوان، شیعه و سنی و حتی مسلمان و غیر مسلمان نمی‌شناسد. و همین عزاداری‌ها در محرّم و صفر است که به قول امام راحل «اسلام را زنده نگه داشته است».

بیایید امسال را که شروعش با محرم و ایام عاشورای حسینی و خاتمه‌اش نیز با عاشورای حسینی خواهد بود، برای خودمان سالِ «امام حسین (ع)» و پیروی از سیره، جوانمردی و آزادمردی آن بزرگوار قرار داده و همواره فلسفه قیام امام حسین (ع) و اهداف مقدس ایشان از قیام خونبارش روشنگر راهمان باشد.

زمانی که امام حسین (ع) به خاطر احیای دین جدش، به فرمودهٔ خودشان به خاطر امر به معروف و نهی از منکر و اقامهٔ نماز همه چیز خود را قربانی می‌کند، چرا ما نباید برای امر به معروف و نهی از منکر که شاید در شرایط فعلی جامعهٔ ما از واجب‌ترین امور برای هر فرد مسلمان است، تلاش فراوان نکنیم.

امام حسین علیه‌السلام، امر به معروف را با شمشیر آغاز نکرد که حتی در صبح روز عاشورا به میان دشمن رفته و با سخنرانی و موعظه، تصمیم بر هدایت دشمنان خود داشت، اما دشمن کوردل که لحظه‌ای طاقت شنیدن سخنان بر حق و هدایتگر امام را نداشتند با سنگ و کلوخ و تیر جواب امام را دادند که امام باز هم نرمش نشان داده، خودشان و اصحاب وفادارشان هر یک به این مهم - امر به معروف و نهی از منکر - پرداختند تا شاید حتی یک نفر هدایت شود و حجت بر همه تمام شده و در پیشگاه عدل الهی، جایی برای عذر باقی نماند.

افرادی چون حرّ بن یزید ریاحی با امام همراه گشته و از شهیدان والامقام کربلا محسوب می‌شوند که آب بر امام بستند و دلِ فرزندان اهل بیت امام را شکستند و این چیزی جز اثر اعمال و رفتار حسینی نیست.

عزیزان دانش‌آموز بیایید امسال را سال «حسینی» شدن و حسینی رفتار کردن قرار داده و از او برای رسیدن به اهدافش کمک بخواهیم که حسین علیه‌السلام چراغ هدایت و سفینه نجات است و کشتی حسین (ع) سریعتر به ساحلِ نجات می‌رسد.

والسلام - سردبیر



از تاریخ بیاموزیم (۱۰)

«دنبالهٔ مقالهٔ «ریاضیات ملت‌های هند»

● پرویز شهریاری

جبر

دانشمندان هندی در زمینهٔ جبر، به موفقیت‌های زیادی رسیدند. آنها روی نمادهای جبری کار کردند، قاعدهٔ حلّ معادلهٔ درجه را در حالت کلی به دست آوردند و عددهای منفی و عددهای گنگ را وارد عمل کردند. برای مقدار مجهول، جملهٔ ثابت معادله و توان نمادهایی داشتند. در ضمن، بسیاری از این نمادها، کوتاه شدهٔ واژه سانسکریتی متناظر با آنها بود.

مقدار مجهول را «یاوات ـ تاوات» (همان اندازه که) می‌نامیدند و برای نماد مجهول از حرف نخست واژهٔ نخست سانسکریتی آن، یعنی «یا» استفاده می‌کردند. اگر با چند مجهول سروکار داشتند، همان نماد را با رنگ‌های مختلف می‌نوشتند. جملهٔ ثابت را در معادله با «رو»، هجای اوّل واژه «روپا» (روپیه = کامل) مشخص می‌کردند. برای توان، واژه‌های «وارگا» (مربع)، «گهانا» (مکعب) و «گهاتا» را به کار می‌بردند. برای نمونه توان ششم را «وارنا ـ گهانا» می‌گفتند و از «گهاتا» برای جمع توان‌ها استفاده می‌شد؛ از جمله توان پنجم را «وارگا ـ گهانا ـ گهاتا» می‌نامیدند. نماد توان و ضریب را پس از نماد مجهول می‌گذاشتند. بین جمله‌ها علامتی وجود نداشت. وقتی جمله‌ها را پشت سرهم می‌نوشتند، به معنای جمع بود؛ دربارهٔ تفریق، روی جمله‌ای که باید کم شود، نقطه‌ای قرار می‌دادند، گاهی هم برای نماد تفریق، از علامت صلیب استفاده می‌کردند و آن را بعد از عدد قرار می‌دادند؛ ۵- را به صورت ۵° ۷ + ۵ می‌نوشتند.

نمادی برای برابری، در معادله‌ها وجود نداشت؛ دو طرف معادله را زیر هم می‌نوشتند، به این ترتیب که مجهول‌ها و توان‌ها در یک طرف معادله، زیر همان مجهول‌ها و توان‌ها در طرف دیگر معادله بود. اگر در حالتی، مجهولی وجود نداشت، برای آن، ضریب صفر می‌گذاشتند. معادلهٔ

۱۹۷x − ۱۶۴۴y − z = ۶۳۰۲

این طور نوشته می‌شد:

یا	۱۹۷	کا	۱۶۴۴°	نی	۱°	رو	۰
یا	۰	کا	۰	نی	۰	رو	۶۳۰۲

یعنی:

۱۹۷x − ۱۶۴۴y − z + ۰ = ۰x + ۰y + ۰z + ۶۳۰۲

یا نمونه‌ای دیگر، معادلهٔ

$$8x^3 + 4x^2 - 10y^2 = 4x^3 + 12y^2$$

به این صورت:

۱۰ وا کا ۴ وا یا ۸ گها یا

۱۲ وا کا ۰ وا یا ۴ گها یا

و به این ترتیب، ریاضیدانان هندی گام بلندی در جهت پیدایش جبر علامتی برداشتند؛ گرچه علامت‌هایی که به کار می‌بردند زیاد بود و خود علامت‌ها، یعنی حرف‌های سانسکریت، شکل پیچیده‌ای داشت.

عددهای منفی را برای نخستین بار «براهماگوپتا» (سدهٔ هفتم میلادی) به کار برد؛ عددهای مثبت را «دارایی» و عددهای منفی را «قرض» می‌نامید. او می‌گوید: «قانون چنین است: مجموع دو دارایی، یک دارایی و مجموع دو قرض، یک قرض است. حاصلضرب دارایی و قرض، عبارت است از قرض و حاصلضرب دو دارایی یا دو قرض، عبارت است از دارایی».

برای نخستین بار، در نوشته‌های «آریابهاتا» ی اوّل (سدهٔ پنجم و ششم میلادی) به معادله‌های خطی برمی‌خوریم. یکی از مسأله‌های مشهور آریابهاتا، که در ادب ریاضی به مقیاس گسترده‌ای اثر گذاشته، «مسألهٔ قاصدها» است. در این مسأله باید زمان برخورد دو جسم آسمانی را که با سرعت‌های v_1 و v_2 در حرکتند و فاصلهٔ بین آنها برابر s است، پیدا کنیم. پاسخ آریابهاتا چنین است:

$$t = \frac{s}{v_1 - v_2}$$

در نوشته‌های «مهاویرا» (سدهٔ نهم میلادی) به یک رشته مسأله برمی‌خوریم که حل آنها، منجر به دو معادلهٔ دو مجهولی درجه اوّل می‌شود. این مسأله، نمونه‌ای از آنهاست:

«قیمت ۹ لیمو و ۷ سیب جنگلی روی هم ۱۰۷ و قیمت ۷ لیمو و ۹ سیب جنگلی روی هم ۱۰۱ شده است. اکنون، خیلی زود قیمت هر لیمو و هر سیب جنگلی را به من بگویید.» این مسأله، منجر به حلّ این دستگاه می‌شود:

$$9x + 7y = 107$$
$$7x + 9y = 101$$

روشی که امروز برای حلّ چنین دستگاهی، به یاری برابر کردن ضریب‌ها به کار می‌رود، هیچ تفاوتی با روش مهاویرا ندارد.

معادله‌های به صورت:

$$Ax^2 = Bx \text{ و } Ax^3 = Bx^2$$

جزو معادله‌های درجه اوّل به شمار می‌آمد. از جمله، «بهاسکارا» ی دوم، این مسأله را حل می‌کند: «چهار کسر پیدا کنید که مخرج‌های آنها با هم برابر باشند و مجموع مربع‌های آنها برابر با مجموع مکعب‌های آنها شود».

راه حلّ بهاسکارای دوم را برای این مسأله، به زبان امروزی جبر می‌آوریم. مخرج‌ها را برابر واحد می‌گیریم. کسر اوّل را x، کسر دوم را 2x، کسر سوم را 3x و سرانجام کسر چهارم را 4x می‌نامیم. مجموع مربع‌های کسرها برابر $30x^2$ و مجموع مکعب‌های آنها برابر $100x^3$ می‌شود و از برابری

$$30x^2 = 100x^3$$

معلوم می‌شود، کسر اوّل برابر $\frac{3}{10}$، کسر دوم برابر $\frac{6}{10}$، کسر سوم برابر $\frac{9}{10}$ و کسر چهارم برابر $\frac{12}{10}$ است.

به حلّ معادله‌های کامل درجهٔ دوم، برای نخستین بار، در نوشته‌های آریابهاتای اوّل برخورد می‌کنیم. مسأله پس از یک رشته عمل‌های کم‌وبیش پیچیده، منجر به این معادله می‌شود:

$$tx^2 + px = qp$$

که آریابهاتا، پاسخ آن را این طور می‌دهد:

$$x = \frac{\sqrt{qpt + \left(\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p}{2}}{t}$$

بهاسکارای دوم، از این مطلب آگاه بود که برای جذر یک عدد مثبت، دو جواب به دست می‌آید. او می‌نویسد: «جذر یک عدد مثبت، گاهی مثبت و گاهی منفی است. مجذور عدد مثبت ۳ یا مجذور عدد منفی ۳، برابر است با ۹. بنابراین، جذر عدد مثبت ۹، بسته به نیاز ماست؛ ممکن است عدد مثبت ۳ و ممکن است عدد منفی ۳ باشد. ولی اگر کسی بپرسد جذر عدد منفی ۹ چه‌قدر است، پاسخ معقولی نداریم؛ زیرا هرگز مجذور یک عدد نمی‌تواند برابر یک عدد منفی بشود.»

بهاسکارای دوم، بعضی از معادله‌های خاص درجهٔ سوم و درجهٔ چهارم را بررسی می‌کند و ریشه‌های درست آنها را به یاری تبدیل‌های ساده به دست می‌آورد. برای نمونه، برای

حلّ معادلهٔ

$$x^۴ - ۲x^۲ - ۴۰۰x = ۹۹۹۹$$

بهاسکارا، به دو طرف معادله، عبارت:

$$۴x^۲ + ۴۰۰x + ۱$$

را می‌افزاید و به دست می‌آورد:

$$x^۴ + ۲x^۲ + ۱ = ۴x^۲ + ۴۰۰x + ۱۰۰۰۰$$

پس از دو طرف معادله، جذر می‌گیرد، که در نتیجه به دست می‌آید:

$$x^۲ + ۱ = ۲x + ۱۰۰$$

$$x^۲ - ۲x = ۱۰۰$$

$$x = ۱۱$$

هندی‌ها در حلّ معادله‌های سیّال هم، به موفقیت‌های زیادی رسیدند. برخی مسأله‌های مربوط به گاه‌شماری اخترشناسی، که در آنها باید دورهٔ گردش جایگاه ستاره‌های با دورهٔ گردش‌های مختلف پیدا کرد، منجر به معادلهٔ سیّال می‌شوند. ریاضیدانان هندی، بی‌آن که از کارهای دیوفانت (سدهٔ سوم میلادی) آگاه باشند، با جست‌وجوی پاسخ‌های گویا، روش یافتن پاسخ‌های درست و مثبت معادله‌های سیّال را به دست آوردند.

حلّ معادلهٔ خطی دو مجهولی:

$$ax + b = cy$$

و راه پیدا کردن پاسخ‌های مثبت و درست آن را، آریابهاتای اوّل داده است، ولی در نوشته‌های براهماگوپتا و بهاسکارای دوم، با تفصیل بیشتری آمده است. این روش که به «روش پراکندگی» معروف است، در واقع، با روشی که امروز به نام «کسرهای مسلسل» وجود دارد، تفاوتی ندارد.

موفقیت بزرگی که ریاضیدانان هندی در نظریهٔ عددها به دست آوردند، مربوط به یافتن ریشه‌های درست و مثبت معادلهٔ

$$y^۲ = ax^۲ + b$$

و حالت خاص، ولی مهم آن

$$y^۲ = ax^۲ + ۱$$

است که در آن، a عددی درست است؛ ولی مجذور کامل نیست.

دانشمندان هندی، تنها به یافتن یکی از ریشه‌های مثبت و درست معادله اکتفا می‌کردند؛ ولی این کمبود، ارزش کار آنها و موفّقیتی را که به دست آوردند، کم نمی‌کند.

حلّ دقیق و کامل این معادله‌ها، بعدها در سال ۱۷۶۹ میلادی، به‌وسیلهٔ لاگرانژ ریاضیدان فرانسوی داده شد که روش او، به روش عمل هندی‌ها بسیار نزدیک است.

براهماگوپتا و بهاسکارای دوم، گونه‌های دیگری از معادله‌های سیّال هم بررسی کردند؛ برای نمونه معادلهٔ

$$ax + by + c = xy$$

در این معادله، $ab + c$ را به صورت ضرب دو عامل m و n درمی‌آوردند و $m + b$ یا $n + b$ را به عنوان x و $n + a$ یا $m + a$ را به عنوان y انتخاب می‌کردند. برای نمونه، در معادلهٔ

$$۵x + ۷y - ۲۹ = xy$$

می‌توان نوشت:

$$ab + c = ۵ \times ۷ - ۲۹ = ۶ = ۶ \times ۱ = ۳ \times ۲$$

و پاسخ چنین هستند:

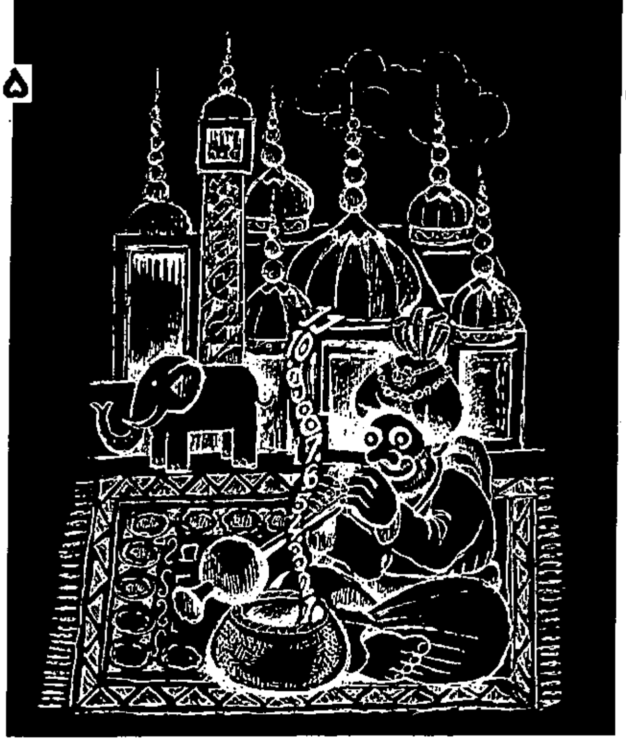
$$\begin{cases} x = ۹ \\ y = ۸ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۸ \\ y = ۱۱ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۱۰ \\ y = ۷ \end{cases} ; \begin{cases} x = ۱۳ \\ y = ۶ \end{cases}$$

هندسه

آگاهی‌های ریاضیدانان هندی در زمینهٔ هندسه و موفقیت‌هایی که در این راه به دست آوردند، در مقایسه با دانش آنها در زمینهٔ حساب، جبر و نظریهٔ عددها، اهمیت کمتری دارد.

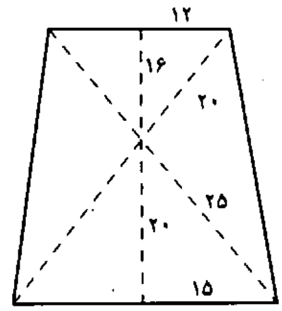
حکم‌های هندسی را در بیشتر حالت‌ها، بدون اثبات می‌آوردند و اغلب همه چیز را، منجر به مراجعهٔ به شکل می‌کردند و با یک جملهٔ «دیده می‌شود» اثبات شده می‌پنداشتند. تنها در حالت‌های نادری، اشاره‌های استدلالی وجود داشت. به احتمالی برای آموزش، اثبات را به صورت شفاهی یادآوری می‌کردند.

نخستین آگاهی‌های مربوط به هندسه را می‌توانیم در رسالهٔ «قانون طناب‌ها» بیابیم، که در واقع، یک رسالهٔ دستی برای معماران است که در ساختمان نیایشگاه‌ها و محراب‌ها از آن استفاده می‌کردند. ساختمان نیایشگاه‌ها، از قانون‌هایی پیروی می‌کرد؛ سمت آنها باید به طرف نور باشد و در پایه‌ها، شکل‌های معینی قرار گیرد. برای رسیدن به این هدف‌ها، باید یک رشته مسأله‌های هندسی را حل می‌کردند؛ ساختن زاویهٔ



قائمه، مربع، مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آن با عددهای درست بیان شده باشند، ساختن مربعی هم‌ارز مستطیل مفروض، ساختن مربعی با مساحت na، با در دست داشتن مربع به مساحت a.

بسیاری از این ساختمان‌های هندسی، با توجه به قضیهٔ فیثاغورس انجام می‌گرفت. از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آنها عددهای درستی باشد، می‌توان ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی، شبیه شکل ۱ ساخت:



شکل ۱

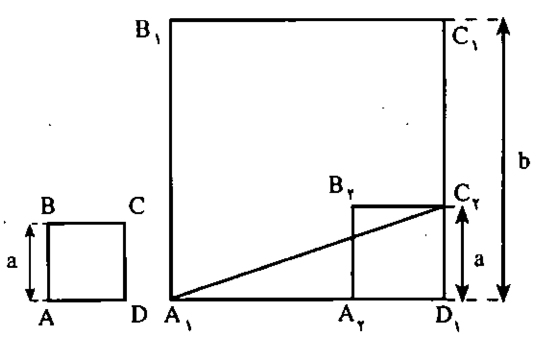
ساختن مربعی با مساحت na، از روی مربعی با مساحت a، منجر به دو عمل می‌شد؛ اوّل، دو برابر کردن یک مربع که برای آن، قطر مربع اوّل را به عنوان ضلع مربع تازه انتخاب می‌کردند؛ دوم، ساختن مربعی هم‌ارز با دو مربع مفروض. برای این منظور، مربع کوچکتر را در درون مربع بزرگتر قرار می‌دهیم؛ به نحوی که ضلع‌های آن، روی ضلع‌های مربع بزرگتر قرار گیرد (شکل ۲). در این صورت به دست می‌آید:

$$A_1C_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

و مربع به ضلع A_1C_2، مساحتی برابر مجموع مساحت‌های دو مربع دارد؛ زیرا:

$$|A_1C_2|^2 = a^2 + b^2$$

در همین رساله، روش رسم مربعی که مساحت آن برابر تفاضل مساحت‌های دو مربع مفروض باشد، داده شده است. برای این منظور، مثل حالت قبل، مربع کوچکتر را درون مربع

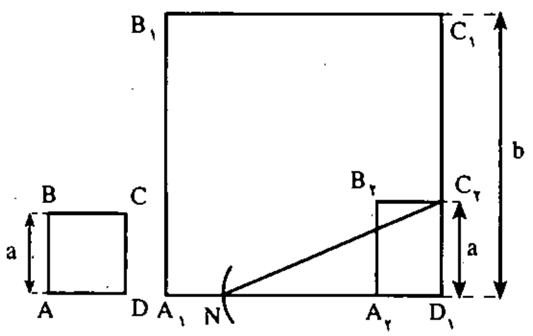


شکل ۲

بزرگتر قرار می‌دهیم (شکل ۳). سپس به مرکز نقطهٔ C_2 و با شعاع برابر b، کمانی رسم می‌کنیم تا A_1D_1 را در نقطهٔ N قطع کند. در این صورت:

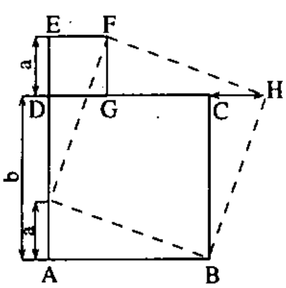
$$|ND_1| = \sqrt{b^2 - a^2}$$

طولی برابر طول ضلع مربع مجهول دارد.



شکل ۳

خود قضیهٔ فیثاغورس را هم می‌توان با ساختن مربعی هم‌ارز با مجموع دو مربع دیگر، ثابت کرد. به شکل ۴ توجه کنید؛ مساحت مربع به ضلع a برابر MB برابر است با مجموع مساحت‌های مربع‌های به ضلع‌های AD و DE. در ضمن مثلث‌های MEF، FHG، CHB و MBA، مثلث‌هایی همنهشت هستند.



در زمینهٔ هندسه، می‌توان این آگاهی‌ها را در نوشته‌های براهماگوپتا، شریدهارا، مهاویرا و بهاسکارای دوم یافت. براهماگوپتا، دستوری تقریبی برای محاسبهٔ مساحت یک چهارضلعی دلخواه داده است (از این دستور، مصری‌ها هم استفاده می‌کردند):

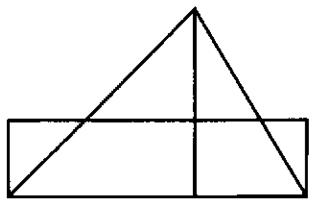
$$S \approx \frac{a+c}{2} \times \frac{b+d}{2}$$

که در آن a و c طول‌های دو ضلع روبه‌رو و b و d طول دو ضلع دیگر روبه‌رو در چهار ضلعی هستند. شریدهارا، ضمن این که یادآوری می‌کند این دستور را نمی‌توان برای همهٔ چهار ضلعی‌ها به کار برد، دستور محاسبهٔ مساحت ذوزنقه را می‌دهد: حاصلضرب نصف مجموع دو قاعده در ارتفاع. براهماگوپتا، برای محاسبهٔ مساحت چهار ضلعی از این دستور هم استفاده می‌کرد:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

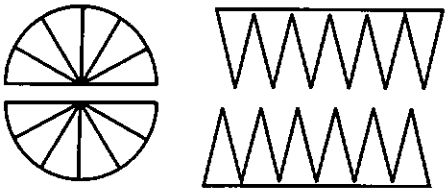
که در آن a، b، c و d طول ضلع‌های چهارضلعی و p اندازهٔ نصف محیط آن است. می‌دانیم، این دستور برای محاسبهٔ مساحت یک چهار ضلعی محاطی درست است؛ ولی براهماگوپتا، چیزی در این باره نمی‌گوید؛ گرچه دو گونهٔ چهار ضلعی را (ذوزنقه متساوی‌الساقین و چهار ضلعی‌هایی که قطرهای عمود بر هم دارند) بررسی می‌کند که این دستور برای آنها درست است.

همان طور که پیش از این هم گفتیم، استدلال‌های هندسی در نوشته‌های ریاضیدانان هندی، کوتاه است. برای نمونه، اثبات قضیهٔ مربوط به مساحت مثلث، تنها با شکلی شبیه شکل ۵ داده شده است. در این شکل، ارتفاع مستطیل، برابر نصف ارتفاع مثلث است و شکل با جملهٔ «دیده می‌شود»



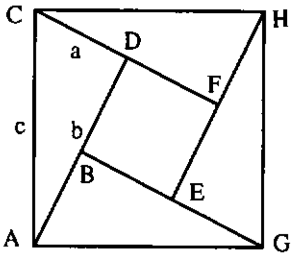
شکل ۵

همراه است، اثبات مربوط به محاسبهٔ مساحت دایره، که برابر است با مساحت مستطیلی که ضلع‌های آن به ترتیب، برابر نصف محیط دایره و شعاع دایره است، به وسیلهٔ شکل ۶ و همراه با جملهٔ «دیده می‌شود» داده شده است. اثبات قضیهٔ فیثاغورس،



شکل ۶

آن طور که بهاسکارای دوم داده است، تنها بر پایهٔ شکل ۷ قرار دارد.



شکل ۷

چون همهٔ مثلث‌ها با هم برابرند، پس:

$$S_{ACHG} = 4S_{ADC} + S_{BEFD}$$

که در آن داریم:

$$S_{ACHG} = c^2 ,\ S_{ADC} = \frac{1}{2}ab ,\ S_{BEFD} = (b-a)^2$$

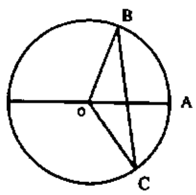
بنابراین:

$$c^2 = \frac{4ab}{2} + (b-a)^2 = a^2 + b^2$$

آریابهاتای اوّل، برای اندازه‌گیری دایره، عدد π را برابر ۳/۱۴۱۶ می‌گیرد. «نیلاکانتا» (سده‌های پانزده و شانزده میلادی)، مقدار عدد π را تا ۱۰ رقم درست دهدهی محاسبه کرده است.

مثلثات

پیدایش و پیشرفت مثلثات، با مسأله‌های عملی، رابطهٔ تنگاتنگی دارد. در هند، پایه‌های مثلثات گذاشته شد؛ گرچه دربارهٔ حلّ مثلث، موفقیت اندکی پیدا کردند. از تابع‌های مثلثاتی، سینوس، کسینوس و «سینوس ـ ورزوس» برای آنها معلوم بود. ریاضیدانان هندی، برخلاف یونانیها از نصف وتر، به جای تمام وتر استفاده می‌کردند. اگر طول شعاع OB را واحد بگیریم (شکل ۸)، آن وقت سینوس زاویهٔ AOB برابر نسبت $\frac{|BK|}{|OB|}$ می‌شود، که از نظر عددی برابر طول BK است و طول پاره‌خط راست OK برابر کسینوس زاویهٔ AOB می‌شود.



شکل ۸

از بستگی بین تابع‌های مثلثاتی، اینها را می‌شناختند:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

مقدار تابع‌های مثلثاتی را، تنها در ربع اوّل دایره بررسی می‌کردند، برای استفاده از مثلثات در اخترشناسی، جدول‌هایی که تنظیم کرده بودند، نقش اساسی داشت. هندی‌ها جدول وترها را خیلی دقیق‌تر از یونانی‌ها و بطلمیوس (سدهٔ دوم میلادی) تنظیم کردند.

در رساله‌ها و به صورتی مبهم، برخی از قضیه‌های مثلثات کروی هم وجود دارد. برای نمونه، قضیه سینوس‌ها در مثلث قائم‌الزاویهٔ کروی و قضیهٔ کسینوسها در حالت کلی.

در بسیاری از کتاب‌های مربوط به تاریخ ریاضیات، گفته شده است، ریاضیدانان هندی پس از بهاسکارای دوم تا آغاز سدهٔ بیستم، هیچ کار جدّی و تازه‌ای نکرده‌اند؛ ولی در واقع چنین نیست. موفقیت جالب و مهم ریاضیدانان هندی سدهٔ شانزدهم، عبارت است از تبدیل «تانژانت» و «آرک تانژانت» به صورت رشته‌های بی‌پایان.

دانشمندان سده‌های ششم تا دوازدهم، عدد π را در بهترین حالت خود تا ۵ رقم دهدهی می‌شناختند. نیلاکانتا، دانشمند هندی سدهٔ شانزدهم، رشتهٔ بی‌پایانی را می‌دهد (البته، بدون اثبات) که به زبان نمادهای امروزی چنین است:

$$\pi\varphi = \frac{\pi\sin\varphi}{\cos\varphi} - \frac{\pi\sin^3\varphi}{3\cos^3\varphi} + \frac{\pi\sin^5\varphi}{5\cos^5\varphi} - \dots$$

با فرض $\sin\varphi \leq \cos\varphi$، اگر در این برابر $\pi = 1$ بگیریم، به دست می‌آید:

$$\varphi = \tan\varphi - \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3\varphi + \frac{1}{5}\mathrm{tg}^5\varphi - \dots$$

و نیلاکانتا، برای محاسبه، π فرض می‌کند $\varphi = \frac{\pi}{4}$. در ضمن، $\frac{\pi}{4}$ را به صورت مجموع محدود S_n با جملهٔ متمم $K_n^{(i)}$ نشان می‌دهد، که سه صورت مختلف دارد:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + K_n^{(i)}$$

که در آن داریم:

$$K_n^{(1)} = \frac{(-1)^n}{4n}, \quad K_n^{(2)} = \frac{(-1)^n . n}{2n-1}, \quad K_n^{(3)} = \frac{(-1)^n(n^2+1)}{n(4n^2+5)}$$

و در ضمن:

$$\left|K_n^{(1)}\right| > \left|K_n^{(2)}\right| > \left|K_n^{(3)}\right|$$

این جمله‌های متمم، برای مقدارهای کوچک n هم، خیلی خوب، تقریب را تصحیح می‌کند. مقداری که نیلاکانتا برای عدد π می‌دهد، دارای ۱۰ رقم است.

کارهای دیگر ریاضیدانان هندی هم، در سدهٔ شانزدهم جالب است. آنها دستوری را می‌شناختند که با نمادهای امروزی چنین است:

$$\mathrm{arc\,tg}\, t = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n-1} \frac{\frac{t}{n}}{1 + \left(\frac{kt}{n}\right)^2} \qquad (I)$$

آنها از بسط سینوس و کسینوس هم، به صورت یک رشته، آگاه بودند:

$$\pi\sin\varphi = S - \frac{S^3}{3!\pi^2} + \frac{S^5}{5!\pi^4} - \dots$$

$$\pi\cos\varphi = S - \frac{S^2}{2!\pi} + \frac{S^4}{4!\pi^3} - \dots$$

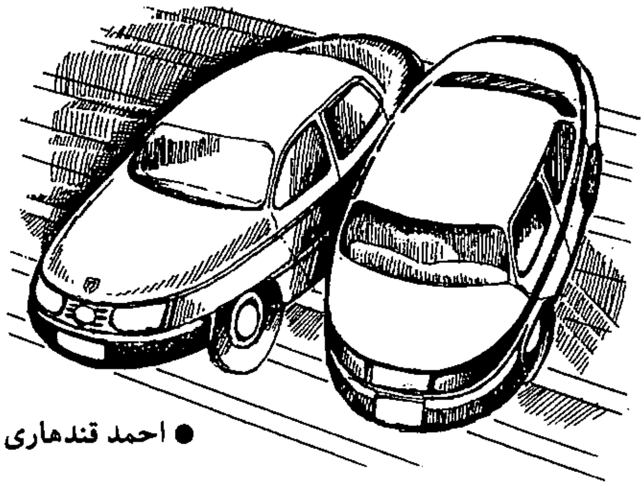
که در آن، S، طول کمان متناظر با زاویه φ است.

به این ترتیب، ریاضیدانان هندی در سال ۱۵۰۲ میلادی، برای نخستین بار و پیش از «ج. گریگوری» و «لایب نیتس» توانستند arctgx را به صورت رشته‌ای از توان‌های x بسط دهند و به‌ویژه از رشته‌ای که به نام گریگوری برای $\frac{\pi}{4}$ وجود دارد، اطلاع داشتند. این رشته، بعدها در سال ۱۶۷۱ میلادی، به وسیلهٔ گریگوری و در سال ۱۶۷۳ میلادی، به وسیلهٔ لایب نیتس، دوباره کشف شد. رشته‌های دیگری را هم که هندی‌ها به دست آورده بودند، در اروپای پیش از نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم، شناخته شد. دستور (I) را «اولر» در سال ۱۷۳۹ میلادی پیدا کرد.

درست است که این اندیشه‌ها و بسیاری اندیشه‌های دیگر نتوانست به اندازهٔ کافی رشد کند؛ ولی همین گام‌های نخستین که هندی‌ها در زمینهٔ دستگاه موضعی دهدهی، قانون‌های حساب، مثلثات مقدماتی و یک رشته قاعده برای جبر و نظریهٔ عددها تا پایان سدهٔ سیزدهم میلادی برداشتند، در آغاز در کشورهای شرق میانه و نزدیک، و سپس در اروپا، اثر بی‌اندازه‌ای گذاشت و امکان تکامل بعدی ریاضیات را فراهم کرد.

مماس و قائم بر منحنی

قسمت دوم



● احمد قندهاری

حالت دوم: می‌خواهیم از نقطهٔ $P(a\ ,\ b)$ واقع در خارج منحنی دو مماس بر منحنی رسم کنیم.

روش اوّل (راه α)

فرض می‌کنیم نقطهٔ متحرّک A به طول α نقطهٔ تماس باشد؛ بنا به حالت اوّل، معادلهٔ خط مماس بر منحنی را در نقطه A می‌نویسیم. سپس مختصات نقطه P را در معادلهٔ خط مماس نقطهٔ A قرار می‌دهیم. از حلّ معادله حاصل αها (طول‌های نقاط تماس) به دست می‌آید.

αهای به دست آمده را در معادلهٔ مماس نقطهٔ A قرار می‌دهیم، معادله‌های مماس‌ها حاصل می‌شود.

مثال (۱۷): از نقطهٔ P(۱ , ۰) دو مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = x^2 - 7x$ رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله‌های مماس‌ها.

حل: فرض می‌کنیم نقطهٔ A به طول α نقطهٔ تماس باشد.

$$y_A = \alpha^2 - 7\alpha \qquad A\left|\begin{matrix}\alpha \\ \alpha^2 - 7\alpha\end{matrix}\right.$$

$$y'_x = 2x - 7\ ;\ \underset{\text{مماس}}{m} = 2\alpha - 7$$

$$y - y_A = m(x - x_A)$$

معادلهٔ مماس بر منحنی در نقطهٔ A

$$y - \alpha^2 + 7\alpha = (2\alpha - 7)(x - \alpha)$$

$$P(0,-1)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} -1 - \alpha^2 + 7\alpha = (2\alpha - 7)(0 - \alpha) \Rightarrow$$

$$-1 - \alpha^2 + \cancel{7\alpha} = -2\alpha^2 + \cancel{7\alpha}$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$$ طول‌های نقاط تماس

$$\alpha = 1 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} y - 1 - 7 = (2 - 7)(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = -5x - 1$$ معادلهٔ یک خط مماس

$$\alpha = -1 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} y - 1 - 7 = (-2 - 7)(x + 1)$$

$$\Rightarrow y = -9x - 1$$ معادلهٔ مماس دیگر

مثال (۱۸): از نقطهٔ $P(1\ ,\ -2)$ دو مماس بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = 1 - \frac{9}{(x-1)^2}$ رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها را بیابید.

حل:

$$y'_x = \frac{18}{(x-1)^3}$$

فرض می‌کنیم A به طول α نقطهٔ تماس باشد.

$$y_A = 1 - \frac{9}{(\alpha-1)^2} \quad \text{و} \quad \underset{\text{مماس}}{m} = \frac{18}{(\alpha-1)^3}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 + \frac{9}{(\alpha-1)^2} = \frac{18}{(\alpha-1)^3}(x - \alpha)$$

معادلهٔ مماس بر منحنی در نقطهٔ A

$$P(1,-2)\xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} -2 - 1 + \frac{9}{(\alpha-1)^2} = \frac{18}{(\alpha-1)^3}(1 - \alpha) \Rightarrow$$

$$\frac{-3(\alpha-1)^2 + 9}{(\alpha-1)^2} = \frac{-18(\alpha-1)}{(\alpha-1)^3}$$

$$\Rightarrow -3(\alpha-1)^2 + 9 = -18 \Rightarrow$$

$$(\alpha-1)^2 = 9 \Rightarrow \alpha - 1 = \pm 3$$

$$\Rightarrow \alpha = 4\ ,\ -2$$ طول‌های نقاط تماس

$$\alpha = 4 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} y - 1 + \frac{9}{9} = \frac{18}{27}(x - 4) \Rightarrow$$

$$y = \frac{2}{3}(x - 4)$$ معادلهٔ یکی از مماس‌ها

$$\alpha = -2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ مماس نقطهٔ A}} y - 1 + \frac{9}{9} = -\frac{18}{27}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}(x + 2)$$ معادلهٔ مماس دیگر

روش دوم (راه m)

اگر بخواهیم از نقطهٔ $P(a\ ,\ b)$ واقع در خارج یک منحنی، دو مماس بر منحنی رسم کنیم، شیب‌های مماس‌ها را m فرض می‌کنیم. با در دست داشتن نقطهٔ P و شیب m، معادلهٔ فرضی مماس را می‌نویسیم، این خط را با معادله تقاطع می‌دهیم (yها حذف). سپس شرط ریشهٔ مضاعف را برای

معادلهٔ تقاطع می‌نویسیم و از آن جا m به دست می‌آید. mها را در معادلهٔ فرضی مماس قرار می‌دهیم.

توجه: (معادلهٔ تقاطع) $-\frac{b}{۲a}$ = طول نقطهٔ تماس

مثال(۱۹): از نقطهٔ P(۰ , ۴) دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴$ رسم می‌کنیم، مطلوب است معادله‌های مماس‌ها و مختصّات نقاط تماس.

حل: شیب مماس‌ها را m فرض می‌کنیم.

$y - y_p = m(x - x_p)$

معادلهٔ فرضی مماس $y - ۴ = m(x - ۰) \Rightarrow y = mx + ۴$

این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = mx + ۴ \\ x^۲ + y^۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow x^۲ + (mx + ۴)^۲ = ۴ \Rightarrow$$

معادلهٔ تقاطع $(m^۲ + ۱)x^۲ + ۸mx + ۱۲ = ۰$

شرط ریشهٔ مضاعف : $\Delta' = b'^۲ - ac = ۰ \Rightarrow$

$$۱۶m^۲ - ۱۲(m^۲ + ۱) = ۰$$

شیب‌های مماس‌ها $۴m^۲ = ۱۲ \Rightarrow m^۲ = ۳ \Rightarrow m = \pm\sqrt{۳}$

$$m = \sqrt{۳}; \begin{cases} y = mx + ۴ \Rightarrow y = \sqrt{۳}x + ۴ & \text{معادلهٔ یک خط مماس} \\ x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۸m}{۲(m^۲+۱)} = -\frac{۸\sqrt{۳}}{۲(۴)} = -\sqrt{۳} & \text{طول نقطهٔ تماس} \\ y = \sqrt{۳}(-\sqrt{۳}) + ۴ \Rightarrow y = ۱ & \text{عرض نقطهٔ تماس} \end{cases}$$

$$m = -\sqrt{۳}; \begin{cases} y = mx + ۴ \Rightarrow y = -\sqrt{۳}x + ۴ & \text{معادلهٔ مماس دیگر} \\ x = -\frac{b}{۲a} = -\frac{۸m}{۲(m^۲+۱)} = \frac{۸\sqrt{۳}}{۲(۴)} = \sqrt{۳} & \text{طول نقطهٔ تماس} \\ y = -\sqrt{۳}(\sqrt{۳}) + ۴ \Rightarrow y = ۱ & \text{عرض نقطهٔ تماس} \end{cases}$$

مثال (۲۰): معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که بتوان از آن نقاط، دو مماس عمود بر هم بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^۲+۱}{x}$ واقع در همان صفحه رسم کرد.

حل: فرض می‌کنیم $P(x_۱ , y_۱)$ یک نقطه از مکان باشد؛ یعنی وقتی از نقطهٔ P دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^۲+۱}{x}$ رسم می‌کنیم، دو مماس بر هم عمود باشند، مانند مثال قبل عمل می‌کنیم:

شیب مماس به فرض = m

$y - y_p = m(x - x_p)$

$y - y_۱ = m(x - x_۱) \Rightarrow y = mx - mx_۱ + y_۱$

این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = mx - mx_۱ + y_۱ \\ y = \frac{x^۲ + ۱}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^۲ + ۱}{x} = \frac{mx - mx_۱ + y_۱}{۱} \Rightarrow$$

$mx^۲ - mx_۱x + y_۱x = x^۲ + ۱$

معادلهٔ تقاطع خط و منحنی $(m-۱)x^۲ + (y_۱ - mx_۱)x - ۱ = ۰$

شرط ریشه مضاعف : $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۰ \Rightarrow$

$(y_۱ - mx_۱)^۲ + ۴(m - ۱) = ۰$

$y_۱^۲ + m^۲x_۱^۲ - ۲x_۱y_۱m + ۴m - ۴ = ۰$

$x_۱^۲m^۲ + ۲(۲ - x_۱y_۱)m + (y_۱^۲ - ۴) = ۰$

ریشه‌های این معادلهٔ m′ و m″ شیب‌های مماسند. چون دو مماس بر هم عمودند؛ پس:

$m' . m'' = -۱ \Rightarrow \frac{c}{a} = -۱ \Rightarrow \frac{y_۱^۲ - ۴}{x_۱^۲} = -۱ \Rightarrow$

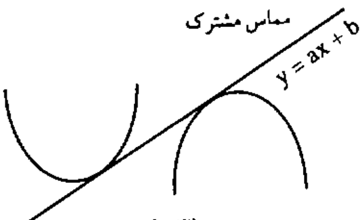
معادلهٔ مکان $y_۱^۲ - ۴ = -x_۱^۲ \Rightarrow x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۴$

یعنی از هر نقطهٔ واقع بر دایره به معادلهٔ $x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۴$، که دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x^۲+۱}{x}$ رسم کنیم، دو مماس بر هم عمودند.

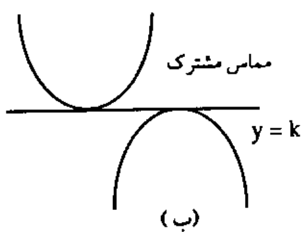
تمرین: معادلهٔ مکان هندسی نقاطی از صفحه را بیابید که اگر از آن نقاط دو مماس بر دایره به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۸$ واقع در همان صفحه رسم کنیم، دو مماس بر هم عمود باشند.

جواب $x_۱^۲ + y_۱^۲ = ۱۶$

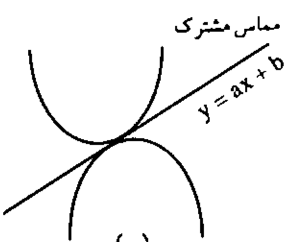
مماس مشترک: به شکل‌های زیر توجه کنید:



(الف)



(ب)



(ج)

الف) اگر خط $y = ax + b$ مماس مشترک دو منحنی $y_۱$ و $y_۲$ باشد، برای یافتن معادلهٔ مماس مشترک خط $y = ax + b$ را با هر یک از منحنی‌های $y_۱$ و $y_۲$ تقاطع می‌دهیم؛ سپس $\Delta = ۰$.

مثال (۲۱): معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی به

معادله‌های $y_1 = -x^2 + 2x + 1$ و $y_2 = x^2 - 8x + 14$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی y_1 و y_2 باشد، این خط را با هر یک از معادله‌های منحنی‌ها تقاطع می‌دهیم؛ سپس $\Delta = 0$.

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x + 1 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow ax + b = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow$$

$$x^2 + (a - 2)x + (b - 1) = 0$$

$$\Delta = (a - 2)^2 - 4(b - 1) = 0 \Rightarrow a^2 - 4a - 4b = -8 \quad (1)$$

$$\begin{cases} y = x^2 - 8x + 14 \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 14 = ax + b \Rightarrow$$

$$x^2 - (a + 8)x + (14 - b) = 0$$

$$\Delta = (a + 8)^2 - 4(14 - b) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 + 16a + 4b = -8 \quad (2)$$

$$\begin{cases} (1);\ a^2 - 4a - 4b = -8 \\ (2);\ a^2 + 16a + 4b = -8 \end{cases} \Rightarrow 2a^2 + 12a + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$a^2 + 6a + 8 = 0 \Rightarrow (a + 2)(a + 4) = 0 \Rightarrow a = -2,\ a = -4$$

$$a = -2\ ;\ a^2 - 4a + 8 = 4b$$

$$4 + 8 + 8 = 4b \Rightarrow b = 5$$

$$a = -4\ ;\ a^2 - 4a + 8 = 4b$$

$$16 + 16 + 8 = 4b \Rightarrow b = 10$$

ب) ممکن است معادلهٔ مماس مشترک به صورت $y = k$ باشد، که معمولاً در تست‌ها مطرح می‌شود.

مثال(۲۲): معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی به معادله‌های $y_1 = x^2 - 2x$ و $y_2 = -x^2 + 4x - 5$ را بیابید.

حل: اگر چه این مسأله را می‌توان مانند قسمت الف حل کرد؛ ولی راه ساده‌تر آن چنین است:

$$y'_1 = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} y = -1$$

$$y'_2 = -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ تابع}} y = -1$$

پس $y = -1$ عرض‌های اکسترمم هر دو منحنی است؛ بنابراین برهرمنحنی دو مماس است. به شکل (ب) توجه کنید.

ج) ممکن است دو منحنی بر هم مماس باشند که در این صورت، باز هم یک مماس مشترک دارند.

مثال (۲۳): معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی به معادله‌های $y_1 = 2x^2 - 4x + 1$ و $y_2 = x^2 + 2x - 8$ را بیابید؛ به شرطی که دو منحنی بر هم مماس باشند.

حل: بدون بیان شرط در مسأله هم می‌توان مانند قسمت الف مسأله را حل کرد؛ ولی با وجود شرط، مسأله ساده‌تر حل خواهد شد.

دو منحنی را با هم تقاطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y_1 = 2x^2 - 4x + 1 \\ y_2 = x^2 + 2x - 8 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 4x + 1 = x^2 + 2x - 8$$

ریشه مضاعف $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3$

$x = 3$ ریشهٔ مضاعف معادلهٔ تقاطع دو منحنی y_1 و y_2 است، از این جا نتیجه می‌گیریم دو منحنی y_1 و y_2 در $x = 3$ بر هم ماسند؛ پس یک خط مماس مشترک دارند.

$$x = 3 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ یکی از منحنی‌ها}} y = 7$$

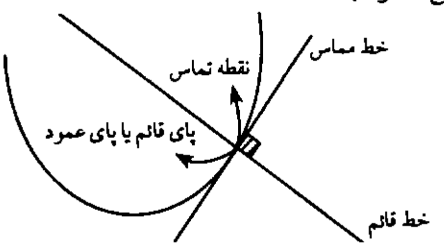
$$y_1' = 4x - 4 \xrightarrow{x=3} m_{\text{مماس}} = 12 - 4 = 8$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 7 = 8(x - 3) \Rightarrow$$

معادلهٔ مماس مشترک دو منحنی $\quad y = 8x - 17$

قائم یا عمود بر منحنی

خطّ قائم، خطی است که در نقطهٔ تماس بر خط مماس بر منحنی عمود باشد.



حالت اوّل: طرز نوشتن معادلهٔ قائم بر منحنی، در نقطه‌ای واقع بر منحنی، عیناً مانند حالت اوّل مماس بر منحنی عمل می‌کنیم؛ با توجه به تغییر ضریب زاویه (شیب).

مثال (۱): در نقطهٔ A به طول صفر واقع بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{x - 1}{x + 1}$ قائمی بر این منحنی رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله خط قائم؟

حل:

$$y'_x = \frac{2}{(x + 1)^2}$$

$$y_A = \frac{0 - 1}{0 + 1} = -1 \quad \text{و} \quad m_{\text{مماس}} = \frac{2}{(0 + 1)^2} = 2 \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A) \Rightarrow y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow$$

معادلهٔ خط قائم $\quad y = -\frac{1}{2}x - 1$

مثال (۲): در نقطهٔ A به طول $\frac{\pi}{3}$ واقع بر منحنی به معادلهٔ $y = \frac{\sin x + \sqrt{3}}{\sin x}$ قائمی بر این منحنی رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله خط قائم؟

$$y_A = \frac{\sin\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 3$$

$$y'_x = \frac{\cos x \sin x - \cos x(\sin x + \sqrt{3})}{\sin^2 x} = \frac{-\sqrt{3}\cos x}{\sin^2 x}$$

$$m_{\text{مماس}} = \frac{-\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{3}} = \frac{-\sqrt{3}(\frac{1}{2})}{\frac{3}{4}} = \frac{-2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$m_{\text{قائم}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y - y_A = m_{\text{قائم}}(x - x_A) \Rightarrow y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3})$$

معادلهٔ خط قائم $\quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{3}) + 3$

حالت دوم: طرز نوشتن معادلهٔ خط قائم بر منحنی از نقطهٔ P(a , b) واقع در خارج منحنی مانند راه α مسألهٔ مماس حل می‌کنیم، با توجه به تغییر شیب خط.

مسأله: از نقطهٔ $P(1, \frac{1}{2})$ قائمی بر منحنی تابع به معادلهٔ $y = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$ رسم می‌کنیم؛ مطلوب است معادله قائم؟

حل: فرض می‌کنیم نقطهٔ N به طول α پای قائم باشد:

$$y_N = 1 - \frac{1}{(\alpha - 1)^2}$$

$$y'_x = \frac{2}{(x-1)^3} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{2}{(\alpha - 1)^3} \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{-(\alpha - 1)^3}{2}$$

$$y - y_N \Rightarrow m_{\text{قائم}}(x - x_N) \Rightarrow y - 1 + \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{-(\alpha-1)^3}{2}(x - \alpha)$$

معادلهٔ قائم بر منحنی در نقطهٔ N

$$P(1, \frac{1}{2}) \xrightarrow{\text{در معادلهٔ قائم نقطه N}} \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{-(\alpha-1)^3}{2}(1 - \alpha) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{(\alpha-1)^2} = \frac{(\alpha-1)^4}{2} \Rightarrow$$

فرض می‌شود $(\alpha - 1)^2 = k$ $\quad \frac{-(\alpha-1)^2 + 2}{2(\alpha-1)^2} = \frac{(\alpha-1)^4}{2}$

$$\frac{-k+2}{k} = \frac{k^2}{1} \Rightarrow k^3 = -k + 2 \Rightarrow k^3 + k - 2 = 0$$

در این معادله، مجموع ضرایب صفر است، پس یک جواب $k = 1$، برای ادامهٔ حلّ معادله را بر $(k-1)$ تقسیم می‌کنیم:

$$k^3 + k - 2 \;\big|\; k - 1 \quad \Rightarrow \quad k^2 + k + 2, \quad \text{باقیمانده } 0$$

$$k^3 + k - 2 = (k-1)(\underbrace{k^2+k+2}_{\text{مثبت است}}) = 0 \rightarrow \underbrace{k^2+k+2}_{\text{همواره مثبت است}} \quad \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow (\alpha - 1)^2 = 1 \Rightarrow \alpha - 1 = \pm 1 \Rightarrow \alpha = 0, 2$$

طول‌های پای قائم: آنها را در معادلهٔ قائم نقطهٔ N قرار می‌دهیم:

$$\alpha = 0 \;;\; y - 1 + 1 = \frac{1}{2}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$\alpha = 2 \;;\; y - 1 + 1 = \frac{+1}{2}x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

خط قائم، یک خط است و در دو نقطه بر منحنی عمود است.

تمرین

۱. به ازای چه مقادیر، m معادلهٔ $x^{101} - 101x + m - 4 = 0$ ریشهٔ مضاعف دارد؟

۲. به ازای چه مقادیر، m منحنی به معادلهٔ $y=(x^2-4)(x^2+mx-5)$ بر محور xها مماس است؟

۳. اگر $x^7 + 7y + 7x - 4 = 0$ و نقطهٔ A به طول ۱ روی منحنی باشد، شیب خط مماس را بیابید.

۴. نقاطی از منحنی به معادلهٔ $y=\frac{2x}{4x-1}$ را بیابید که شیب خط مماس در آن نقاط برابر $\frac{-2}{49}$ باشد.

۵. نقاطی از منحنی به معادلهٔ $x^2 + 3y^2 = 4$ را بیابید که شیب خط مماس در آن نقاط برابر $-\frac{1}{3}$ باشد.

۶. معادلهٔ خط‌های مماس و قائم بر منحنی به معادلهٔ $y = \cos(x + \frac{\pi}{3}) . \cos(x - \frac{\pi}{3}) - \sin(x + \frac{\pi}{3}) . \sin(x - \frac{\pi}{3})$ را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{6}$ بیابید.

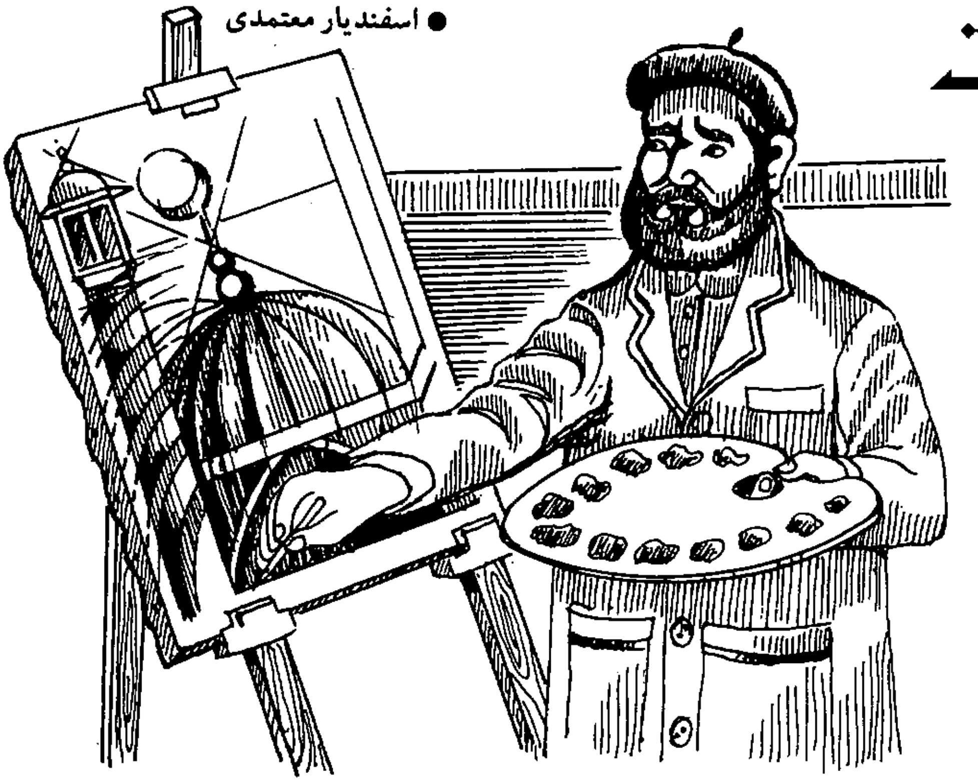
۷. از نقطهٔ $P(0 , -1)$ دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=x^2-x$ رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها را بیابید.

۸. از نقطهٔ $P(0 , 6)$ دو مماس بر منحنی به معادلهٔ $2x^2+y^2=4$ رسم کرده‌ایم، معادله‌های مماس‌ها و مختصات نقاط تماس را بیابید.

۹. از مبدأ مختصات، قائمی بر منحنی به معادلهٔ $y=\frac{x^2+4\sqrt{2}}{x}$ رسم کرده‌ایم، مطلوب است محاسبهٔ طول‌های پای قائم و معادلهٔ خط قائم؟

ریاضیات ایران در دورهٔ اسلامی

● اسفندیار معتمدی



محمدبن ایوب طبری و مفتاح المعاملات

«ابوجعفر محمدبن ایوب الحاسب الطبری» یکی از ریاضیدانان برجستهٔ ایرانی است که آثار خود را به زبان فارسی نوشته است، نام او را در یکی از تألیفاتش[۱]، «شمس‌الدین محمدبن ایوب مازندرانی» آورده‌اند و زمان تولد او را از روی یکی دیگر از نوشته‌هایش که تاریخ کتابت آن جمعه ۲۵ ربیع الاول ۳۷۲ است، در قرن چهارم هجری حدس زده‌اند.

تحقیقات ایران‌شناس فرانسوی، آقای لازار نشان می‌دهد که محمدبن ایوب، معاصر الب‌ارسلان و ملکشاه سلجوقی بوده و زیج مفرد را در فاصلهٔ میان سال‌های ۴۷۹ تا ۵۰۲ هجری تألیف کرده است و چون در این تألیف، در پنج مورد، از آمل به‌عنوان «شهرما» یاد کرده، لازار نتیجه می‌گیرد که ستاره‌شناس طبرستان، در زادگاه خود زیسته و همان‌جا فعالیت کرده است.

۱ـ المونس فی نزهة اهل المجلس.

آثار محمدبن ایوب

اکنون از آثار نوشته شدهٔ محمدبن ایوب، نُه کتاب و رساله در ریاضیات و نجوم به زبان فارسی در دست است و شاید تألیفات او بسیار بیشتر از این نوشته‌ها باشد. این تألیفات عبارتند از:

۱. مفتاح المعاملات: این کتاب برای استفاده عامهٔ مردم در حساب و هندسه عملی نوشته شده است.

۲. کتاب العمل و القاب فی معرفة (اسطرلاب): موضوع این کتاب، شناختن اسطرلاب و انواع و اجزا و کاربرد آن است.

۳. شش فصل در اسطرلاب

۴. شمارنامه: این کتاب که در علم حساب است، در سال ۱۳۴۵ در سلسله انتشارات بنیاد فرهنگ ایران به چاپ رسیده است.

۵. زیج مفرد

۶. رسالهٔ استخراج در شناختن عمر و بقای آن

۷. المونس فی نزهة اهل المجلس
۸. رساله قواعدی چند در معرفت هر حرکت و قوسی و دایره‌ای و خطی و نقطه‌ای که منجّمی در آن اعمال کند.
۹. رسالهٔ مقدمات اختیارات در سیّارات سبعه

بسم‌ا...الرحمن‌الرحیم

مدار اندرین جز ز یزدان سپاس
تو برتر ازو، هم مر او را شناس

چنین گوید ابوجعفر محمدبن ایوب الحاسب الطبری، که چون ما بپرداختیم از رسالهٔ **شمارنامه** که او اصل شمار هندی است، خواستیم که تمامی و فایدهٔ او اندرین رسالهٔ مفتاح المعاملات پیدا کنیم، جز خداوندان صناعت نجوم را که در او تمام گفته‌ایم و همچنین در این رساله یاد کنیم، هر شماری که در آن جا یاد نکرده‌ایم؛ جز به تحت و میل از ضرب و قسمت و جذر، خاصه از بهر خداوندان معاملات گوناگون، از بهر آسانی شمار معامله‌ها از گرفتن و دادن و خریدن و فروختن و بخشیدن خاصه هر مواریث را که باشد میان ایشان وز شمار فرایض و زکوة و استخراج مسایل در وصایا و تقدیر ساعات روز و شب و اوقات نماز و روزه و حج و آنچه بود از کارهای دینی و دنیای که تعلق به حساب دارد. خاصه از تصرف‌های دیوانی از هر نوعی از سختن و پیمودن و بخشیدن میان مردم از مقدار روزگارشان و قیاس کردن و اندازه دانستن هر یک از هر یک و مساحت زمین‌ها و شمارهای نوادر و مضمر و مشکل که باشد در میانهٔ مردم.

پس ما این رساله را اندر این باب پیدا کردیم، هر چه آسان‌تر و نیکوتر به تمامی، تا دریابند او را به آسانی.

و این رساله را شش فصل نهادیم:

فصل نخستین ازو	در اعداد متناسبات
فصل دوم ازو	در ضرب و قسمت و جذر و کسورات
فصل سوّم ازو	در فرایض و معاملات
فصل چهارم ازو	در نوادر و مضمرات
فصل پنجم ازو	در خطاین و مشکلات
فصل ششم ازو	در مقادیر و مساحات

و از ایزد جلّ جلاله توفیق خواستیم بر تمام کردن این که گفتیم، که تواناست که توفیق دهد بر این، والله المعین و الموفق.

نمونه آثار. از کتاب **مفتاح المعاملات**، از هر فصل نمونه‌ای می‌آوریم:

درِ پنجم از فصل نخستین

در دانستن ضرب و قسمت و جذر

اما ضرب دو عدد در هم، برهم گرفتن عددی است به قدر آن عدد دیگر. چنان که گر ضرب کنیم پنج را در هفت، معنای آن خواهیم که پنج را هفت بار گیریم. اَو هفت را پنج بار، از هر دو نوع سی و پنج حاصل آید، و این حاصلضرب پنج باشد در هفت و جمله حال ضرب بر این کردار باشد.

و او از دو گونه بیرون نشود؛ گونه‌ای ازو ضرب عددی بود در عدد دیگر ماندهٔ او و آن را جذر خوانند؛ چون: ضرب شش در شش، او هفت در هفت، او بیست در بیست. هر چه ماندهٔ یکدیگر بود. پس این عدد را جذر خوانند و آنچه از ضربشان حاصل آید، مال مجذور اَو مُنطق خوانند.

وگونهٔ دوم آن است که ضرب دو عدد بود در هم که مخالف یکدیگر باشند؛ چون: ضرب پنج در هفت، اَو نه در شش، اَو ده در بیست، و این هر یک را عدد مطلق خوانند و آنچه را حاصل آید، از ضربشان مال اصم خوانند؛ یعنی که جذرش را پدید نتوان آوردن به تحقیق، مگر به تقریب.

اما قسمت بخشیدن عددی است بر عددی دیگر، و او عکس ضرب است؛ چنان که‌گر پانزده را بر پنج ببخشیم، بیفکنیم به قدر پنج هر عددی که یابیم از پانزده تا سه پنج افکنده شود و سه حاصل آید.

و عمل قسمت نیز بر دو گونه باشد: گونه‌ای ازو قسمت بیشتر بر کمتر است، دوم قسمت کمتر بر بیشتر. و عمل هر یک یاد کنیم اگر خدای خواهد عزّوجل.

درِ دهم از فصل دوم

در دانستن گرفتن میزان عمل ضرب

اما میزان ضرب درستی عمل ضرب است و عملش چنان

باشد که برهم گیریم عقدهای آن عدد که در عددی دیگر ضرب همی کنیم، و از جمله‌اش هر چه نه بود بیفکنیم، و آن عدد دیگر را همچنان عقدش برهم گیریم و نه نه از او بیفکنیم، و آنچه بماند در آن باقی دیگر ضرب کنیم و آنچه حاصل آید، بر هم گیریم و نه از وی بیفکنیم، آنچه بماند، میزان ضرب بود، نگاه داریم. پس آن هر دو عدد را در هم ضرب کنیم و مبلغش را بر هم گیریم و نه نه از وی فرونهیم آنچه بماند، اگر ماندهٔ میزان ضرب بود، عملش درست کرده باشیم وگر مانده نباشد، عمل خطا کرده باشیم.

مثالش: خواستیم که پنجاه و شش را در شصت و هفت ضرب کنیم، میزانش باز گرفتیم پنج را که عقد پنجاه است بر شش که عقد آحادش است، گرفتیم یازده بود، نه بیفکندیم دو بماند این باقی است. شش را که عقد شصت است، بر هفت که عقد آحادش است، فزودیم سیزده باشد، نه بیفکندیم چهار بماند. ضربش کردیم در آن دو که باقی بود هشت حاصل آمد، این میزان است نگاه داشتیم، پس پنجاه و شش را در شصت و هفت ضرب کردیم، حاصل شد سه هزار و هفتصد و پنجاه و دو، عقدهاش بر هم گرفتیم سه را بر هفت ده بود، نه بیفکندیم یکی بماند و پنج را که عقد پنجاه است، بر وی فزودیم، شش بود، و دو را نیز برفزودیم که عقد آحاد است هشت گشت مانند میزان ضرب، پس بدانستیم که این عمل درست است.

و این کفایت است.

امتحان درستی ضرب ۶۷×۵۶، طبق دستورالعمل فوق چنین است:

۱) ۵ + ۶ = ۱۱   ۱۱ − ۹ = ۲

۲) ۶ + ۷ = ۱۳   ۱۳ − ۹ = ۴

۳) ۴ × ۲ = <u>۸</u>

۴) ۵۶ × ۶۷ = ۳۷۵۲

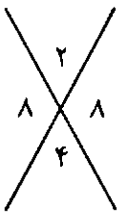
۵) ۳ + ۷ = ۱۰   ۱۰ − ۹ = ۱

۶) ۵ + ۲ = ۷   ۷ + ۱ = <u>۸</u>

از مساوی بودن حاصل عمل ۴ و ۶ نتیجه می‌شود که ضرب درست است.

دستورالعمل بالا را به شکل دیگری نشان می‌دهند.

ولیکن اگر در حاصل ضرب عدد نه یا صفر اشتباه وارد شده باشد این امتحان ضرب نمی‌تواند نادرست بودن جواب را مشخص کند.



درِ چهارم از فصل چهارم

در شمار یافتن بریدی کند رو مر تیز رو را

گر بپرسند ما را از بریدی که گفتند او را برو هر روزی شش فرسنگ و پنجمین روز را ازو بریدی، دیگر را گفتند برو از پسش هر روز نه فرسنگ، کدام روز بیابد این برید آخرین مر آن پیشین را؟

شمارش: ضرب کردیم میانه روزهاشان را که چهار روز است در رفتن فرسنگ برید نخستین که شش فرسنگ است، حاصل آمد بیست و چهار ببخشیدیم او را بر میانه فرسنگ هر دو، یعنی سه فرسنگ که میانه شش و نه است برفت هشت.

بیاید آخرین آن نخستین را به هشتم روز از روز شدن خویش یا به دوازدهم روز برشدن برید پیشین!

و این کفایت است.

مثال: اگر بخواهیم این مسأله را به صورت یک مسألهٔ مکانیک امروزی مطرح و حل کنیم، چنین خواهیم نوشت:

دو متحرّک با سرعت‌های ثابت ۹ واحد و ۶ واحد از یک مبدأ شروع به حرکت می‌کنند. اگر متحرّک تندتر ۴ روز پس از متحرّک کندتر شروع به حرکت کند، پس از چند روز به آن می‌رسد؟

حل:

$x_1 = x_2$

$V_1 t_1 = V_2 t_2$

$6(4 + t_2) = 9t_2$

$\begin{cases} 6t_1 = 9t_2 \\ t_1 - t_2 = 4 \rightarrow t_1 = 4 + t_2 \end{cases}$

$t_2 = 8$ روز ، $t_1 = 12$ روز

درِ چهاردهم از فصل پنجم

در دانستن آن عدد که چون شش بکاهیم، او پنج برفزاییم جذرش باز آید.

اگر پرسند ما را کدام است آن عدد که چون پنج بر او

فزاییم، جذرش باز آید و چون شش ازو بکاهیم، جذرش بازآید؟

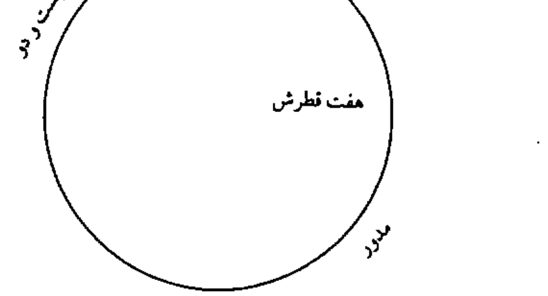
شمارش آن است که پنج و شش را گرد آوریم، یازده بود، یکی از او بکاهیم، مادام بماند ده، و به دو نیم کنیم، پنج بماند، در مثل خویش ضرب کنیم، برود بیست و پنج، پس شش را بر او بیفزاییم، سی و یک بود. این آن عدد است که چون پنج بر وی فزاییم، سی و شش گردد و جذرش باز آید، و چون شش از سی و یک بکاهیم، بیست و پنج بماند، و او آن عدد بود که جذرش باز آید.

و این کفایت است اندرین معنا.

درِ چهل و یکم از فصل ششم

در مساحت مدوّری اَو زمینی که بر آن کردار بود قطرش، اگر ما را مدوری باشد او زمینی مدوّر، و خواهیم که مساحت تکسیر سطحش کنیم، ضرب کنیم مساحت نصف قطر او را در مساحت نیمهٔ گردش او، آنچه حاصل آید از ضرب، مساحت جمله تکسیر سطحش بود.

مثالش: ما را زمینی بود مدوّر بر این کردار که قطرش هفت و گردش دورش بیست و دو بود. پس ضرب کردیم نیمهٔ قطر او را که سه و نیم است در یازده، که نیمهٔ گردش دور است، برفت سی و هشت و نیم. و این مساحت تکسیر سطح این مدوّر است.



وجهی دیگر: وگر به راهی دیگر خواهیم، ضرب کنیم قطرش را در مثل خویش، و از آن مبلغ که گرد آید سبع ونصف سبع او از او بیفکنیم، آنچه بماند، مساحت تکسیر آن مدوّر است.

مثالش: مرهمان مدوّر را که قطرش هفت بود و دورش بیست و دو، پس هفت را در مثل خویش ضرب کنیم برفت چهل و نه، سبع و نصف سبع او فراز گرفتیم ده و نیم بود. ازو فرو نهادیم، بماند سی و هشت و نیم، این مساحت تکسیر این مدوّر است.

وجهی دیگر: وگر به راهی دیگر خواهیم، ضرب کنیم ربع گردش دور او را در جمله قطرش، آنچه حاصل آید، مساحت تکسیر او بود.

مثالش: همان مدوّر را که قطرش هفت و دورش بیست و دو، ربع دورش فراز گرفتیم، پنج و نیم بود، ضرب کردیم در هفت که قطرش است برفت سی و هشت و نیم، این مساحت تکسیر این مدوّر است.

وجهی دیگر: وگر خواهیم، ضرب کنیم قطرش را در مثل خویش و آن مبلغ را ضرب کنیم در یازده، و جمله را ببخشیم بر چهارده، آنچه برود تکسیرش بود.

مثالش:مدوّر را که قطرش هفت بود، ضرب کردیم در مثل خویش برفت چهل و نه، پس در یازده ضرب کردیم برفت پانصد و سی و نه، ببخشیدیم بر چهارده، برفت سی و هشت و نیم، و این تکسیر این مدوّر است و این کفایت است.

وجهی دیگر: وگر خواهیم، ضرب کنیم قطر را در نیمه گردش دور، آنچه را برود، دو نیمه کنیم، آنچه بماند، تکسیر مدوّر بود.

وجهی دیگر: وگر خواهیم، ضرب کنیم قطرش را در دورش، و ببخشیم بر چهار، آنچه برود، تکسیرش بود، و این کفایت است اندرین معنا، والله المعین.[1]

۱ـ به جای شش روش بالا، امروزه از دستورالعمل زیر برای تعیین مساحت دایره استفاده می‌کنیم:

وجهی دیگر $\frac{\text{قطر}}{۲}$ = شعاع ۳/۱۴ × شعاع × شعاع = مساحت دایره

مثال: معین کنید مساحت دایره‌ای که قطرش ۷ متر باشد؟

مترمربع ۳۸/۴۶۵ = ۳/۱۴ × ۳/۵ × ۳/۵ = مساحت دایره و متر ۳/۵ = $\frac{۷}{۲}$ = شعاع

الگوریتمی برای گرافیکال بودن یک دنباله

● حمیدرضا امیری

نکات مهم در مورد دنبالهٔ درجهٔ رأسها

اگر دنبالهٔ نزولی $S : K_1 , K_2 , \dots , K_n$ از اعداد صحیح نامنفی مفروضی باشد و بتوانیم متناظر با آنها گرافی چون G رسم کنیم که شامل n رأس $V_1 , \dots , V_n$ باشد و اعداد K_1 تا K_n درجهٔ رأس‌های V_1 تا V_n باشند، به چنین دنباله‌ای یک **دنبالهٔ گرافیکال** می‌گوییم. ابتدا شرطهای لازم را برای گرافیکال بودن یک دنباله بیان کرده و سپس آلگوریتمی را بیان می‌کنیم که می‌تواند به صورت یک شرط لازم و کافی به کار برده شود:

شرط ۱: اگر گراف G شامل n رأس باشد دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های آن از n عدد صحیح نامنفی تشکیل خواهد یافت.

شرط ۲: با توجه به این که در یک گراف از مرتبهٔ P، حدّاکثر درجهٔ یک رأس $(P - 1)$ می‌تواند باشد، اگر دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های گرافی از مرتبه P تشکیل شود، حداکثر عدد $(P - 1)$ در بین جمله‌های دنباله یافت خواهد شد.

شرط ۳: تعداد اعداد صحیح فرد در دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های گراف G عددی زوج است.

شرط ۴: (قضیهٔ مهم)

«در هر گراف، از مرتبهٔ دلخواه $P \geq 2$ حدّاقل دو رأسِ هم‌درجه وجود دارد»؛ بنابراین در دنبالهٔ درجهٔ رأس‌های یک گراف، حدّاقل دو جمله از دنباله با هم برابر خواهند بود که البته این شرط و همهٔ شرط‌های فوق، شرط‌های لازم بوده و ممکن است یک دنباله از اعداد صحیح نامنفی، همهٔ شرایط مذکور را دارا باشد؛ ولی گرافیکال نباشد.

توسط آلگوریتمی که در زیر بیان خواهد شد، شرطی لازم و کافی برای گرافیکال بودن یک دنباله بیان می‌کنیم.

قضیه: شرط لازم و کافی برای آن که دنبالهٔ نزولی از اعداد صحیح نامنفی $S : d_1 , d_2 , \dots , d_p$ یک دنبالهٔ گرافیکال باشد، آن است که پس از طی مراحل آلگوریتمی زیر، به دنبالهٔ صفر (همهٔ جمله‌ها صفر) برسیم:

۱. d_1 را حذف کرده و یک واحد از d_1 تا جملهٔ بعدی آن کم می‌کنیم.

۲. دنبالهٔ جدید را در صورت نیاز به شکل نزولی مرتّب کرده و طبق مرحلهٔ (۱) عمل می‌کنیم.

مثال: آیا دنبالهٔ $S : ۵ , ۵ , ۵ , ۳ , ۲ , ۲$ گرافیکال است؟

$(d_1 = ۵)$ را حذف کردیم) $S_1 : ۵ , ۵ , ۳ , ۲ , ۲$

(از ۵ جملهٔ بعدی ۱ واحد کم کردیم)　S_2 : ۴ , ۴ , ۲ , ۱ , ۱

(d_1 = ۴ را حذف کردیم)　S_3 : ۴ , ۲ , ۱ , ۱

(از ۴ جملهٔ بعدی ۱ واحد کم کردیم)　S_4 : ۳ , ۱ , ۰ , ۰

(d_1 = ۳ را حذف کردیم)　S_5 : ۱ , ۰ , ۰

(از ۳ جملهٔ بعدی ۱ واحد کم کردیم)　S_6 : ۰ , −۱ , −۱

چون S_6 یک دنباله با جمله‌های منفی است، پس نمی‌تواند گرافیکال باشد؛ در نتیجه S گرافیکال نیست. (البته S_5 هم گرافیکال نبود؛ زیرا تعداد رأس‌های فرد در آن فرد بوده است. و در حالت کلّی در هر مرحله از مراحل آلگوریتمی که یکی از شرط‌های لازم نقض شود، دنبالهٔ گرافیکال نیست.)

توجه دارید که دنبالهٔ S همهٔ شرط‌های لازم را دارا است؛ ولی گرافیکال نیست.

کدام دنباله گرافیکال است؟

۱) ۷ , ۶ , ۵ , ۴ , ۳ , ۲ , ۱ , ۰

۲) ۶ , ۵ , ۵ , ۳ , ۳ , ۲ , ۱

۳) ۵ , ۴ , ۴ , ۳ , ۲

۴) ۴ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱

حل: گزینهٔ «۴» صحیح است؛ زیرا:

در گزینهٔ «۱» هیچ دو رأس هم درجه وجود ندارد. در گزینهٔ «۲» تعداد رأس‌های فرد، فرد است و در گزینهٔ «۳»، ۵ رأس داریم که نمی‌توانیم درجهٔ از رأس ۵ نیز داشته باشیم.

S : ۴ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱

(d_1 = ۴ را حذف کردیم)　S_1 : ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۱

(از ۴ جملهٔ بعدی ۱ واحد کم کردیم)　S_2 : ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۱ , ۱ , ۱

(نزولی مرتّب شد)　S_3 : ۱ , ۱ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰

(d_1 = ۱ را حذف کردیم)　S_4 : ۱ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰

(دنبالهٔ صفر است)　S_5 : ۰ , ۰ , ۰ , ۰ , ۰

شرایط و فرم اشتراک مجلّه ریاضی برهان

۱ ـ واریز مبلغ ۱۳۰۰۰ ریال علی الحساب برای یک دوره (۴ شماره) به حساب ۷۹۱۰/۵ بانک ملت شعبه کریمخان زند به نام مشترکین انتشارات مدرسه و ارسال اصل فیش همراه با فرم تکمیل شده اشتراک به نشانی انتشارات مدرسه.

۲ ـ واحدهای آموزشی می‌توانند دانش‌آموزان خود را به صورت گروهی مشترک نمایند.

نشانی: تهران ، خیابان سپهبد قرنی، نرسیده به پل کریمخان زند، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، شماره ۳۶ کدپستی ۱۵۹۸۸ و صندوق پستی ۱۴۱۵۵/۱۹۴۹　تلفن: ۹-۸۸۰۰۳۲۴　دورنویس ۸۹۰۳۸۰۹

اطلاعات مشترک

مشخصات مشترک برای افراد　　در اینجا چیزی ننویسید

نام خانوادگی　نام　نام پدر

تاریخ تولد　محل تولد　پایه تحصیلی

مشخصات مشترک برای واحدهای آموزشی ـ ادارات و سازمانها

نام واحد آموزشی　نام مدیر مسئول

نام سازمان

مقطع　دخترانه

پسرانه

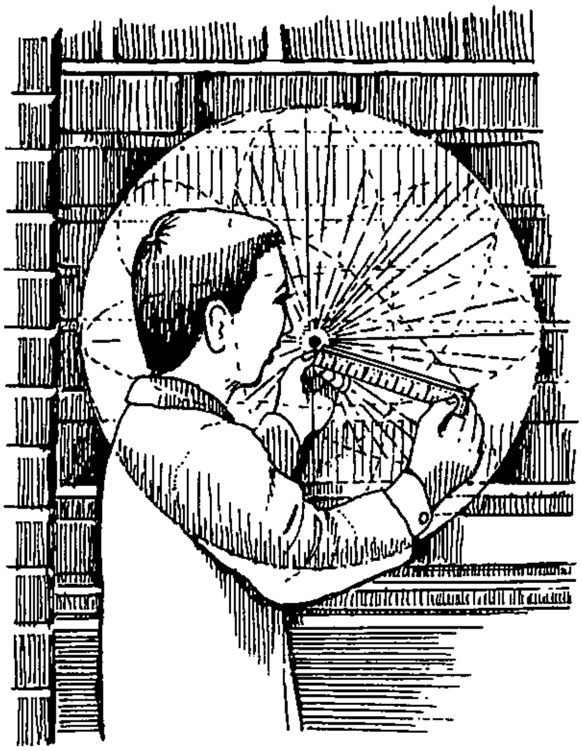
نشانی

استان　شهرستان　خیابان　کوچه

پلاک　کدپستی　مبلغ واریزی　شماره فیش

● محمدهاشم رستمی

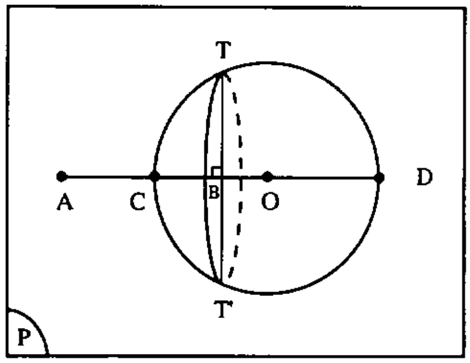
مکان هندسی (۲۵)



کره آپولونیوس

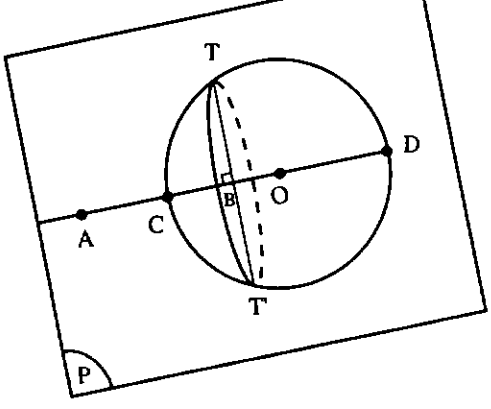
۱۲.۳. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k است، کره‌ای است که قطرش، پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی: صفحهٔ دلخواه P را که بر دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد، در نظر می‌گیریم و در این صفحه، روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند.



سپس دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k است. حال صفحهٔ P را حول خط AB دوران می‌دهیم. از دوران دایره به قطر CD واقع در این صفحه، که همواره و در هر وضعی از صفحهٔ P، مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است، کره‌ای به قطر CD پدید می‌آید که این کره، مکان هندسی نقطه‌ای از فضاست که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B، برابر مقدار ثابت k است.

اثبات به روش تحلیلی: دو نقطهٔ ثابت $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ را در دستگاه مختصات O ـ xyz در نظر می‌گیریم. اگر $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است، داریم:



$A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ و $M(x, y, z) \Rightarrow$

$$MA = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}$$

$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}}{\sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2}} = k \Rightarrow$$

$$k^2(x-x_2)^2 + k^2(y-y_2)^2 + k^2(z-z_2)^2$$
$$= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$$

پس از ساده کردن معادلهٔ بالا، معادله‌ای به صورت:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(x_1 - k^2x_2)}{k^2 - 1}x + \frac{2(y_1 - k^2y_2)}{k^2 - 1}y +$$
$$\frac{2(z_1 - k^2z_2)}{k^2 - 1}z + \frac{k^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{k^2 - 1} = 0 \quad (1)$$

به دست می‌آید که معادلهٔ کره به مرکز نقطهٔ

$$O_1\left(\frac{k^2x_2 - x_1}{k^2 - 1}, \frac{k^2y_2 - y_1}{k^2 - 1}, \frac{k^2z_2 - z_1}{k^2 - 1}\right)$$

و به شعاع

$$R = \left|\frac{k}{k^2 - 1}\right| \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - 2(x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2)}$$

است.

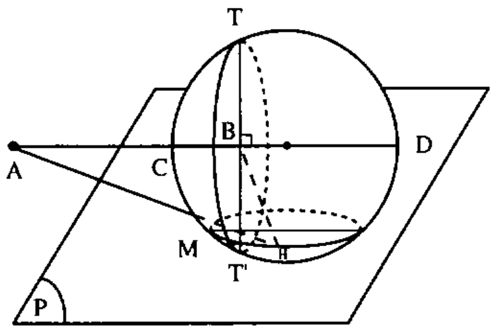
بدیهی است هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادله (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ برابر مقدار ثابت k است. در ضمن، به کمک یکی از رابطه‌های مربوط به تقسیم توافقی، به عنوان مثال به کمک رابطهٔ نیوتن، می‌توان ثابت کرد که قطر این کره، پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

تبصره: اگر دستگاه مختصات دکارتی در فضا را چنان اختیار کنیم که نقطهٔ A منطبق بر مبدأ مختصات و $\overrightarrow{AB}$ بردار یکه محور xها باشد، در این صورت خواهیم داشت $A = (0, 0, 0)$ و $B = (1, 0, 0)$. حال اگر $M = (x, y, z)$ نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر باشد داریم:

$$\frac{MA}{MB} = k \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{(x - 1)^2 + y^2 + z^2}} = k \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2k}{k - 1}x + \frac{1}{k - 1} = 0$$

که معادلهٔ بالا یک کره به مرکز $\left(\frac{k}{k - 1}, 0, 0\right)$ و به شعاع $R = \sqrt{\frac{k^2 - k + 1}{(k - 1)^2}}$ را مشخص می‌کند.

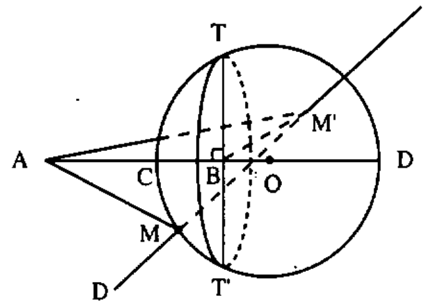


مثال ۱: صفحهٔ P و دو نقطهٔ A و B غیر واقع بر آن داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

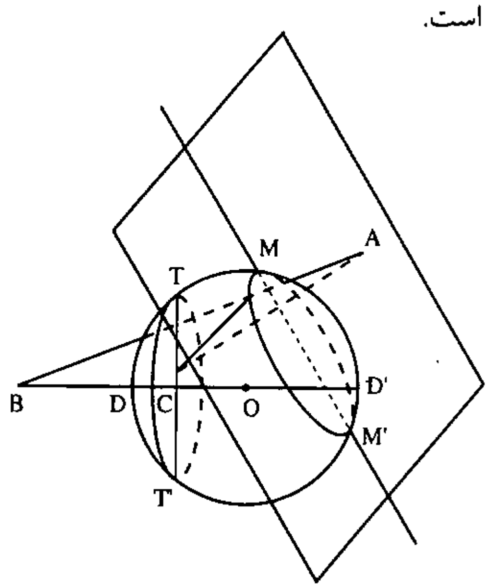
حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت k باشد، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. این کره را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با صفحهٔ P، جواب مسأله است. در صورتی که کره، صفحهٔ P را قطع کند، جواب مسأله یک دایره است و اگر کره بر صفحهٔ P مماس باشد، جواب مسأله یک نقطه (نقطهٔ تماس کره و صفحه) است، و اگر کره، صفحهٔ P را قطع نکند، مسأله دارای جواب نیست.

مثال ۲: خط D و دو نقطهٔ A و B غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k باشد.

حل: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است؛ یعنی کرهٔ به قطر CD را چنان که C و D پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کره با خط D، جواب مسأله است. مسأله حداکثر دو جواب دارد.



مثال ۳: سه نقطهٔ A ، B و C داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت k است.



حل: مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطهٔ A و C به یک فاصله است، صفحهٔ P عمودمنصف پاره‌خط AB است که این صفحه را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر k است؛ یعنی کرهٔ به قطر 'DD (نقطه‌های D و 'D پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم کرده‌اند) را نیز رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره، با صفحهٔ عمودمنصّف پاره‌خط AC ، جواب مسأله است.

مثال ۴: دو نقطهٔ $A(-1, 2, 0)$ و $B(3, -2, 1)$ داده شده است. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{2}$ است.

حل. راه اوّل: با قرار دادن $(x_1 = -1, y_1 = 2, z_1 = 0)$، $(x_2 = 3, y_2 = -2, z_2 = 1)$ و $k = \sqrt{2}$ در معادلهٔ (۱) (معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است)، معادلهٔ مکان هندسی موردنظر را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(-1-6)}{2-1}x + \frac{2(2+4)}{2-1}y + \frac{2(0-2)}{2-1}z + \frac{2(9+4+1)-(1+4+0)}{2-1} = 0$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 12y - 4z + 23 = 0$$

راه دوم: فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد. در این صورت داریم:

$$A(-1, 2, 0) \text{ و } B(3, -2, 1) \text{ و } M(x, y, z) \text{ و } k = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2} \quad \text{و}$$

$$MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{MA^2}{MB^2} = k^2 \Rightarrow \frac{(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2}{(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2} = 2 \Rightarrow$$

$$2(x-3)^2 + 2(y+2)^2 + 2(z-1)^2 = (x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 14x + 12y - 4z + 23 = 0$$

مثال ۵: الف) معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(2,0,-1)$ و $B(0,3,1)$ برابر $\sqrt{3}$ است.

ب) ثابت کنید که خط $D: \frac{x+1}{1} = \frac{y-\frac{9}{2}}{-2} = \frac{z-2}{2}$ از مرکز تقارن این مکان هندسی می‌گذرد.

پ) نقطه‌هایی از خط D را مشخص کنید که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ A و B برابر $\sqrt{2}$ باشد.

حل: الف) مکان هندسی خواسته شده، کره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. معادلهٔ این کره به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(x_1 - k^2x_2)}{k^2-1}x + \frac{2(y_1 - k^2y_2)}{k^2-1}y + \frac{2(z_1 - k^2z_2)}{k^2-1}z + \frac{k^2(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)}{k^2-1} = 0$$

$A(x_1 = 2\,,\ y_1 = 0\,,\ z_1 = -1)$ و $B(x_2 = 0\,,\ y_2 = 3\,,\ z_2 = 1)$

و $k = \sqrt{3} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + \frac{2(2-0)}{3-1}x + \frac{2(0-9)}{3-1}y + \frac{2(-1-3)}{3-1}z + \frac{3(0+9+1)-(4+0+1)}{3-1} = 0$

معادلهٔ کرهٔ مکان‌هندسی موردنظر

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 9y - 4z + \frac{25}{2} = 0$$

ب) مرکز کرهٔ بالا نقطهٔ $O_1(-1\,,\frac{9}{2}\,,2)$ است که مختصاتش در معادلهٔ خط D صدق می‌کند. پس خط D از مرکز کره می‌گذرد.

پ) نقطهٔ برخورد خط D و کرهٔ مکان هندسی بالا را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 9y - 4z + \frac{25}{2} = 0 \\ \frac{x+1}{1} = \frac{y - \frac{9}{2}}{-2} = \frac{z-2}{2} = t \Rightarrow x = t-1\,, y = -2t + \frac{9}{2}\,, z = 2t+2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 + (-2t + \frac{9}{2})^2 + (2t+2)^2 + 2(t-1) - 9(-2t + \frac{9}{2}) - 4(2t+2) + \frac{25}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 9t^2 = \frac{51}{4} \Rightarrow t^2 = \frac{51}{36} \Rightarrow t = \pm\frac{\sqrt{51}}{6}$$

$$\Rightarrow M_1\left(\frac{\sqrt{51}}{6} - 1\,, \frac{-\sqrt{51}}{3} + \frac{9}{2}\,, \frac{\sqrt{51}}{3} + 2\right)$$

$$M_2\left(\frac{-\sqrt{51}}{6} - 1\,, \frac{\sqrt{51}}{3} + \frac{9}{2}\,, \frac{-\sqrt{51}}{3} + 2\right)$$

مثال ۶: دو نقطهٔ $A(-1\,,2\,,1)$ و $B(3\,,-1\,,1)$ در دستگاه مختصات O ـ xyz داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ xOy را پیدا کنید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل: معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است، تعیین می‌کنیم و فصل مشترک آن، با صفحهٔ xOy به معادلهٔ $z = 0$ را به دست می‌آوریم:

$A(-1\,,2\,,1)$ و $B(3\,,-1\,,1)$ و $M(x\,,y\,,z)\,,\ k = 2 \Rightarrow$

$$MA = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$$

$$MB = \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2}$$

$$\frac{MA}{MB} = 2 \Rightarrow \frac{MA^2}{MB^2} = 4 \Rightarrow MA^2 = 4MB^2 \Rightarrow$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4(x-3)^2 + 4(y+1)^2 + 4(z-1)^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 26x + 12y - 6z + 38 = 0$$

معادلهٔ کرهٔ مکان هندسی

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{26}{3}x + 4y - 2z + \frac{38}{3} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \frac{26}{3}x + 4y - 2z + \frac{38}{3} = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

معادلهٔ مکان هندسی خواسته شده

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{26}{3}x + 4y + \frac{38}{3} = 0$$

تفریح اندیشه

همهٔ مقادیر x را چنان بیابید که به ازای آنها، عبارت زیر عددی حقیقی باشد:

$$z = \left[-x + 10 + (x+2)i\right](x - i)$$

جواب: ۲ و ۵-

حل: اوّل، z را به صورت a + bi می‌نویسیم. درثانی، برای حقیقی بودن z، باید b برابر صفر باشد؛ بنابراین جمیع مقادیر برقرار کنندهٔ این شرط را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} z &= \left[-x + 10 + (x+2)i\right](x - i) \\ &= -x^2 + 10x + (x^2 + 2x)i + xi - 10i + (x+2) \\ &= (-x^2 + 10x + x + 2) + (x^2 + 2x + x - 10)i \\ &= (-x^2 + 11x + 2) + (x^2 + 3x - 10)i \end{aligned}$$

برای حقیقی بودن z، باید جزء موهومی آن برابر صفر باشد:

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

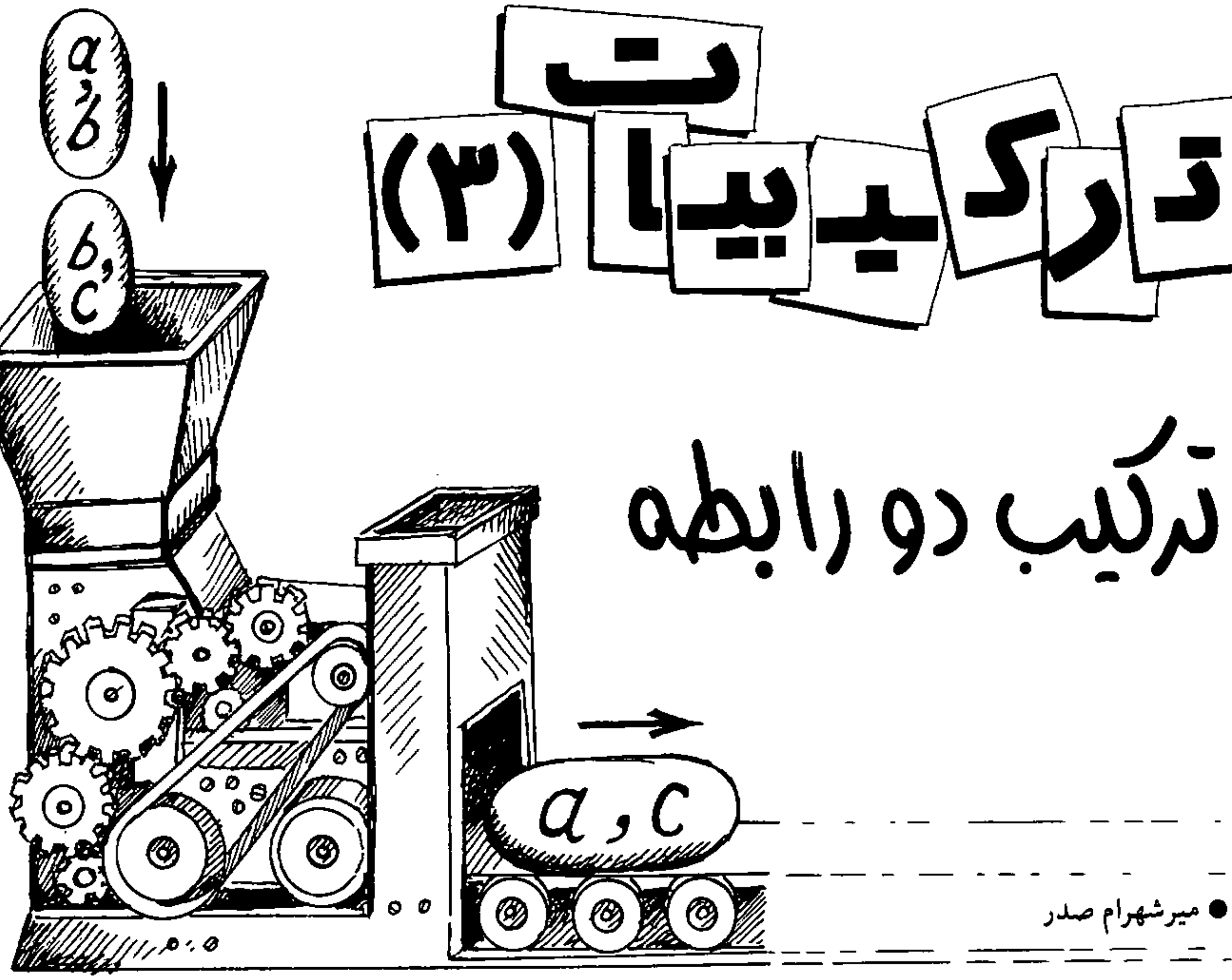
یا

$$(x-2)(x-5) = 0$$

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = -5$$

ترکیبات (۳)

ترکیب دو رابطه



● میرشهرام صدر

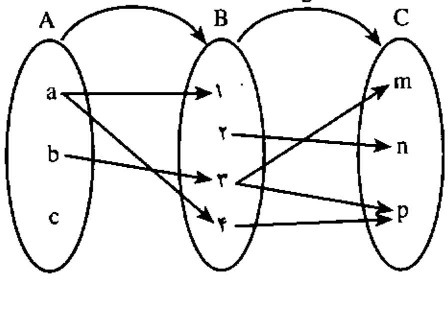
فرض کنیم R رابطه‌ای از A در B و S رابطه‌ای از B در C باشد؛ رابطهٔ مرکب ROS را از A به C ، به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که اگر x(ROS)Z ، آن گاه $y \in B$ موجود باشد؛ به طوری که xRy و ySz یعنی داریم:

ROS = { (x , z) | (x , y) ∈ R , (y , z) ∈ S بطوری که y ∈ B وجود داشته باشد}

تذکرمهم: برای نوشتن رابطهٔ ROS ابتدا زوج‌های مرتّب رابطهٔ R، سپس زوج‌های مرتّب رابطهٔ S را در نظر می‌گیریم، این درست بعکس عملی است که در حسابان (بخش توابع) روی ترکیب دو تابع انجام می‌دهیم.

مثال: مجموعه‌های A = {a , b , c}، B = {۱ , ۲ , ۳ , ۴} و C = {m , n , p} را در نظر بگیرید، فرض کنید R = {(a , ۱) , (b , ۳) , (a , ۴)} رابطه‌ای از A در B و S={(۴ , p), (۳ , m) , (۲,n) , (۳,p)} رابطه‌ای از B در C باشد؛ رابطهٔ مرکب ROS را مشخص کنید.

حل: برای درک بهتر حلّ مسأله، ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را رسم می‌کنیم، سپس ROS را به کمک آن مشخص می‌کنیم.



aR۴ , ۴Sp ⇒ a(ROS)p

bR۳ , ۳Sm ⇒ b(ROS)m

bR۳ , ۳Sp ⇒ b(ROS)p

در نتیجه داریم:

ROS = {(a , p) , (b ,m) , (b , p)}

مثال: فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳\}$ ، $B = \{a, b, c\}$ و $C = \{x,y,z\}$ رابطهٔ R را از A به B و رابطهٔ S را از B به C به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

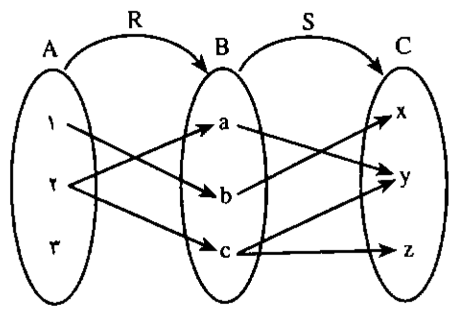
$$R = \{(۱, b), (۲, a), (۲, c)\}$$

$$S = \{(a, y), (b, x), (c, y), (c, z)\}$$

الف) رابطهٔ مرکب ROS را بنویسید.

ب) ماتریس‌های متناظر با رابطه‌های R ، S و ROS یعنی M_R ، M_S و M_{ROS} را مشخص و سپس M_{ROS} را با $M_R \times M_S$ مقایسه کنید. ($M_R \times M_S$ ضرب دو ماتریس با استفاده از اعمال بولی است.)

حل: الف) ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را رسم می‌کنیم، سپس به کمک آن، رابطهٔ ROS را مشخص می‌کنیم.



$۱Rb , bSx \Rightarrow ۱(ROS)x$

$۲Ra , aSy \Rightarrow ۲(ROS)y$

$۲Rc , cSy \Rightarrow ۲(ROS)y$

$۲Rc , cSz \Rightarrow ۲(ROS)z$

در نتیجه داریم:

$$ROS = \{(۱, x), (۲, y), (۲, z)\}$$

ب) با استفاده از رابطه‌های R ، S و ROS ، ماتریس‌های متناظر با آنها را تشکیل می‌دهیم:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array} ; \quad M_S = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \end{array} ; \quad M_{ROS} = \begin{array}{c} \\ ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \end{array}$$

اکنون به کمک اعمال بولی $M_R \times M_S$ را محاسبه می‌کنیم:

$$M_R \times M_S = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ M_{ROS} و $M_R \times M_S$ ملاحظه می‌کنیم که:

$$M_{ROS} = M_R \times M_S$$

قضیه (۱): اگر A ، B و C سه مجموعه به ترتیب دارای m ، n و k عضو باشند و R رابطه‌ای از A در B و S رابطه‌ای از B در C باشد و $M_R=[a_{ij}]_{n\times m}$ و $M_S=[b_{ij}]_{m\times k}$ به ترتیب ماتریس‌های متناظر با R و S باشند، ثابت کنید: $M_{ROS} = M_R \times M_S$

برهان: فرض کنیم درایه ijام ماتریس M_{ROS} برابر ۱ باشد؛ یعنی: $i(ROS)j$ در این صورت عضوی مانند $r \in B$ موجود است؛ به طوری که iRr و rSj ؛ یعنی: $a_{ir} = ۱$ و $b_{rj} = ۱$ ، پس $a_{ir} \odot b_{rj} = ۱$ ؛ بنابراین یکی از جمع‌وندهای درایه ijام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر با ۱ است، در نتیجه درایه ijام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر با ۱ است. بعکس فرض کنیم درایه ijام ماتریس $M_R \times M_S$ برابر ۱ باشد، در این صورت داریم:

$$a_{i۱} \odot b_{۱j} \dotplus a_{i۲} \odot b_{۲j} \dotplus \dots \dotplus a_{im} \odot b_{mj} = ۱$$

بنابراین حدّاقل یک $۱ \leq r \leq m$ موجود است؛ به طوری که $a_{ir} \odot b_{rj} = ۱$ ، پس $a_{ir} = ۱$ و $b_{rj} = ۱$ یعنی: iRr و rSj ، بنابراین $i(ROS)j$ ، در نتیجه درایه ijام ماتریس M_{ROS} برابر ۱ است.

ترکیب رابطهٔ R با خودش (ROR)

فرض کنیم R رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد، ترکیب رابطهٔ R با خودش روی مجموعهٔ A همواره قابل تعریف است و آن را با نماد ROR نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$a(ROR)b$ هر گاه وجود داشته باشد $C \in A$ ؛ به طوری که aRc و cRb ، یعنی داریم:

$ROR = \{(a, b) \mid (a, c) \in R , (c, b) \in R$ به طوری که $c \in A$ وجود داشته باشد$\}$

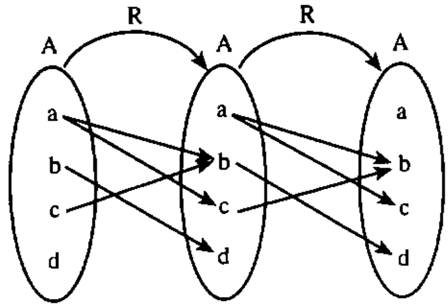
تذکر: رابطهٔ ROR را می‌توان با نماد $R^۲$ نمایش داد.

تعمیم: فرض کنید R یک رابطه روی مجموعهٔ A باشد؛ در این صورت می‌توان رابطهٔ $R^۳$ را روی A به صورت $R^۳=R^۲OR=(ROR)OR$ محاسبه کرد. به همین ترتیب، برای هر $n \in \mathbb{N}$ رابطهٔ R^n روی A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R^n=R^{n-۱}OR$$

مثال: فرض‌کنیم $A=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(a,b),(a,c),(b,d),(c,b)\}$ رابطه‌ای روی A باشد، رابطه‌های ROR و ROROR را مشخص کنید.

ابتدا نمودار پیکانی رابطه‌ها را مشخص می‌کنیم، سپس به کمک آن مسأله را حل می‌کنیم:



aRb , bRd $\Rightarrow$ a(ROR)d

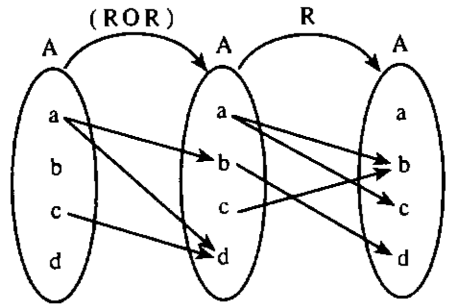
aRc , cRb $\Rightarrow$ a(ROR)b

cRb , bRd $\Rightarrow$ c(ROR)d

در نتیجه داریم:

ROR = {(a , d) , (a , b) , (c , d)}

برای محاسبهٔ رابطه ROROR از برابری ROROR=(ROR)OR استفاده می‌کنیم.



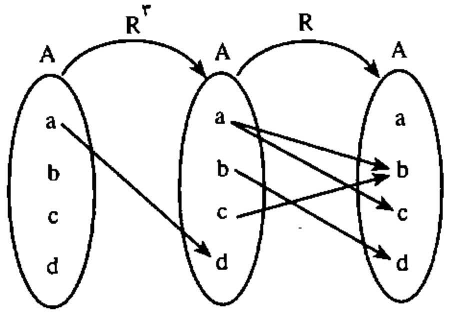
a(ROR)b , bRd $\Rightarrow$ a((ROR)OR)d

در نتیجه داریم:

$ROROR = (ROR)OR = R^{۳} = \{(a , d)\}$

مثال: در مثال قبل، ملاحظه می‌کنیم که برای هر $n \geq ۴$ ، رابطهٔ R^n برابر با مجموعه تهی است. برای مثال، برای $n = ۴$ خواهیم داشت:

$R^{۴} = R^{۳}OR$



با توجه به نمودار بالا ملاحظه می‌کنیم که $R^{۴} = \phi$.

مثال: فرض‌کنید {۲,۳,۴}=A و $R=\{(a,b)\,|\,a,b\in A ,(a,b)=۱\}$ رابطه‌ای روی A باشد،

الف) رابطهٔ ROR را مشخص کنید.

ب) M_{ROR} و $(M_R)^{۲}$ را مشخص کنید، سپس آنها را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: الف) ابتدا رابطهٔ R را مشخص می‌کنیم. منظور از ۱=(a,b)، یعنی این که بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b برابر با ۱ است؛ در این حالت، می‌گوییم دو عدد a و b نسبت به هم اوّلند یا متباین هستند:

R = {(۲ , ۳) , (۳ , ۲) , (۳ , ۴) , (۴ , ۲)}

با توجه به تعریف رابطهٔ ROR داریم:

ROR = {(۲ , ۲) , (۲ , ۴) , (۳ , ۳) , (۴ , ۲) , (۴ , ۴)}

ب)

$$M_{ROR} = \begin{array}{c} \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} ۲ & ۳ & ۴ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

$(M_R)^{۲}$ را با استفاده از اعمال بولی محاسبه می‌کنیم:

$$(M_R)^{۲} = M_R \times M_R = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

با مقایسهٔ M_{ROR} و $(M_R)^{۲}$ ملاحظه می‌کنیم که $M_{ROR}=(M_R)^{۲}$.

قضیه (۲): هرگاه R یک رابطه روی مجموعه n عضوی A باشد و M_R ماتریس متناظر با این رابطه باشد، ثابت کنید:

الف) $M_R = [۰]_{n\times n}$ اگر و تنها اگر $R = \phi$

ب) $M_R = [۱]_{n\times n}$ اگر و تنها اگر $R = A \times A$

ج) $M_{ROR} = (M_R)^{۲}$

برهان: الف) فرض کنیم $M_R = [۰]_{n\times n}$، در نتیجه برای هر $a,b \in A$ داریم: $a\not R b$؛ بنابراین $R = \phi$.

بعکس: فرض کنیم $R = \phi$، در نتیجه برای هر $a , b \in A$ داریم: $a\not R b$ ، پس همهٔ درایه‌های ماتریس M_R برابر صفر هستند؛ بنابراین $M_R = [۰]_{n\times n}$.

ب) فرض کنیم $M_R = [۱]_{n\times n}$، در نتیجه برای هر $a , b \in A$ داریم: aRb؛ پس $R = A \times A$.

بعکس: فرض کنیم $R = A\times A$، در نتیجه برای هر $a,b\in A$ داریم: aRb، پس همگی درایه‌های ماتریس M_R برابر ۱ است؛ بنابراین $M_R = [۱]_{n\times n}$

ج) با فرض $M_R = M_S$ در قضیهٔ (۱) ، برهان را به عهدهٔ خواننده واگذار می‌کنیم.

نتیجه: فرض کنیم A یک مجموعه‌ای n عضوی و R رابطه‌ای روی A باشد. M_R ماتریس متناظر با این رابطه باشد؛ در این صورت، برای هر $m \in \mathbb{N}$ داریم: $M_{R^m} = (M_R)^m$ ؛ یعنی:

$$M_{\underbrace{RORO\ldots OR}_{m \text{ مرتبه}}} = (M_R)^m$$

برهان: با استفاده از اصل استقرای ریاضی روی m داریم:

$m = 1 : M_{R^1} = (M_R)^1 \Rightarrow M_R = M_R$

$m = k : M_{R^k} = (M_R)^k$

$m = k + 1 : M_{R^{k+1}} = (M_R)^{k+1}$

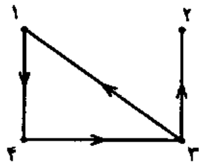
می‌دانیم $R^{k+1} = R^k OR$ و در قضیهٔ (۱) ملاحظه کردیم که $M_{ROS} = M_R \times M_S$ ؛ بنابراین:

$$M_{R^{k+1}} = M_{R^k OR} = M_{R^k} \times M$$
$$= (M_R)^k \times M_R \qquad \text{(طبق فرض استقرا)}$$
$$= (M_R)^{k+1}$$

در نتیجه، حکم برای هر $m \in \mathbb{N}$ برقرار است.

تذکر: فرض کنیم R یک رابطه روی مجموعهٔ n عضوی A باشد، برای محاسبهٔ رابطهٔ ROR(یا R^m ، $m \in \mathbb{N}$) بهتر است ابتدا ماتریس $(M_R)^2$(یا $(M_R)^m$) را با استفاده از اعمال بولی محاسبه کنیم، سپس با استفاده از برابری $M_{ROR} = (M_R)^2$ (یا $M_{R^m}=(M_R)^m$) آن رابطه را بنویسیم.

مثال: گراف جهت‌دار زیر، متناظر با رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4\}$ است. رابطه‌های ROR ، R^3 ، R^4 و R^9 را مشخص کنید.



حل: ابتدا رابطهٔ متناظر با گراف جهتدار را می‌نویسیم:

$R = \{(1 , 4) , (3 , 1) , (3 , 2) , (4 , 3)\}$

سپس متناظر با رابطهٔ R، ماتریس M_R را می‌نویسیم:

$$M_R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

برای محاسبهٔ رابطهٔ ROR از رابطهٔ $M_{ROR} = (M_R)^2$ استفاده می‌کنیم:

$$(M_R)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= M_{ROR}$$

در نتیجه داریم:

$ROR = \{(1 , 3) , (3 , 4) , (4 , 1) , (4 , 2)\}$

اکنون برای محاسبهٔ R^3 از رابطهٔ $M_{R^3} = (M_R)^3$ استفاده می‌کنیم:

$$M_{R^3} = M_{R^2} \times M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$R^3 = \{(1 , 1) , (1 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4)\}$

برای محاسبهٔ R^4 از رابطهٔ $M_{R^4} = (M_R)^4$ استفاده می‌کنیم:

$$M_{R^4} = M_{R^3} \times M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = M_R$$

ملاحظه می‌کنیم که $M_{R^4} = M_R$ ، بنابراین داریم:

$R^4 = R = \{(1 , 4) , (3 , 1) , (3 , 2) , (4 , 3)\}$

برای محاسبهٔ R^9 از رابطهٔ $R^4 = R$ استفاده می‌کنیم:

$R^9 = R^8 OR = (R^4 OR^4) OR = (ROR) OR = R^3$

در نتیجه داریم:

$R^9 = R^3 = \{(1 , 1) , (1 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4)\}$

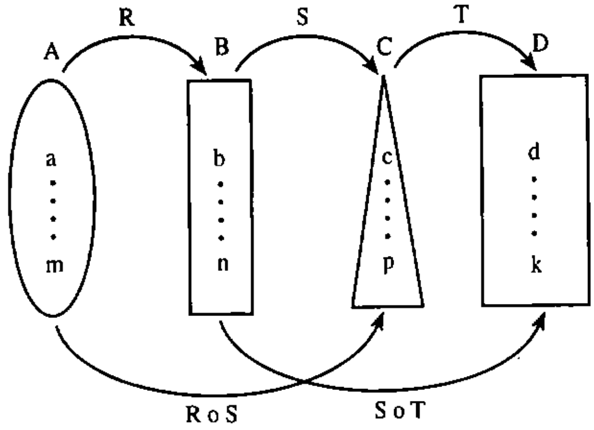
قضیه (۳): فرض کنیم A ، B ، C و D چهار مجموعه باشند، R رابطه‌ای از A در B ، S رابطه‌ای از B در C و T رابطه‌ای از C در D باشد؛ ثابت کنید عمل ترکیب رابطه‌ها به صورت زیر خاصیت شرکت‌پذیری دارد:

$(ROS)OT = RO(SOT)$

برهان: برای اثبات برابری حکم، ثابت می‌کنیم که $(ROS)OT \subseteq RO(SOT)$ همچنین ثابت می‌کنیم که:

$RO(SOT) \subseteq (ROS)OT$

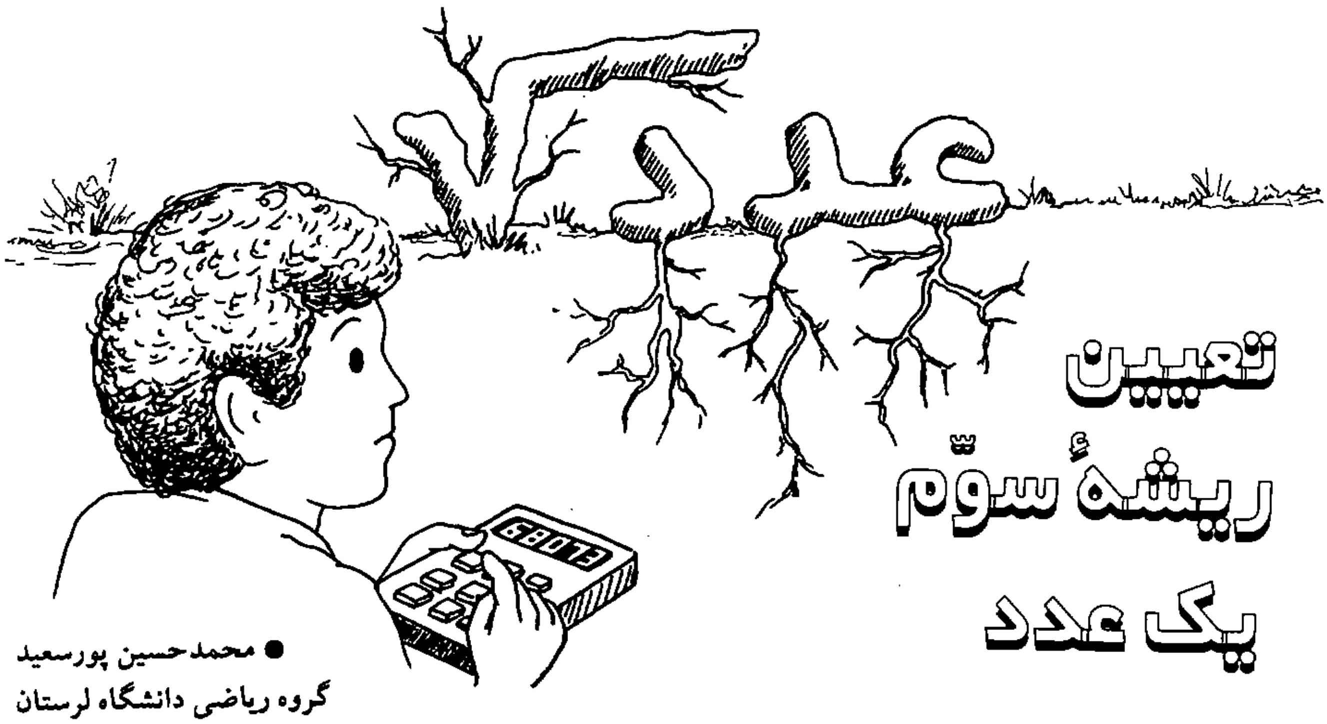
فرض کنیم $(a , d) \in (ROS)OT$ ، بنابراین $c \in C$ ای



موجود است؛ به طوری که $(a, c) \in (ROS)$ و $(c, d) \in T$ چون $(a,c)\in(ROS)$، بنابراین $b\in B$ ای موجود است؛ به طوری که $(a , b) \in R$ و $(b , c) \in S$.

از این که $(b , c) \in S$ و $(c , d) \in T$ نتیجه می‌گیریم که $(b , d) \in (SOT)$ و چون $(a , b) \in R$ در نتیجه داریم: $(a , d) \in RO(SOT)$ ؛ بنابراین $(ROS)OT \subseteq RO(SOT)$ به همین ترتیب، به‌طور مشابه با عضوگیری می‌توان ثابت کرد که $RO(SOT) \subseteq (ROS)OT$. در نتیجه: $(ROS)OT = RO(SOT)$.

برای بررسی دقیق‌تر خواص رابطه‌ها به کمک ماتریس‌های ۰ و ۱ ؛ علاوه بر اعمال بولی، نیاز به معرفی چند تعریف داریم، تا به کمک این تعریف‌ها، قضیه‌هایی را مطرح کنیم.



تعیین ریشهٔ سوّم یک عدد

● محمدحسین پورسعید
گروه ریاضی دانشگاه لرستان

مقدمه: ریشهٔ سوّم یک عدد را می‌توان با استفاده از ماشین حساب تعیین کرد؛ با این حال، در راستای تعمیم و انتقال مفاهیم ریاضی، این مطلب ارائه می‌شود.

ابتدا الگوی تعیین دو رقم سمت چپ ریشهٔ سوّم یک عدد را توضیح داده تا با توجه به آن، بتوان روش محاسبهٔ ریشهٔ سوّم را در حالت کلی تشخیص داد. بنابراین فرض می‌کنیم با داشتن مکعب عددی دو رقمی، می‌خواهیم آن عدد را بیابیم. هر عدد دو رقمی را می‌توان به صورت $(10a+b)$ در نظر گرفت؛ به طوری که b رقم یکان و a رقم دهگان آن است. جهت تشخیص ارتباط بین یک عدد دو رقمی و مکعب آن داریم:

$$(10a+b)^3 = 1000a^3 + 300a^2b + 30ab^2 + b^3$$

$$= 1000a^3 + [3((10a)^2 + (10a)b) + b^2]b$$

حال با توجه به روند جذرگیری (ر.ک.[1]) و عبارت بالا،

می‌توان روش محاسبهٔ ریشهٔ سوّم یک عدد را در حالت کلی تشخیص و توضیح داد:

شبیه عمل جذرگیری، از نماد ریشهٔ سوّم استفاده کرده و عدد موردنظر را در موقعیت مربوطه قرار می‌دهیم و سپس از سمت راست آن سه رقم، سه رقم دسته‌های سه رقمی را جدا می‌کنیم. آخرین دسته را که حدّاکثر دارای سه رقم است، در نظر گرفته، بزرگترین عدد طبیعی یک رقمی (مثلاً a) را به گونه‌ای می‌یابیم که توان سوّم آن (a^3) کمتر یا مساوی عدد واقع در آخرین دسته باشد که در این صورت a اوّلین رقم سمت چپ ریشهٔ سوّم آن عدد است. با قرار دادن عدد a در جای مربوطه، a^3 را از عدد واقع در آخرین دسته کسر می‌کنیم و سپس سه رقم دستهٔ بعدی را در سمت راست باقیمانده قرار داده و عدد حاصله را به عنوان عدد c در نظر می‌گیریم. حال اگر بزرگترین عدد حسابی یک رقمی (مثلاً b) را به گونه‌ای بیابیم که حاصل عبارت $[3((10a)^2 + (10a)b) + b^2]b$ کمتر یا مساوی c باشد، در این صورت b دومین رقم ریشه سوّم خواهد بود. به همین ترتیب و شبیه عمل جذرگیری، می‌توان ارقام بعدی ریشهٔ سوّم را تعیین کرد.

به عنوان مثال، طبق دستورالعمل فوق و مرحله به مرحله ریشهٔ سوّم ۶۸۰۷۳ را تا دو رقم اعشار می‌یابیم. ابتدا آن را به صورت ۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰ در نظر می‌گیریم:

(۱)

$\sqrt[۳]{۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰}$ | ۴

۶۴

۴

(۲)

$\sqrt[۳]{۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰}$ | ۴

$[۳(۱۰\times ۴)^۲ + (۱۰\times ۴)(۰) + (۰)^۲](۰) = ۰$

۶۴

۴۰۷۳

۰

۴۰۷۳

(۳)

$\sqrt[۳]{۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰}$ | ۴۰

$[۳(۱۰\times ۴۰)^۲ + (۱۰\times ۴۰)(۸) + (۸)^۲](۸) = ۳۹۱۷۳۱۲$

۶۴

۴۰۷۳

۰

۴۰۷۳۰۰۰

۳۹۱۷۳۱۲

۱۵۵۶۸۸

(۴)

$\sqrt[۳]{۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰}$ | ۴۰/۸

$[۳(۱۰\times ۴۰۸)^۲ + (۱۰\times ۴۰۸)(۳) + (۳)^۲](۳) = ۱۴۹۹۲۷۷۸۷$

۶۴

۴۰۷۳

۰

۴۰۷۳۰۰۰

۳۹۱۷۳۱۲

۱۵۵۶۸۸۰۰۰

۱۴۹۹۲۷۷۸۷

۵۷۶۰۲۱۳

(۵)

$\sqrt[۳]{۶۸۰۷۳/۰۰۰۰۰۰}$ | ۴۰/۸۳

...

⋮

۵/۷۶۰۲۱۳

بنابراین مقدار ریشهٔ سوّم ۶۸۰۷۳ تا دو رقم اعشار، برابر است با ۴۰/۸۳ و برای امتحان درستی محاسباتی که انجام داده‌ایم داریم:

$(۴۰/۸۳)^۳ + ۵/۷۶۰۲۱۳ = ۶۸۰۷۳$

مراجع

[۱]. ریاضی سال سوّم دورهٔ راهنمایی تحصیلی چاپ ۱۳۷۷.

مسأله مسابقه‌ای

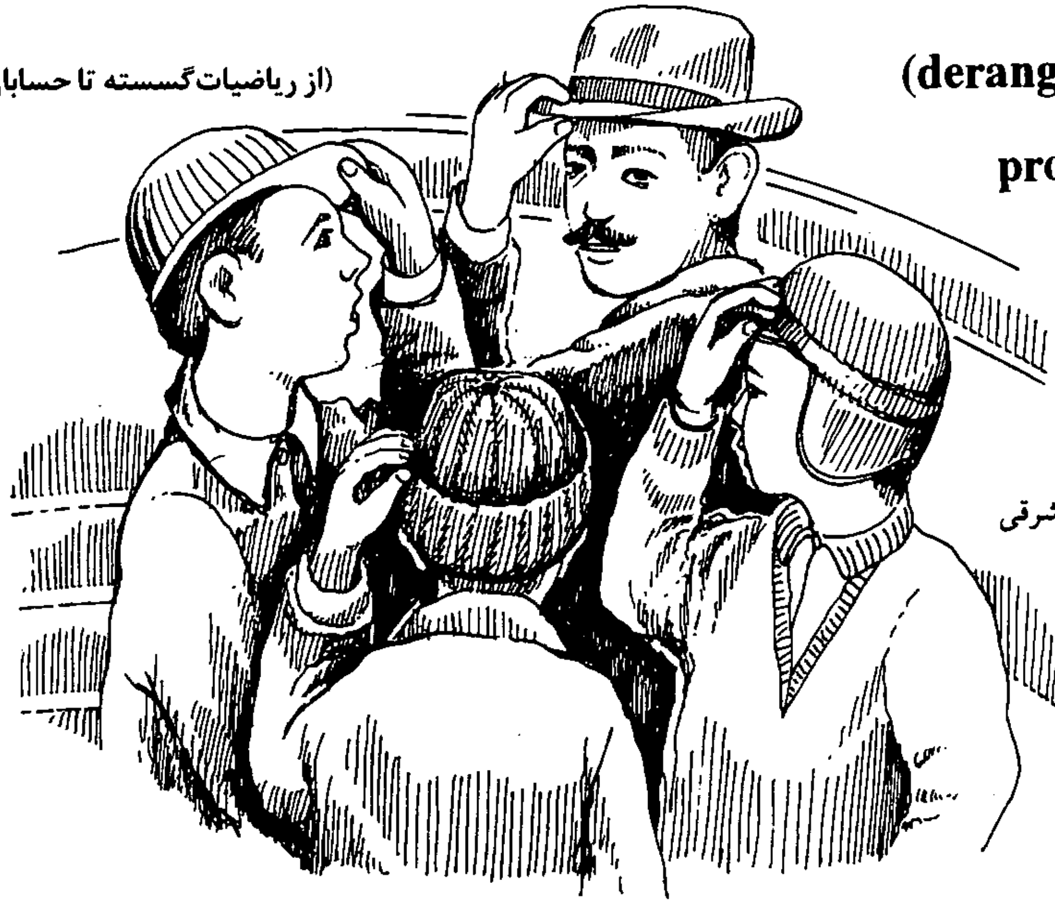
برهان ۳۶

در پاسخگویی به سؤال‌های یک مسابقه که پاسخ هر سؤال محدود به «بله» و «خیر» است، احتمال آن که پاسخ استاد صحیح باشد، بیشتر از ۵۰٪ و احتمال آن که دانشجوی پسر پاسخ صحیح بدهد، کمتر از ۵۰٪ و معادل است با احتمال آن که دانشجوی دختر پاسخ نادرست بدهد. همچنین احتمال آن که پاسخ دانشجویی که تصادفی انتخاب شده است، با پاسخ استاد یکسان باشد، برابر با $\frac{1}{2}$ است. ثابت کنید عدهٔ دانشجویان پسر و دختر برابر است.

مسأله پریش ها

(derangement problem)

(از ریاضیات گسسته تا حسابان)



● هوشنگ شرقی

چرا هیچ کس سرجای خودش نیست؟

آن صبح آفتابی در کودکستان، هیچ تفاوتی با روزهای قبل نداشت. اوّل صبح، طبق معمول، بچه‌ها به ترتیب قد از کوتاه تا بلند، با نظمی که ماه‌ها به آن عادت داشتند، به صف ایستادند و پس از خواندن سرود صبحگاهی، برای بازی و ورزش، در حیاط کودکستان و لابه‌لای درختان پراکنده شدند، اما هنگامی که خانم مربی در نیمهٔ صبح، سر ساعت مقرّر، زنگ دریافت خوراک صبح را به صدا درآورد تا بچه‌ها دوباره به صف بایستند، متوجه نکتهٔ عجیبی شد که نزدیک بود چشم‌هایش از حدقه دربیایند! به چهره‌های خندان و پرشیطنت بچه‌ها نگاه کرد؛ گویی همه با هم از قبل تبانی کرده بودند تا خانم مربی را اذیّت کنند و او را عصبانی کنند. آری هیچ کس، حتی یک نفر سرجای خودش نایستاده بود!

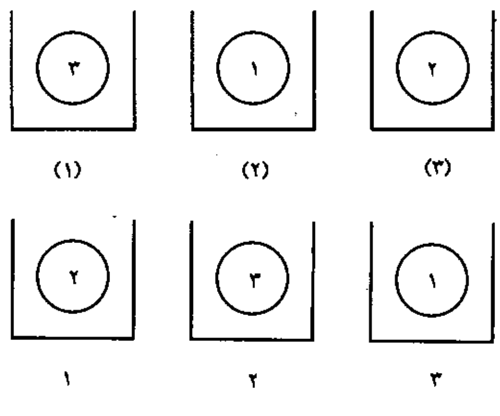
مربی برای یک لحظه، به شدت ناراحت شد و لجش گرفت؛ ولی ناگهان به فکر فرو رفت. چه قدر احتمال دارد که بچه‌ها همین جوری اتفاقی و بدون هماهنگی قبلی، این‌طور به صف ایستاده باشند؟

مسأله‌ای که می‌خواهیم به آن بپردازیم، همین است؛ اگر n کودک در یک صف بایستند یا به طور کلی n شیء که هر یک جای به خصوص دارند، تصادفی جایگذاری شوند، چه‌قدر احتمال دارد که هیچ کدام سر جای خود نباشند؟ برای محاسبهٔ احتمال یک پیشامد تصادفی، به خوبی می‌دانید که باید دو مقدار، یعنی تعداد اعضای فضای نمونه و تعداد

اعضای پیشامد تصادفی، مشخص شوند. در این گونه مسائل، تعداد اعضای فضای نمونه، به سادگی مشخص می‌شود، چرا که تعداد تمام جایگشت‌های n شیء در یک ردیف (به عنوان مثال، تعداد روش‌های مختلف ایستادن n کودک در یک صف) مساوی !n است. بنابراین اجازه دهید مسأله را اندکی محدودتر کنیم به این مسأله: به چند طریق می‌توان n شیء را در n مکان (هر یک از اشیای متعلق به یکی از مکان‌هاست) قرار داد؛ به قسمی که هیچ یک از اشیا سرجای خود نباشند؟

پاسخ به این سؤال را از حالت‌های خاص و ساده شروع کنیم. فرض کنیم دو توپ فوتبال با شماره‌های ۱ و ۲ داریم. به چند طریق می‌توان این دو توپ را در دو جعبه با شماره‌های ۱ و ۲ قرار داد؛ به قسمی که هیچ یک از دو توپ، سرجای خودشان (در جعبهٔ هم شماره با خودشان) قرار نگیرند؟ پاسخ بسیار ساده است! یک طریق؛ یعنی توپ ۱ را در جعبهٔ ۲ و توپ ۲ را در جعبهٔ ۱ قرار می‌دهیم. حال اگر سه توپ با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ و سه جعبه با همین شماره‌ها داشته باشیم به چند طریق می‌توانیم توپ‌ها را درون جعبه‌ها بگذاریم؛ به طوری که هیچ یک از سه توپ در جعبهٔ هم‌شماره با آن قرار نگیرد؟ باز هم با کمی دقت و محاسبه، پاسخ به دست می‌آید. برای توپ شمارهٔ ۱ دو امکان وجود دارد، (زیرا می‌تواند در یکی از دو جعبهٔ شمارهٔ ۲ یا ۳ قرار گیرد) حال اگر توپ ۱ را در یکی از این دو جعبه قرار دهیم، برای توپ‌های شمارهٔ ۲ و ۳ تنها یک امکان باقی می‌ماند. (چرا؟)

بنابراین طبق اصل ضرب، ۲ = ۱ × ۲ طریق مختلف وجود دارد که در شکل‌های زیر مشخص شده‌اند:



حال فرض کنید که به صورت مشابه، چهار توپ و چهار جعبه داریم. جایگذاری به چند طریق مختلف امکان‌پذیر است؟ باز هم از اصل ضرب کمک می‌گیریم. برای توپ شمارهٔ ۱، سه امکان مختلف وجود دارد. حال برای توپ شمارهٔ ۲ چند امکان مختلف وجود دارد؟ پاسخ در حالت‌های مختلف فرق می‌کند؛ اگر توپ (۱) در جعبهٔ (۲) قرار گرفته باشد، برای توپ (۲) سه امکان مختلف وجود دارد؛ ولی اگر در یکی از جعبه‌های شمارهٔ ۳ یا ۴ قرار گرفته باشد، برای توپ (۲) دو امکان وجود خواهد داشت. البته با تفکیک این دو حالت، می‌توان پاسخ مسأله را به دست آورد؛ اما به نظر می‌رسد که به بیراهه می‌رویم؛ چرا که اگر تعداد توپ‌ها و جعبه‌ها بیشتر شود، کار از این هم سخت‌تر خواهد شد، باید روش دیگری را به کار ببریم. در بسیاری از مسائل آنالیز ترکیبی (شمارش) به جای شمارش مستقیم، از شمارش اعضای متمم مجموعهٔ مورد نظر کمک می‌گیریم. شاید در این جا هم این روش کارساز باشد. متمم مجموعه حالت‌هایی که هیچ یک از توپ‌ها سر جای خودشان نیستند، کدام مجموعهٔ حالت‌هاست؟ امیدوارم که مثل بسیاری از دانش‌آموزان عجول، فوری نگویید مجموعهٔ حالت‌هایی که همهٔ توپ‌ها سرجای خودشان هستند! زیرا نقیض هیچ یک، همه نیست. یک مثال می‌زنیم؛ فرض کنید معلم شما در کلاس درس می‌گوید هیچ یک از دانش‌آموزان این کلاس درسخوان نیستند. شما که به حرف او معترض هستید، در پاسخ او چه می‌گویید؟ آیا می‌گویید: نخیر، همهٔ دانش‌آموزان کلاس درسخوان هستند؟ روشن است که چنین نیست؛ بلکه در پاسخ می‌گویید: بعضی از دانش‌آموزان کلاس (حدّاقل یک نفر از آنها) درسخوان هستند؛ بنابراین متمم مجموعهٔ حالت‌هایی که هیچ یک از توپ‌ها در جعبهٔ هم شمارهٔ خودشان نیستند، می‌شود مجموعهٔ حالت‌هایی که حدّاقل یکی از توپ‌ها سرجای خودش باشد. به عنوان مثال، در حالتی که سه توپ و سه جعبه داریم، اگر A مجموعه حالت‌هایی باشد که توپ (۱) در جعبهٔ (۱) قرار دارد، و B و C مجموعهٔ حالت‌هایی باشند که توپ‌های ۲ و ۳ سرجای خودشان باشند، هدف ما تعیین تعداد اعضای مجموعهٔ

A U B U C یا n(AUBUC) است. سپس تعداد تمام حالت‌ها (!۳) را از این عدد کم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی به دست آید که هیچ یک از توپ‌ها سرجای خودشان نیستند. برای محاسبهٔ تعداد اعضای اجتماع دو یا بیشتر مجموعه نیز از اصلی به نام اصل شمول و عدم شمول (اصل طرد ـ شمول) استفاده می‌کنیم. در این جا اشاره‌ای نیز به این اصل می‌کنیم.

اصل شمول و عدم شمول ـ ماجرای کارمندی که از آقای رئیس مرخصی می‌خواست!

آن روز، آقای احمدی خیلی عجله داشت؛ با نگرانی و دلهره خود را به دفتر رئیس اداره رساند، در زده و پس از کسب اجازه وارد اتاق شد.

آقای احمدی: سلام آقای رئیس، اگر اجازه بفرمایید، عرض کوچکی داشتم!

رئیس: سلام جانم، خواهش می‌کنم بفرمایید.

آقای احمدی: قربان می‌خواستم اگر اجازه بدهید و امکان داشته باشد، یک روز مرخصی استحقاقی بگیرم. برگهٔ درخواست آن را هم پرکرده‌ام.

رئیس: بله جانم! چی فرمودید؟! مرخصی! مگر شما کار هم می‌کنید که مرخصی می‌خواهید؟!

آقای احمدی (باتعجب): چرا قربان؟ مگر از من کوتاهی سرزده است؟

رئیس: نه جانم، ولی شما اصلاً کاری نمی‌کنید که مرخصی بخواهید! بگذارید با هم حساب کنیم، ببینیم شما چه قدر در این اداره کار می‌کنید. بگو ببینم تو در شبانه روز حدّاقل ۸ ساعت می‌خوابی، این طور نیست؟ (آقای احمدی: بله آقای رئیس) بسیار خوب، پس در هر سه شبانه روز، معادل ۲۴ ساعت یا یک شبانه روز می‌خوابی و در نتیجه اگر سال را ۳۶۰ روز به حساب آوریم، تو جمعاً ۱۲۰ روز آن را در خواب هستی! حالا می‌رسیم به ساعت‌هایی که صرف خوردن سه وعده غذای تو می‌شود؛ آن هم هیچ نباشد، ۳ ساعت وقت تو را در روز با حساب ساعت‌های قبل و بعد آن می‌گیرد، پس هر ۸ روز، دقیقاً معادل یک شبانه روز صرف خوردن غذا می‌شود؛ یعنی در یک سال ۴۵ روز نیز به این مهم اختصاص دارد. اما ۵۲ جمعه را نیز نباید فراموش کرد و نیز تعطیلات نوروزی و ایّام رسمی تعطیل که روی هم با نگاه به تقویم، ۴۳ روز است. اما ساعت‌های استراحت بعد از ظهر و ساعت‌هایی که با خانواده‌ات هستی هم باید حساب شود. تو دیگر ساعت ۵ بعدازظهر به خانه می‌رسی که تا ساعت ۹ شب، یعنی هر روز ۴ ساعت در اختیار خانواده‌ات هستی که هر ۶ روز آن ۲۴ ساعت و معادل یک روز کامل است و با این حساب، در سال ۶۰ روز تو نیز صرف این موضوع می‌شود. فراموش نکنیم که تو یک ساعت صبح و یک ساعت بعدازظهر هم در اتوبوس سرویس اداره می‌گذرانی که هر روز ۲ ساعت و هر ۱۲ روز، معادل یک روز کامل است، پس در ۳۶۰ روز، بگذار حساب کنم، ۳۶۰ تقسیم بر ۱۲ می‌شود... آها! ۳۰ روز! و یک چیز دیگر، تعطیلات تابستانی اداره را که صرف حسابرسی می‌شود، فراموش کرده بودم، آن هم ۹ روز است. دیگر چیزی نمانده است! جمع می‌کنیم:

۱۲۰ + ۴۵ + ۵۲ + ۴۳ + ۶۰ + ۳۰ + ۹ = ۳۵۹

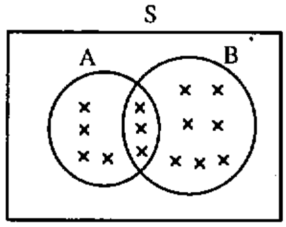
خوب تمام شد، اگر این ۳۵۹ روز را از ۳۶۰ روز کم کنیم، می‌ماند یک روز! تو یک روز در سال کار می‌کنی، آن وقت آن را هم می‌خواهی مرخصی بگیری و بروی! برو جانم! تا عصبانی‌تر نشده‌ام!...

از منطق بی‌بدیل(!) جناب رئیس که بگذریم، راستی مغالطهٔ این استدلال کجاست؟! به یاد دارم که وقتی از تعدادی شاگردانم در یک کلاس، همین سؤال را پرسیدم، بعضی از آنها گفتند: خب، رئیس با ساعت‌های خارج از ادارهٔ کارمند خود چه کار دارد!

امیدوارم که پاسخ شما هم این گونه عوامانه نباشد و مرا ناامید نکند! اما با کمی دقت، ایراد استدلال بدیهی است. بسیاری از ساعت‌ها در محاسبهٔ آقای رئیس، دوباره و سه باره (و گاهی چندباره) به حساب آمده‌اند. برای مثال، ساعت‌های خواب کارمند در ایّام تعطیل نیز به حساب آمده‌اند و یک بار هم جداگانه حساب شده‌اند و... در واقع اگر قرار است همهٔ ساعت‌ها با هم جمع شوند، باید ساعت‌های اضافه که چند بار حساب شده‌اند، حذف (طرد) شوند و این همان اصل

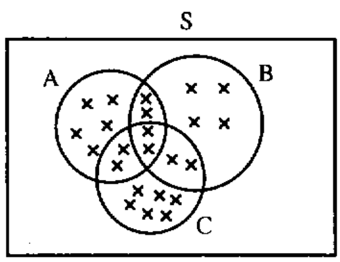
طرد و شمول است، فرض کنید بخواهیم تعداد اعضای مجموعهٔ AUB را به دست آوریم. به کمک یک نمودار ون (venn – diagram) این کار به سادگی انجام می‌شود. اگر تعداد اعضای مجموعهٔ A ((n(A)) را با تعداد اعضای مجموعهٔ B ((n(B)) جمع کنیم، تعداد اعضای اشتراک دو مجموعه، دو بار به حساب می‌آیند(شمول)، لذا باید یک بار کم شوند (عدم شمول)؛ بنابراین داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



اگر همین عمل را برای سه مجموعهٔ A ، B و C انجام دهیم، مطابق شکل، اگر تعداد اعضای سه مجموعهٔ A ، B و C را با هم جمع کنیم، تعداد اعضای مجموعه‌های A∩B ، A∩C و B∩C هر کدام دوبار محسوب می‌شوند و باید یک بار کم شوند؛ ولی ضمن این اعمال، تعداد اعضای مجموعهٔ A∩B∩C سه بار به حساب آمده و سه بار کم می‌شود. بنابراین یک بار دیگر باید به حساب آید. با این روش، نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A\cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



اجازه دهید چند مثال بیاوریم.

مثال(۱): در یک کلاس درس با ۴۰ نفر دانش‌آموز، ۲۴ نفر عینک می‌زنند و ۲۰ نفر هم چپ دست هستند، همچنین ۳ نفر نه عینک می‌زنند و نه چپ دست هستند. چند نفر هم عینک می‌زنند و هم چپ دست هستند؟

حل: اگر مجموعهٔ دانش‌آموزان عینکی را با A و مجموعهٔ دانش‌آموزان چپ دست را با B نمایش دهیم، با توجه به مفروضات مسأله داریم:

$n(A \cup B) = ۴۰ - ۳ = ۳۷$ و $n(B) = ۲۰$ و $n(A) = ۲۴$

لازم به ذکر است که AUB مجموعهٔ دانش‌آموزانی است که عینک می‌زنند یا چپ دست هستند. اکنون هدف مسأله، تعیین تعداد اعضای مجموعه A∩B است. با توجه به دستور گفته شده داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) - n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow$$

$$۳۷ = ۲۴ + ۲۰ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۷$$

یعنی، ۷ نفر هم عینک می‌زنند و هم چپ دست هستند.

مثال(۲): تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰ که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیرند، به دست آورید.

حل: اگر مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ که مضرب ۲ هستند (عددهای زوج) A و مجموعهٔ عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ را که بر ۳ بخش‌پذیرند، B و آنها را که بر ۵ بخش‌پذیرند، C بنامیم، منظور مسأله تعیین $n(A \cup B \cup C)$ است و داریم:

$$n(A\cup B\cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

برای تعیین مفروضات مسأله، از این قضیه در تئوری اعداد کمک می‌گیریم.

«تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی n که بر r $(r \neq ۰)$ بخش‌پذیرند، برابر با $\left[\frac{n}{r}\right]$ است.»

در قضیهٔ فوق [ ] علامت جزء صحیح است. اکنون با توجه به این قضیه، می‌توان نوشت:

$$n(B) = \left[\frac{۱۰۰}{۳}\right] = ۳۳ \quad و \quad n(A) = \left[\frac{۱۰۰}{۲}\right] = ۵۰$$

ولی برای محاسبهٔ $n(A \cap B)$ باید به این موضوع توجه کنیم که عددهایی که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیرند، بر ۶ بخش‌پذیرند (چرا؟) لذا می‌توان نوشت: $n(A \cap B) = \left[\frac{۱۰۰}{۶}\right] = ۱۶$ حال با استفاده از همین الگو، می‌توان نوشت:

$$n(A\cup B\cup C) = \left[\frac{۱۰۰}{۲}\right] + \left[\frac{۱۰۰}{۳}\right] + \left[\frac{۱۰۰}{۵}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{۶}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right] - \left[\frac{۱۰۰}{۱۵}\right] + \left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right] = ۵۰ + ۳۳ + ۲۰ - ۱۶ - ۱۰ - ۶ + ۳ = ۷۴$$

یعنی ۷۴ عدد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰ وجود دارد که بر ۲ یا ۳ یا ۵ بخش‌پذیرند؛ متمم این مجموعه چند عضو دارد؟ پاسخ ساده است ۲۶ = ۷۴ - ۱۰۰ ، ولی این ۲۶ عدد چه ویژگی دارند؟ آری اینها عددهایی هستند که نه مضرب ۲، نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ هستند.

تمرین (۱): تعداد عددهای طبیعی کوچکتر یا مساوی ۱۰۰۰ را به دست آورید که نه بر ۱۱ و نه بر ۱۲ بخش‌پذیرند.

تمرین (۲): تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۱۰۰۰ را به دست آورید که نه مربع کامل و نه مکعب کامل باشند.

حال سعی می‌کنیم اصل شمول و عدم شمول را به چهار مجموعه و بیشتر تعمیم دهیم. برای این منظور، از قوانین جبر مجموعه‌ها به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$n(A\cup B\cup C\cup D) = n(A) + n(B) + n(C\cup D) - n(A\cap B) - n[A\cap(C\cup D)] - n[B\cap(C\cup D)] + n[A\cap B\cap(C\cup D)] =$$
$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(C\cap D) - n(A\cap B) - n[(A\cap C)\cup(A\cap D)] - n[(B\cap C)\cup(B\cap D)] + n[(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap D)] =$$
$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(C\cap D) - n(A\cap B) - [n(A\cap C) + n(A\cap D) - n(A\cap C\cap D)] - [n(B\cap C) + n(B\cap D) - n(B\cap C\cap D)] + [n(A\cap B\cap C) + n(A\cap B\cap D) - n(A\cap B\cap C\cap D)] =$$
$$n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A\cap B) - n(A\cap C) - n(A\cap D) - n(B\cap C) - n(B\cap D) - n(C\cap D) + n(A\cap B\cap C) + n(A\cap B\cap D) + n(A\cap C\cap D) + n(B\cap C\cap D) - n(A\cap B\cap C\cap D)$$

و به این ترتیب، دستور محاسبهٔ $n(A\cup B\cup C\cup D)$ به دست می‌آید.

تمرین: تعداد عددهای طبیعی کوچک‌تر یا مساوی ۴۰۰ را به دست آورید که مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ یا ۷ باشند، اکنون می‌توانیم دستور محاسبهٔ $n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)$ را حدس بزنیم:

$$n(A_1\cup A_2\ldots\cup A_n) = \sum n(A_i) - \sum n(A_i\cap A_j) + \sum n(A_i\cap A_j\cap A_k) - \ldots + (-1)^{n+1}\, n(A_1\cap A_2 \ldots \cap A_n)$$

یعنی ابتدا مجموع تعداد اعضای همهٔ مجموعه‌ها (که تعداد آنها n تاست) را با هم جمع می‌کنیم، سپس این مجموع را از تعداد اعضای اشتراک دو به دوی مجموعه‌ها (که تعداد آنها $\binom{n}{2}$ است) کم می‌کنیم و با تعداد اعضای اشتراک سه به سه مجموعه‌ها (به تعداد $\binom{n}{3}$ است) جمع می‌کنیم و...

اکنون می‌توانیم به مسألهٔ خودمان برگردیم. به چند طریق می‌توانیم سه توپ ۱ ، ۲ و ۳ را در سه جعبه ۱ ، ۲ و ۳ قرار دهیم که حدّاقل یک توپ در جای خودش باشد؟



اگر A مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که توپ (۱) در جای خودش (یعنی جعبهٔ ۱) باشد، چون برای هر توپ دیگر هر کدام ۲ امکان وجود دارد، لذا $n(A) = 2!$ و به همین ترتیب، اگر B و C مجموعهٔ حالت‌هایی باشد که توپ‌های (۲) و (۳) در جای خودشان باشند، $n(B) = n(C) = 2!$ و بدیهی است که $n(B\cap C) = n(A\cap C) = n(A\cap B) = 1!$ و $n(A\cap B\cap C) = 1!$ و از آن جا داریم:

$$n(A\cup B\cup C) = 2! + 2! + 2! - 1! - 1! - 1! + 1! = 4$$

و از آن جا تعداد حالت‌هایی که هیچ کدام از سه توپ سرجای خودشان نباشند، برابر است با:

$$n(A\cup B\cup C)' = n(S) - n(A\cup B\cup C) = 3! - 4 = 2$$

و این همان پاسخی است که قبلاً با شمارش مستقیم به دست آوردیم. اکنون دیگر کار تمام است و الگوی ما برای شمارش حالت‌های دیگر همین است. فرض کنید ۴ توپ ۱، ۲، ۳ و ۴ را در چهار جعبه ۱ ، ۲ ، ۳ و ۴ قرار داده‌ایم. به چند طریق ممکن است هیچ یک از توپ‌ها در جعبهٔ خودشان نباشند؟ ابتدا تعداد حالت‌هایی را می‌شماریم که حدّاقل یک توپ

سرجای خودش باشد:

$$n(AUBUCUD) = ۳! + ۳! + ۳! + ۳! - ۲! - ۲! - ۲! - ۲! - ۲!$$
$$- ۲! + ۱! + ۱! + ۱! + ۱! - ۱! = ۱۵ \Rightarrow n(AUBUCUD)'$$
$$= ۴! - ۱۵ = ۹$$

یعنی به ۹ طریق مختلف این کار ممکن است. دربارهٔ تعداد عددها و نحوهٔ محاسبهٔ آنها فکر کنید. اکنون مسألهٔ دیگری مشابه همین مسأله طرح می‌کنیم. پنج دوست با هم به یک میهمانی رفته و کلاه‌های خود را در یک جا گذاشته‌اند. ناگهان برق می‌رود! و در تاریکی هر کدام یکی از کلاه‌ها را تصادفی برداشته و بر سر می‌گذارند. به چند حالت ممکن است هیچ کدام کلاه خودش را بر سر نگذارند؟! چه قدر احتمال برای این پیشامد قائل هستید؟

در پاسخ باید گفت که اگر A ، B ، C ، D و E به ترتیب مجموعهٔ حالت‌هایی باشند که نفرات اوّل تا پنجم، کلاه خودشان را بر سر گذاشته باشند، هدف تعیین $n(AUBUCUDUE)'$ است، مانند مثال قبل می‌توان نوشت:

$$n(AUBUCUDUE) = \binom{۵}{۱} \times ۴! - \binom{۵}{۲} \times ۳! + \binom{۵}{۳} \times ۲! -$$
$$\binom{۵}{۴} \times ۱! + \binom{۵}{۵} \times ۰! = ۱۲۰ - ۶۰ + ۲۰ - ۵ + ۱ = ۷۶ \Rightarrow$$
$$n(AUBUCUDUE)' = ۵! - ۷۶ = ۱۲۰ - ۷۶ = ۴۴$$

و احتمال بروز این پیشامد نیز به راحتی به دست می‌آید:

$$p(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{۴۴}{۱۲۰} = \frac{۱۱}{۳۰}$$

حال می‌توانیم دستور کلی مسأله را نیز استنتاج کنیم.

فرض کنیم n شیء در n مکان به طور تصادفی قرار گیرند. به چند طریق ممکن است هیچ یک از اشیا سرجای اصلی خود نباشند؟ ابتدا تعداد حالت‌هایی که حدّاقل یکی از اشیا سرجای خود هستند، به دست می‌آوریم:

$$n(A_۱UA_۲...UA_n) = \binom{n}{۱}(n-۱)! - \binom{n}{۲}(n-۲)! + \binom{n}{۳}(n-۳)!$$
$$- \binom{n}{۴}(n-۴)! + ... = n! - \frac{n!}{۲!} + \frac{n!}{۳!} - \frac{n!}{۴!} + ... +$$
$$(-۱)^{n+۱} \times \frac{۱}{n!}$$

و از آن جا تعداد حالت‌هایی که طی آنها هیچ شیء سرجای خودش نیست (یعنی تعداد پریش‌های n شیء) که آن را با نماد D(n) نمایش می‌دهیم، به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$D(n) = n! - [n! - \frac{n!}{۲!} + \frac{n!}{۳!} - \frac{n!}{۴!} + ... + (-۱)^{n+۱} \times \frac{n!}{n!}] \Rightarrow$$
$$D(n) = n! [۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} + ... + (-۱)^n \times \frac{۱}{n!}]$$

به عنوان مثال داریم:

$$D(۴) = ۴! (۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!}) = ۴! (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۲۴}) = ۹$$
$$D(۵) = ۵! (۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!}) =$$
$$۱۲۰ (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲۴} - \frac{۱}{۱۲۰}) = ۴۴$$

اکنون به سؤال ابتدایی مقاله می‌توانیم پاسخ دهیم. به چند طریق ممکن است ۱۰ کودک که پس از پراکنده شدن دوباره به صف ایستاده‌اند، هیچ کدام سرجای خودشان نایستاده باشند؟

احتمال این اتفاق چه قدر است؟

$$D(۱۰) = ۱۰! [۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \frac{۱}{۴!} - \frac{۱}{۵!} +$$
$$\frac{۱}{۶!} - \frac{۱}{۷!} + \frac{۱}{۸!} - \frac{۱}{۹!} + \frac{۱}{۱۰!}] = ۱۳۳۴۹۶۱$$

و احتمال این پیشامد برابر است با:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۳۳۴۹۶۱}{۱۰!} = \frac{۱۶۴۸۱}{۴۴۸۰۰} \approx ۰/۳۷$$

به طور کلی، هرگاه n شیء مختلف در n مکان مختلف قرار گیرند، احتمال بروز یک پریش برابر است با:

$$p = ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + ... + (-۱)^n \times \frac{۱}{n!}$$

به عنوان مثال، اگر سه توپ را از سه جعبه برداشته و دوباره به طور تصادفی در جعبه‌ها قرار دهیم، احتمال آن که هیچ توپ در جعبهٔ خودش نباشد، برابر است با:

$$p = ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} = \frac{۱}{۳}$$

اما آیا روش مستقیم دیگری برای تعیین این احتمال وجود ندارد؟ نمی‌شود گفت احتمال آن که توپ ۱ در جعبهٔ ۱ باشد، برابر $\frac{۱}{۳}$ و در نتیجه، احتمال متمم آن، یعنی احتمال آن که توپ (۱) در جعبهٔ (۱) نباشد، مساوی $\frac{۲}{۳}$ است. به همین ترتیب، احتمال آن که توپ (۲) در جعبهٔ خودش نباشد و همین احتمال برای توپ (۳) مساوی $\frac{۲}{۳}$ است. بنابراین احتمال آن که هیچ یک از توپ‌ها در جعبهٔ خودشان نباشند، طبق قاعدهٔ

ضرب احتمال‌ها برابر است با:

$$p = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27} \neq \frac{1}{3}$$



ولی چرا این طور شد و چرا این دو احتمال برابر نیستند؟ برای خواننده‌ای که تعریف روشنی از استقلال پیشامدها دارد، علت این امر چندان پوشیده نیست. به سادگی می‌توان دریافت که پیشامدهای فوق، یعنی پیشامد قرار نداشتن توپ (۱) در جای خودش و پیشامد قرار نداشتن توپ (۲) یا توپ (۳) در جعبه‌های مربوط به خودشان، از یکدیگر مستقل نیستند، زیرا قرار داشتن (یا نداشتن) توپ (۱) در جعبهٔ خودش، احتمال قرار داشتن (یا نداشتن) توپ (۲) در جعبهٔ خودش را تغییر می‌دهد و برآن مؤثر است (چرا؟). قانون ضرب احتمال‌ها فقط در مورد پیشامدهای مستقل برقرار است؛ یعنی اگر دو پیشامد A و B هیچ تأثیری بر یکدیگر نداشته باشند و وقوع یا عدم وقوع یکی بر وقوع یا عدم وقوع دیگری مؤثر نباشد، می‌توان نوشت:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

در این جا به نظر می‌رسد که کار تمام شده باشد و به آخر خط رسیده باشیم؛ ولی ما هنوز هم حرف‌هایی برای گفتن داریم! فرض کنید تعداد توپ‌ها و جعبه‌ها بیشتر و بیشتر شوند؛ برای مثال، هزار توپ و هزار جعبه، اصلاً تعداد توپ‌ها وجعبه‌ها نامتناهی باشد (یعنی به بی‌نهایت میل کند) آیا در این صورت، نمی‌توان گفت که پیشامد قرار داشتن (یا نداشتن) توپ iام در جعبهٔ iام، تأثیری بر پیشامد قرار داشتن (یا نداشتن) توپ jام در جعبهٔ jام ندارد؟ به نظر می‌رسد که همین طور باشد؛ زیرا تعداد جعبه‌ها و توپ‌ها بی‌شمار است و قرار داشتن یا نداشتن یک توپ در جعبهٔ خودش، چندان تأثیری در افزایش یاکاهش شانس قرار داشتن یا نداشتن توپ دیگر در جعبهٔ خودش، ندارد؛ بنابراین اگر $n \to \infty$، می‌توان نوشت:

$$P = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

ولی حدّ $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ وقتی که n به بی‌نهایت میل کند، برای ما آشناست؛ زیرا می‌دانیم $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = e^k$ که در این جا e عدد معروف اولر (پایهٔ لگاریتم‌های نپری معروف به عدد نپر) است؛ بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$. حال اگر این حد را از دستور احتمال پریش به دست آوریم، نتیجهٔ جالب توجهی به دست می‌آید:

$$\lim_{n\to\infty} p = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots +$$

$$(-1)^n\left(\frac{1}{n!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{k!}\right)^k$$

و از آن جا درمی‌یابیم که سری $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$ به عدد $\frac{1}{e}$ همگراست.

آیا این نتیجه را پیش از این نمی‌دانستید؟

تمرین: احتمال آن که هیچ یک از ۱۰ دانش‌آموز را که سر صف می‌ایستند، سر جای خودشان نایستاده باشند، قبلاً به دست آوردیم. این عدد را با عدد $\frac{1}{e}$ مقایسه کنید، چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

تمرین: قرار است از طرف ادارهٔ آموزش و پرورش، تعداد صد عدد نامه به صد مدرسه فرستاده شود. نامه‌ها نوشته شده و نشانی مدارس روی یک صد پاکت نامه تایپ شده است، اگر نامه و پاکت‌ها به هم خورده شده و مستخدم بی‌سواد اداره، نامه‌ها را تصادفی درون پاکت‌ها قرار دهد و آنها را پست کند، چه قدر احتمال دارد که همهٔ نامه‌ها به مقصد خودشان بروند؟ تقریباً چه قدر احتمال دارد که هیچ نامه‌ای به نشانی خودش نرود؟ این دو عدد را با هم مقایسه کنید؛ آیا نتیجه جالب نیست؟



معادلهٔ خط

(قسمت اوّل)

● رضا پیکر

از آن جا که همگان ذهنیتی از خط دارند، خط را به عنوان یک مفهوم اوّلیه، بدون تعریف می‌پذیریم.

خط انواعی دارد که از آن جمله عبارتند از: خط راست، خط منحنی، خط شکسته و...

هر گاه صحبت از خط می‌شود، منظور خط راست است که از مجموعهٔ نقاطی که بر یک راستا قرار دارند، تشکیل می‌شود. در این مقاله سعی داریم تا مختصری به بررسی معادلهٔ خط روی صفحهٔ مختصات بپردازیم.

مجموعه‌های نامتناهی A و B را که اعضای هر کدام، مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ مختصات می‌باشند، در نظر بگیرید. آیا می‌توانید رابطه‌ای بین طول و عرض هر یک از نقاط این مجموعه‌ها حدس بزنید؟

$$A=\left\{\dots,\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۲\\-۲\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۳\\-۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۴\\-۴\end{bmatrix},\dots\right\}$$

$$B=\left\{\dots,\begin{bmatrix}-۲\\۵\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-۱\\۳\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix},\begin{bmatrix}۱\\-۱\end{bmatrix},\dots\right\}$$

با صرف اندکی وقت و دقت، پی می‌برید که مجموع طول و عرض هر یک از نقاط مجموعهٔ A، برابر با صفر و همچنین مجموع دو برابر طول با عرض هر یک از نقاط مجموعهٔ B، برابر با یک است.

اگر به‌طور کلی x را نمایندهٔ طول و y را نمایندهٔ عرض هر نقطه در نظر بگیریم، برای اعضای مجموعه A می‌توانیم بنویسیم:

$$x+y=۰ \qquad (I)$$

و برای اعضای مجموعه B می‌توانیم بنویسیم:

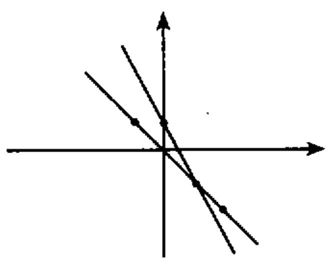
$$۲x+y=۱ \qquad (II)$$

و یا می‌توانیم مجموعه‌های A و B را به گونه زیر بنویسیم:

$$A=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \;\middle|\; x,y\in \mathbb{R},\quad x+y=۰\right\}$$

$$B=\left\{\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \;\middle|\; x,y\in \mathbb{R},\quad ۲x+y=۱\right\}$$

مطابق شکل، تمامی نقاط مجموعه A روی یک خط و نیز



تمامی نقاط مجموعهٔ B هم روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین هر یک از روابط I و II معادلهٔ خطوط راستی هستند که به ترتیب نقاط مجموعه‌های A و B برآن واقعند. بنابراین:

معادلهٔ خط راست، رابطه‌ای است بین طول و عرض نقاطی که بر یک خط راست واقعند.

به‌طور کلی برای مجموعهٔ نقاطی که بر یک خط راست واقعند، می‌توان رابطهٔ $ax + by + c = 0$ را در نظر گرفت که در آن a، b و c اعداد حقیقی هستند و a و b توأماً صفر نیستند.
$(a^2 + b^2 \neq 0$ ✿$)$

الف) اگر $a = 0$ باشد، معادله به‌صورت $by + c = 0$ یا $y = \frac{-c}{b}$ در می‌آید که معادلهٔ خطی موازی محور طولها می‌باشد.

ب) اگر $b = 0$ باشد، معادله به صورت $ax + c = 0$ یا $x = \frac{-c}{a}$ درمی‌آید که معادلهٔ خطی موازی محور عرضها می‌باشد.

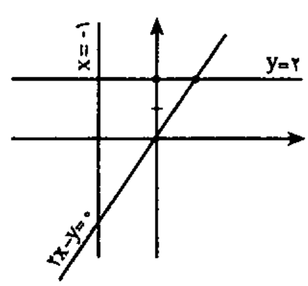
ج) اگر $a^2 + c^2 = 0$ باشد، معادله به صورت $by = 0$ یا $y = 0$ درمی‌آید که معادلهٔ محور طولها می‌باشد.

د) اگر $b^2 + c^2 = 0$ باشد، معادله به صورت $ax = 0$ یا $x = 0$ درمی‌آید که معادلهٔ محور عرض‌ها می‌باشد.

هـ) اگر $c = 0$ باشد، معادله به صورت $ax + by = 0$ درمی‌آید که معادلهٔ اخیر، صورت کلی معادله خطی است که از مبدأمختصات می‌گذرد، چرا که همواره مختصات $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ در آن صادق است.

مثال: هر یک از خطوط $y = 2$ ، $x = -1$ و $2x - y = 0$ را روی یک صفحه مختصات نمایش دهید.

حل:



✿. در ریاضیات، برای نشان دادن این‌که دوعدد a و b یا سه عدد a، b و c و یا... توأماً صفر نیستند، از روابطی نظیر $a^2 + b^2 \neq 0$ ، $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ و... استفاده می‌کنند و بعکس، برای نشان دادن اینکه دو عدد b و a یا سه عدد c ، b ، a و یا ... توأماً صفر هستند، از روابطی نظیر: $a^2 + b^2 = 0$ و $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ و ... استفاده می‌کنند.

نتیجهٔ مهم بحث اخیر را می‌توان این گونه بیان داشت که هر معادلهٔ درجهٔ اوّل دو مجهولی، به صورت $ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$ را می‌توان روی صفحهٔ مختصات به صورت یک خط راست نشان داد و بعکس هر خط راستی که در دستگاه محورهای مختصات رسم شده باشد، معادله‌ای به صورت $ax + by + c = 0 \quad (a^2 + b^2 \neq 0)$ دارد.

مثال: اگر مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با برابری زیر به هم، بستگی داشته باشند، نشان دهید مختصات $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، مختصات نقاط دو خط هستند و دو خط را روی صفحهٔ مختصات نمایش دهید.

$$4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0$$

حل: چنانچه برابری بالا را تجزیه کنیم، خواهیم دید که بستگی بین x و y در این رابطه از نوع معادلهٔ خط است.

$$4x^2 - y^2 + 4x + 1 = 0$$

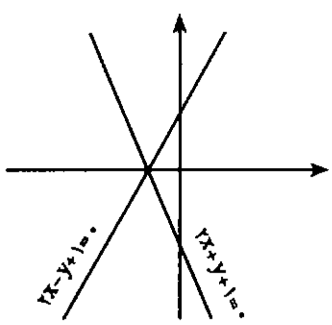
$$(2x + 1)^2 - y^2 = 0$$

$$(2x + y + 1)(2x - y + 1) = 0$$

حاصلضرب دو پرانتز، وقتی صفر است که حداقل یکی از آن پرانتزها برابر با صفر باشد. بنابراین:

$2x - y + 1 = 0$ یا $2x + y + 1 = 0$

که نمودار هر یک از روابط بالا، یک معادلهٔ خط است.



نوشتن معادلهٔ خط با معلوم بودن دو نقطه از آن

با مشخص بودن یک نقطه از خطی در صفحهٔ مختصات، نمی‌توان خط مورد نظر را رسم کرد؛ چرا که از یک نقطه، بی‌شمار خط می‌گذرد؛ ولی با مشخص بودن حداقل دو نقطه از خط، می‌توان خط مورد نظر را رسم کرد. به‌همین ترتیب، برای نوشتن معادلهٔ یک خط راست، مشخص بودن دو نقطه از آن کافی است.

همان گونه که در بحث اخیر داشتیم، هر رابطه که به‌صورت:

$$ax+by+c=0 \qquad (a^2+b^2\neq 0)$$

باشد، معادله یک خط راست است. رابطهٔ اخیر را می‌توان به صورت $y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$ نوشت که با فرض $m=\frac{-a}{b}$ و $n=-\frac{c}{b}$ خواهیم داشت:

$$y=mx+n \qquad (m , n \in \mathbb{R})$$

اکنون می‌خواهیم معادلهٔ خطی را بنویسیم که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

فرض می‌کنیم معادلهٔ خطی که از دو نقطهٔ مذکور می‌گذرد، به شکل کلّی $y=mx+n$ باشد. از آن‌جا که نقاط A و B متعلق به خط مورد نظر می‌باشد، پس مختصات آنها در معادلهٔ خط صادق است و خواهیم داشت:

$$x=x_1 \quad , \quad y=y_1 \quad \Rightarrow \quad y_1=mx_1+n$$
$$x=x_2 \quad , \quad y=y_2 \quad \Rightarrow \quad y_2=mx_2+n$$

با حذف n از معادلهٔ بالا، m بر حسب مقادیر معلوم x_1، x_2، y_1 و y_2 به‌دست خواهد آمد، داریم:

$$y_1-y_2=mx_1-mx_2 \quad \Rightarrow \quad m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

از جایگذاری مقدار m در یکی از دو معادلهٔ اخیر، مقدار n نیز بر حسب مقادیر x_1 , x_2 , y_1 , y_2 محاسبه می‌شود. داریم:

$$n=y_1-\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)x_1$$

یا

$$n=y_2-\left(\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)x_2$$

از قرار دادن مقادیر m و n در معادلهٔ $y=mx+n$ داریم:

$$y=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right]x+y_1-\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right]x_1$$

$$\Rightarrow \boxed{(y-y_1)=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_1)} \qquad (I)'$$

یا

$$y=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right]x+y_2-\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right]x_2$$

$$\Rightarrow \boxed{(y-y_2)=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_2)} \qquad (II)'$$

هر یک از معادله‌های $(I)'$ و $(II)'$، معادلهٔ خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد. لازم به ذکر است که هر دو رابطه، صورت یک معادله‌اند.

مثال: معادلهٔ خط راستی را بنویسید که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-1\\-12\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

حل: مطابق بحث اخیر داریم:

$$(y-3)=\left(\frac{3-(-12)}{4-(-1)}\right)(x-4)$$

یا

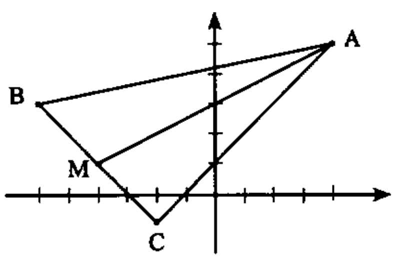
$$(y+12)=\left(\frac{3-(-12)}{4-(-1)}\right)(x+1)$$

پس از ساده کردن هر یک از روابط بالا، به معادلهٔ $y=3x-9$ خواهیم رسید.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-6\\3\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ مختصات سه رأس یک مثلثند. معادلهٔ خطی را بنویسید که میانهٔ ضلع BC برآن واقع است.

حل: میانهٔ ضلع BC از رأس A و از نقطهٔ M وسط ضلع BC می‌گذرد، مختصات نقطهٔ M برابر است با:

$$M=\begin{bmatrix}\frac{x_B+x_C}{2}\\ \frac{y_B+y_C}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-6-2}{2}\\ \frac{3-1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$$



بنابراین باید معادلهٔ خطی را بنویسیم که از دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-4\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد. داریم:

$$(y-5)=\left(\frac{5-(+1)}{4-(-4)}\right)(x-4)$$
$$\Rightarrow y=\frac{1}{2}x+3$$

ضریب زاویه یا شیب خط

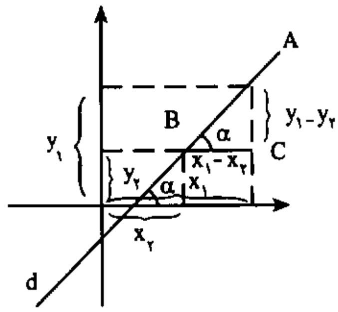
نشان دادیم رابطهٔ $(y-y_1)=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_1)$ معادلهٔ خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد.

رابطهٔ اخیر از فرض معادلهٔ خط به صورت $y=mx+n$ و سپس محاسبهٔ مقادیر m و n بر حسب مقادیر معلوم x_1، x_2، y_1 و y_2 به دست آمد که در آن داشتیم:

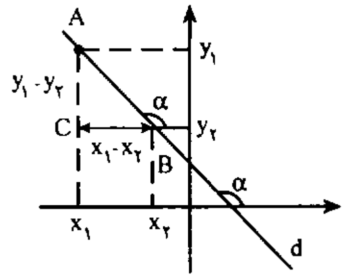
$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$$

اکنون به شکلهای زیر توجه کنید. خط d، خطی است که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}$ می‌گذرد و ضمن قطع کردن محور طولها با جهت مثبت محور طولها زاویهٔ α را تشکیل می‌دهد.

الف)



ب)



از نقاط A و B، مطابق شکل، خطوطی به موازات دو محور رسم می‌کنیم. مثلث ABC را در هر یک از شکلها در نظر بگیرید. با توجه به شکل، واضح است که داریم:

$$\angle ABC=\alpha\ ,\ AC=y_1-y_2\ ,\ BC=x_1-x_2$$

بنابراین داریم:

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{AC}{BC}=\operatorname{tg}\alpha$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، نسبت $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ برابر با تانژانت زاویه‌ای است که خط d با جهت مثبت محور طولها می‌سازد.

به اصطلاح، نسبت $m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ را در معادلهٔ $(y-y_1)=\left[\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right](x-x_1)$ یا $y=mx+n$ ضریب زاویه یا شیب خط مورد نظر می‌نامند که مقدار آن برابر است با تانژانت زاویه‌ای که خط مورد نظر با جهت مثبت محور طولها می‌سازد.

مثال: ضریب زاویهٔ خطی که از دو نقطهٔ $A\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}-3\\-2\end{bmatrix}$ می‌گذرد، چند است؟

حل:

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{5-(-2)}{4-(-3)}=\frac{7}{7}=1$$

مثال: خطی که از نقاط $\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\2\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد، با جهت مثبت محور طولها چه زاویه‌ای می‌سازد.

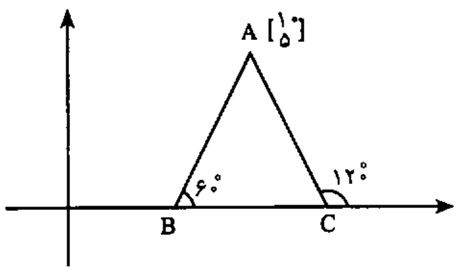
حل: اگر زاویه‌ای را که این خط با جهت مثبت محور طولها می‌سازد، α فرض کنیم، داریم:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2-1}{\sqrt{3}-0}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\alpha=\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}^{*}=\frac{\pi}{6}$$

مثال: مثلث متساوی‌الاضلاعی را که یکی از اضلاع آن بر محور طولها واقع است، در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ $A\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ یکی از رئوس این مثلث باشد، معادلهٔ دو ضلع غیرواقع بر محور طولها را بنویسید.

حل: با توجه به شکل، واضح است که دو ضلع مثلث با محور طولها زاویه‌های 120° و 60° می‌سازند.



بنابراین داریم:

$$\text{معادلهٔ } AB:(y-5)=\operatorname{tg}60^\circ(x-10)$$

$$\Rightarrow(y-5)=\sqrt{3}(x-10)$$

---

* $\operatorname{Arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ (آرک تانژانت $\frac{\sqrt{3}}{3}$) برابر زاویه‌ای است که در فاصلهٔ $(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ باشد و مقدار تانژانت آن برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، که بدیهی است تانژانت $\frac{\pi}{6}$ یا 30° برابر با $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است.

معادلهٔ AC : $(y-5) = tg120^\circ(x-10)$

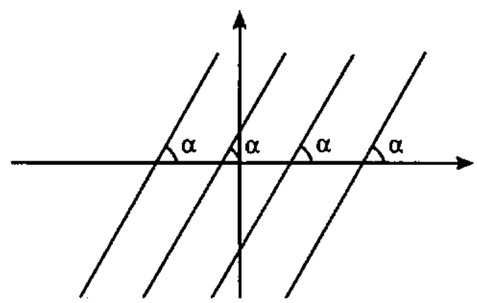
$$\Rightarrow (y-5) = -\sqrt{3}(x-10)$$

$$(tg120^\circ = -tg60^\circ = -\sqrt{3})$$

نتیجه بحث: مقدار m در خطی که معادلهٔ آن به یکی از دو صورت $y = mx + n$ یا $y - y_1 = m(x - x_1)$ است، ضریب زاویه یا شیب آن خط می‌باشد.

خطوط موازی

به شکل زیر توجه کنید. دو یا چند خط موازی، زاویه‌های برابر با جهت مثبت محور طولها می‌سازند.



بنابراین تانژانت زاویه‌هایی که این خطوط با محور طولها می‌سازند، مقداری برابر است. در نتیجه می‌توان گفت، ضریب زاویه یا شیب خطوط موازی با هم برابرند.

مثال: به ازای کدام مقدار a خط $L: 2y - ax = 3$ موازی نیمساز ربع اوّل و سوم است.

حل: از آن‌جا که معادلهٔ نیمساز ربع اول و سوم به صورت $y=x$ می‌باشد، پس ضریب زاویهٔ آن برابر با ۱ است. و چون خط L با نیمساز ربع اول و سوم موازی است، باید ضریب زاویه‌ای برابر داشته باشند.

$$L: 2y - ax = 3 \Rightarrow y = \frac{a}{2}x + \frac{3}{2}$$

بنابراین :

$$\frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = 2$$

مثال: اگر یک ضلع متوازی الاضلاع بر خط $d: y + 2x = 4$ منطبق باشد، معادلهٔ ضلع روبه‌رو به آن را در صورتی که بدانیم از نقطهٔ $\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}$ می‌گذرد، بنویسید.

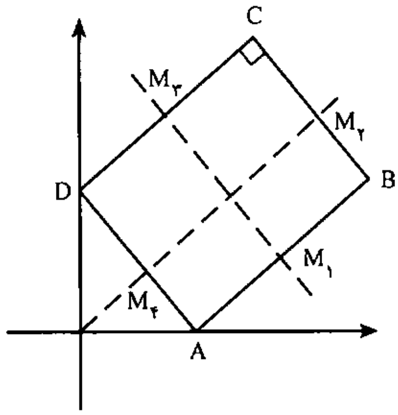
حل: از آن‌جا که ضلع روبه‌رو به ضلع یاد شده، موازی آن است، پس هر دو خط، ضریب زاویه‌ای برابر دارند. شیب خط d برابر با ۲- است. پس شیب خط مورد نظر نیز برابر با ۲-

است، و داریم:

$$y - 1 = -2(x - 10) \Rightarrow y = 2x + 21$$

مثال: چهارنقطهٔ $A\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}10\\6\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}6\\10\end{bmatrix}$ و $D\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$ چهار رأس مستطیل ABCD می‌باشند. ضمن نمایش مستطیل روی صفحهٔ مختصات، معادله‌های خطوطی را که محورهای تقارن این مستطیل بر آن واقعند، بنویسید.

حل:



مطابق شکل، محورهای تقارن مستطیل، خطوطی هستند که از اوساط دو ضلع مقابل به موازات دو ضلع مجاور رسم شوند. اگر اوساط اضلاع BC ،AB، CD و DA را به ترتیب M_1، M_2، M_3 و M_4 بنامیم، مختصات این نقاط عبارتند از:

$$M_1 = \begin{bmatrix}\frac{4+10}{2}\\ \frac{0+6}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix} \qquad M_2 = \begin{bmatrix}\frac{10+6}{2}\\ \frac{6+10}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix}\frac{0+6}{2}\\ \frac{4+10}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix} \qquad M_4 = \begin{bmatrix}\frac{0+4}{2}\\ \frac{4+0}{2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

بنابراین معادله‌های محورهای تقارن این مستطیل عبارتند از:

الف) $(y-2) = (\frac{8-2}{8-2})(x-2)$ یا $y = x$

ب) $(y-3) = (\frac{7-3}{3-7})(x-7)$ یا $y = -x + 10$

راه حل دیگر: با توجه به این‌که M_1M_3 موازی AD می‌باشد و با معلوم بودن مختصات نقطهٔ M_1 داریم:

الف) $(y-3) = (\frac{0-4}{4-0})(x-7) \Rightarrow y = -x + 10$

و با توجه به موازی بودن M_2M_4 با AB و معلوم بودن مختصات M_2 داریم:

ب) $(y-8) = (\frac{4-10}{0-6})(x-8) \Rightarrow y = x$

محاسبه محیط بیضی

(به روش تحلیلی، با تقریب مناسب)



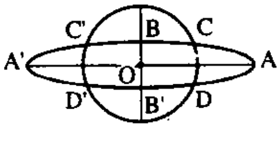
● سیّد محمد رضا هاشمی موسوی

برای محاسبهٔ محیط بیضی، ابتدا فرض می‌کنیم که محیط دایره‌ای دقیقاً برابر محیط بیضی است. سپس تلاش می‌کنیم محیط این دایره را حساب کنیم. به عبارت دیگر، می‌خواهیم دایره‌ای به دست آوریم که محیطش برابر محیط بیضی باشد. بدیهی است که شعاع چنین دایره‌ای باید تابعی از a و b باشد. (a و b به ترتیب نصف قطر بزرگ و نصف قطر کوچک بیضی هستند.)

حال برای این منظور، ابتدا معادلات بیضی و دایرهٔ مفروض (به شعاع R) را می‌نویسیم. سپس دایره را با بیضی قطع می‌دهیم؛ یعنی:

$$\begin{cases} \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \\ x^۲ + y^۲ = R^۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^۲ - x^۲} \\ y = \pm\sqrt{R^۲ - x^۲} \end{cases}$$

(R شعاع دایره مطلوب است.)



پس از قطع دایره با بیضی: $\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^۲ - x^۲} = \pm\sqrt{R^۲ - x^۲}$

پس از محاسبهٔ x و y:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{a}{c}\sqrt{R^۲ - b^۲} \\ y = \pm\frac{b}{c}\sqrt{a^۲ - R^۲} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(\frac{a}{c}\sqrt{R^۲ - b^۲} \text{ و } \frac{b}{c}\sqrt{a^۲ - R^۲}) \\ C'(-\frac{a}{c}\sqrt{R^۲ - b^۲} \text{ و } \frac{b}{c}\sqrt{a^۲ - R^۲}) \\ D(\frac{a}{c}\sqrt{R^۲ - b^۲} \text{ و } -\frac{b}{c}\sqrt{a^۲ - R^۲}) \\ D'(-\frac{a}{c}\sqrt{R^۲ - b^۲} \text{ و } -\frac{b}{c}\sqrt{a^۲ - R^۲}) \end{cases}$$

از مختصات نقاط تقاطع نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} a^۲ - R^۲ \geq ۰ \\ R^۲ - b^۲ \geq ۰ \end{cases} \Rightarrow b \leq R \leq a$$

از محاسبهٔ فاصلهٔ نقاط تقاطع نتیجه می‌شود که، نقاط تقاطع، مستطیلی به طول L و عرض l را مشخص می‌کنند:

طول مستطیل $L = \frac{۲a}{c}\sqrt{R^۲ - b^۲}$

عرض مستطیل $l = \frac{2b}{c}\sqrt{a^2 - R^2}$

از شرط $b \le R \le a$ نتیجه می‌شود که دایرهٔ مطلوب، بیضی را در چهار نقطه قطع می‌کند، بنابراین دایرهٔ مطلوب از دایرهٔ اصلی بیضی کوچک‌تر و از تصویر دایرهٔ اصلی بزرگتر است؛ یعنی میان دو دایرهٔ فوق محدود است.

از آن جا که شرط کردیم محیط دایرهٔ مطلوب، برابر محیط بیضی است، بنابر این شرط، باید شعاع دایرهٔ مطلوب، تابعی از a و b باشد؛ زیرا محیط بیضی، تابعی از a و b است.

می‌دانیم که قطر هر مستطیل، تابعی از طول و عرض آن مستطیل است؛ بنابراین چون قطر مستطیل برابر قطر دایره است، از یک طرف باید تابعی از L و l باشد و از طرف دیگر، باید تابعی از a و b. از این جا نتیجه می‌گیریم که این مستطیل، رابطه‌ای با مستطیل محیطی بیضی دارد. این رابطه به این قرار است که طول و عرض مستطیل فوق، تابعی از a و b هستند (زیرا قطر مستطیل فوق، تابعی از a و b است).

در این جا ثابت شد که L و l به ترتیب تابعی از a و b هستند. بدیهی است که توابع فوق، نمی‌توانند دارای عدد ثابت باشند (زیرا هرگاه $a=0$ و $b=0$، آن گاه L و l برابر صفرند). از طرفی داریم:

$$\begin{cases} L = \left(\frac{2\sqrt{R^2 - b^2}}{c}\right) a \\ l = \left(\frac{2\sqrt{a^2 - R^2}}{c}\right) b \end{cases} \qquad (1)$$

از رابطهٔ (۱) و آنچه که گفته شد، نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} L = 2\alpha a \\ l = 2\beta b \end{cases} \qquad (2)$$

(α و β اعداد ثابتی هستند.)

بدیهی است که مقدار α و β چنین هستند:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{R^2 - b^2}}{c} = \alpha \\ \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} = \beta \end{cases} \qquad (3)$$

از رابطهٔ (۳) روابط زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \alpha c = \sqrt{R^2 - b^2} \\ \beta c = \sqrt{a^2 - R^2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \alpha^2 c^2 = R^2 - b^2 \\ \beta^2 c^2 = a^2 - R^2 \end{cases} \qquad (4)$$

(می‌دانیم: $a^2 = b^2 + c^2$)

از جمع روابط (۴) چنین نتیجه می‌شود:

$$(\alpha^2 + \beta^2)\, c^2 = a^2 - b^2 \; ; \; \alpha^2 + \beta^2 = 1 \qquad (5)$$

از تفاضل روابط (۴) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$(\alpha^2 - \beta^2)\, c^2 = 2R^2 - (a^2 + b^2) \qquad (6)$$

با توجه به رابطهٔ (۵)، رابطهٔ (۶) چنین می‌شود:

$$(1 - 2\beta^2)\, c^2 = 2R^2 - (a^2 + b^2) \; ;$$

$$2R^2 = a^2 + b^2 + (1 - 2\beta^2)c^2$$

در این جا شعاع دایرهٔ مطلوب، بر حسب مقدار نامعلوم β معین می‌شود، یعنی:

$$R = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \left(\frac{1}{2} - \beta^2\right) c^2} \qquad (7)$$

رابطهٔ (۷) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$R = a\sqrt{1 - k^2\beta^2} \quad \left(k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right) \qquad (8)$$

حال از رابطهٔ (۸) محیط بیضی را بر حسب β می‌نویسیم:

$$p = 2\pi a\sqrt{1 - k^2\beta^2} \qquad (9)$$

حال از رابطهٔ (۹) ماکزیمم و می‌نیمم β را محاسبه می‌کنیم و از آن جا حدود β مشخص می‌شود. حال برای محاسبهٔ ماکزیمم β چنین عمل می‌کنیم:

$$(p = 4a \Leftrightarrow b = 0)$$

$$4a = 2\pi a\sqrt{1 - \beta_M^2} \; ; \; 2 = \pi\sqrt{1 - \beta_M^2}$$

$$\beta_M = \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} \doteq 0/771 \qquad (9)'$$

حال مقدار می‌نیمم β را محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، بین دستور (۹) و مساحت بیضی، b را حذف می‌کنیم. از حذف b، معادلهٔ درجهٔ دوم زیر که ریشه‌هایش a^2 و b^2 است، تشکیل خواهد شد:

$$\begin{cases} p = 2\pi a\sqrt{1 - k^2\beta^2} = 2\pi\sqrt{(1 - \beta^2)a^2 + \beta^2 b^2} \\ S = \pi ab \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 = (1 - \beta^2)a^2 + \beta^2 b^2 \\ \left(\frac{S}{\pi}\right)^2 = a^2 b^2 \end{cases}$$

$$(1 - \beta^2)X^2 - \left(\frac{p}{2\pi}\right)^2 X + \left(\frac{S}{\pi}\right)^2 \beta^2 = 0 \qquad (10)$$

مبین معادلهٔ (۱۰) را تشکیل می‌دهیم:

$$\Delta = \left(\frac{p}{2\pi}\right)^4 - 4(1 - \beta^2)\left(\frac{S}{\pi}\right)^2 \beta^2$$

حال اگر مبین معادلهٔ فوق را برابر صفر قرار دهیم، معادله دارای ریشهٔ مضاعف a^2 یا b^2 می‌شود، بنابراین:

$$(p = 2\pi a \text{ و } S = \pi a^2) \Leftrightarrow \Delta = 0 \quad ; \; 4\beta_m^2(1 - \beta_m^2) = 1 \; ;$$

$$\beta_m = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0/707 \qquad (۱۱)$$

بنابراین، در این جا از روابط (۹)′ و (۱۱) حدود β و از آن جا حدود بیضی به دست خواهد آمد.

حدود β: (۱۲)

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \beta \le \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$

$$(0/707 \le \beta \le 0/771)$$

حال با در دست داشتن حدود β حدود محیط بیضی را می‌توان محاسبه کرد. بنابراین، برای محاسبهٔ حدود محیط بیضی، کافی است مقدار β را بر حسب R در رابطهٔ (۱۲) قرار دهیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} \le \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi} \qquad (۱۳)$$

از رابطهٔ (۱۳) حدود R را محاسبه می‌کنیم و از آن جا حدود محیط بیضی محاسبه می‌شود. بنابراین، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{c} \le \frac{\sqrt{\pi^2 - 4}}{\pi}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{a^2 - R^2}{c^2} \le \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2} \Rightarrow$$

$$a^2 - \frac{\pi^2 - 4}{\pi^2} c^2 \le R^2 \le a^2 - \frac{c^2}{2}$$

$$\frac{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2}{\pi^2} \le R^2 \le \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \le R \le \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \qquad (۱۴)$$

حال با در دست داشتن شعاع دایرهٔ مطلوب، می‌توان حدود محیط بیضی را نوشت. در این جا دو دستور برای محیط بیضی به دست می‌آوریم که یکی از آنها محیط بیضی را با تقریب اضافی و دیگری محیط بیضی را با تقریب نقصانی می‌دهد. برای به دست آوردن دو دستور فوق، کافی است که مقدار 2π را در رابطهٔ (۱۴) ضرب کنیم و به جای $2\pi R$ مقدار مساوی آن p را جانشین کنیم؛ بنابراین:

$$\frac{2\pi}{\pi}\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \le 2\pi R \le 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

$$p = 2\pi R$$

$$2\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \le p \le 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \qquad (۱۵)$$

بنابراین فرمول‌های تقریبی (نقصانی و اضافی) چنین هستند.

دستور محیط بیضی با تقریب اضافی:

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)} \qquad (۱۶)$$

دستور محیط بیضی با تقریب نقصانی:

$$p = 2\sqrt{4a^2 + (\pi^2 - 4)b^2} \qquad (۱۷)$$

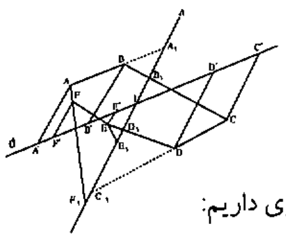
رابطهٔ (۱۵) حدود محیط بیضی را نشان می‌دهد، و روابط (۱۶) و (۱۷) دستورهای محیط بیضی هستند، که لازم به تذکر است هرگاه بیضی به دایره نزدیک باشد، بهتر است از رابطهٔ (۱۶) استفاده شود و هنگامی که بیضی به خط مستقیم 4a نزدیک می‌شود، از دستور (۱۷) استفاده شود، یعنی دستور (۱۶) برای حالتی از بیضی است که داریم: $c \to 0$ و دستور (۱۷) برای حالتی از بیضی است که داریم: $b \to 0$.

در حالت کلی می‌توان از دستور (۱۶) استفاده کرد که آن را می‌توان دستور محیط بیضی با تقریب اضافی نامید، بنابراین دستور محیط بیضی با تقریب اضافی، چنین است:

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$$

پاسخ مسألهٔ مسابقه‌ای برهان ۲۴

حل: خط دلخواه d غیر موازی با خط Δ را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ برخورد D، Δ را I می‌نامیم. از رأسهای A، B، C، D، E و F خطهایی موازی Δ رسم می‌کنیم تا خط d را به ترتیب در نقطه‌های ′A، ′B، ′C، ′D، ′E و ′F قطع کنند.



بنا به ویژگی خطهای موازی داریم:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} = \frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}}, \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}}, \frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}} = \frac{\overline{IC'}}{\overline{ID'}}, \frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}} = \frac{\overline{ID'}}{\overline{IE'}}$$

$$\frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}} = \frac{\overline{IE'}}{\overline{IF'}}, \frac{\overline{F_1F}}{\overline{F_1A}} = \frac{\overline{IF'}}{\overline{IA'}}$$

از ضرب کردن طرفهای متناظر رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{\overline{A_1A}}{\overline{A_1B}} \times \frac{\overline{B_1B}}{\overline{B_1C}} \times \frac{\overline{C_1C}}{\overline{C_1D}} \times \frac{\overline{D_1D}}{\overline{D_1E}} \times \frac{\overline{E_1E}}{\overline{E_1F}} \times \frac{\overline{F_1E}}{\overline{E_1A}} = 1$$

عکس این قضیه درست نیست. زیرا اگر رابطه بالا برقرار باشد، الزامی وجود ندارد که نقطه‌های A_1، B_1، C_1، D_1، E_1 و F_1 روی یک خط راست باشند.

ریاضیات تفریحی



● غلامرضا یاسی‌پور

کاشیکاری و خطا

حمید آقا و زنش، مریم بانو، و بچهٔ شیرخوارشان اصلان، تازه از دردسر و مکافات اسباب کشی به یکی از این آپارتمان‌های نقلی جدید و مدرن راحت شده‌اند و شروع به استفاده از مزایای خانهٔ جدیدشان کرده‌اند؛ به خصوص مریم خانم از این که دیگر لازم نیست از پله‌های باریک خانهٔ قبلی‌شان بالا و پایین برود، خیلی خوشحال بود. اما وضعیت حمّام خانه را که دید، حالش گرفته شد.

فریاد کشید: «حمید! حمید بیا این جا!»

حمید آقا با اکراه از اتاق مطالعه‌اش بیرون آمد ـ اتاق مطالعه‌ای که با یک مبل راحتی و یک قفسهٔ پر از کتاب‌های دلخواه حمید آقا مجهز شده بود ـ و از راهروی دراز منجر به حمّام گذشت و گفت:

ـ بله، عزیزم!

ـ حمید، آیا بنّا قول نداده بود که دیوار حمّام را کاملاً کاشیکاری کند؟

ـ البته که قول داده بود عزیزم!

ـ پس چرا انجام نداده! دیوارها با گچ ساده رها شده‌اند و یک جعبهٔ بزرگ پر از کاشی، گوشهٔ حمّام جا مانده!

حمید آقا با حالتی تسلیم‌آمیز گفت: «همین حالا بهش تلفن می‌کنم.»

به این ترتیب بود که حمید آقا تلفن کرد. جواب طرف چنین بود: «بله قربون، بله؛ حق به جانب شماس، قربون. خوب، با مشکل کوچکی برخورد کردیم. منظورم اینه که کاشی‌های سفارشی شما، کاشی‌های فانتزی‌ای با شکلای عجیب و غریبی بودن، خُب ... نمی‌تونیم اونا رو پهلوی هم قرار بدیم.»

ـ ببخشید، چی فرمودید؟

ـ کاشیکارمون می‌گه یه مقدار فاصله بین اونا ایجاد می‌شه.

حمید آقا با عصبانیت ریشش را خاراند و گفت: «مسخره‌اس! هیچ وقت چنین عذر احمقانه‌ای را در مدت عمرم نشنیده بودم!»

ـ ممکنه همین طور باشد قربون؛ اما این مشکل، مارو حسابی گیج و ویج کرده.

ـ چرا چند تا از آنها را برای ساختن مستطیل پهلوی هم قرار نمی‌دید تا بعد، از مستطیل‌های حاصل شده برای دیوار استفاده کنید؟

ـ خُب، عرض شود کاشیکارمون راجع به اینم فکر کرده. اتفاقاً روش کارمون همینه. اما، گیر کار این جاست که نمی‌شه با اونا مستطیل ساخت. گرچه باید این رو هم بدونین که تنها راه کاشیکاری کردنِ دیوار، ساختن مستطیل نیس.

حمید آقای ما که تمام فکر و ذکرش متوجه حلّ مسأله از طریق مستطیل‌بندی بود، بلافاصله جواب داد: «چرنده!»

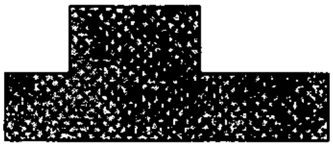
استاد بنّا با عذرخواهی گفت: «از کاشیکار خواستم یه حملهٔ دیگه به مسأله بکنه. ایشالّا تا سه هفته بعد از چهارشنبهٔ آینده، کار رو انجام می‌ده.»

حمید آقا پاسخ داد: «مزخرفه! خودم انجامش می‌دم!» و گوشی را محکم روی تلفن کوبید و به حمّام رفت، و در حالی که برای همسرش دربارهٔ بساز و بفروش‌ها داد سخن می‌داد، درِ جعبهٔ کاشی‌ها را باز کرد.

گفت: «هوم. بعله! شکل کاشی‌ها کمی غیرمعموله (شکل ۸). اما فکر نمی‌کنم سخت باشد. مسأله اینه که چطور اونارو پهلوی هم بذاریم تا مستطیل دُرُس بشه. په، باید آسون باشد ...!»

دو روز گذشت و حمید آقا مأیوس‌تر و مأیوس‌تر می‌شد. بالاخره مجبور شد با دوست قدیمی و ریاضیدانش احمدخان، که در مؤسسهٔ ریاضیات کار می‌کرد، مشورتی داشته باشد.

احمد خان، بعد از مقداری فکر، گفت: «جالبه. این طور که معلومه، کاشی شما به شکل چند مربعی "polyomino" است؛ یعنی یک شکل مسطّح تشکیل شده از به هم پیوستن لبه به لبهٔ مجموعه‌ای از مربع‌های هم اندازه،



شکل (۸): کاشی حمّام آپارتمان حمیدآقا. آیا می توانید از پهلوی هم قرار دادن این کاشی‌ها مستطیلی بسازید؟

تعداد n ـ مربعی‌ها

n	P(n)	Q(n)
۱	۱	۱
۲	۱	۲
۳	۲	۶
۴	۵	۱۹
۵	۱۲	۶۳
۶	۳۵	۲۱۶
۷	۱۰۸	۷۶۰
۸	۳۶۹	۲,۷۲۵
۹	۱,۲۸۵	۹,۹۱۰
۱۰	۴,۶۵۵	۳۶,۴۴۶
۱۱	۱۷,۰۷۳	۱۳۵,۲۶۸
۱۲	۶۳,۶۰۰	۵۰۵,۸۶۱
۱۳	۲۳۸,۵۹۱	۱,۹۰۳,۸۹۰
۱۴	۹۰۱,۹۷۵	۷,۲۰۴,۸۷۴
۱۵	۳,۴۲۶,۵۷۶	۲۷,۳۹۴,۶۶۶
۱۶	۱۳,۰۷۹,۲۵۵	۱۰۴,۵۹۲,۹۳۷
۱۷	۵۰,۱۰۷,۹۱۱	۴۰۰,۷۹۵,۸۶۰
۱۸	۱۹۲,۶۲۲,۰۵۲	۱,۵۴۰,۸۲۰,۵۴۲

به طوری که گوشه‌هایشان روی هم قرار گیرند. اگر به n مربع از مربع‌هایی چنین نیاز داشته باشیم، آن را n مربعی می‌نامیم. تعداد n مربعی‌ها با n سریعاً افزایش می‌یابد.» (جدول بالا را ملاحظه کنید.)

احمد خان ادامه داد: «برای دقیق ساختن مسأله، اجازه بده از روشی پیروی کنم که **دیوید کلارنر** "David Klarner" در سال ۱۹۶۹ با توجه به آن، مرتبهٔ یک چند مربعی را این گونه تعریف کرد: کمترین تعداد کپی برای تشکیل یک مستطیل؛

البته با این فرض که این کار ممکن باشد؛ چـه در غیر ایـن صورت، ترتیب مذکور تعریف نمی‌شود.»

مسأله (۱): آیا می‌توانید یک چند مربعی را تصور کنید که دارای مـرتبه نـباشد؛ یـعنی نـتوانند سـطح یک مستطیل را بپوشاند؟ مستطیل مورد بحث می‌تواند (تا زمانی که مستطیل بماند) به هر شکل و هر اندازه باشد.

در شکل (۹)، چند مثال از چند مربعی‌هایی با مرتبه‌های گوناگون نشان داده‌ایم. توجه داشته باشید که برای اثبات این که یک چند مربعی دارای مرتبه‌ای مثلاً m، است، باید دو کار را انجام دهیم:

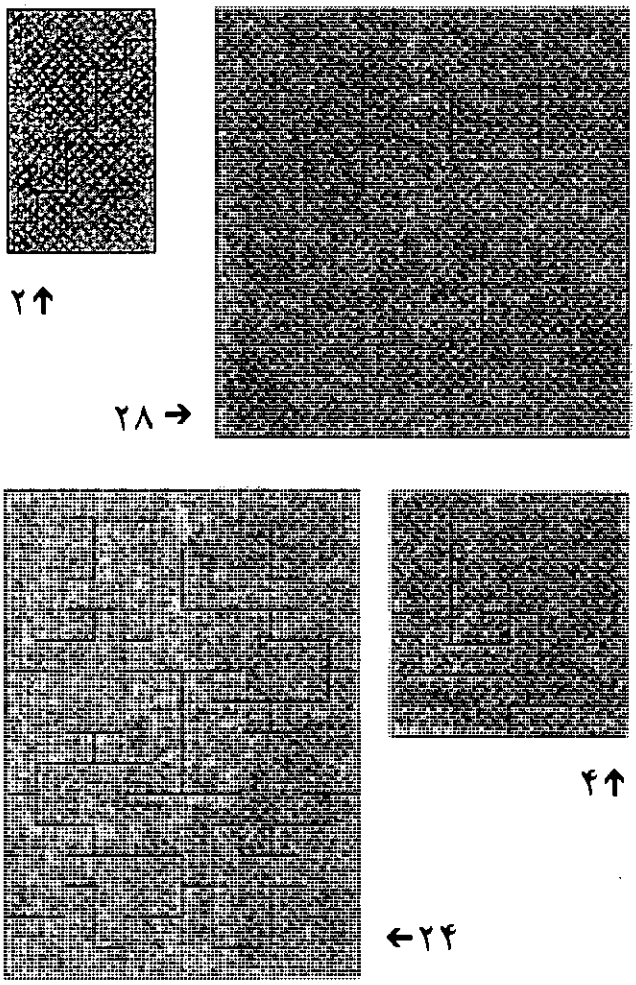
الف) راهی برای تشکیل یک مستطیل با m کپی یا مورد بیابیم.

ب) ثابت کـنیم هـیچ تـعداد کـپی کـمتر از m، مـستطیل نمی‌سازد.

ممکن است تصور کنیم قسمت (الف) مشکل‌تر است؛ اما اغلب این (ب) است که موجب زحمت می‌شود. در مورد هر اندازه و شکل معلوم مستطیل و هر چـند مـربعی مـفروض، می‌توان در تـئوری مشخص کـرد کـه چـند مـربعی مـزبور می‌تواند مستطیل معلوم را تشکیل دهد یا خیر. اما تنها روش سیستماتیک شناخته شده، روش هوشمندانهٔ آزمایش و خطا "trial-and-error" است و این روش، حتی برای مستطیل‌های با اندازهٔ متعادل نیز، به سرعت غیرعملی می‌شود.

در این مورد، هیچ روش عمومی *کارایی* شـناخته شـده نیست و در این زمینه، مسائل حل نشدهٔ بسیاری وجود دارد. حوزهٔ مورد بحث برای علاقه‌مندان ریاضیات تفریحی، کاملاً باز است.

احمد خان به حمید آقا گفت: «حالا، کاشیمان به گونه‌ای فریبنده، مثال ساده‌ای از هفت مربعی است؛ یعنی یک چـند مربعی ساخته شده از هفت مربع. در واقع، آنچه را که به آن نیاز داریم، این است که مشخص کنیم مستطیل مورد بحث دارای مرتبه‌ای هست یا نه؟ و اگر هست، ایـن مـرتبه کـدام است؟ اما من تصور می‌کنم مسألهٔ اصلی این است که شروع کار با هفت مربعی، کمی جاه‌طلبانه باشد. در این صورت، چرا کار را با یک مربعی، دو مربعی، سه مربعی، چهار مربعی یا پنج مربعی آغاز نکنیم؟»



شکل (۹): چند مربعی‌های از مرتبهٔ ۲، ۴، ۲۴ و ۲۸

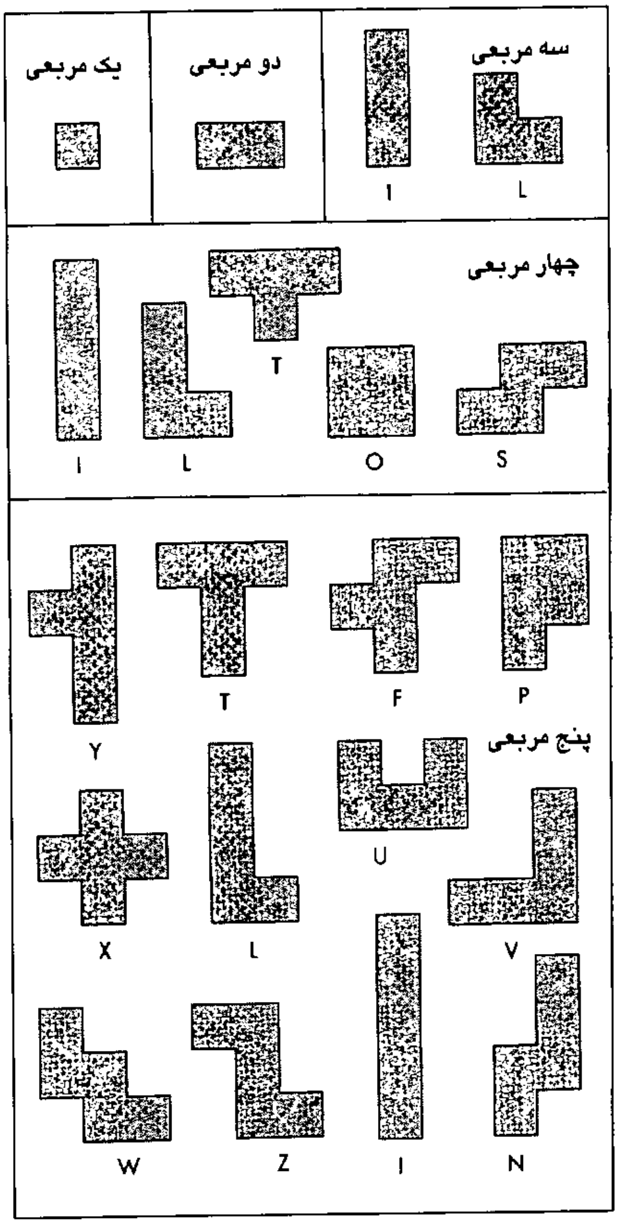
مسألهٔ (۲): در شکل (۱۰)، n ـ مربعی‌های ممکن را بـه ازای n=۱,۲,۳,۴,۵ نشان داده‌ایم. آیا می‌توانید مـرتبهٔ آنـها را مشخص کنید؟

راهنمایی: ممکن است مـورد Y ـ پـنج ضـلعی، مـوجب زحمت شود؛ اما می‌توان آن را انجام داد.

احمد خان گفت: «آها! حتی در این مرحـلهٔ آغـازی هـم می‌توان بعضی از اصول کلی را ملاحظه کرد. واضح است که یک چند مربعی اگر و تنها اگر یک مستطیل باشد، دارای مرتبهٔ ۱ است.»

حمید آقا گفت: «احمد خان! اگر حرف مـهمّت هـمینه، بهتره به خونه برم و کار هیجان‌انگیزتری مثل دیدن رشـد و نمو کاکتوس‌ها را انجام بدم.»

احـمد خـان بـا کـج‌خلقی گـفت: «صـرفاً مـلاحظهٔ یک واقعیت؛ چرا که حتی بدیهی‌ترین واقعیت‌ها نـیز مـی‌توانند



شکل (۱۰): جمیع n ـ مربعی‌ها به ازای $n \leq 5$

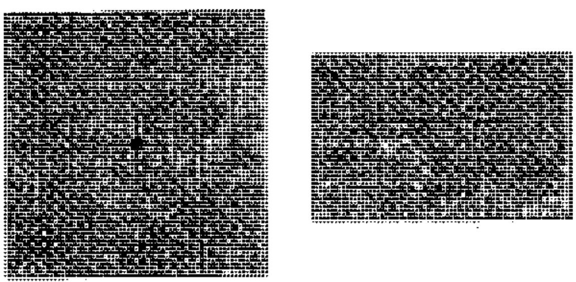
مفید باشند. اما حالا اجازه بده مواردِ کمی مشکل‌تر را مورد بررسی قرار دهیم. چند مربعی از مرتبهٔ ۲، بنا به تعریف، از بریدن یک مستطیل به دو تکهٔ برابر حاصل می‌شود. برای رسیدن به این منظور، خط برش باید تحت دوران 180° متقارن باشد. این عمل مشخصه‌ای کارا از تمام چند مربعی‌های از مرتبهٔ ۲ به دست می‌دهد ، نیز سودمند است؛ زیرا معروف‌ترین مثال‌های چند مربعی‌هایی که *دارای* مرتبه‌اند، مرتبهٔ ۲ دارند.

ـ مرتبهٔ ۳ مورد پیچیده‌تری است. کلارنر در سال ۱۹۶۹ حدس زده که چند مربعی‌های از مرتبهٔ ۳ وجود ندارند. وی این را نیز اضافه می‌کند که: «این ایده از لحاظ شهودی آشکار است؛ اما تنظیم اثباتی دقیق برای آن، مشکل به نظر می‌رسد. تا آن جا که من مطّلعم، در این مورد هنوز کسی اثباتی انتشار نداده است و مقاله‌ای که در سال ۱۹۸۹ نوشته شده، به طور ضمنی، به این مسائل به عنوان مسائل حل نشده اشاره می‌کند. اما در این مورد، حق به جانب کلارنر است؛ چراکه من، یعنی احمد خان، به تازگی اثباتی برای این قضیه به دست آورده‌ام.»

مسأله (۳): آیا می‌توانید حدس کلارنر را اثبات کنید؟ اثبات احمد خان، پیچیده‌تر از آن است که در این جا داده شود. جالب توجه است که اثبات مزبور، استفادهٔ وسیعی از استدلال‌های متقارن به عمل می‌آورد. (احمد خان به تازگی آن را در مقاله‌ای مشترک با من به چاپ رساند؛ چه احمد خان به علت کمرویی زیاد، به تنهایی مایل به چاپ آثارش نیست.)

حمید آقا، که حالت تحقیق به خود گرفته بود، پرسید: «دربارهٔ مرتبهٔ ۴ چه؟» آشکار بود که مدتی طول می‌کشد تا احمد خان سری به حمّام مریم خانم بزند؛ اما حمید آقا هم عجله‌ای در این مورد نداشت. به طور قطع و یقین هم نداشت؛ به خصوص اگر برای **مسأله** راه‌حلی وجود نداشته *باشد*، که به طور تهدیدکننده‌ای می‌رفت که چنین باشد.

احمد خان گفت: «حدس زده‌اند که چند مربعی‌های مرتبهٔ ۴، دقیقاً به دو طریق ایجاد می‌شوند (شکل ۱۱).»



شکل (۱۱): دو طریق به دست آوردن چند مربعی‌های مرتبهٔ ۴

به نظر می‌رسد که اثبات این مطلب احتمالاً پیچیده باشد. خوب، من خودم اثباتی به دست نیاورده‌ام؛ اما بعید نیست که پیدا شود.

ـ مرتبهٔ ۵ چی؟

ـ هیچ کس نمی‌داند. تا این اواخر، تنها مرتبه‌های شناخته شدهٔ بزرگتر از ۴ عبارتند از ۱۰، ۱۸، ۲۴، ۲۸، ۷۶ و ۹۲.

حمید آقا گفت: «این عددها، اعداد بسیار جالبی هستند.»

احمد خان با موافقت گفت: «قطعاً چنین‌اند و در صورتی که تنها موارد ممکن باشند، ۹۲ عددی بسیار نامتعارف است؛ بزرگترین مرتبهٔ چند مربعی ممکن.»

ـ هوم. آیا ۹۲ ویژگی‌های نامتعارف دیگری دارد؟

احمد خان نسخه‌ای از کتاب David Well به نام *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* را از قفسهٔ کتابخانه‌اش بیرون کشید و گفت: «در این جا که مطلبی دربارهٔ آن وجود ندارد.»

حمید آقا گفت: «شاید این عدد جالب و شگفت‌انگیز نیست.»

احمد خان جواب داد: «دربارهٔ این موضوع، لطیفه‌ای از ریاضیدانان تعریف می‌کنند. دربارهٔ این قضیه که هر عدد جالب است. اثبات قضیه چنین است: اگر عددی جالب نباشد، در این صورت باید یک **کوچکترین** عدد ناجالب موجود باشد، و البته این عدد، در واقع، عددی بسیار جالب خواهد بود! بنابراین، تناقضی منطقی ایجاد می‌شود که مستلزم آن است که فرض وجود عدد ناجالب، باید نادرست باشد.»

حمید آقا گفت: «اوه، بله؛ اما این عدد غیرمتعارف هم است؟»

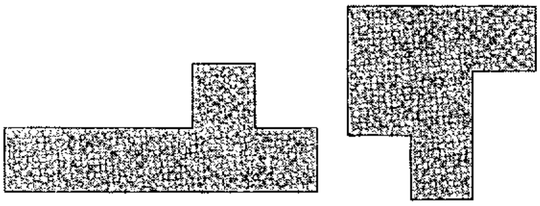
احمد خان جواب داد: «نمی‌دانم. سؤال بسیار دقیقی است، گرچه ممکن است خارج از موضوع باشد؛ زیرا در سال ۱۹۸۹ **سولومون گولوم** "Solomon Golomb" ثابت کرد هر مضرب ۴ ی می‌تواند یک مرتبه باشد.»

حمید آقا گفت: «در مورد کاشیکاری حمّام خانهٔ ما چی؟»

احمد خان پاسخ داد: «**کاشی‌های شما هفت مربعی‌اند**؛ در حالی که من هنوز مورد **شش مربعی‌ها** را تمام نکرده‌ام. بسیار خوب، در این مورد دقیقاً ۳۵ شش مربعی موجود است، و مشخص شده که درست ۱۰ مورد از آنها یک مستطیل تشکیل می‌دهد. در این جا چند سرنخ به دست می‌دهم و خودت می‌توانی سعی کنی آنها را بیابی. دو موردشان از مرتبهٔ ۱ هستند، پنج مورد از مرتبهٔ ۲، و یکی هم از مرتبهٔ ۴.»

احمد خان به سرعت کاغذ و مدادی برداشت و طرحی برای حمید آقا کشید.

ـ این یک چند مربعی (شکل ۱۲ الف) از مرتبهٔ ۱۸ است. ممکن است دوست داشته باشی ۱۸ کپی از آن تهیه کنی و آنها را برای تشکیل یک مستطیل ۹×۱۲، پهلوی هم بگذاری. تا این اواخر، یک حالت، یعنی Y ـ شش مربعی، وجود داشت که در آن پاسخ مسأله نامشخص بود (شکل ۱۲ ب)؛ اما در سال ۱۹۸۹ **کارل دالکه** "Karl Dahlke" اثبات کرد که Y ـ شش مربعی دارای مرتبهٔ ۹۲ است. قبلاً گفتم که دربارهٔ این موضوع بیشتر صحبت می‌کنم و می‌بینی که به قولم عمل کردم.



شکل (۱۲): الف. یک شش مربعی از مرتبهٔ ۱۸ ب. Y ـ شش مربعی، که مرتبه‌اش تا سال ۱۹۸۹ معلوم نبود.

مسأله (۴): آیا می‌توانید هشت شش مربعی از مرتبهٔ ۴ یا کمتر را پیدا کنید؟ آیا می‌توانید با استفاده از چند مربعیِ شکلِ ۱۲ الف، یک مستطیل بسازید؟ در صورت تمایل، می‌توانید سعی در یافتن این موضوع داشته باشید که چگونه می‌شود ۹۲ Y ـ شش مربعی را برای ساختن یک مستطیل ۲۴×۲۳ پهلوی هم قرار داد؛ امّا بدانید که دالکه این کار را با استفاده از زبان برنامه‌نویسی C و سه روز کار بر یک ریزکامپیوتر انجام داده است.

ـ بله احمد خان. تو این را هم قول دادی که مطالبی هم در مورد کاشیکاری حمّام مریم خانم بگویی.

ـ البته. این موضوع تا اندازه‌ای مسحورکننده است. توجه داشته باش، باز هم تا این اواخر، تنها یک هفت مربعی با مرتبه‌ای بیشتر از ۲ شناخته شده بود. بقیه، با یک استثنا، یا مستطیل ۱×۷ بودند، یا با استفاده از ساختارهایی که قبلاً برای مرتبهٔ ۲ داده‌ام، معلوم شده بودند و یا مشخص شده بود که مرتبه ندارند. تنها هفت مربعیِ مرتبه بالا توسط **جیمز استیوارت** "James Stuart"، از Endwell, New York کشف

شده بود این هفت مربعی دارای مرتبهٔ ۲۸ است (شکل ۹ را ملاحظه کنید).

ـ اوه! و هفت مربعی کاشی حمّام ما چی؟

ـ البته که نه! نه، اتفاقاً کاشی شما تنها موردی است که وضعیتش ....

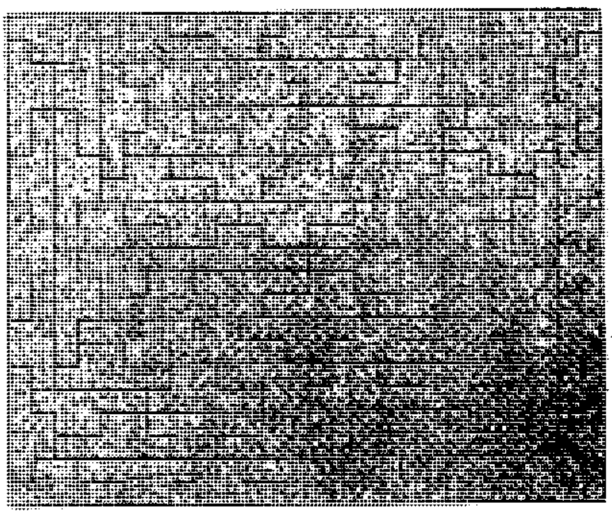
حمید آقا با شنیدن این حرف، کلمهٔ زشتی به زبان آورد.

احمد خان جمله‌اش را تمام کرد: «... تا این اواخر مشخص نشده بود، و در این مورد باز هم کارل دالکه به دادت رسیده است! وی در سال ۱۹۸۹ برنامهٔ Y ـ شش مربعی خود را بار دیگر اصلاح کرد و به اثبات رساند، که کاشی هفت مربعی شما دقیقاً دارای مرتبهٔ ۷۸ است.» (شکل ۱۳). (به خوانندهٔ هشیار مطلبی نسبتاً غریب را دربارهٔ مقالهٔ دالکه خاطرنشان می‌کنیم: عنوان مقاله بر این است که ترتیب مورد بحث ۷۶ است؛ اما تصویری که به عنوان اثبات به دست داده، از ۷۸ هفت مربعی استفاده کرده است.)

حمید آقا از دوستش تشکّر فراوان کرد و با عجله به خانه رفت تا ماجرا را برای مریم خانم شرح دهد، و در راه می‌اندیشید که **به شدت تحت تأثیر قرار خواهد گرفت!** هنگامی که وارد خانه شد، زنش را مشغول پختن غذا دید.

ـ مریم بانو، من مسألهٔ کاشی‌ها را شکست دادم!

مریم بانو پاسخ داد: «با این شرط که خود **کاشی‌ها** را شکست ندهی.»



شکل (۱۳): پاسخ مسألهٔ حمید آقا برای کاشیکاری حمامش. با مستطیلی تشکیل شده از ۷۸ هفت مربعی.

ـ شوخی نمی‌کنم! در این مورد تمام کاری که باید انجام بدهی، برداشتن ۷۸ کاشی و تشکیل یک مستطیل از آنهاست!

ـ حمید، بعضی وقت‌ها تو خیلی باهوش می‌شی. خبر خوبی آوردی! همین حالا شروع به کار می‌کنیم. تو ۷۸ کاشی بشمار و من دیوارها را تمیز می‌کنم.

این را گفت و با حالتی شکوهمندانه از آشپزخانه خارج شد و به طرف حمّام رفت. حمید آقا هم به دنبالش راه افتاد.

مریم خانم با دقت به تراشیدن دیوارها پرداخت و حمید آقا جعبهٔ کاشی‌ها را بلند کرد، و پیش خودش فکر کرد: «**شاید برچسب جعبه تعداد کاشی‌ها را مشخص کند، در این صورت معلوم می‌شود چند کاشی را باید بیرون بیاورم.**» و جعبه را گرداند. نوشته بود:



حمید آقا کلمهٔ زشت دیگری به زبان آورد؛ اما به قدری آهسته که مریم خانم نشنود. با حالتی عصبی به طرف همسرش برگشت و گفت: «بانو جان، فکر می‌کنم باز هم با مشکل کوچکی مواجه شده‌ایم ....»

پاسخها

۱. شاید ساده‌ترین مثال از یک چند مربعی که نمی‌تواند یک مستطیل را بپوشاند، هفت مربعی تشکیل شده از یک مربع ۳×۳ با یک سوراخ باشد. پر کردن سوراخ همان چیزی است که باعث مشکل می‌شود.

۲. یک مربعی و دو مربعی مستطیل‌اند و در نتیجه مرتبهٔ ۱ دارند. به همین ترتیب‌اند I ـ سه مربعی، I ـ چهار مربعی، O ـ چهار مربعی و I ـ پنج مربعی. L ـ سه مربعی، L ـ چهار مربعی، L ـ پنج مربعی و P ـ پنج مربعی دارای مرتبه ۲ اند. T ـ چهار مربعی مرتبهٔ ۴ دارد و Y ـ پنج مربعی مرتبهٔ ۱۰. (این حالت، تنها حالتی است که باید مدتی به آن وَر بروید؛ در مورد آن، از یک مستطیل ۱۰×۵ استفاده کنید.)

بقیهٔ حالتها ـ S ـ چهار مربعی و T ـ، F ـ، N ـ، X ـ، U ـ، V ـ، W ـ و Z ـ پنج مربعی ـ تشکیل مستطیل نمی‌دهند. اثبات در هر حالت، به سادگی با بررسی وضعیت رخ‌دهنده در گوشهٔ مستطیل متعارفی که تشکیل می‌دهند، به دست می‌آید: قرار دادن تکّه‌های دیگر اجباری است و از هر مورد قرار گیرند، در گوشهٔ مجاور جلوگیری می‌کند.

جدول زیر نتایج فوق را خلاصه کرده است.

۳. اثبات احمد خان به زودی منتشر می‌شود؛ فهرست خواندنی‌های بیشترِ واقع در پایان این فصل را ملاحظه کنید.

۴. ده شش مربعی با مرتبهٔ متناهی را در شکل (۱۴) نشان داده‌ایم. مورد آخری راه‌حلّ دالکه برای Y ـ شش مربعی است.

جدول مرتبه‌های n ـ چند مربعی‌ها به ازای n≤5

	اندازهٔ مربعی	مرتبه
یک مربعی		۱
دو مربعی		۱
سه مربعی	I	۱
	L	۲
چهار مربعی	I, O	۱
	L	۲
	T	۴
	S	❊
پنج مربعی	I	۱
	L, P	۲
	Y	۱۰
	F,N,T,U,V,W,X,Z	❊

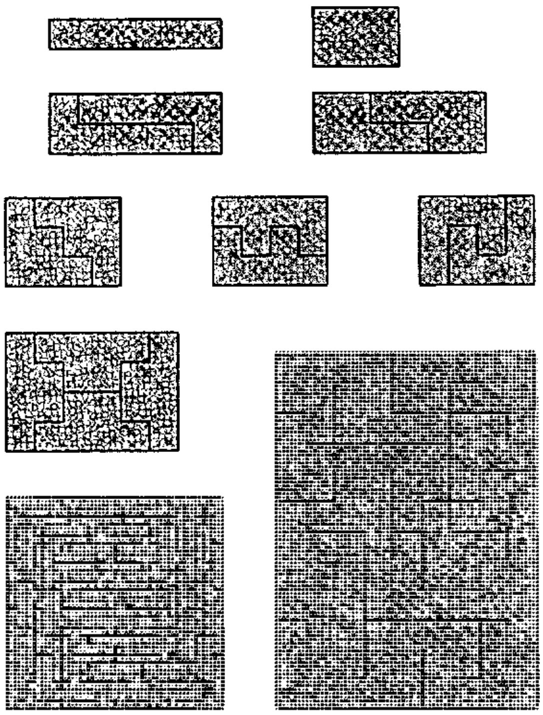
❊مشخص این است که مرتبهٔ مربوطه تعریف نشده است.

خواندنی‌های بیشتر

Dahlke, Karl A. The Y-hexomino has order 92. *Journal of Combinatorial Theory* Series A 51 (1989): 125-26.

—. A heptomino of order 76. *Journal of Combinatorial Theory* Series A 51 (1989): 127-28.

Gardner, Martin. *Mathematical Magic Show*. New York: Alfred A.



شکل (۱۴): شش مربعی‌های از مرتبهٔ متناهی

Knopf, 1977; Harmondsworth, England: Penguin Books, 1985.

Golomb, Solomon W. *Polyominoes*. New York: Scribner, 1965.

—. Tiling with polyominoes. *Journal of Combinatorial Theory* 1 (1966): 280-96.

—. Polyominoes which tile rectangles. *Journal of Combinatorial Theory* Series A 51 (1989): 117-24.

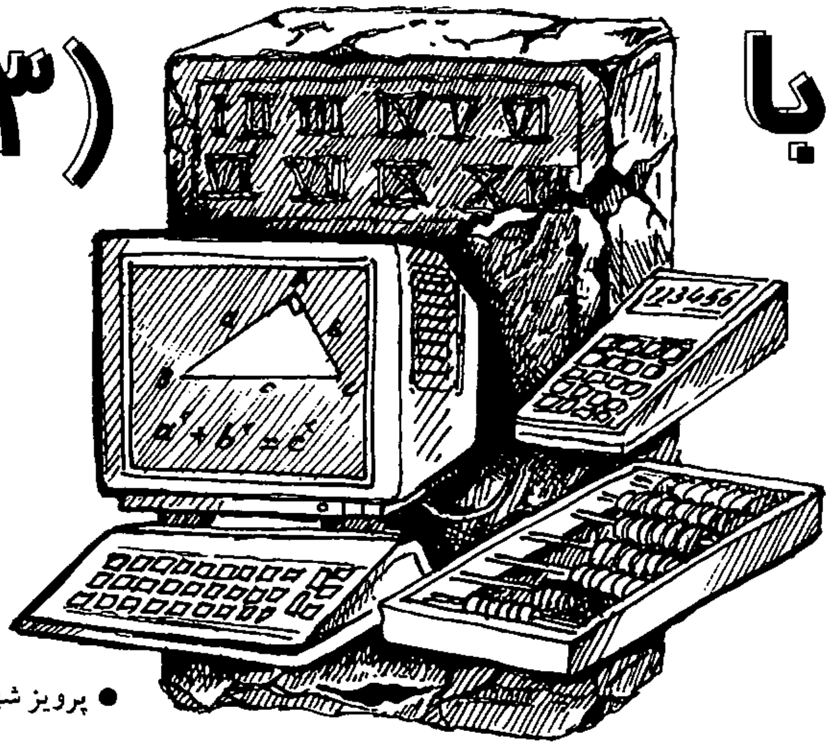
Grünbaum, Branko, and G.C. Shephard. *Tilings and patterns*. New York: W. H. Freeman, 1987.

Klarner, David A. Packing a rectangle with congruent *n*-ominoes. *Journal of Combinatorial Theory* 7 (1969): 107-15.

Stewart, Ian, and Albert Wormstein. Polyominoes of order 3 do not exist. *Journal of Combinatorial Theory* Series A. Forthcoming.

Wells, David. *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Harmondsworth, England: Penguin Books, 1986; New York: Viking Penguin, 1986.

درسهای ریاضیات همراه با (۳)



● پرویز شهریاری

نامگذاری برای عددها، با پیدایش اقتصاد کشاورزی به وجود آمد. در این زمان بود که صاحبان کشتزارها و جانوران خانگی که سخت به آنها وابسته بودند، نه تنها لازم بود حساب اموال خود را داشته باشند؛ بلکه در ضمن بتوانند تعداد آنها را به خاطر آورند و این امر، انگیزه‌ای برای نامگذاری عددها شد. در آغاز این یاد آوردن چیزها، از روی نشانه‌های بیرونی آنها بود. کسی که گلّه‌ای گاو داشت، به این ترتیب به یاد می‌آورد که یکی سفید است، دیگری سیاه است و .... روشن است که وقتی تعداد جانوران زیاد می‌شد، این وسیله برای به یادآوردن همهٔ آنها، دشوار و حتی غیرممکن بود.

مرحلهٔ بعدی در تکامل نامگذاری عدد، مقایسهٔ تعداد چیزها با برخی اندام انسان یا حیوان بود. به جای این که بگویند دو چیز، از عبارت «من به اندازهٔ دست‌های خود دارم» یا «من آن قدر دارم که دست دارم» و برای نامگذاری چهار، می‌گفتند «من آن قدر دارم که حیوان پا دارد» و به این ترتیب، تعداد اندام‌های انسان یا حیوان برای شمردن به کمک می‌آمد.

بعدها این توضیح شفاهی، در بین بسیاری از قوم‌ها، جای نام عددها را گرفت. برای نمونه وقتی عدد دو موردنظرشان بود، می‌گفتند: «گوش‌ها»، «دست‌ها»، «بال‌های پرنده» و به جای چهار «پاهای جانور». آثار این نامگذاری هنوز در بسیاری زبان‌ها وجود دارد، کما این که در زبان فارسی نام عدد پنج از واژهٔ «پنجه» آمده است که به معنای پنج انگشت دست است.

به طور کلی در تکامل بعدی نامگذاری عددها، در رابطه با

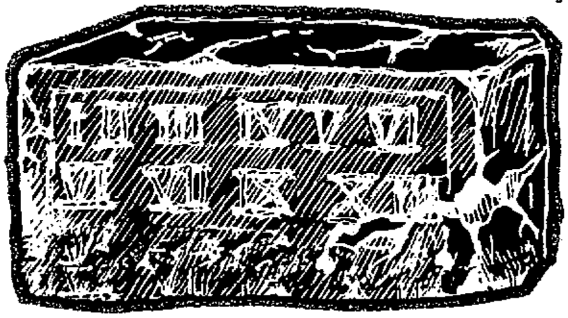
شمارش به وسیلهٔ انگشتان پدید آمد. ساکنان جزیرهٔ «میرالوک» (بین استرالیا و گینه نو) به عدد «پنج» می‌گویند «نابی تت» که «تت» به معنای «دست» است. در «گروئنلند» و «استرالیا» وقتی می‌خواهند عدد «شش» را بیان کنند، چیزی می‌گویند که معادل است با «یک انگشت از دست دیگر»؛ «ده» را با جملهٔ «دو دست» بیان می‌کنند؛ «یازده» با «جایی که دو دست و یک انگشت» است؛ «بیست» با «آدم» بیان می‌کنند، زیرا آدم ۲۰ انگشت دارد. بومیان رودخانهٔ «اُری نُوکُو» (از قبیله تاماناکی) برای بیان «بیست و یک» جملهٔ «یکی از دست و دیگری آدم» به کار می‌برند. برای عددهای بعدی باید با روش شمارش آنها آشنا باشیم: در کنار کسی که چیزی را می‌شمارد، چند نفر ایستاده‌اند؛ اوّلی با انگشتان دست و پا می‌شمارد تا به ۲۰ برسد، سپس نفر دوم کار را ادامه می‌دهد. در بین اسکیموهای امریکای شمالی، «آدم» به معنای ۲۰ و «پنج آدم» به معنای ۱۰۰ است.

از آنچه گفته شد، می‌بینیم چگونه انسان به تدریج توانست به شمار دست یابد و چگونه مجموعهٔ عددهای درست را تصور می‌کرده است. این عددها، که امروز به نام عددهای طبیعی می‌شناسیم، برای بیان مجموعه‌ای از چیزها مورد استفاده قرار می‌گرفت. از همین استفادهٔ از انگشتان بود که دستگاه عددشماری پدید آمد.

حتی در بین ملت‌هایی که زبان آنها به خوبی تکامل یافته بود، برای عددهای جداگانه نامی نداشتند؛ زیرا دنبالهٔ عددها بی‌نهایت است. به طور معمول، اساس شمار بر پایهٔ چند نامگذاری بود که از آنها برای بیان عددهای بزرگتر استفاده می‌کردند. برای خرده فرهنگ‌ها این امر لازم بود: عقب‌ماندگی تکامل زبان از تکامل شمار، این امر را ایجاب می‌کرد که برای بیان عددهای بزرگ، از همان نامگذاری‌های موجود استفاده کنند و این، گاهی به دشواری برمی‌خورد. از جمله «یان‌کوس‌ها» در کنار رود «آمازون» بیشتر از «سه» را نمی‌توانستند بشمارند؛ زیرا کلام ساده‌ای برای عدد «سه» در زبان آنها نبود و برای عدد «سه» از واژهٔ «پوئه تارا رو ری‌کوآ روآک» استفاده می‌کردند. البته، این نامگذاری، پیش از استفادهٔ از انگشتان بود.

حساب انگشتی به تدریج منجر به منظّم‌کردن عددها شد و انسان به خودی خود به سمت تنظیم عددها رفت: جملهٔ طولانی «ده انگشت در هر دو دست و یک انگشت از یک پا» که برای عدد ۱۱ به کار می‌رفت، به صورت «انگشتی از پا» خلاصه شد. برای عدد ۲۳، به جای «ده انگشت در هر دو دست، ده انگشت در هر دو پا، و سه انگشت در دست یک نفر دیگر» به سادگی گفته شد «سه انگشت نفر دیگر».

این ساده کردن در حالت پیش رفتهٔ خود، منجر به جدا کردن واحد مرتبهٔ بالاتر شد. در واقع، نامگذاری‌هایی مثل «دست» برای «پنج»، «دو دست» برای نامیدن «ده»، «پا» برای «پانزده»، «آدم» برای نامگذاری «بیست» و ...، کار مرتبه‌های بالاتر را نسبت به «انگشت» انجام می‌دادند و «انگشت» نقش واحد مرتبهٔ پایین را انجام می‌داد. به این مفهوم، جملهٔ «یکی در دست دیگری» به معنای «شش» بود. می‌توان متوجه شد که چگونه مبنای «پنج» شکل می‌گیرد: «یکی از پنج تای دوم» یا «پنج و یک» که در آن «یک» واحد مرتبهٔ پایین و «پنج» یعنی «دست» واحد مرتبهٔ بالاتر می‌شود. درست به همین ترتیب، نامگذاری «دو تا از پا» به معنای «دوازده»، به معنای این است که دو واحد از دهه دوم گرفته‌ایم؛ همین جمله را می‌توان این طور گفت «دو دست و ده انگشت» که در آن «دو دست» نقش واحد مرتبهٔ بالاتر را، نسبت به انگشت به عهده دارد. و به این ترتیب، به تدریج دستگاه عدد شماری مخصوص به خودی پدید آمد.



کهن‌ترین دستگاه عدد شماری، دو دویی (دستگاه به مبنای ۲) بود. این دستگاه وقتی به وجود آمد که هنوز برای شمردن از انگشتان استفاده نمی‌شد: یک دست را واحد مرتبهٔ پایین و دو دست را با هم واحد مرتبهٔ بالاتر به حساب می‌آوردند. آثار این دستگاه عدد شماری را در زمان ما هم،

حتی بین ملت‌هایی که تا اندازهٔ زیادی پیش‌رفته‌اند، مشاهده می‌کنیم. در واحدهایی که برای وزن پیش از قبول دستگاه متری در ایران وجود داشت، از نصف کردن هر وزن، وزن دیگری به دست می‌آوردند: یک من (نزدیک به ۳ کیلوگرم)، نیم من ($\frac{1}{2}$ من)، چارک (همان چهار یک = $\frac{1}{4}$ من)، سی سنگ (نصف چارک)، هفدرم (یا هفت درم = $\frac{1}{2}$ سی سنگ) و ... که یادآور دستگاه دو دویی است. بعضی از بومیان استرالیا و پولی‌نزی، تا همین چند دهه پیش، از دستگاه دو دویی عددشماری استفاده می‌کردند.

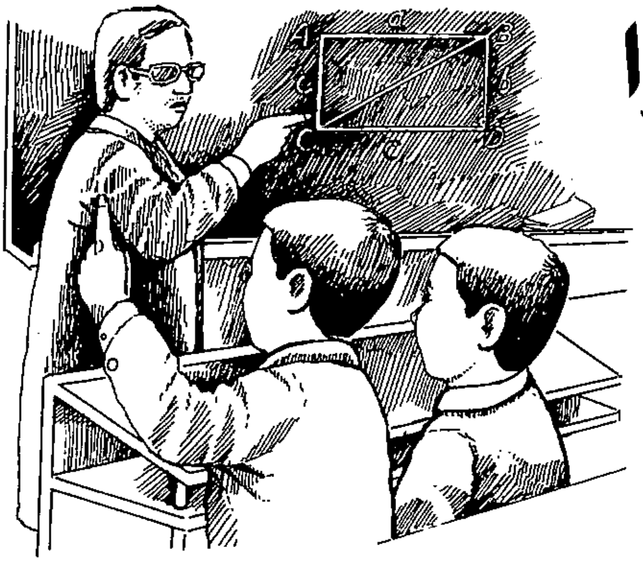
از جمله، در بین برخی قبیله‌های جزیره‌های تنگهٔ «کوره شو» تنها عددهای یک «اوراپون» و دو «اوکوزا» را می‌شناسند. براساس این دو عدد، جریان عدد شماری ادامه می‌یابد: عدد سه را «اُوکوزا اوراپون»، چهار را «اوکوزا اوکوزا»، پنج را «اوکوزا اوکوزا اوراپون»، شش را «اوکوزا اوکوزا اوکوزا» و ... می‌نامند.

قدیمی‌ترین دستگاهی که براساس شمردن با انگشتان دست پدید آمد، دستگاه به مبنای پنج بود. این دستگاه، بیش از همه در بین سرخپوستان امریکا معمول بوده است و زمانی به وجود آمده است که انسان تنها با انگشتان یک دست خود می‌شمرد. روشن است که در این حالت، برای عدد پنج، وقتی انگشتان یک دست تمام می‌شد، نشانه‌ای داشتند. دستگاه به مبنای پنج تا این اواخر هم در بعضی قبیله‌ها حفظ شده بود (از جمله، بین مردم ساکن پولینزی و ملانزی).

تکامل بعدی دستگاه شمار، دو مسیر را در پیش گرفت. قوم‌هایی که تنها یک دست را برای شمردن انتخاب نکردند و از دست دوم و حتی انگشتان پا هم برای شمردن استفاده کردند. در ضمن، قوم‌هایی که شمردن را با انگشتان دو دست انجام می‌دادند، پایه‌ای برای دستگاه در مبنای ده به وجود آمد و قوم‌های دیگری، که احتمالاً زیادتر بودند و به انگشتان دو دست بسنده نکردند و این، پایه‌ای برای مبنای ۲۰ شد. از مبنای ۲۰ بیشتر، بومیان امریکای شمالی و ساکنان امریکای جنوبی و مرکزی، و همچنین ساکنان شمال سیبری و افریقا معمول بوده است. هنوز هم آثار مبنای ۲۰ در زبان‌های رایج دنیا دیده می‌شود؛ از جمله در زبان فرانسوی بین عدد «دو» (که به فرانسوی هم «دو» می‌گویند) با «بیست» (به فرانسوی «وَن») هیچ ارتباطی ندارد، در حالی که میان «سه» با «سی» یا «چهار» با «چهل» نزدیکی وجود دارد. بجز آن، فرانسوی‌ها امروز هم به «هشتاد» می‌گویند «چهار بیست تا» و به «نود» «چهار بیست تا و ده تا». در زبان فارسی عدد «دو» با عدد «بیست» هیچ نزدیکی ندارد؛ در حالی که «سه» با «سی»، «چهار» با «چهل» و ... به هم نزدیکند.

در زمان ما دستگاه عدد شماری به مبنای ۱۰ را، کم و بیش، در همه جا پذیرفته‌اند؛ ولی این به معنای آن نیست که حتی اروپایی‌ها، همیشه از این دستگاه استفاده می‌کرده‌اند. خیلی از ملت‌ها، تا همین اواخر از دستگاه دیگری استفاده می‌کردند و خیلی وقت نیست که دستگاه به مبنای ۱۰ را به کار می‌برند.

در عدد شماری به مبنای ۲۰، به عدد ۲۰، «آدم» می‌گفتند؛ زیرا «آدم» دارای ۲۰ انگشت است. در این دستگاه، عدد ۴۰ با «دو بیست تا»، عدد ۶۰ با «سه بیست تا» و ... بیان می‌شده است. عدد شماری به مبنای بیست، نقص بزرگی داشت، زیرا برای بیان عددها، به ۲۰ واژهٔ جداگانه نیاز بود. به همین مناسبت، وقتی که در بین بعضی قوم‌ها، عدد شماری در مبنای ۱۰ رایج شد، دیگران هم به تدریج آن را به جای عدد شماری «بیست بیستی» خود انتخاب کردند. کفش‌ها هم، که به تدریج بسیاری از قوم‌ها از آن استفاده می‌کردند و موجب پوشیده شدن انگشتان پا بود، به استفاده از مبنای ده، به جای مبنای بیست کمک کرد. امروز تقریباً اثری از مبنای بیست، جز بعضی نشانه‌ها در زبان باقی نمانده است.



ریاضی را چگونه یاد بگیریم؟

● احمد قندهاری

نوشتهٔ زیر ترجمه What shoud you do to learn **از کتاب** Calculus for engineers and scientists (1998) **نوشته:** Giardano, Weir, Finney **است.**

۱. نخست باید متن درس را مطالعه کنید. به خاطر داشته باشید که تقریباً هیچ‌کس نمی‌تواند همهٔ معانی و روابط یک مبحث را یکباره یاد بگیرد. این کار با کوشش و تمرین میسّر است.

لازم است بخشهای مربوط به یک مبحث را از کتاب بخوانید و مطالب را از طریق مثال‌ها، گام به گام دنبال کنید. سریع خواندن مطالب ریاضی بی‌فایده است. مطالعه و جست‌وجوی شما برای رسیدن به اجزایی است که با روش منطقی گام به گام انجام می‌شود. این نوع مطالعه که لازمهٔ هر متن با محتوای عمیق و فنی است، نیاز به توجه، پشتکار و تمرین دارد.

۲. تمرین‌ها را انجام دهید و اصول زیر را به خاطر بسپارید.

الف) در صورت امکان، برای مسأله، شکل‌ها را رسم کنید.

ب) راه‌حل‌هایتان را با یک روش منطقی گام به گام و مرتبط، به گونه‌ای که گویی می‌خواهید آنها را برای شخص دیگری توضیح دهید، بنویسید.

پ) در مورد علت طرح هر تمرین فکر کنید. چرا آنها را طرح کرده‌اند و رابطهٔ آنها با سایر تمرین‌های تعیین شده چیست؟

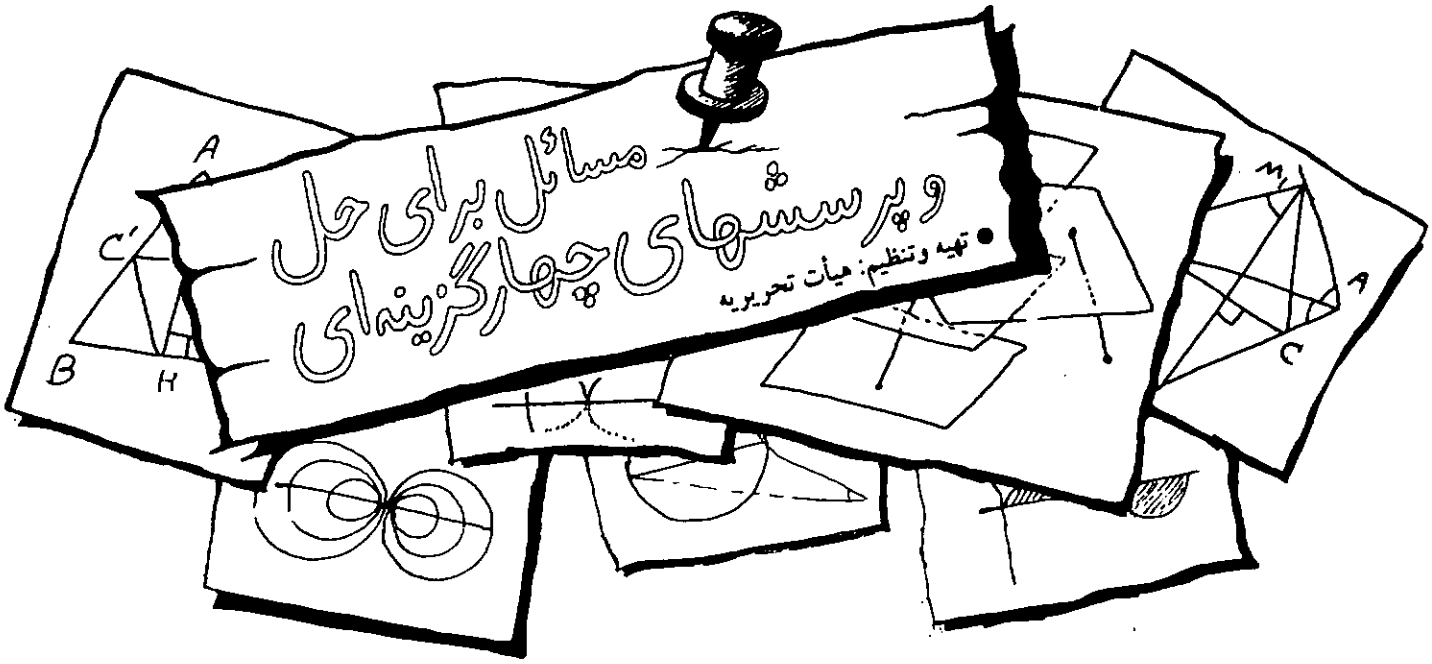
۳. تا آن جا که ممکن است، از ماشین حساب و رایانه استفاده کنید. از سیستم‌های جبری رایانه‌ای (G.A.S) استفاده کنید و نمودارها را تا آن جا که می‌توانید، تمرین کنید؛ حتی اگر به عنوان تمرین درسی، تعیین نشده باشند.

نمودارها از مفاهیم و روابط مهم ریاضی، نمایش دیداری ایجاد و بینش دیداری را تقویت می‌کنند و اعداد مقیاس‌های مهمی را نشان می‌دهند. یک سیستم جبری رایانه‌ای (G.A.S) در کشف مسائل واقعی به شما کمک می‌کند و مثال‌هایی که نیاز به محاسبه دارند و انجام آن‌ها با دست، مشکل و وقت‌گیر است، راحت می‌کند.

سعی کنید توضیحات را به طور خلاصه یادداشت کنید؛ اگر موفّق شدید، احتمالاً موضوع را فهمیده‌اید و اگر موفّق نشدید، تشخیص دهید کجای مطلب برایتان مشکل بوده و نفهمیده باقی مانده است.

یادگیری ریاضی، یک فرایند است، یکباره دست نمی‌دهد. صبور باشید و پشتکار داشته باشید. سؤال‌های خود را با همکلاسیها در میان بگذارید و با آنها کار کنید و تا جایی که لازم است، کمک بگیرید.

یادگیری ریاضی، چه از نظر ذهنی و فکری، و چه از نظر حرفه‌ای، ارضاکننده خواهد بود.



ریاضی سال اوّل

۱. اگر $M(۴p-۱ , ۳)$ و $N(۲ , ۴p)$ ، به ازای چه مقادیری از P ، طول پاره خط $MN=۲\sqrt{۲}$ است؟

۲. اگر دو خط به معادله‌های $y = nx + ۲$ و $y = mx - ۲$ در نقطه‌ای به طول ۱− بر هم عمود باشند، مقدار $(m + n)$ کدام است؟

۳. دستگاه معادله‌های خطی $\begin{cases} ۴x + by = ۱۲ \\ bx + ۴y = ۱۰ \end{cases}$ به ازای چه مقادیری از b جواب ندارد؟

۴. اگر $x = ۳ - \sqrt{۱۰}$ ، حاصل عبارت:

$$P = \sqrt{(x-۱)^۲} - \sqrt{x^۲} + x^۲ + ۶\sqrt{۱۰}$$

را بیابید؟

۵. اگر $x^۲ = x - ۱$ ، حاصل $x^{۲۸}$ را بیابید؟

۶. حاصل عبارت $\sqrt{۱ + ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}$ ، چیست؟

۷. معادلهٔ $\frac{x}{۲} = \frac{۴x}{۸x+۸} + \frac{۲x}{۴x-۴}$، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

۸. عبارت $\sqrt{x-۱} + \frac{\sqrt{x}}{x^۲-۱}$ به ازای چه مقادیری از x ، عدد حقیقی است؟

۹. اگر $\sqrt[۳]{x} = \sqrt[۴]{۲\sqrt[۳]{۴}}$ ، حاصل $\sqrt[۵]{x^۳}$ را بیابید؟

۱۰. اگر $x + \frac{۱}{x} = ۱$ ، حاصل $A = \frac{x_۱^۳ + x_۲^۳}{x_۱^۲ + x_۲^۲}$ را بیابید؟ ($x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله می‌باشند.)

ریاضی سال دوم

۱. حاصل عبارت $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)$ را پیدا کنید؟

۲. مقدار عددی $\frac{\sqrt{۳}}{\cos ۱۰} - \frac{۱}{\sin ۱۰}$ را پیدا کنید؟

۳. زاویهٔ بین بردارهای $\vec{a} = \alpha i - \beta j$ و $\vec{b} = \beta i + \alpha j$ چند درجه است؟

۴. نقاط $A(۲,۳)$ ، $B(-۲,-۴)$ و $C(۰,-۲)$ مفروضند. حاصل $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{AC}$ را بیابید؟

۵. از بین ۶ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۵ دانش‌آموز کلاس سوم، می‌خواهیم انجمنی را با ۴ دانش‌آموز کلاس چهارم و ۳ دانش‌آموز کلاس سوم تشکیل دهیم. این عمل به چند طریق ممکن است؟

۶. اگر $\binom{n}{۱}$ ، $\binom{n}{۲}$ و $\binom{n}{۳}$ جمله‌های متوالی یک تصاعد حسابی باشند، مقدار n را بیابید؟

۷. در پرتاب دو تاس با هم، احتمال آن را بیابید که قدر مطلق تفاضل اعداد روی دو تاس مساوی یک باشد؟

۸. شخصی یک تاس را می‌اندازد و اگر عدد رو شده، مضرب ۳ باشد، یک سکه را سه بار پرتاب می‌کند و در غیر این صورت، سکه را دو بار پرتاب می‌کند. احتمال آن که ضمن این اعمال، سکهٔ این شخص حدّاقل دوبار رو بیاید، چقدر است؟

۹. یک عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ را انتخاب می‌کنیم، احتمال آن را بیابید که عدد انتخاب شده مضرب ۲ یا ۳ یا ۵ باشد؟

۱۰. جملهٔ چهارم یک تصاعد حسابی برابر ۵ است. اگر قدر نسبت این تصاعد، عددی صحیح باشد، جملهٔ هفتم آن چیست؟

۱۱. در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جملهٔ اوّل، ۳/۵ برابر جمله دوم است. جملهٔ چهارم این تصاعد کدام است؛ اگر جملهٔ اوّل مساوی ۳ باشد؟

حسابان ۲

۱. مجموع عرضهای اکسترمم نسبی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + (m-۱)x - ۴$ برابر ۱۲− است، m کدام است؟

۱) ۰   ۲) ۱

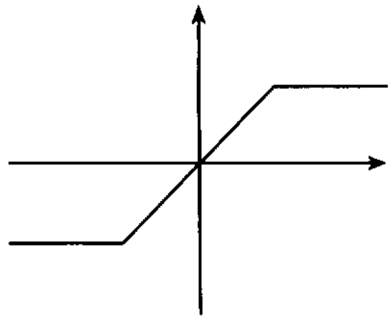
۳) ۱−   ۴) ۳

۲. نمودار تابع درجه سوّم به معادلهٔ $f(x) = (x-۱)(x^۲ - ۲mx + ۸)$ بر محور xها مماس است، m کدام است؟

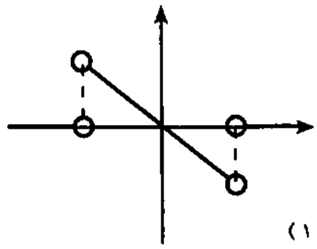
۱) $\{\pm\sqrt{۲}\}$ ۲) $\{۰ , \pm\sqrt{۲}\}$

۳) $\{\pm ۲\sqrt{۲}\}$ ۴) $\{\frac{۹}{۲} , \pm ۲\sqrt{۲}\}$

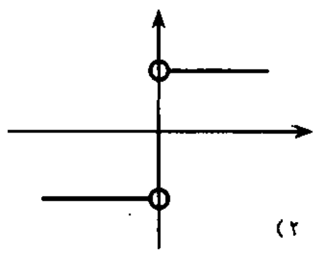
۳. اگر نمودار تابع f به صورت شکل زیر باشد،



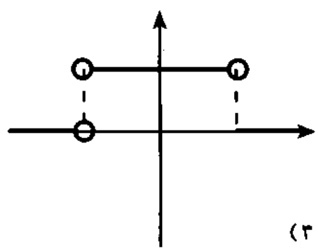
آن گاه نمودار f' کدام است؟



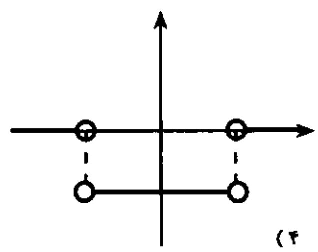
۱)



۲)



۳)



۴)

۴. تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sin 4x - \cos 4x}{\sin 4x + \cos 4x}$ برابر است با:

۱) $\frac{3\pi}{2}$ ۲) π

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{4}$

۵. حاصل $\text{Arctan}(1+\frac{3}{x^2+1}) + \text{Arctan}\frac{x^2+1}{x^2+4}$ برابر است با:

۱) ۰ ۱) $\frac{\pi}{4}$

۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{3\pi}{2}$

فرمول $\frac{\pi}{2} = \text{Arctan}\, a + \text{Arctan}\frac{1}{a} \quad a > 0$

۶. نزدیکترین فاصلهٔ مبدأ مختصات از نمودار تابع با ضابطهٔ $y^2 = 4x + 5$ برابر است با:

۱) ۱ ۲) $\sqrt{2}$

۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۲

۷. حاصلضرب دو عدد مثبت ۲۴۳ است، می‌نیمم، حاصل جمع عدد اوّل با ۳ برابر عدد دوّم می‌نیمم باشد، عدد کوچکتر کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸

۳) ۹ ۴) ۱۲

۸. مقدار $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+4}\right)^{3x}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{e}$ ۲) e

۳) $e\sqrt{e}$ ۴) e^2

۹. اگر $\text{Log}2 = 0/301$ باشد، $\text{Log}250$ کدام است؟

۱) ۲/۳۹۸ ۲) ۲/۳۹۹

۳) ۲/۴۰۰ ۴) ۲/۴۰۱

۱۰. مشتق تابع با ضابطهٔ $y = x^{2x}$ ، $x>0$ کدام است؟

۱) $x^{2x}(\text{Ln}x + 1)$ ۲) $2x^{2x}(\text{Ln}x + 1)$

۳) $4x^{2x}(\text{Ln}x + 1)$ ۴) $x^{2x}(\text{Ln}x - 1)$

۱۱. حاصل $\int^{1} \frac{1}{9+9x^2}dx$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{9}$ ۲) $\frac{\pi}{18}$

۳) $\frac{\pi}{32}$ ۴) $\frac{\pi}{36}$

۱۲. اندازهٔ مساحت سطح محصور بین منحنی به معادلهٔ $y = \sin x$ و محور xها در یک دورهٔ تناوب کدام است؟

۱) ۲ ۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۴ ۴) ۶

هندسهٔ ۲

۱. شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، کدام شکل است؟

۱) چهارضلعی محاطی

۲) چهارضلعی محیطی

۳) چهارضلعی محاطی محیطی

۴) یک نقطه

۲. در مثلث PAK ، نقطهٔ M روی ضلع PK قرار دارد. اگر $PM = AK$ ، آن گاه:

۱) $AP > MK$ ۲) $Ap < MK$

۳) $AP = MK$ ۴) $AP = \frac{MK}{2}$

۳. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطهٔ ثابت A بر دایرهٔ C(O,R) مماسند، کدام شکل است؟

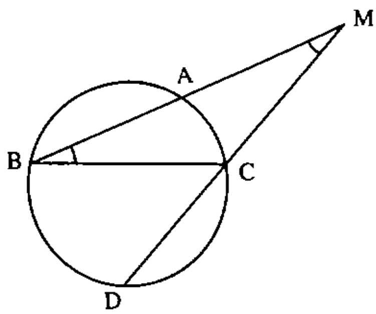
۱) خط مماس بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ A

۲) نیمخط OA (به مبدأ O)

۳) دایره‌ای مماس بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ A

۴) خط OA

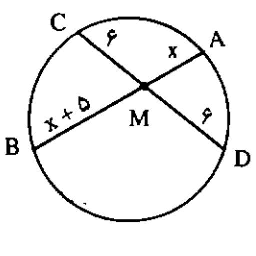
۴. در شکل، $\widehat{AC} = \alpha + 20°$ ، $\hat{M} = 3\alpha$ و $\widehat{BD} = 5\alpha + 40°$ است. اندازهٔ زاویهٔ ABC چند درجه است؟



۱) ۳۰ ۲) ۲۵

۳) ۲۰ ۴) ۱۵

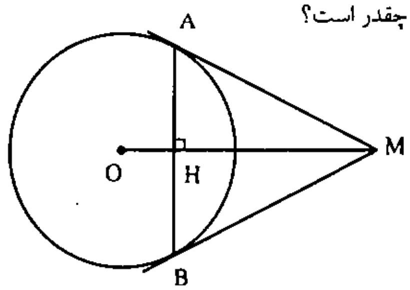
۵. در شکل داده شده، نسبت $\frac{CD}{AB}$ چند است؟



۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲}{۱۳}$

۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۲}$

۶. در شکل MA و MB مماسهای بر دایرهٔ $C(O, ۴)$ در نقطه‌های A ، B و H محل برخورد AB و MO است. اگر $OH = ۲$ باشد، اندازهٔ MA چقدر است؟



۱) $۴\sqrt{۳}$ ۲) $۳\sqrt{۳}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

۷.دو دایرهٔ (C) و (C') به ترتیب، به شعاعهای ۱۲ سانتیمتر و ۸ سانتیمتر داده شده‌اند. در صورتی که اندازهٔ خط‌المرکزین این دو دایره برابر ۲۴ سانتیمتر باشد، طول مماس مشترک درونی این دو دایره چند است؟

۱) $۴\sqrt{۳۵}$ ۲) $۲\sqrt{۳۵}$

۳) $۴\sqrt{۱۱}$ ۴) $۲\sqrt{۱۱}$

۸. نقطهٔ $A' = (-۱, ۰)$ تحت انتقال :

$T(x,y) = (x + ۲, y - ۴)$

به تبدیل یافتهٔ کدام نقطه است؟

۱) $A = (-۳, ۴)$ ۲) $A = (۰, ۲)$

۳) $A = (۳, ۴)$ ۴) $A = (-۱, ۲)$

۹.اگر نقطه‌های A' و B' به ترتیب، تبدیل یافته‌های دو نقطهٔ $A = (۳, ۴)$ و $B = (-۲, ۱)$ تحت تجانس $h(x, y) = (۲x, ۲y)$ باشند، شیب خط A' B' چه‌قدر است؟

۱) $-\frac{۳}{۵}$ ۲) $-\frac{۵}{۳}$

۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۰. معادلهٔ تصویر خط $D: x + ۲y - ۳ = ۰$ تحت تبدیل $T(x, y) = (x + ۲, ۲y - ۳)$ کدام است؟

۱) $x + y - ۴ = ۰$ ۲) $x + y - ۲ = ۰$

۳) $x + y - ۶ = ۰$ ۴) $-x + y - ۸ = ۰$

جبر و احتمال

۱. اگر ۴۰۰ نفر در یک سالن حضور داشته باشند، کدام گزینه نادرست است؟

۱) حدّاقل دو نفر دارای تاریخ تولد یکسان هستند (بدون در نظر گرفتن سال تولد).

۲) حدّاقل دو نفر در یک ماه به دنیا آمده‌اند.

۳) دست کم دو نفر در یک هفتهٔ معین از سال به دنیا آمده‌اند.

۴) حدّاقل ۵۷ نفر در روز شنبه به دنیا آمده‌اند.

۲.اگر $A \subset B$ کدام گزینه نادرست است؟

۱) $B' \cup C \subset A' \cup C$ ۲) $A \cap C = B \cap C$

۳) $B' \cap A' = A'$ ۴) $A \cap B' = \phi$

۳.مجموعهٔ A دارای ۶۳ زیر مجموعهٔ محض است، این مجموعه چند زیر مجموعهٔ ۵ عضوی دارد؟

۱) ۶۴ ۲) ۶

۳) ۱۶ ۴) ۵

۴.اگر $A = \{۲, ۴, ۶\}$ و $B = \{۱, ۳\}$ تعداد رابطه‌های $A \times (A \cap B)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۸ ۴) ۳

۵.کدام مجموعه، هر رابطه‌اش خاصیت تقارنی دارد؟

۱) $\{x, y\}$ ۲) $\{x\}$

۳) $\{x, \phi\}$ ۴) $\{\phi, \{\phi\}\}$

۶.باقیماندهٔ تقسیم $۲^{۵n+۳} - ۱$ بر ۳۱ برابر کدام عدد است؟

۱) ۳ ۲) ۸

۳) ۷ ۴) ۱۱

۷. دو عدد را تصادفی از بین اعداد $[۰, ۲]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که هر کدام بزرگتر از ۱ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۱۶}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۸. اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، $P(A) = \frac{۱}{۴}$ و $P(B) = \frac{۲}{۳}$، در این صورت $P(A \cap B')$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۱۲}$

۳) $\frac{۱۰}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۹. دو تاس را با هم می‌ریزیم. اگر دو عدد متمایز باشند، احتمال آن که مجموع آنها بزرگتر از ۹ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۴}{۱۵}$ ۲) $\frac{۳}{۱۵}$

۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۱}{۱۵}$

۱۰. کیسه‌ای حاوی ۴ مهرهٔ قرمز، ۳ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ آبی است. از این کیسه سه مهره تصادفی خارج می‌کنیم، احتمال آن که از رنگ قرمز بر نداشته باشیم، کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱.منحنی تابع حقیقی با ضابطهٔ $f(x) = \sin x - x$ دربازهٔ $[-۲\pi, ۲\pi]$ چند اکسترمم نسبی دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۰

۲. اگر ارتفاع یک موشک پرتاب شده از رابطهٔ $S = f(t) = -t^۳ + ۴۵t^۲ - ۲۴۳t + ۱$ متر در ثانیه مشخص شود، پس از چند ثانیه موشک به حدّاکثر ارتفاع خود می‌رسد؟

۱) ۳ ۲) ۹

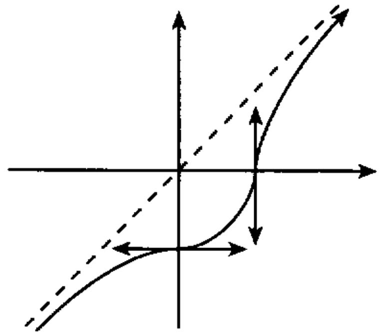
۳) ۲۷ ۴) ۵۴

۳. اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۲ & x = ۰ \\ ۱ & x \neq ۰ \end{cases}$ در بازهٔ $[-۱, ۱]$ مفروض باشد، چنانچه این بازه را به n زیر بازهٔ مساوی افراز کنیم، مجموع پایین ریمان تابع کدام است؟

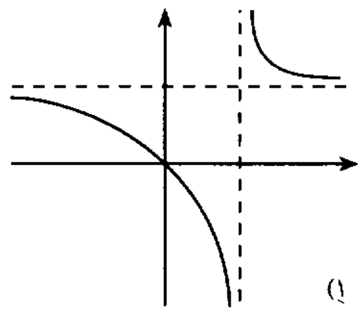
۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$

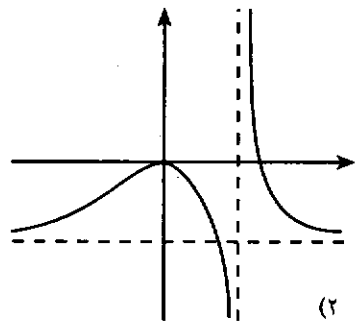
۳) ۲ ۴) ۳

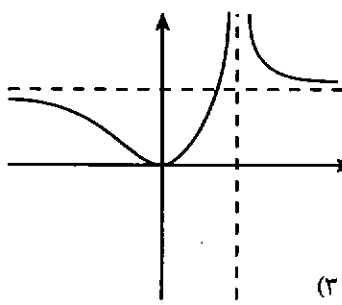
۴. اگر نمودار تابع f به صورت زیر شد،

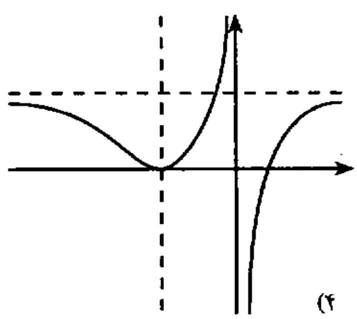


آنگاه نمودار f' کدام است؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۵. حاصل $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\cos\frac{1}{n}+\cos\frac{2}{n}+\dots+\cos\frac{n}{n})$ برابر است با:

۱) $\cos 1$ ۲) $\sin 1$

۳) $-\sin 1$ ۴) $-\cos 1$

۶. اگر $f''(x)=6x+8$ ، $f'(1)=4$ و $f(0)=2$ ،

آنگاه $f(1)$ کدام است؟

۱) ۰ ۲) ۲

۳) ۴- ۴) ۴

۷. اگر $\int (x^2-2x)\,e^x\,dx=(mx+n)\,e^x$ ،

آنگاه $(4m+2n)$ برابر است با:

۱) ۲- ۲) ۲

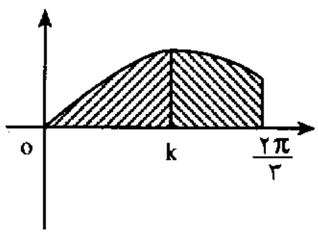
۳) ۴- ۴) ۴

۸. حاصل $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}\,d\alpha$ برابر است با:

۱) $\frac{\pi}{4}$ ۲) $1-\frac{\pi}{4}$

۳) $2-\frac{\pi}{4}$ ۴) $1-\frac{\pi}{2}$

۹. اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sin x$ شکل زیر باشد و با فرض $\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{4}$ ، k چه عددی باشد تا مساحت دو قسمت شکل مساوی باشد؟



۱) $\frac{\pi}{12}$ ۲) $\frac{\pi}{6}$

۳) $\frac{5\pi}{12}$ ۴) $\frac{7\pi}{12}$

۱۰. تعداد رشد پروانه‌ها در محیطی پس از ۳ ساعت ۲ برابر شده است، پس از ۱۸ ساعت چند برابر می‌شود؟

۱) ۱۸ برابر ۲) ۳۶ برابر

۳) ۴۸ برابر ۴) ۶۴ برابر

ریاضی عمومی ۲

۱. به ازای چه مقدار m ، خط به معادلهٔ $y=x+m$ بر منحنی به معادلهٔ $y=x^2-x$ مماس است؟

۱) ۲ ۲) ۱

۳) ۱- ۴) ۲-

۲. دو خط با شیب $-\frac{1}{4}$ بر منحنی به معادلهٔ $x^2+4y^2=4$ مماس کرده‌ایم. معادلهٔ خطی که نقاط تماس را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

۱) $y=4x$ ۲) $y=2x$

۳) $y=x$ ۴) $y=\frac{1}{2}x$

۳. مشتق تابع $y=\frac{1}{2}\operatorname{Ln}(\tan\frac{x}{2})$ کدام است؟

۱) $\sin\frac{x}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}(1+\tan^2\frac{x}{2})$

۳) $\frac{1}{2\cos x}$ ۴) $\frac{1}{2\sin x}$

۴. نقطهٔ عطف تابع با ضابطهٔ $y=e^{(2x-2x^2)}$ کدام است؟

۱) $(0\,,1)$ ۲) $(e\,,e^{(2e-2e^2)})$

۳) $(-1\,,1)$ ۴) $(-e\,,e^{(-2e-2e^2)})$

۵. تابع با ضابطهٔ $y=\sin x-\cos 2x$ در کدام یک از فاصله‌های زیر صعودی است؟

۱) $(\frac{\pi}{4}\,,\frac{3\pi}{4})$ ۲) $(\frac{\pi}{2}\,,\pi)$

۳) $(\frac{3\pi}{2}\,,2\pi)$ ۴) $(0\,,\frac{\pi}{4})$

۶. اگر می‌نیمم نسبی تابع با ضابطهٔ $y=(m-1)x^2+x$ برابر ۲- باشد، مقدار m چه‌قدر است؟

۱) $\frac{9}{4}$ ۲) $\frac{3}{4}$

۳) $\frac{3}{8}$ ۴) $\frac{9}{8}$

۷. مکان هندسی نقطهٔ $M\begin{vmatrix}\sin^2\alpha\\ \cos\alpha-1\end{vmatrix}$ وقتی α تغییر می‌کند، بر کدام مقطع مخروطی قرار دارد؟

۱) دایره ۲) سهمی

۳) بیضی ۴) هذلولی

۸. دو دایرهٔ به معادله‌های $(x-2)^2+(y-3)^2=16$ و $(x-5)^2+(y-7)^2=1$ نسبت به‌هم چه وضعی دارند؟

۱) متخارج ۲) متداخل

۳) مماس داخل ۴) مماس خارج

۹. حاصل $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}+\sqrt{(x-1)^3}\right)+C$

۲) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right)+C$

۳) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)+C$

۴) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}\right)+C$

۱۰. سطح محصور به منحنی به معادلهٔ $x^2+4y^2+16y-20=0$ را حول محور yها دوران می‌دهیم، حجم جسم حادث کدام است؟

۱) 24π ۲) 36π

۳) 72π ۴) 144π

ریاضیات گسسته

۱. گراف G از مرتبهٔ P دارای r رأس از درجهٔ صفر است، در این صورت حدّاکثر مقدار برای δ کدام است؟

۱) $P-2r$ ۲) $P-r-2$

۳) $P-r-1$ ۴) $P-r$

۲. در یک گراف با اندازهٔ ۱۰، همهٔ رأس‌ها از درجهٔ ۳ هستند ؛ به جز ۲ رأس که درجهٔ آنها ۴ است؛ در این صورت، این گراف چند رأس دارد؟

۱) ۸ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

۳. اگر G یک گراف همبند و دارای ۲۰ یال باشد و درجهٔ هر رأس حدّاقل ۴ باشد، در این صورت، حدّاکثر مرتبه برای G کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰

۳) ۹ ۴) ۲۲

۴. اگر G گرافی P− منتظم باشد و P عددی اوّل فرض شود، کدام گزینه صحیح است؟

۱) مرتبهٔ گراف G همواره زوج است.

۲) مرتبهٔ گراف G همواره فرد است.

۳) در این گراف $(\delta-\Delta)$ عددی فرد است.

۴) گراف G نمی‌تواند درخت باشد.

۵. اگر G گرافی ۴− منتظم بوده و ۷ یال به آن اضافه کنیم، گرافی کامل به دست می‌آید، مرتبهٔ G کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

۶. مرتبهٔ گراف G ، ۷ و اندازهٔ آن ۲۰ است؛ این گراف چند رأس از درجهٔ ۶ دارد؟

۱) ۶ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۵ یا ۴

۷. اگر x جواب معادلهٔ هم‌نهشتی $11x \overset{8}{\equiv} \sum_{k=2}^{1422} k!$ باشد، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

۱) $(8, x) = 1$ ۲) $[8, x] = |x|$

۳) $[8, x] = 8$ ۴) $(8, x) = |x|$

۸. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $A=\left(\sum_{k=1}^{1381} k!\right)$ بر عدد (۱۴) کدام است؟

۱) ۱− ۲) ۶

۳) ۵ ۴) ۴

۹. اگر $a \overset{20}{\equiv} b$ و $a \overset{16}{\equiv} b$ ، کدام گزینه صحیح است؟

۱) $18 \mid a-b$ ۲) $10 \mid a-b$

۳) $12 \mid a-b$ ۴) $14 \mid a-b$

۱۰. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم اعداد m ، n و p بر عدد طبیعی k، به ترتیب a ، b و c باشد، کدام عدد همواره بر k بخش‌پذیر است؟

۱) $mnp + abc$ ۲) $mnp+(a+b+c)$

۳) $mnp-(a+b+c)$ ۴) $mnp-abc$

۱۱. اگر کوچکترین عضو مثبت مجموعهٔ $A=\{ma+nb \mid m, n \in Z\}$ عدد ۱ باشد و a عددی زوج باشد، در این صورت، باقی‌ماندهٔ تقسیم (b^2+7) بر ۸ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱

۳) ۲ ۴) ۴

۱۲. اگر $[a^n, b^n]=b^n$ ، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ $(a, b \in IN)$

۱) $(a, b) = 1$ ۲) $[a^2, b^3]=a^2$

۳) $[a^3, b^2]=a^3$ ۴) $(a^3, b^2)=a^3$

۱۳. اگر $[a^2, b^2]=[7a, 7b]$ و a و b دو عدد صحیح متمایز باشند، حاصل $(2a+b)$ کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۲

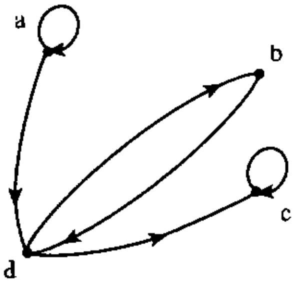
۳) ۱۵ ۴) ۸

۱۴. اگر $ra+sb=11$ و برای هر $m,n \in Z$ ، $ma+nb \neq 1$ ، در این صورت $(a+b)$ بر کدام عدد همواره بخش‌پذیر است؟

۱) ۱۱ ۲) ۲۲

۳) ۳ ۴) ۲

۱۵. گراف متناظر با رابطهٔ R که روی مجموعهٔ $A=\{a, b, c, d\}$ تعریف شده، به صورت زیر است، این رابطه چه تعداد از خواص بازتابی، تقارنی، پادتقارنی و تعدی را ندارد؟



۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۶. ماتریس متناظر با رابطهٔ R دارای ۳۰ درآیهٔ صفر است که تعداد صفرها(۵) برابر تعداد یک‌ها در این ماتریس است، اگر این رابطه، یک رابطهٔ هم ارزی باشد و R روی A تعریف شده باشد، کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) $|A| = 6$ ۲) $\forall a \in A \Rightarrow [a]=\{a\}$

۳) $|R| = 12$ ۴) $\forall a \neq b \in A ; a \not R b$

۱۷. رابطهٔ R روی مجموعهٔ $A=\{1,2,3\}$ به صورت $R=\{(1,1), (2,3), (3,1), (2,1)\}$ تعریف شده است. این رابطه کدام خاصیت را دارد؟

۱) پادتقارنی ۲) انعکاسی

۳) تعدی ۴) تقارنی

۱۸. به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، یک دسته گل شامل ۹ شاخه گل انتخاب کرد؛ به شرطی که از گل نوع اوّل حدّاقل ۱ شاخه و از گل نوع چهارم حدّاقل ۳ شاخه حتماً انتخاب کنیم؟

۱) $\binom{۸}{۴}$ ۲) $\binom{۹}{۵}$

۳) $\binom{۱۲}{۳}$ ۴) $\binom{۱۲}{۴}$

۱۹. اگر $P(A|B) = \frac{۱}{۳}$ و $P(B|A) = \frac{۱}{۴}$ و $P(A \cup B) = \frac{۳}{۴}$ باشند، حاصل $P(A - B)$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

۲۰. جعبه‌ای حاوی ۵ مهرهٔ سفید و ۲ مهرهٔ سیاه است و جعبهٔ دیگری که کاملاً شبیه آن است، شامل ۷ مهرهٔ سفید و ۵ مهرهٔ سیاه است. شخصی تصادفی دست در یکی از این دو جعبه کرده و مهره‌ای را بیرون می‌آورد؛ احتمال آن که این مهره سفید باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۳}{۱۶}$ ۲) $\frac{۵}{۱۶}$

۳) $\frac{۶۷}{۸۴}$ ۴) $\frac{۶۵}{۸۴}$

پاسخ مسائل و پرسشهای چهارگزینه‌ای

ریاضیات سال اوّل

۱. $MN^۲ = (x_M - x_N)^۲ + (y_M - y_N)^۲$

$= (۴p - ۱ - ۲)^۲ + (۳ - ۴p)^۲$

$= (۴p - ۳)^۲ + (۴p - ۳)^۲ = (۲\sqrt{۲})^۲$

$۸ = ۲(۴p - ۳)^۲ \; ; \; (۴p - ۳)^۲ = ۴ \; ;$

$۴p - ۳ = \pm ۲ \; ; \; ۴p = ۳ \pm ۲ \; ;$

$p = \frac{۵}{۴} \; ; \; p = \frac{۱}{۴}$

۲. $x = -۱$, $mn = -۱$ (شرط عمود بودن)

$\begin{cases} y = mx - ۲ \\ y = nx + ۲ \end{cases} \Rightarrow mx - ۲ = nx + ۲,$

$m(-۱) - ۲ = n(-۱) + ۲ \; ; \; m - n = -۴$

با استفاده از اتحاد $(m + n)^۲ - (m - n)^۲ = ۴mn$؛ خواهیم داشت: $m + n = \pm ۲\sqrt{۳}$

۳. برای دستگاه $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ (شرط عدم وجود جواب) $(\frac{۴}{b} = \frac{b}{۴})$، آنگاه دستگاه نشدنی و در نتیجه جواب ندارد.

$b^۲ = ۱۶ \; ; \; b = \pm ۴$

۴. $p = \sqrt{(x - ۱)^۲} - \sqrt{x^۲} + x^۲ + ۶\sqrt{۱۰}$

$= |x - ۱| - |x| + x^۲ + ۶\sqrt{۱۰}$

$x = ۳ - \sqrt{۱۰} : \; p \overset{(x < ۰)}{=} -(x - ۱) + x + (۳ - \sqrt{۱۰})^۲ + ۶\sqrt{۱۰} = ۲۰$

۵. $x^۲ = x - ۱ \; , \; x^{۷۸} = (x^۳)^{۲۶}$

$x^۲ - x + ۱ = ۰ \; ; \; (x + ۱)(x^۲ - x + ۱) = ۰ \; ;$

$x^۳ + ۱ = ۰ \; ; \; x^۳ = -۱$

$x^{۷۸} = (x^۳)^{۲۶} = (-۱)^{۲۶} = ۱ \; , \; x^{۷۸} = ۱$

۶. $\sqrt{۱ + ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} =$

$\sqrt{\sin^۲\frac{x}{۲} + \cos^۲\frac{x}{۲} + ۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}} =$

$\sqrt{(\sin\frac{x}{۲} + \cos\frac{x}{۲})^۲} = \left|\sin\frac{x}{۲} + \cos\frac{x}{۲}\right|$

۷. $\frac{۲x}{۴x - ۴} + \frac{۴x}{۸x + ۸} = \frac{x}{۲} \; ;$

$\frac{x}{۲x - ۲} + \frac{x}{۲x + ۲} = \frac{x}{۲} \; ;$

$\frac{۲x^۲ + ۲x + ۲x^۲ - ۲x}{(۲x - ۲)(۲x + ۲)} = \frac{x}{۲} \; ;$

$\frac{۴x^۲}{۴x^۲ - ۴} = \frac{x}{۲} \; ; \; \frac{۴x^۲ - (۲x^۳ - ۲x)}{۴x^۲ - ۴} = ۰ \; ;$

$\frac{-۲x^۳ + ۴x^۲ + ۲x}{۴x^۲ - ۴} = ۰ \; ; \; \frac{-۲x(x^۲ - ۲x - ۱)}{۴(x^۲ - ۱)} = ۰$

$x \neq \pm ۱ \; : \; x^۲ - ۲x - ۱ = ۰ \; ; \; x = ۰$

(معادله سه ریشه حقیقی دارد)

۸. $\frac{\sqrt{x}}{x^۲ - ۱} + \sqrt{x - ۱} \; ;$

$x^۲ - ۱ \neq ۰ \; ; \; x \neq \pm ۱ \; ، \; x \geq ۰ \; ، \; x - ۱ \geq ۰$

$\begin{cases} x \geq ۱ \\ x \geq ۰ \\ x \neq \pm ۱ \end{cases} \; ; \; x > ۱$

۹. $\sqrt[۳]{x} = \sqrt{۲\sqrt[۴]{۴}} \; ; \; x = \sqrt[۳]{۲\sqrt[۴]{۴}} \; ;$

$x^۳ = ۲\sqrt[۴]{۴} \; ; \; x^{۱۲} = ۲^۶ \; ; \; x = \sqrt{۲}$

$x = \sqrt{۲} : \sqrt[۵]{x^۳} = \sqrt[۵]{۲\sqrt{۲}} = \sqrt[۵]{\sqrt{۸}} = \sqrt[۱۰]{۸}$

۱۰. $x + \frac{۱}{x} = ۱ \; ; \; x^۲ - x + ۱ = ۰$

$s = x' + x'' = x_۱ + x_۲ = ۱$

$p = x''x' = x_۱x_۲ = ۱ \; , \; s = ۱ \; , \; p = ۱$

$A = \frac{x_۱^۳ + x_۲^۳}{x_۱^۲ + x_۲^۲} = \frac{(x_۱ + x_۲)^۳ - ۳x_۱x_۲(x_۱ + x_۲)}{(x_۱ + x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲}$

$= \frac{s^۳ - ۳ps}{s^۲ - ۲p} = \frac{-۲}{-۱} = ۲$

ریاضی سال دوم

۱. $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) =$

$(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$= \cos^۲\alpha\cos^۲\beta - \sin^۲\alpha\sin^۲\beta$

$= \cos^۲\alpha(۱ - \sin^۲\beta) - (۱ - \cos^۲\alpha)\sin^۲\beta$

$= \cos^۲\alpha - \cos^۲\alpha\sin^۲\beta - \sin^۲\beta + \cos^۲\alpha\sin^۲\beta$

$= \cos^۲\alpha - \sin^۲\beta$

۲. $\frac{۱}{\sin ۱۰} - \frac{\sqrt{۳}}{\cos ۱۰} = \frac{\cos ۱۰ - \sqrt{۳}\sin ۱۰}{\sin ۱۰ \cos ۱۰}$

$= \frac{\cos ۱۰ - tg۶۰ \sin ۱۰}{\frac{۱}{۲}\sin ۲۰} =$

$\frac{\cos ۱۰ \cos ۶۰ - \sin ۱۰ \sin ۶۰}{\frac{۱}{۲}\sin ۲۰ \cos ۶۰} = \frac{\cos(۱۰ + ۶۰)}{\frac{۱}{۴}\sin ۲۰}$

$= \frac{۴\cos ۷۰}{\sin ۲۰} = \frac{۴\sin ۲۰}{\sin ۲۰} = ۴$

۳. دو بردار بر هم عمودند؛ زیرا حاصلضرب نقطه‌ای آنها مساوی صفر است.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a \cdot x_b + y_a y_b = \alpha\beta - \beta\alpha = ۰$

۴. $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۷ \end{bmatrix} \\ \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۵ \end{bmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۷ \end{bmatrix} [-۲ \; -۵] = ۸ + ۳۵ = ۴۳$

۵. دانش‌آموزان کلاس چهارم را به $\binom{۶}{۴}$ طریق و دانش‌آموزان کلاس سوّم را به $\binom{۵}{۳}$ طریق می‌توانیم انتخاب کنیم. بنابراین و با توجه به اصل ضرب، تعداد راه‌های انتخاب برابر است با:

$\binom{۶}{۴} \times \binom{۵}{۳} = \frac{۶!}{۴!۲!} \times \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۵ \times ۱۰ = ۱۵۰$

۶. با توجه به ویژگی جمله‌های تصاعد حسابی داریم:

$\binom{n}{۱} + \binom{n}{۳} = ۲\binom{n}{۲} \Rightarrow n + \frac{n!}{۳!(n - ۳)!}$

$= ۲\frac{n!}{۲!(n - ۲)!} \Rightarrow n + \frac{n(n - ۱)(n - ۲)}{۶}$

$= n(n-1)\ ,\ n \neq 0 \Rightarrow 1 + \frac{(n-1)(n-2)}{6}$

$= n - 1 \Rightarrow 6 + n^2 - 3n + 2 = 6n - 6$

$\Rightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Rightarrow (n-7)(n-2) = 0$

$\Rightarrow n = 7\ ,\ n = 2$

پاسخ $n = 2$ غیر قابل قبول است. (چرا؟)

۷. فضای نمونه ۳۶ عضو دارد و پیشامد تصادفی مطلوب، عبارت است از مجموعهٔ A که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$A = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(4,3),(3,4),(4,5),(5,4),(6,5),(5,6)\}$

بنابراین داریم:

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

۸. احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، مساوی $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ است و در این صورت مشخص، سکه خود را سه بار پرتاب می‌کند و احتمال آنکه حدّاقل دوبار سکه رو بیاید، در این صورت $\frac{1}{2}$ می‌باشد؛ زیرا:

S = {(پ، پ، پ)، (ر، پ، پ)، (پ، ر، پ)،
(ر، پ، ر)، (پ، پ، ر)، (ر، ر، پ)،
(ر، ر، ر)، (پ، ر، ر)}

A = {(پ، پ، پ)، (پ، ر، پ)، (ر، پ، پ)،
(پ، پ، ر)} ⇒

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

اما اگر تاس مضرب سه نیاید که احتمال آن $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ است، سکه دوبار پرتاب می‌شود و احتمال آنکه حدّاقل دوبار پشت بیاید، مساوی $\frac{1}{4}$ است:

S = {(ر، ر)، (پ، ر)، (ر، پ)، (پ، پ)}

A = {(پ، پ)} ⇒

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

حال در پرتاب تاس، مضرب ۳ می‌آید و یا نمی‌آید؛ بنابراین:

براساس قانون جمع احتمال، پیشامدهای ناسازگار احتمال مورد نظر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

۹. تعداد عددهای مضرب ۲ کوچکتر از ۱۰۰، مساوی ۴۹ تاست. (از ۱×۲ تا ۴۹×۲) و تعداد عددهای مضرب ۳ کوچکتر از ۳ نیز ۳۳ تاست. (از ۱×۳ تا ۳۳×۳) و تعداد عددهای مضرب ۵ کوچکتر از ۱۰۰، ۱۹ تاست. (از ۱×۵ تا ۱۹×۵)، پس اگر A پیشامد آن باشد که عدد منتخب مضرب ۲ باشد و B پیشامد آن باشد که عدد منتخب مضرب ۳ باشد و C پیشامد آن که آن عدد مضرب ۵ باشد، داریم:

$P(A) = \frac{49}{99}\ , P(B) = \frac{33}{99}\ , P(C) = \frac{19}{99}$

همچنین $A \cap B$ ، $A \cap C$ و $B \cap C$ پیشامد آن هستند که عدد منتخب مضرب ۲ و ۳ (یعنی مضرب ۶) و مضرب ۲ و ۵ (یعنی مضرب ۱۰) و مضرب ۳ و ۵ (یعنی مضرب ۱۵) باشد و به همان ترتیب می‌توان نوشت:

$P(A \cap B) = \frac{16}{99}\ , P(A \cap C) = \frac{9}{99}\ ,$

$P(B \cap C) = \frac{6}{99}$

و $A \cap B \cap C$ پیشامد آن است که آن عدد مضرب ۲، ۳ و ۵ (یعنی مضرب ۳۰) باشد، بنابراین:

$P(A \cap B \cap C) = \frac{3}{99}$

و از آن‌جا به کمک قانون احتمال اجتماع، سه پیشامد می‌نویسیم:

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$
$P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$
$P(A \cap B \cap C) = \frac{49}{99} + \frac{33}{99} + \frac{19}{99} - \frac{16}{99} -$
$\frac{9}{99} - \frac{6}{99} + \frac{3}{99} = \frac{73}{99}$

۱۰. $a_4 = a_1 + 3d = 5$

$a_7 = a_1 + 6d = (a_1 + 3d) + 3d =$

$5 + 3d = 2 + 3(d+1) = 3K + 2$

حال اگر قدرنسبت، یعنی d ، عددی صحیح باشد، باقیماندهٔ تقسیم a_7 بر ۳ مساوی ۲ است و از بین گزینه‌ها، تنها پاسخ، گزینهٔ (۲) (یعنی ۳۵) این ویژگی را دارد، و از آن‌جا $d = 10$ است.

۱۱. $S_3 = 3/5a_2 \Rightarrow a_1 \frac{q^3 - 1}{q - 1} = 3/5 a_1 q$

$\Rightarrow q^2 + q + 1 = 3/5q \Rightarrow 2q^2 + 2q + 2 = 7q$

$\Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0 \Rightarrow q = 2$ یا $q = \frac{1}{2}$

یا $a_4 = a_1 q^3 \Rightarrow a_4 = 3 \times 2^3 = 24$

$a_4 = 3(\frac{1}{2})^3 = \frac{3}{8}$

حسابان ۲

۱. گزینهٔ (۲)

در تابع درجه سوّم، نقطهٔ عطف مرکز تقارن منحنی تابع است، چنانچه منحنی تابع، ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد، نقطهٔ عطف وسط آنهاست.

طول عطف $= -\frac{b}{3a} = -\frac{-3}{3} = 1$

عرض عطف $= \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-12}{2} = -6$

$f\Big|^{1}_{-6} \xrightarrow{\text{در معادله تابع}} -6 = 1 - 3 + m - 1 - 4$

$\Rightarrow m = 1$

۲. گزینهٔ (۴)

باید معادله $(x-1)(x^2 - 2mx + 8) = 0$ دو ریشه مساوی داشته باشد.

الف: $\Delta' = 0 \Rightarrow b'^2 - ac = 0 \Rightarrow m^2 - 8 = 0$

$\Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$

ب: $x = 1 \xrightarrow{\text{در معادله دوم}} 1 - 2m + 8 = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{2}$

۳. گزینهٔ (۳)

معادله‌های قسمت افقی تابع به صورت $y = k$ و $y = -k$ است که $y' = 0$ خواهد شد. در قسمت میانهٔ شکل، پاره‌خطی داریم که تابع در این قسمت صعودی اکید است؛ پس $y' > 0$، بنابراین نمودار (۳) درست است.

۴. گزینهٔ (۴)

$f(x) = \frac{\sin 4x - \cos 4x}{\sin 4x + \cos 4x}$

صورت و مخرج کسر را بر $\cos 4x \neq 0$ تقسیم می‌کنیم:

$f(x) = \frac{\tan 4x - 1}{\tan 4x + 1}$

$T_{\tan 4x} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T_{f(x)} = \frac{\pi}{4}$

۵. گزینهٔ (۳)

اگر $x > 0$ داریم:

$\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

حال حلّ تست:

$\text{Arctan}\,\frac{x^2+1}{x^2+4}+\text{Arctan}\,\frac{x^2+4}{x^2+1}=\frac{\pi}{2}$

۶. گزینهٔ (۱)

فرض A(x,y) یک نقطه از منحنی به معادله $y^2=4x+5$ باشد:

$OA=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+4x+5}=$

$\sqrt{\underbrace{(x+2)^2}_{Min=0}+1}\Rightarrow Min\ \ OA=\sqrt{1}=1$

۷. گزینهٔ (۳)

دو عدد را x و $\frac{243}{x}$ در نظر می‌گیریم.

حال $3(\frac{243}{x})+x$ را مساوی y قرار می‌دهیم.

$y=x+\frac{729}{x}\Rightarrow y'_x=1-\frac{729}{x^2}=\frac{x^2-729}{x^2}=0$

$x^2=729\Rightarrow x=27$ عددکوچکتر: $\frac{243}{27}=9$

۸. گزینهٔ (۳) داریم:

$\lim_{n\to\infty,\ k\in R-\{0\}}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}}=e$

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+4)+1}{2x+4}\right)^{3x}=$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x+4}\right)^{\frac{2x+4}{1}\times\frac{3x}{2x+4}}=$

$\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3x}{2x+4}}=e^{\frac{3}{2}}=e\sqrt{e}$

۹. گزینهٔ (۱) $\log 2=0/301$

$\log 250=\log 5^2\times 10=2\log 5+\log 10=$

$2\left(\log\frac{10}{2}\right)+1=2(\log 10-\log 2)+1=$

$2(1-0/301)+1=2(0/699)+1=2/398$

۱۰. گزینهٔ (۲)

$y=x^{2x}\Rightarrow Lny=2xLnx$

$\frac{y'}{y}=2\left(Lnx+\frac{1}{x}.x\right)=2(Lnx+1)\Rightarrow$

$y'=2y(Lnx+1)$

$y'=2x^{2x}(Lnx+1)$

۱۱. گزینهٔ (۴)

$\frac{1}{9}\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{1}{9}(\text{Arctan}x)_0^1$

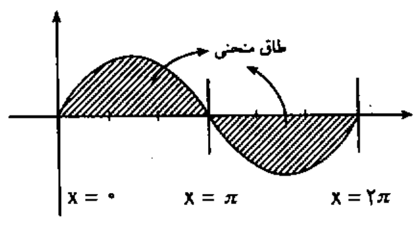
$=\frac{1}{9}(\text{Arctan}1-\text{Arctan}\,0)$

$=\frac{1}{9}(\frac{\pi}{4}+0)=\frac{\pi}{36}$

۱۲. گزینهٔ (۴)

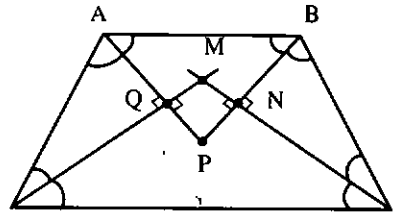
$S=2\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2(-\cos x)_0^{\pi}$

$=2(-\cos\pi+\cos 0)=2(1+1)=4$



هندسهٔ ۲

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر و زاویه‌های مجاور، مکمّل یکدیگرند؛ پس داریم:



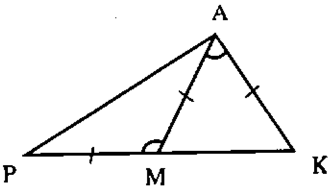
$\hat{N}=\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=\frac{180°}{2}=90°$

$\hat{Q}=\frac{\hat{A}+\hat{D}}{2}=\frac{180°}{2}=90°$

MD = MC , PA = PB , ΔAQD≅ΔBNC

⇒ MN = MQ , NP = PQ ⇒ MN + PQ = NP + MQ

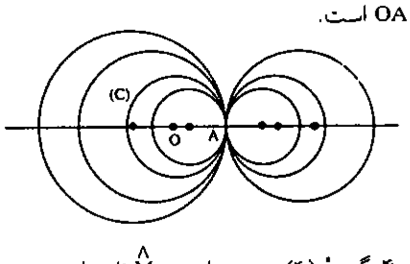
۲. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا در دو مثلث MAP و MAK داریم:



$MP=AK\ ,\ AM=AM\ ,\ A\hat{M}P>M\hat{A}K$

$\Rightarrow AP>MK$

۳. گزینهٔ (۴) صحیح است. مرکز دایره‌های مماس بر دایرهٔ C(O,R) در نقطهٔ A روی خط OA است.



۴. گزینهٔ (۴) صحیح است. $\hat{M}$ زاویه‌ای برونی است؛ پس داریم:

$\hat{M}=\frac{\widehat{BD}-\widehat{AC}}{2}\Rightarrow 3\alpha=\frac{5\alpha+40-\alpha-20}{2}\Rightarrow$

$3\alpha=2\alpha+10°\Rightarrow\alpha=10°\Rightarrow$

$A\hat{B}C=\frac{\widehat{AC}}{2}=\frac{10°+20°}{2}=15°$

۵. گزینهٔ (۲) صحیح است. بنا به ویژگی رابطهٔ طولی در دایره، داریم:

$MA\,.\,MB=MC\,.\,MD\Rightarrow x(x+5)=6\times 6$

$\Rightarrow x^2+5x-36=0\Rightarrow x=4\ ,\ x=-9<0$

$\Rightarrow MA=4\ ,\ MB=9\Rightarrow AB=MA+MB=$

$4+9=13\ ,\ CD=6+6=12$

$\Rightarrow\ \frac{CD}{AB}=\frac{12}{13}$

۶. گزینهٔ (۱) صحیح است. از O به A وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM، OH ارتفاع وارد بر وتر OM است؛ پس داریم:

$OA^2=OH\,.\,OM\Rightarrow 4^2=2\times OM\Rightarrow$

$OM=8$ و $MA=\sqrt{OM^2-OA^2}=$

$\sqrt{64-16}=4\sqrt{3}$

۷. گزینهٔ (۳) صحیح است. دو دایره برون هم هستند؛ زیرا $OO'=24>R+R'=12+8=20$ است. پس اندازهٔ مماس مشترک درونی دو دایره، برابر است با:

$TT'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}=\sqrt{24^2-(12+8)^2}$

$=\sqrt{176}=4\sqrt{11}$

۸. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ داریم:

$\begin{cases}x+2=-1\\ y-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\ y=4\end{cases}\Rightarrow A=(-3,4)$

۹. گزینهٔ (۴) صحیح است. در تجانس، شیب خطها ثابت می‌ماند. پس:

$\frac{m}{A'B'}=\frac{m}{AB}\ ,\ A=(3,4)\ ,\ B=(-2,1)$

$\Rightarrow\frac{m}{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{1-4}{-2-3}=\frac{3}{5}$

۱۰. گزینهٔ (۲) صحیح است. دو نقطهٔ A و B روی خط D اختیار کرده، مختصات دو نقطهٔ متناظر آنها 'A و 'B را در تبدیل داده شده به دست می‌آوریم و معادلهٔ خط 'A'B را می‌نویسیم:

$A=(0\ ,+\frac{3}{2})\ ,\ B=(3\ ,0)\Rightarrow$

$A'=(0+2\ ,3-3)\Rightarrow A'=(2\ ,0)$

$B'=(3+2\ ,0-3)\Rightarrow B'=(5\ ,-3)$

$\Rightarrow A'B'/\ y-0=\frac{-3-0}{5-2}(x-2)$

$\Rightarrow y=-x+2\Rightarrow x+y-2=0$

جبر و احتمال

۱. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا اگر ۴۰۰ نفر را کبوترها و روزهای یک سال را (۳۶۵ روز) لانه‌ها فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری، حدّاقل ۲ نفر دارای تاریخ تولد یکسان هستند و به همین دلیل، چون در سال، فقط ۱۲ ماه وجود دارد، دست‌کم دو نفر در یک ماه از سال متولد شده‌اند و نیز چون سال دارای ۵۲ هفته است، حدّاقل دو نفر در یک هفته معین از سال متولد شده‌اند.

۲. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$A \subset B \Rightarrow B' \subset A' \Rightarrow B' \cap A' = A'$

۳. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا اگر A دارای K زیر مجموعهٔ محض باشد، آنگاه دارای K+۱ زیر مجموعه است، پس تعداد زیر مجموعه‌های A برابر با ۶۴ است، در نتیجه داریم:

$۲^n = ۶۴ \Rightarrow ۲^n = ۲^۶ \Rightarrow n = ۶$

یعنی مجموعهٔ A دارای ۶ عضو است و تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی یک مجموعهٔ n عضوی $(k \leq n)$ برابر با ترکیب $\binom{n}{k}$ است؛ بنابراین:

$\binom{۶}{۵} = ۶$ = تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی A

۴. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا اگر A یک مجموعهٔ n عضوی و B یک مجموعهٔ m عضوی باشد، تعداد رابطه‌های از A به B برابر با $۲^{m \times n}$ است. چون $A \cap B = \phi$، بنابراین $(A \cap B) \times A = \phi$ ؛ در نتیجه تعداد رابطه‌ها برابر با $۱ = ۲^۰$ است.

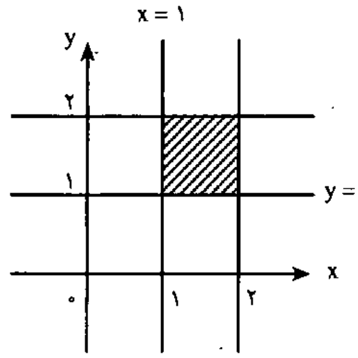
۵. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا رابطه‌هایی که روی مجموعهٔ $\{x\}$ تعریف می‌شوند، عبارتند از: $R_۱ = \{(x , x)\}$ و $R_۲ = \phi$ ، واضح است که $R_۱$ خاصیت تقارنی دارد. $R_۲$ نیز خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا اگر خاصیت تقارنی نداشته باشد، باید $R_۲$ شامل (a , b) باشد و $(b , a) \notin R_۲$ که چنین چیزی امکان ندارد.

۶. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$۲^۵ \overset{۳۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲^۵)^n \overset{۳۱}{\equiv} ۱^n \Rightarrow ۲^{۵n} \overset{۳۱}{\equiv} ۱$$
$$\Rightarrow ۲^۳ \times ۲^{۵n} \overset{۳۱}{\equiv} ۲^۳$$
$$\Rightarrow ۲^{۵n+۳} \overset{۳۱}{\equiv} ۸$$

۷. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$a_s = ۲ \times ۲ = ۴$



$$\begin{cases} x > ۱ \\ y > ۱ \end{cases} \Rightarrow a_A = ۱ \times ۱ = ۱$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۱}{۴}$$

۸. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آنگاه دو پیشامد 'B و A نیز مستقل می‌باشند.

$$P(B') = ۱ - P(B) = ۱ - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B') = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۱۲}$$

۹. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا اگر در مسأله، شرطی قرار داشته باشد، فضای نمونه محدودتر می‌شود. چون دو عدد باید متمایز باشند، پس $n(s) = ۳۰$ ، از طرفی داریم:

$A = \{(۴,۵),(۵,۴),(۳,۶),(۶,۳)\}$; $n(A) = ۴$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۴}{۳۰} = \frac{۲}{۱۵}$$

۱۰. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳! \times ۷!}$$
$$= \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۰$$

اگر از رنگ قرمز برنداشته باشیم، آنگاه هر سه مهره سفید یا هر سه مهره آبی یا دو مهره سفید و یک مهره آبی یا یک مهره سفید و دو مهره آبی است؛ بنابراین داریم:

$$n(A) = \binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۳} + \binom{۳}{۱}\binom{۳}{۲} + \binom{۳}{۲}\binom{۳}{۱}$$
$$= ۱ + ۱ + ۹ + ۹ = ۲۰$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۲۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۶}$$

حساب دیفرانسیل و انتگرال ۲

۱. گزینهٔ (۴)

$f(x) = \sin x - x$

$f'(x) = \cos x - ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x = ۱$

همهٔ جوابهای معادلهٔ $\cos x = ۱$ مضاعف است، پس کلیهٔ ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$ طولهای نقاط عطف است؛ بنابراین نمودار این تابع، نقاط اکسترمم نسبی ندارد.

۲. گزینهٔ (۳)

$f(t) = -t^۳ + ۴۵t^۲ - ۲۴۳t + ۱$

$f'(t) = -۳t^۲ + ۹۰t - ۲۴۳ = ۰$

$-۳(t^۲ - ۳۰t + ۸۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲۷ \\ t = ۳ \end{cases}$

$۳ < t < ۲۷ \Rightarrow f'(t) > ۰$

$t > ۲۷ \Rightarrow f'(t) < ۰$

پس $t = ۲۷$ زمان رسیدن به نقطهٔ اوج (ماکزیمم) است.

۳. گزینهٔ (۳)

اگر بازهٔ $[-۱,۱]$ را به n زیر بازه مساوی افراز کنیم، در هر زیر بازه، می‌نیمم مطلق تابع ۱ است؛ پس:

$\Delta x = \frac{۲}{n}$

$$\sum_{i=۱}^{n} f(li) \cdot \Delta x = \sum_{i=۱}^{n} (۱)(\Delta x) = \Delta x \sum_{i=۱}^{n} ۱ = \frac{۲}{n}(n) = ۲$$

۴. گزینهٔ (۳)

۱. اگر معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع f به صورت $y = ax + b$ باشد، آنگاه $y = a$ مجانب افقی تابع 'f است.

۲. هرگاه خط مماس بر منحنی تابع f در x=b، موازی محور yها باشد، آنگاه x=b مجانب قائم تابع 'f است.

۳. چون تابع f صعودی اکید است، پس نمودار مشتق بالای محور xهاست.

۴. اگر خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ عطف موازی محور xها باشد، این نقطه برای تابع 'f ، یک اکسترمم نسبی روی محور xها می‌سازد، پس نمودار گزینهٔ (۳) صحیح است.

۵. گزینهٔ (۲)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\cos\frac{1}{n}+\cos\frac{2}{n}+\dots+\cos\frac{n}{n}\right)=$$
$$\int_0^1\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^1=\sin 1-\sin 0=\sin 1$$

۶. گزینهٔ (۱)

$$f''(x)=6x+8\Rightarrow f'(x)=3x^2+8x+C$$
$$f'(1)=4\Rightarrow 4=3+8+C\Rightarrow C=-7$$
$$f'(x)=3x^2+8x-7$$
$$\Rightarrow f(x)=x^3+4x^2-7x+C'$$
$$f(0)=2\Rightarrow 2=C'\Rightarrow f(x)=x^3+4x^2-7x+2$$
$$f(1)=1+4-7+2=0$$

۷. گزینهٔ (۱)

$$\int(x^2-2x)e^x=(mx+n)e^x$$
$$(x^2-2x)e^x=[(mx+n)e^x]'$$
$$(x^2-2x)e^x=me^x+(mx+n)e^x$$
$$(x^2-2x)e^x=\big(mx+(m+1)\big)e^x\Rightarrow$$
$$\begin{cases}m=1\\ m+n=-2\end{cases}\Rightarrow n=-3$$
$$4m+2n=4-6=-2$$

۸. گزینهٔ (۲)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}\,d\alpha=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2\sin^2\alpha}{2\cos^2\alpha}\,d\alpha=$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2\alpha\,d\alpha=(\tan\alpha-\alpha)_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\tan\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$$

۹. گزینهٔ (۳)

$$\int_0^k\sin x\,dx=\int_k^{\frac{2\pi}{3}}\sin x\,dx\Rightarrow$$
$$(-\cos x)_0^K=(-\cos x)_k^{\frac{2\pi}{3}}$$
$$-\cos K+1=\frac{1}{2}+\cos K\Rightarrow$$
$$\cos K=\frac{1}{4}=\sin\frac{\pi}{12}$$
$$\cos K=\sin\frac{\pi}{12}\Rightarrow K+\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow K=\frac{5\pi}{12}$$

۱۰. گزینهٔ (۴)

$$y(t)=c\cdot e^{kt}\Rightarrow\begin{cases}y(0)=c\\ y(3)=2y(0)=2c\end{cases}$$
$$y(3)=2c\Rightarrow ce^{3k}=2c\Rightarrow e^{3k}=2$$
$$y(18)=c\cdot e^{18k}=c(e^{3k})^6=c(2^6)=$$
$$64c=64(y(0))$$

ریاضی عمومی ۲

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases}y=x+m\\ y=x^2-x\end{cases}\Rightarrow$$
$$x^2-x=x+m\Rightarrow x^2-2x-m=0$$
$$\Delta=(-2)^2-4(1)(-m)=0\Rightarrow m=-1$$

۲. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$x^2+4y^2-4=0\Rightarrow y'_x=-\frac{2x}{8y}=-\frac{1}{4}$$
$$\Rightarrow x=y$$
$$\begin{cases}x=y\\ x^2+4y^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{\sqrt5}\\ y=\frac{2}{\sqrt5}\end{cases},\quad\begin{cases}x=-\frac{2}{\sqrt5}\\ y=-\frac{2}{\sqrt5}\end{cases}$$

شیب خط $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-\frac{2}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}}{-\frac{2}{\sqrt5}-\frac{2}{\sqrt5}}=1$

۳. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$y'=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2\frac{x}{2})}{\tan\frac{x}{2}}=$$
$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{\frac{2\tan\frac{x}{2}}{(1+\tan^2\frac{x}{2})}}=\frac{1}{2\sin x}$$

۴. گزینهٔ (۱) صحیح است؛ زیرا:

$$y'=(2-4x)e^{(2x-2x^2)};$$
$$y''=[-4+(2-4x)^2]e^{(2x-2x^2)}=0$$
$$\Rightarrow x=0\ ,\ x=1$$

مختصات نقاط عطف منحنی $B(1,1)$ و $A(0,1)$

۵. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$y'=\cos x+2\sin2x=\cos x+4\sin x\cos x=$$
$$\cos x(1+4\sin x)$$

برای این که تابع f روی فاصلهٔ I صعودی باشد، باید روی این فاصله $f'(x)>0$؛ بنابراین داریم:

$$\cos x\,(1+4\sin x)>0$$

برای این منظور باید $\cos x$ و $4\sin x+1$ هر دو هم علامت باشند و فقط در بازهٔ گزینه (۴) هر دو مثبت می‌باشند.

۶. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا با قرار دادن طول نقطهٔ اکسترمم، یعنی $x=\frac{-b}{2a}$ در ضابطهٔ تابع، اکسترمم نسبی تابع به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{-1}{2(m-1)}\Rightarrow -2=(m-1)\times\frac{1}{4(m-1)^2}$$
$$-\frac{1}{2(m-1)}\Rightarrow m=\frac{9}{8}$$

۷. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases}x=\sin^2\alpha\\ y=\cos\alpha-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sin^2\alpha\\ (y-1)^2=\cos^2\alpha\end{cases}\Rightarrow$$

$x+(y-1)^2=1$ (معادلهٔ سهمی)

۸. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$S=(2,3)\ ,\ R=4\ ;\ S'=(5,7)\ ,\ R'=1$$
$$SS'=d=\sqrt{(2-5)^2+(3-7)^2}=5\Rightarrow$$

$d=R+R'=5$ مماس خارجند

۹. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}\times\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}=$$
$$\frac{1}{2}\int(\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1})\,dx=$$
$$\frac{1}{2}\int(1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx-\frac{1}{2}\int(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx=$$
$$\frac{1}{3}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right)+C$$

۱۰. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$\begin{cases}x^2+4y^2+16y-20=0\\ x=0\end{cases}\Rightarrow$$
$$y=1\ ,\ y=5$$
$$S=\int_1^5\pi x^2dy=\int_1^5\pi(-4y^2-16y+20)dy$$
$$=\pi\left(-\frac{4}{3}y^3-8y^2+20y\right)\Big|_1^5=144\pi$$

حل تشریحی تستهای گراف

۱. گزینهٔ (۳) صحیح است؛ زیرا:

این گراف دارای $(p-r)$ رأس است که حدّاقل درجهٔ آنها ۱ است، و در چنین گرافی، حدّاکثر درجهٔ یک رأس، یعنی Δ می‌تواند $(p-r)-1$ باشد.

۲. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

اگر x را تعداد رأس‌های درجهٔ ۳ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$3x+2\times4=20\Rightarrow 3x=20-8\Rightarrow$$
$$3x=12\Rightarrow x=4$$

پس ۴ رأس درجهٔ ۳ و دو رأس درجهٔ ۴ و در مجموع، ۶ رأس دارد.

۳. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

همهٔ رأس‌ها را از درجهٔ حداقل در نظر می‌گیریم تا تعداد آنها حدّاکثر شود؛ بنابراین:

$$۴x = ۲q = ۲ \times ۲۰ = ۴۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

۴. گزینهٔ (۴) صحیح است؛ زیرا:

فقط گراف‌های $T_۱$ و $T_۲$ که به ترتیب ۰ - منتظم و ۱- منتظم هستند، درخت هستند.

۵. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$۴p = ۲q \Rightarrow ۲p = q$$

$$q + ۷ = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۲q + ۱۴ = p(p-۱)$$

$$\Rightarrow ۴p + ۱۴ = p^۲ - p \Rightarrow p^۲ - ۵p - ۱۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (p-۷)(p+۲) = ۰ \Rightarrow p = ۷$$

۶. گزینهٔ (۲) صحیح است؛ زیرا:

اگر ۷ رأس درجهٔ ۶ باشند $q = ۲۱$، که تناقض است و اگر ۶ رأس درجهٔ ۶ داشته باشیم، باید ۱ رأس درجهٔ ۴ باشد که ممکن نیست؛ ولی ۵ رأس درجهٔ ۶ و ۱ رأس درجهٔ ۱۰ امکان‌پذیر است.

۷. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$\sum_{k=۲}^{۱۴۲۲} k! = ۲! + ۳! + ۴! + \dots + ۱۴۲۲! \overset{۸}{\equiv}$$

$$۲ + ۶ + ۰ + ۰ + \dots + ۰ \overset{۸}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۱x \overset{۸}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۸ \mid ۱۱x \xRightarrow{(۸,۱۱)=۱} ۸ \mid x \Rightarrow [۸, x] = |x|$$

۸. گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

می‌دانیم عدد !۷ عامل ۷ و ۲ و در نتیجه عامل ۱۴ را دارد، پس بر ۱۴ بخش‌پذیر است و برای هر $k \geq ۷$، همواره !k نیز عامل !۷ داشته و بر ۱۴ بخش‌پذیر است، پس:

$$A \overset{۱۴}{\equiv} ۱! + ۲! + \dots + ۶! \Rightarrow$$

$$A \overset{۱۴}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۱۲۰ + ۷۲۰$$

$$\Rightarrow A \overset{۱۴}{\equiv} ۵$$

۹. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$a \overset{m}{\equiv} b \;,\; a \overset{n}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$$

$$a \overset{۲۰}{\equiv} b \quad a \overset{۱۶}{\equiv} b \Rightarrow a \overset{۸۰}{\equiv} b \;,\; ۱۰ \mid ۸۰ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} b$$

۱۰. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$\left.\begin{matrix} m \overset{k}{\equiv} a \\ n \overset{k}{\equiv} b \\ p \overset{k}{\equiv} c \end{matrix}\right\} \Rightarrow mnp \overset{k}{\equiv} abc \Rightarrow k \mid mnp - abc$$

۱۱. گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

چون کوچکترین عضو مثبت A، عدد ۲ است، پس $(a , b) = ۱$ و چون a زوج است، لذا همواره باید b فرد باشد (اگر هر دو زوج باشند $((a , b) \neq ۱)$)؛ پس:

$$b^۲ = ۸K + ۱ \Rightarrow b^۲ + ۷ = ۸K + ۸ =$$

$$۸(K+۱) = ۸K' \Rightarrow ۸ \mid b^۲ + ۷$$

۱۲. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$$[a^n , b^n] = b^n \Rightarrow [a , b] = b \Rightarrow a \mid b$$

$$a \mid b \Rightarrow a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow a^۲ \mid b^۳ \Rightarrow [a^۲, b^۳] = b^۳$$

$a \mid b \Rightarrow a^۲ \mid b^۲ \Rightarrow a^۳ \nmid b^۲$ ممکن است

$$a \mid b \Rightarrow a^۳ \mid b^۳ \Rightarrow a^۳ \mid b^۴ \Rightarrow (a^۳, b^۴) = a^۳$$

۱۳. گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$$[a , b] = c \Rightarrow \begin{cases} [a^n , b^n] = c^n \\ [na , nb] = nc \end{cases}$$

$$[a^۲ , b^۲] = [۷a , ۷b] \Rightarrow c^۲ = ۷c \Rightarrow$$

$$c(c-۷) = ۰ \Rightarrow c = ۰ \text{ یا } c = ۷ \xRightarrow{c \neq ۰} c = ۷$$

$$\Rightarrow [a , b] = ۷ \Rightarrow a \mid ۷ , b \mid ۷ \Rightarrow a = ۱ \text{ یا } ۷,$$

$$b = ۱ \text{ یا } ۷ \xRightarrow{a \neq b} a = ۷ , b = ۱ \Rightarrow ۲a + b = ۱۵$$

۱۴. گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

در حالت کلّی، اگر p عددی اوّل باشد و $ra + sb = p$، در این صورت $(a , b) = ۱$ یا $(a , b) = p$.

$$ra + sb = ۱۱ \Rightarrow (a , b) = ۱ \text{ یا } (a , b) = ۱۱$$

$$\forall m , n \in Z \,;\, ma + nb \neq ۱ \Rightarrow (a , b) \neq ۱$$

$$\Rightarrow (a , b) = ۱۱ \Rightarrow ۱۱ \mid a , ۱۱ \mid b \Rightarrow ۱۱ \mid a + b$$

۱۵. گزینه (۴) صحیح است؛ زیرا:

$(b \not R b) \Rightarrow$ خاصیت انعکاسی ندارد

$(aRd , d \not R a) \Rightarrow$ خاصیت تقارنی ندارد

$(bRd , dRb) \Rightarrow$ خاصیت پادتقارنی ندارد

$(bRd , dRb) , b \not R b \Rightarrow$ خاصیت تعدی ندارد

۱۶. گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

$\Rightarrow$ (تعداد یک‌ها) $\times ۵ =$ تعداد صفرها

$= \frac{۳۰}{۵} = ۶ \Rightarrow |R| = ۶$ تعداد یک‌ها

پس R، ۶ عضوی است و چون رابطهٔ هم ارزی است؛ پس به صورت زیر است:

$$R = \{(a,a)(b,b)(c,c)(d,d)(e,e)(f,f)\}$$

۱۷. گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

$۱R۲ , ۲ \not R ۱ \Rightarrow$ خاصیت تقارنی ندارد

$۳ \not R ۳ \Rightarrow$ خاصیت انعکاسی ندارد

$(۱R۲ , ۲R۳) , ۱R۳ \Rightarrow$ خاصیت تعدی ندارد

۱۸. گزینه (۱) صحیح است؛ زیرا:

کافی است ابتدا ۱ شاخه از گل نوع اوّل و چهار شاخه از گل نوع چهارم برداریم، که در این صورت، حالا فقط ۴ شاخه از ۹ شاخه باقی‌مانده است که باید به صورت آزاد، از بین ۵ نوع گل انتخاب شوند، که این تعداد انتخاب، برابر است با $\binom{۴+۴}{۴}$ یا $\binom{۸}{۴}$

۱۹. گزینه (۲) صحیح است؛ زیرا:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{۳}{۴} \quad (۱)$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow P(B) = ۳P(A \cap B) \quad (۲)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow P(A) = ۴P(A \cap B) \quad (۳)$$

$$(۱), (۲), (۳) \Rightarrow ۴P(A \cap B) + ۳P(A \cap B)$$

$$- P(A \cap B) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۱}{۸}$$

$$\begin{cases} P(A \cap B) = \frac{۱}{۸} \\ \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۸} = \frac{۳}{۸}$$

۲۰. گزینه (۳) صحیح است؛ زیرا:

در صورت انتخاب جعبهٔ اوّل، احتمال آن که مهرهٔ سفید بیرون آید، برابر $\frac{۵}{۷}$ است و در صورت انتخاب جعبهٔ دوم، همین احتمال برابر $\frac{۷}{۱۲}$ است؛ پس طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A) = \sum_{i=۱}^{n} P(Bi) \times P(A|B!)$$

$$= P(B_۱) \times P(A|B_۱) + P(B_۲) \times P(A|B_۲)$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۵}{۷} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۱۲} = \frac{۶۷}{۸۴}$$



هندسهٔ تحلیلی/

مؤلف: محمدهاشم رستمی

هندسه تحلیلی بیست و پنجمین کتاب از سری کتاب های کوچک ریاضی است که در آن مباحث بردارها، خط و صفحه در فضای IR^3 آمده است. در این کتاب مفهوم های مربوط به هر یک از این مبحث ها، با مثال ها و پرسش های چهارگزینه ای کلیدی که در سطحی بالاتر از کتاب درسی، ولی در ارتباط با آنها می باشد، ارائه گردیده است. همچنین پس از ارائه هر مفهوم، تمرین هایی برای حل و پرسش های چهارگزینه ای هماهنگ با آن مفهوم، آورده شده است. سعی بر این بوده است که کتاب، جنبهٔ خودآموز داشته باشد و بتواند نیاز دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی و داوطلبان کنکور را برآورده کند.



تثلیث زاویه، تربیع دایره/

مؤلفان: پرویز شهریاری/ سیامک جعفری

سه مسألهٔ «تربیع دایره»، «تثلیث زاویه» و «تضعیف مکعب»، که از همان دوران باستان و در بین ریاضیدانان یونانی مطرح شد، توانست بیش از دو هزار سال ریاضیدانان حرفه ای و هم علاقه مندان به ریاضی را به خود مشغول کند. هنوز هم هفته ای نمی گذرد که دست نوشته ای از جای جای سرزمین ایران به ما می رسد که نویسندهٔ آن، مدعی حل کامل یکی از این مسأله ها به یاری خط کش و پرگار شده است. بیشتر این نامه ها به «تربیع دایره» و «تثلیث زاویه» مربوط است. برخی از این راه حل ها درست، ولی به حالت های خاص و برخی دیگر به کلی نادرست است و در کل، می توان گفت که همهٔ آنها به بیراهه رفته اند.

برای این که این تلاش بیهوده و تا حدی «بیمارگونه» جوانان ما را به خود مشغول ندارد، وجود کتابی که بتواند آنها را به راه درست بکشاند، لازم می نمود و تهیه و چاپ کتاب حاضر، به همین هدف خدمت می کند.



تقویم ریاضی دانش آموزی/

مؤلفان: غلامرضا یاسی پور/ حمیدرضا امیری

در این تقویم که بر اساس نه ماه سال تحصیلی تألیف شده، برای هر روز، یک مسأله انتخاب شده است که دانش آموز و خوانندهٔ محترم و علاقه مند به مسائل ریاضی، می تواند در ساعت های فراغت، به تفکر روی یک مسأله و حل آن بپردازد. در این تقویم، اطلاعات جامعی دربارهٔ مجله های ریاضی و تاریخچهٔ آنها، و همچنین مصاحبه های با ارزشی با پیشکسوتان ریاضی انجام شده و در اختیار شما قرار گرفته است.

هر روز علاوه بر مسألهٔ ریاضی مربوط به آن روز ــ که البته حل تمام مسائل در انتهای تقویم آورده شده ــ جمله های زیبا و آموزنده ای دربارهٔ اهمیت علم و دانش و علم اندوزی از معصومین علیهم السلام، زینت بخش مطالب شده و نیز جمله هایی از ریاضیدانان بزرگ در این زمینه به چشم می خورد.

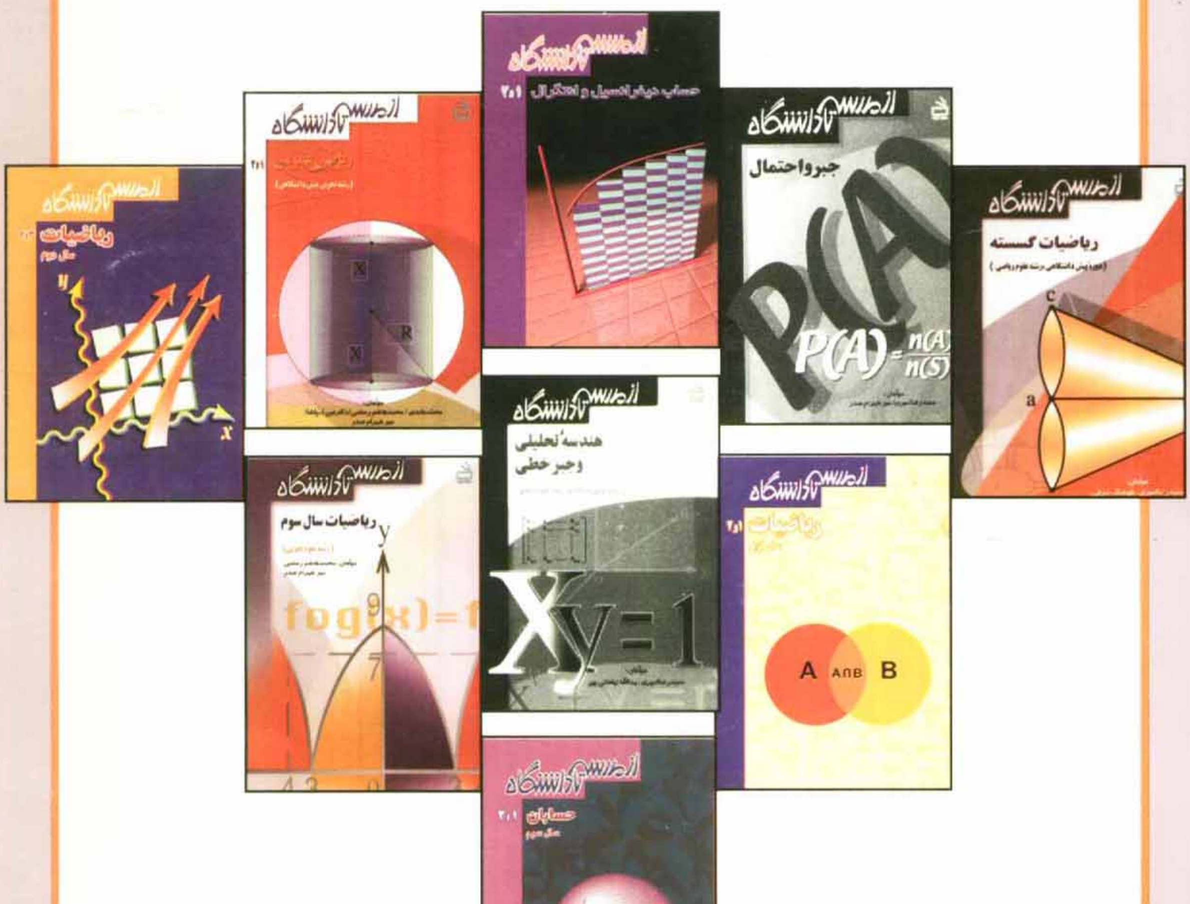
از آن جا که این تقویم بتواند در هر سال تحصیلی قابل استفاده باشد، از ذکر روزهای هفته خودداری شده و فقط به قید تاریخ هر روز اکتفا شده است، که شما با توجه به روزی که مربوط به آن تاریخ است، جدول روبه روی تاریخ را علامت می گذارید.

ناشر برگزیده
سالهای ۷۳، ۷۵
۷۹

انتشارات مدرسه منتشر کرده است
سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

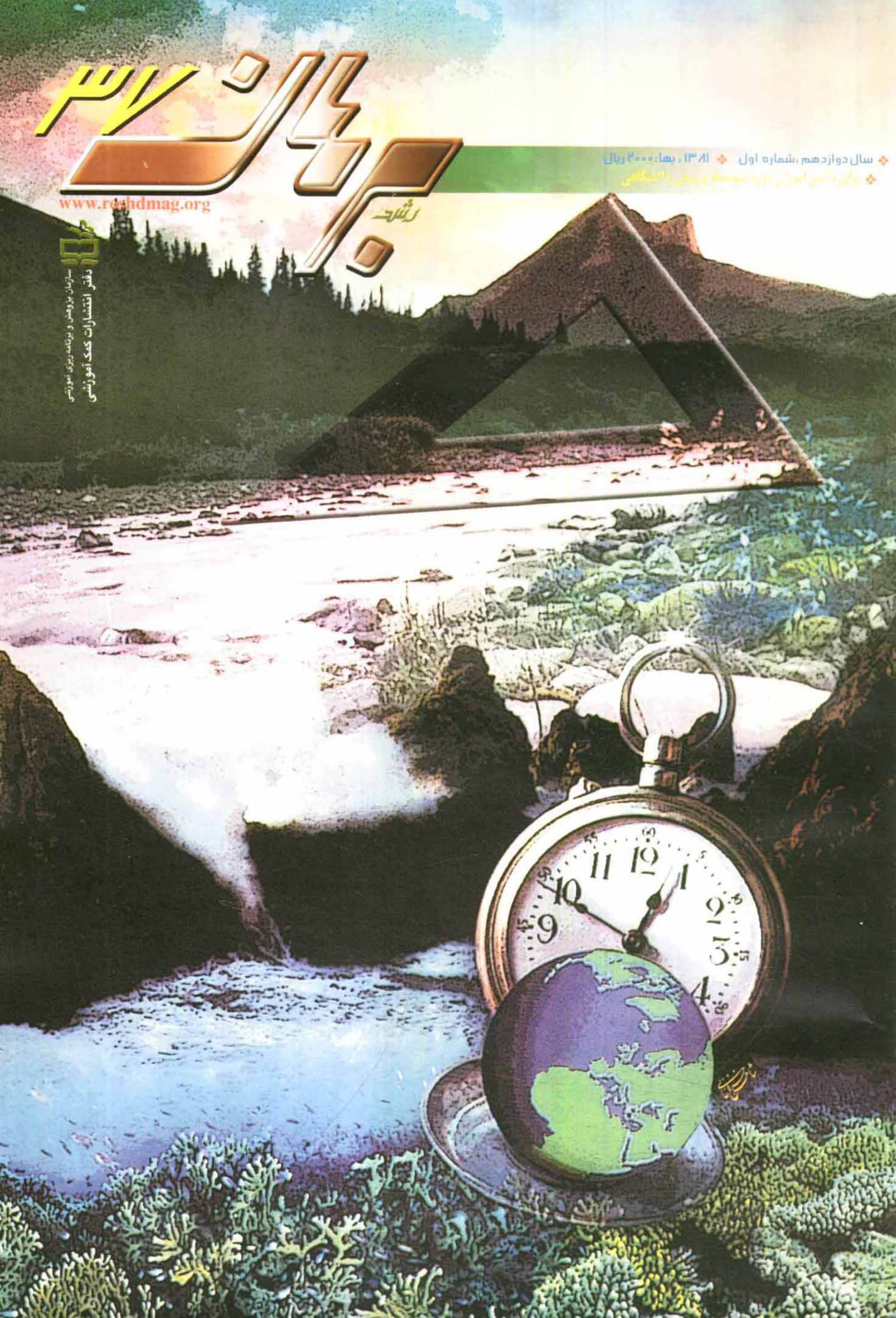
دانش آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته های پنهان در لابه لای این مفاهیم و قضیه ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه ای آشنا می شوند، تا هم برای پاسخ گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.



511670
کد ۱۰۴۶/۱
انتشارات مدرسه

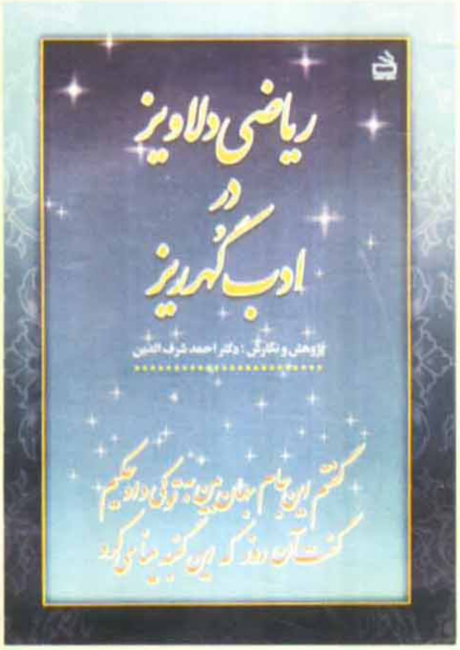
رشد برهان ۳۷

سال دوازدهم، شماره اول ۱۳۸۱، بها: ۲۰۰۰ ریال
برای دانش آموزان دوره متوسطه و پیش دانشگاهی
www.roshdmag.org
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



دربارهٔ ریاضی دلاویز در ادب گهرریز

• اثر دکتر احمد شرف‌الدین



تاکنون مسائل متعددی از آقای «شرف‌الدین» در مجله برهان منتشر کرده‌ایم، که مورد استقبال کامل خوانندگان قرار گرفته است. افزون بر این، از ایشان سه کتاب ارزنده در مجموعهٔ کتاب‌های انتشارات مدرسه به چاپ رسیده است. در سال ۱۳۷۳، کتابی از ایشان تحت عنوان «هندسهٔ تحلیلی چند محوری و چند رساله دیگر» منتشر شد. در آن کتاب، آقای شرف‌الدین یکی از تحقیقات خود را در هندسه عرضه کرده بودند که در حقیقت، یک نوع هندسهٔ تصویری جدید است. آقای شرف‌الدین در کتاب یاد شده، بسیاری از قضیه‌های هندسه را به راه‌های بسیار ساده اثبات کرده‌اند. کتاب هندسهٔ تحلیلی چند محوری، در پنج هزار نسخه به چاپ رسید و پس از یک سال، دوباره در پنج هزار نسخه تجدید چاپ شده است. این امر، میزان استقبال از کتاب یادشده را نشان می‌دهد. در سال ۱۳۷۷، انتشارات مدرسه از ایشان، کتاب «هندسهٔ دلپذیر» را چاپ کرد که اثری است بدیع و مورد استقبال کامل قرار گرفت.

انتشارات مدرسه در بهار امسال، کتاب «ریاضی دلاویز در ادب گهرریز» را منتشر کرد. کتاب اخیر، اثری است بدیع و بسیار جذّاب. این کتاب می‌تواند مورد استفاده طیف وسیعی از خوانندگان، اعم از استاد، دبیر، دانشجو و دانش‌آموز قرار گیرد. در کتاب ریاضی دلاویز در ادب گهرریز، موضوع‌های متنوّعی عرضه شده است؛ از آن جمله‌اند: به کارگیری منطق ریاضی برای درست خواندن بعضی عبارت‌های ادبی، توضیح نکته‌های فلسفی لطیف در بعضی اشعار شاعران ایران، جست‌وجوی مسائل ریاضی در دانستنی‌های همگانی (فولکلور) ایرانی، مثال‌های جذّاب از حساب ابجد، فرمول در ریاضیات و در ادبیات، سخنی از نیوتن و چند شاعر ایرانی، شاعر و ریاضی‌دان با آفرینندگی خود زنده‌اند، دلمشغولی‌های شاعر و ریاضی‌دان، سخنی از اینشتین و همانند آن از چند شاعر ایرانی، لف و نشر[1] در ادبیات و ریاضیات، مبحث تناقض در ادبیات و ریاضیات، حکمت و ریاضیات و حکمت در ادبیات فارسی، استدلال ریاضی و استدلال تمثیلی، آرایش معنوی کتاب‌ها، نکته‌های علمی در ادبیات فارسی، سخنی شعرگونه از چند ریاضی‌دان و فضای پرواز اندیشه در ریاضیات و ادبیات.



۱) لف و نشر، یک صنعت ادبی است.

رشد برهان

❖ سال دوازدهم، شماره اول ❖ ۱۳۸۱

❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: ۲۰۰۰۰ نسخه

❖ برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش دانشگاهی

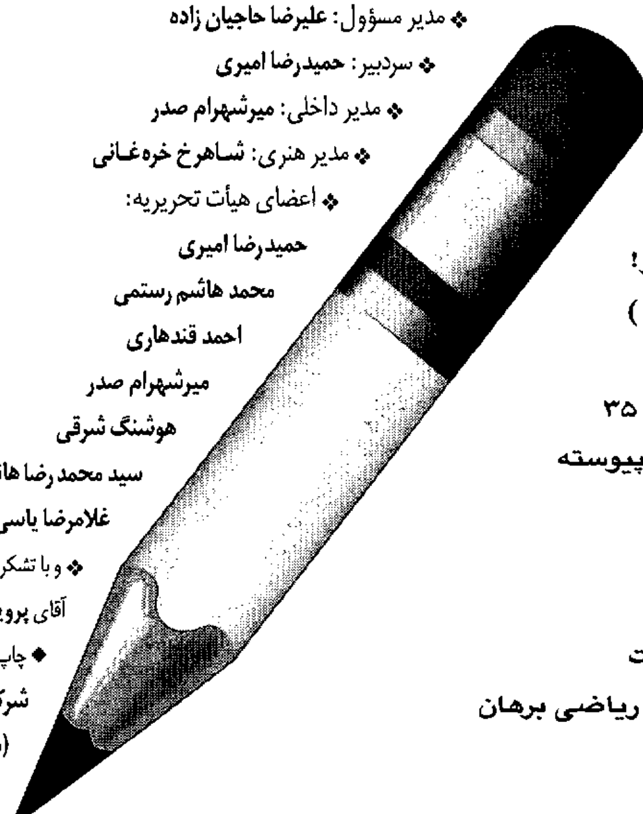
www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

◆ چاپ و صحافی:

شرکت افست

(سهامی عام)



۲ حرف اول

۳ از تاریخ بیاموزیم

۸ تابع معکوس

۱۶ مقاطع مخروطی (۱)

۲۴ آزمون چندگزینه ای: هشدار!

۳۰ گراف ها و کاربردهای آن (۱)

۳۸ مکان هندسی (۲۶)

۴۱ حل مسألهٔ مسابقه ای برهان ۳۵

۴۲ احتمال در فضای نمونه ای پیوسته

۵۰ معادلهٔ خط (۲)

۵۶ استفاده از ماشین حساب

۵۹ روش‌های محاسبه سریع

۶۲ همراه با درس های ریاضیات

۶۴ شرایط و فرم اشتراک مجله ریاضی برهان

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

✍ **نگارش مقاله های کمک درسی** (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه) ✍ **طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها** (برای دانش آموزان) ✍ **طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها** (برای دانش آموزان) ✍ **طرح معماهای ریاضی** ✍ **نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی** (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

✍ مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ✍ مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

✍ مقاله های رسیده مسترد نمی شود. ✍ استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

حرف اول

شاید شما اولین نوبتی است که مجله ای ریاضی به نام رشد برهان را مطالعه می کنید، مجله ای که در آستانهٔ دوازدهمین سال چاپ آن هستیم، مجله ای که توسط دفتر انتشارات کمک آموزشی وزارت آموزش و پرورش و منحصراً برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه و پیش دانشگاهی طراحی ، چاپ و منتشر می شود.

تاکنون این مجله فقط در تعدادی معدود کتاب فروشی توزیع می شد، ولی بحمدلله و با تلاش مسؤولین انتشارات مدرسه برهان و دفتر انتشارات کمک آموزشی از این به بعد در مدارس و مراکز آموزشی به راحتی در اختیار شما علاقه مندان به ریاضی قرار خواهد گرفت. اگر شما بخواهید، می توانید با پر کردن فرم اشتراک که در انتهای مجله آمده است، مشترک شوید و شماره های بعدی و حتی شماره های قبل را تهیه کنید.

همان طور که در ابتدای مجله می خوانید، از هرگونه پیشنهاد و نظرات شما استفاده کرده و منتظر مقاله ها و مسائل طرح شده با حل آنها از طرف شما هستیم تا با نام خودتان به چاپ برسانیم. در این زمینه می توانید از دبیر محترمتان کمک گرفته و راهنمایی های ارزندهٔ ایشان را در نوشتن مقاله های خود به کار ببرید.

در حال حاضر، این مجله به صورت فصلنامه چاپ می شود که امیدواریم بتوانیم فاصلهٔ چاپ هر مجله تا شمارهٔ بعدی را کمتر کنیم.

عزیزان دانش آموز، سال تحصیلی آغاز شد، به یاد داشته باشید که پیشرفت تحصیلی و موفقیّت در کسب علم و دانش پارامترهای زیادی داشته است که به طور اجمال به مهمترین آنها اشاره می کنیم.

سرآغاز همهٔ آنها توکّل به خداوند است و حرکت برای او و در جهت رضای او و سپس، کوشش و تلاش و پشت کار و برنامه ریزی که بدون آن احتمال تلف شدن و به بطالت گذشتن اوقات بسیار است، استفاده از منابع خوب و استاندارد کمک درسی و کمک آموزشی تا وسعت دیدمان نسبت به مطالب و موضوع های درسی افزایش یابد، حضور به موقع و پیوسته در کلاس های درس و استفاده هرچه بیشتر از دانش و تجربهٔ دبیران محترم و ایجاد یک ارتباط خوب با ایشان و بهره مندی از راهنمایی های ارزندهٔ ایشان.

دانش آموزان عزیز، همچنین از شما می خواهیم راجع به کتاب درسی ریاضی خودتان برای ما بنویسید، کدام بخش را خوب فهمیدید، کدام مبحث کمبودی دارد یا معلم بیان می کند برای شما سنگین بوده، راجع به چه موضوعی اطلاعات بیشتری می خواهید و کاربرد آن را نمی دانید و... تا ان شاءالله در حد توانمان شما را یاری دهیم، به امید دیدار نامه ها و مقاله های شما.

سردبیر



از تاریخ ریاضی قدیم

پرویز شهریاری

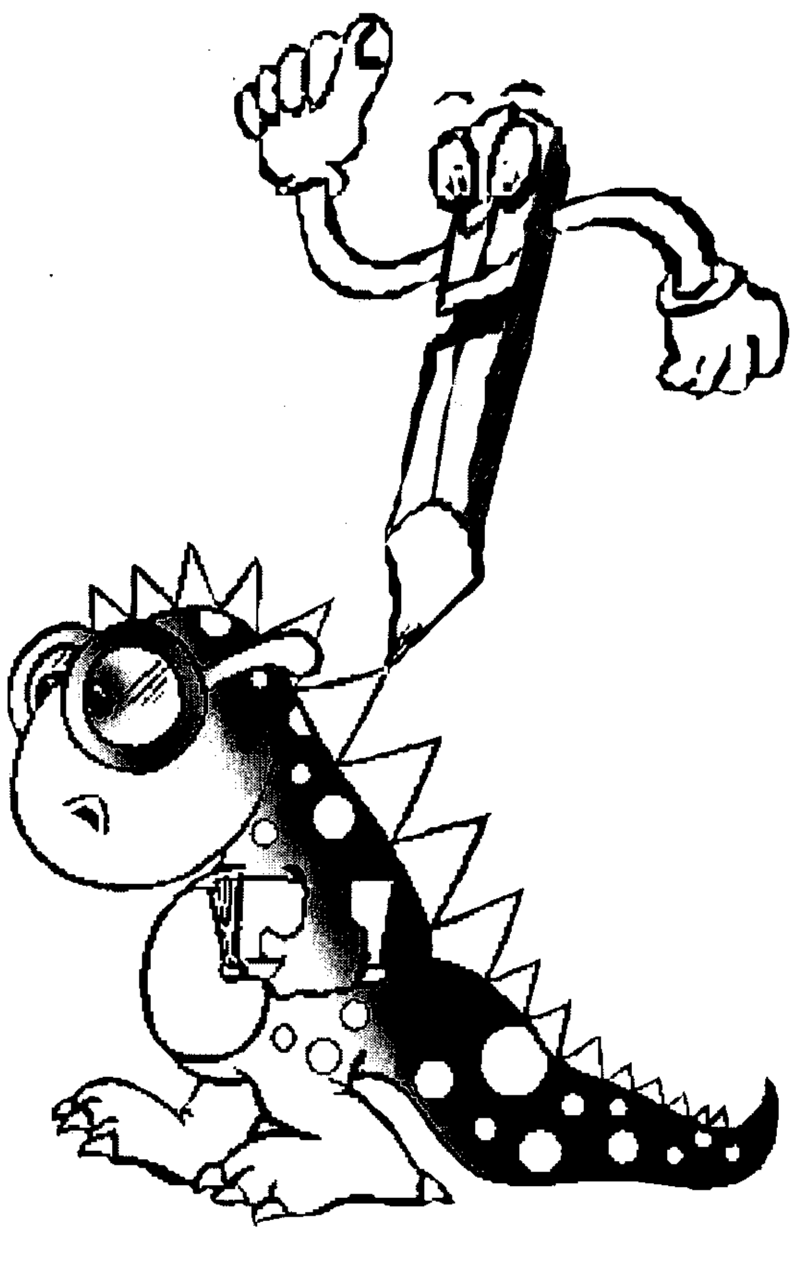
جمع بندی گذشته

تا این جا به بحث درباره‌ٔ تاریخ ریاضیات در بین ملت‌های کهن پرداختیم. دیدیم چگونه در دنیای کهن، به تدریج بر آگاهی‌های انسان در زمینهٔ ریاضیات افزوده می‌شد و چگونه به تدریج دانش ریاضی شکل می‌گرفت. در واقع، دوران نخستین تاریخ تکامل ریاضیات، طولانی‌ترین دورهٔ تاریخی به شمار می‌رود و از همان آغاز، پیدایش انسان تا سدهٔ ششم پیش از میلاد ادامه داشته است. در این دوره، همهٔ ملت‌ها دست‌اندرکار ساختمان این کاخ پرشکوهی که امروز ریاضیات نامیده می‌شود، سهیم بوده‌اند. هیچ ملتی از این گردونه خارج نبوده است. حتی وقتی پای اروپائیان به سرزمین امریکا رسید، با چنان فرهنگی روبه‌رو شدند که آنها را شگفت‌زده کرد؛ به ویژه قوم‌های «اینکاوآزتک»، درزمینه‌های مختلف، از هنر گرفته تا دانش، چنان پیش رفته بودند که بیرون از نظام اجتماعی حاکم بر آنها، کسانی که بر آنها هجوم برده بودند، دچار حیرت کرد. افسوس که تمام آثار هنری و علمی بومیان امریکا بوسیلهٔ غارتگران اسپانیایی و پرتغالی، به غارت رفت و نابود شد. آثار هنری که اغلب به صورت مجسمه بود، آب شد و به شکل شمش‌های طلا، به اسپانیا و پرتغال برده شد. کتاب‌های علمی آنها معدوم و خط و زبان آنها فراموش شد، تنها یادگارهای عظیمی از آنها باقی ماند که در روزگار ما تلاش می‌شود پرده از رازهای آنها برداشته شود و معلوم شده است، اغلب آنها رصدخانه‌هایی بوده‌اند که برای یافتن وقت و زمان به کار می‌رفته‌اند. از نظر ریاضی، می‌توانستند عمل‌هایی را انجام دهند، در بعضی جاها از مبنای ۵ برای عددشماری استفاده کنند و بدون تردید، برای محاسبه‌های اخترشناسی، نیاز به محاسبه‌های پیچیده‌ای داشتند، که از عهدهٔ آن

برمی‌آمدند.

وقتی هم که از سرزمین بابل نام برده می‌شود، بابل و عیلام را به هم مخلوط کرده‌اندو از جمله «نیگه بادر» که از پژوهشگران جدّی است که دربارهٔ بابل کتابی دارد با دقت، کارهای ریاضی و اخترشناسی بابلی را مورد مطالعه قرار داده است، دانش عیلامی را (در جنوب و جنوب غربی ایران کنونی) در بیشتر جاها، با دانش بابلی درهم آمیخته است و از جمله، هندسهٔ عیلامی را، همان هندسهٔ بابلی دانسته است بابلی‌ها بیشتر روی محاسبه کار می‌کردند و عیلامی‌ها بیشتر به مباحث هندسه می‌پرداختند، ازجمله در زمینهٔ هندسه، به قضیهٔ فیثاغورس بسیار نزدیک شده و نمونه‌های متفاوتی از قضیهٔ فیثاغورس را آورده بودند و می‌خواستند ثابت کنند که در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر (البته روی نمونه‌های مشخص).

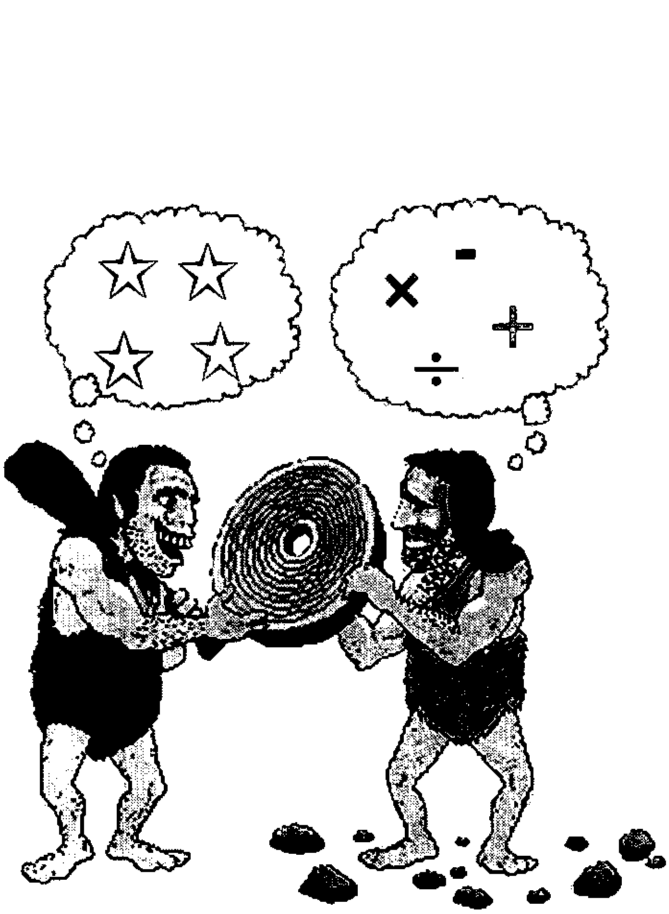
وضع در کشورهای چین، هند، ژاپن و دیگر سرزمین‌هایی که انسان زندگی می‌کرد، به همین گونه بود. خصلت اصلی ریاضیات در این دوران طولانی، کار روی آن بود. در همه جا محاسبه برای نگهداری شمار جانوران و حساب فرزندان، و در دوره‌های جدیدتر، به منظور معامله و بازرگانی به کار می‌رفت، و هندسه به قصد اندازه‌گیری زمین و برپا داشتن خانه‌ها، نیایشگاه‌ها و قصرها به کار می‌رفت و جنبهٔ نخست ریاضیات، جنبهٔ کاربردی آن بود. در این دوره از تاریخ ریاضیات، البته با تدریج نکته‌هایی از ریاضیات نظری سر برمی‌آورد و در میان مسأله‌های معکوس و مسأله‌های دیگری که برای دانش‌آموزان مطرح می‌شد، نمایان می‌شد. از همین جا بود که مسأله‌های مربوط به حل معادله‌ها و تصاعدها بیرون آمد وبه تدریج جای خود را باز کرد، و پوستهٔ تنگ ریاضیات کاربردی را شکافت و به صورت ریاضیات نظری، که با منطق و استدلال درونی همراه بود، شکل گرفت. سرچشمهٔ ریاضیات یونانی



را باید در ریاضیات پیش از آن و به ویژه ریاضیات بابلی و ایرانی جست‌وجو کرد. ریاضیدانان یونانی، اغلب در مصر، بابل و ایران تحصیل کرده بودند و بسیاری از آنان مانند «تالس» و «اقلیدس»، در سرزمین‌هایی زندگی می‌کردند که در قلمرو ایران بود. در سدهٔ پنجم پیش از میلاد، در زمان خشایارشا، حکیمی به نام «استانس» از ایران، به مصر رفت و معلم بسیاری از پیشروان دانش یونان بود. فیثاغورس، دموکریت، هراکلیت و افلاتون تحت تأثیر او بودند. دموکریت «مُغ نامه» را به نام او نوشت. حتی «جابربن حیّان» و «زکریای رازی» در کتاب‌های خود از او نام می‌برند. او که به بزرگ مُغان و زرتشت ثانی مشهور بود، توانست بسیاری از فیلسوفان یونانی را تعلیم دهد. فیثاغورس شهرت داشت که دانش مغان را در بابل و ایران آموخته بود. هنوز در این باره که چگونه دانش مصری، بابلی و ایرانی به یونان نفوذ کرد، بحثی جدّی نشده است و سرچشمه‌های دانش یونانی شناخته نشده است. باید در این زمینه، بحثی جدّی درگیرد تا سرچشمه‌های دانش یونانی شناخته شود. از نظر فلسفی هم، این مسأله که یکباره، در یونان دانش می‌درخشد و بی هیچ زمینه‌ای رشد می‌کند و به درجات بالا می‌رسد، قابل توجیه نیست، به تازگی روشن شده است که در زمان ساسانیان، که گمان می‌کردند دانش ایرانی از طریق اوستا (اوستا یعنی نادانسته‌ها) به یونان منتقل شده و طی قرن‌ها تسلط یونانیان بر ایران، خود اوستا گم شده است، به ترجمهٔ آثار یونانی پرداختند تا از آن میان، اوستای گم شدهٔ خود را بیابند. معلوم شد که «هرمی توس» بیست جلد سروده‌های زرتشت را جمع کرده بود تا به تحصیل آنها بپردازد. معلوم شد در سدهٔ اوّل میلادی که آپولینوس به ایران سفر کرده بود، در ایران به محاسبهٔ شعاع زمین پرداخته بودند. خود گاه شماری ایرانیان که قدمتی بسیار کهن دارد، نشانهٔ دیگری بر پیشرفت اخترشناسی در ایران است. در ایران از روزگاران قدیم، گاه شماری خورشیدی را به کار می‌بردند و گاه شماری قمری را کنار



گذاشته بودند، و این، همراه با پیدایش کشاورزی بود. وقتی انسان به کشاورزی روی آورد، نمی توانست با گاه شماری قمری بسازد. کشت محصول نیاز به زمان دقیق سال داشت، همچنین برداشت آن. دولت هم برای گرفتن مالیات، باید می دانست چه موقع مراجعه کند تا مالیات دهنده بتواند دین خود را بپردازد.



از این گذشته، فیلسوفان اولیهٔ یونانی، بیشتر در صدد نشر فلسفهٔ خود بودند و کمتر به مسائل علمی می پرداختند. یونان در نظام بردگی به سر می برد و جامعه به دو قشر آزاد و برده تقسیم شده بود. آزادها هیچ کاری نمی کردند، جز این که فلسفهٔ خود را نشر دهند. هر فیلسوفی برای خود فلسفه ای داشت؛ فیثاغورس و هواداران او مبنای همه چیز را عدد می دانستند، تالس مبنای همه چیز را آب می دانست، دموکریت مبنای همه چیز را ذرّه های غیرقابل تقسیم (اتم ها) می دانست و... یونانی ها حتی دانشی را که به کار عمل می خورد، تحقیر می کردند و دانش به حساب نمی آوردند، و اگر از استثناهایی مانند ارشمیدس بگذریم، که گویا خود برده های آزادشده بود، کار مربوط به دانش کاربردی را دانش برده ها به حساب می آوردند.

یونانی ها حتی عدد نویسی نداشتند و عدد ۲ را با حرف های الفبا می نوشتند. این از یک طرف کار محاسبه را پیچیده می کرد؛ به نحوی که ریاضیات محاسبه ای در یونان، به طور کلی پدید نیامد و از طرف دیگر، چون بیشتر محاسبه های خود را به کمک هندسه انجام می دادند و مقدارها را با پاره خط مشخص می کردند، در محاسبه ها دچار تقریب می شدند، و این، به بی دقت محاسبه کمک می کرد. یونانی هندسه را در رأس ریاضیات قرار می دادند و به همین دلیل، تا درون هندسهٔ عالی پیش رفتند؛ ولی در ریاضیات محاسبه ای
حتی گامی برنداشتند.

تاریخ ریاضیات ر
باید از نو ساخت. برای
این منظور نبای
ریاضیات کاربردی را ا
ریاضیات نظری جد
کرد. ریاضیات دو
انگیزه برای پیشرفت
خود دارد: ۱) انگیز
بیرونی؛ یعنی آنچه ا
بیرون و به خاطر
نیازهای زندگی و عملی
به ریاضیات تحمیل
می شود و ۲) انگیزهٔ درونی؛ یعنی
آنچه از راه منطق و استدلال درونی
ریاضیات، به وجود می آید. این دو
عامل، تقریباً با هم و در طول تاریخ
به تناوب به پیشرفت ریاضیات یاری
رسانده اند. گاهی این گاهی آن جلو
افتاده است و دیگری را تحت تأثیر
خود گرفته است؛ ولی از آن جا که ن
عمل از نظریه و نه نظریه از عمل
نتوانسته است خیلی فاصله بگیرد
همیشه آن که عقب مانده است، خو
را به دیگری رسانده است. اکنون د
دوران تفوّق کاربرد بر عمل زندگی
می کنیم و هرچه در ریاضیات پدید
می آید، به دنبال کاربرد آن هست
از اوّل، اشکالی در یک مسألهٔ عملی
پیدا می شود، و در نظریه به دنبال
راه چاره برای آن می گردند.

اگر به این ترتیب تاریخ ریاضیات را بررسی کنیم، نه ملتی به کنار می‌رود و نه سرزمینی از قلم می‌افتد. روشن می‌شود که همهٔ ملت‌های جهان، کم یا بیش، در ساختن این فرهنگ باشکوه انسانی دست داشته‌اند و دیگر دانش و هنر از سرزمین کوچکی مانند یونان واقع در خاک اروپا آغاز نشده است. در دورهٔ سده‌های میانه، به خاطر تسلط جهل بر مردم، قریب هزارسال، ناتوان مانده و بعد دوباره در اروپا آغاز به رشو و نما کرده است. این تفسیر، بجز این که از روحیهٔ نژادپرستانه‌ای حکایت می‌کند، با اصل نفی در نفی در تاریخ نمی‌سازد و دیالکتیکی نیست. تاریخ را باید همان‌گونه که هست، ورق زد.

برای نمونه از ایران یاد کنیم. ایران در دورهٔ از سدهٔ دهم میلادی تا سدهٔ پانزدهم، یک دورهٔ تاریخی ریاضیات را ما به صورت کاربردی و با استفاده از همهٔ دستاوردهای دورهٔ کاربردی مصر، بابل، ایران و... و هم با استفاده از ریاضیات نظری یونان باستان (که قریب هزار سال طول کشید) فراهم کرد و در اساس ریاضیات کاربردی بود و به حلّ مسأله‌های عملی روز می‌پرداخت و هرجا که لازم بود، رخنه‌ها را پر می‌کرد، و برای کار خود ریاضیات را به جلو می‌برد. «محمد موسا خوارزمی» جبر را به دلیل نیاز کسانی که در زمینهٔ مسائل مربوط به ارث در فقه اسلامی نیاز داشتند، به وجود آورد و «ابوریحان بیرونی» و «ابوالوفای بوزجانی» مثلثات را به خاطر ساده‌تر کردن محاسبه‌های مربوط به اخترشناسی آوردند.

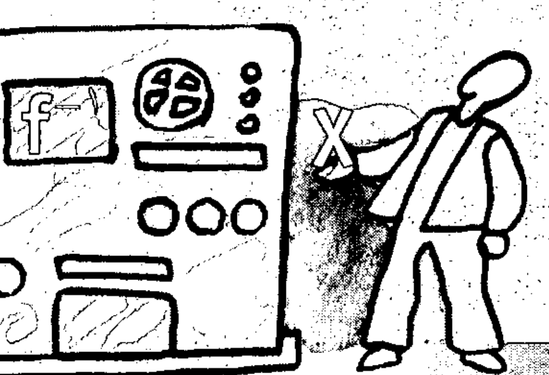
پس از این جا، تاریخ ریاضیات را به همین گونه بررسی می‌کنیم؛ یعنی ریاضیات را در کل خود، به صورت کاربردی و نظری، و به صورت یگانه خود مورد بررسی قرار می‌دهیم. این درواقع، فلسفهٔ تاریخ ریاضیات است، نه خود تاریخ. در این جا یک تاریخ مدوّن برای ریاضیات نمی‌بینید و بیشتر به فلسفهٔ تاریخ پرداخته‌ایم. از علت و چگونگی تبدیل ریاضیات کاربردی به ریاضیات نظری و بعکس آن، سخن گفته‌ایم و در هر مورد، مثال‌ها و شواهدی که در دست است، آورده‌ایم.

امید است که این بحث بتواند به روشن‌تر شدن مسیر تاریخ ریاضیات یاری رساند و از ابهام‌ها و نارسایی‌های موجود جلوگیری کند.

در تاریخ ریاضیات، به ندرت به مطالبی برمی‌خوریم که پس از آن نقض شده باشند. همیشه بر دقت ریاضیات افزوده شده و به حقیقت نزدیکتر شده است؛ ولی به ندرت قانونی یا دستوری نقض شده است. شما امروز می‌توانید از نوشته‌های ارشمیدس و آپولونیوس به خوبی استفاده کنید و تنها روشن‌تر و شفّاف‌تر شده‌اند؛ درحالی که در دانش‌های دیگر چنین نیست؛ ازجمله اخترشناسی به کلی دگرگون شده و دیگر نیازی به مطالعهٔ «المجسطی» (کتاب بزرگ بتلمیوس دربارهٔ اخترشناسی) نیست. این کتاب تنها از نظر تاریخی می‌تواند مفید باشد.

نکته‌ای را هم یادآور شویم. ریاضیات در قدیم مجموعهٔ بزرگتری را در برمی‌گرفته است و شامل موسیقی، اخترشناسی و... هم می‌شده است. ما در این جا، تنها از ریاضیات صحبت می‌کنیم؛ چه ریاضیات کاربردی و چه ریاضیات نظری، و به جنبه‌های دیگری که به کار ریاضیات می‌آید، تنها از جنبهٔ کاربرد ریاضیات در آنها، بحث کرده‌ایم.





احمد قندهاری

تابع معکوس: f^{-1}

برای دانش‌آموزان سال سوم

پیش از بحث دربارهٔ تابع معکوس، باید تابع یک به یک را یادآوری کنیم.

تابع $f: A \to B$ را یک به یک گوییم؛ هرگاه: هیچ دو زوج مرتّب متمایز آن، دارای مؤلّفه‌های دوم برابر نباشد. برای مثال، اگر دو تابع f و g به صورت‌های زیر باشند:

$f = \{(1,4),(2,5),(3,7)\}$ و $g = \{(1,4),(2,5),(3,4)\}$ ،

آن‌گاه تابع f یک به یک است؛ ولی تابع g یک به یک نیست؛ زیرا در تابع g دو زوج اول و سوم، دارای مؤلّفهٔ دوم برابرند.

۱. تابع یک به یک:

تابع f را در بازهٔ $[a,b] \subset D_f$ ، وقتی یک به یک گوییم که:

$$\forall x_1, x_2 \in [a,b] \quad : \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال (۱): نشان دهید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + 5$ در $D_f = \mathbb{R}$ یک به یک است.

حل:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 5 = x_2^3 + 5 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع f در $\mathbb{R}$ یک به یک است.

مثال (۲): ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = x^3 + 5x + 2$ در $D_f = \mathbb{R}$ یک به یک است.

حل:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f = \mathbb{R}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 5x_1 + 2 = x_2^3 + 5x_2 + 2 \Rightarrow$$

$$x_1^3 - x_2^3 + 5x_1 - 5x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) + 5(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5) = 0$$

الف: $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

در این جا نمی‌توان نتیجه گرفت که تابع فوق، یک به یک است؛ بلکه باید ثابت شود معادلهٔ پرانتز دوم مساوی صفر، ریشهٔ حقیقی ندارد.

ب: $x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 + 5 = 0$

فرض می‌کنیم، مجهول معادلهٔ x_1 باشد؛ این معادله را بر حسب x_1 مرتّب می‌نویسیم.

$$x_1^2 + \underbrace{x_2}_{b} x_1 + (x_2^2 + 5) = 0 \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = x_2 \\ c = x_2^2 + 5 \end{cases}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = x_2^2 - 4(x_2^2 + 5) = -3x_2^2 - 20 < 0$$

چون $\Delta < 0$ پس معادلهٔ پرانتز دوم مساوی صفر، ریشهٔ حقیقی ندارد؛ در نتیجه می‌توان گفت که تابع f در $\mathbb{R}$ ، یک به یک است.

مثال (۳): ثابت کنید تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{2x+1+3\sqrt{2x-1}}$ در دامنه‌اش یک به یک است.



$$\begin{cases} 2x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge \frac{1}{2} \\ 2x+1+3\sqrt{2x-1}>0 \end{cases}$$

$$D_f=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

با شرط $x\ge \frac{1}{2}$ برقرار است

حال بررسی یک به یک بودن تابع :

$$\forall x_1,x_2\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right) \quad :f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow$$

$$\sqrt{2x_1+1+3\sqrt{2x_1-1}}=\sqrt{2x_2+1+3\sqrt{2x_2-1}}$$

فرض می‌کنیم

$$2x_1-1=a\Rightarrow 2x_1=a+1$$
$$2x_2-1=b\Rightarrow 2x_2=b+1$$

$$\sqrt{a+2+3\sqrt{a}}=\sqrt{b+2+3\sqrt{b}}\Rightarrow$$
$$a+2+3\sqrt{a}=b+2+3\sqrt{b}\Rightarrow$$
$$(a-b)+3\sqrt{a}-3\sqrt{b}=0\Rightarrow$$
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)+3\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=0$$
$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\underbrace{\sqrt{a}+\sqrt{b}+3}\right)=0\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}=0\Rightarrow$$

$$\sqrt{a}=\sqrt{b}\Rightarrow a=b\Rightarrow 2x_1-1=2x_2-1\Rightarrow$$
$$2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

پس این تابع در $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ ، یک به یک است.

بیان دیگر تابع یک به یک:

تابع مشتق‌پذیر f را در بازهٔ $[a,b]\subset D_f$ ، وقتی یک به یک گوییم که : در این بازه $f'(x)\ge 0$ یا $f'(x)\le 0$ ؛ به شرطی که معادلهٔ $f'(x)=0$ ، یا ریشه نداشته و یا ریشه‌های قابل شمارش داشته باشد.

مثال (۱) : تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^4+4x^2$ در $\mathbb{R}^+$ یک به یک است زیرا :

$$f'(x)=4x^3+8x=4x\left(x^2+2\right)\ge 0$$

$f'(x)=0$ یک ریشه دارد. $f'(x)=0\Rightarrow x=0$

مثال (۲) : تابع با ضابطهٔ $f(x)=x+\text{Cos}x$ در $\mathbb{R}$ ، یک به یک است زیرا :

$$f'(x)=1-\text{Sin}x\ge 0$$

$$1-\text{Sin}x=0\Rightarrow \text{Sin}x=1\Rightarrow x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ (k\in z)$$

جواب‌هایی که از رابطهٔ $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ به دست می‌آید، قابل شمارش است؛ چون $f'(x)\ge 0$ ، پس این تابع در $\mathbb{R}$ ، یک به یک است.

مثال (۳) : اگر در تابع f داشته باشیم : $D_f=\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=-x^2(x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2\cdots(x-n)^n\ ,\ n\in N$$

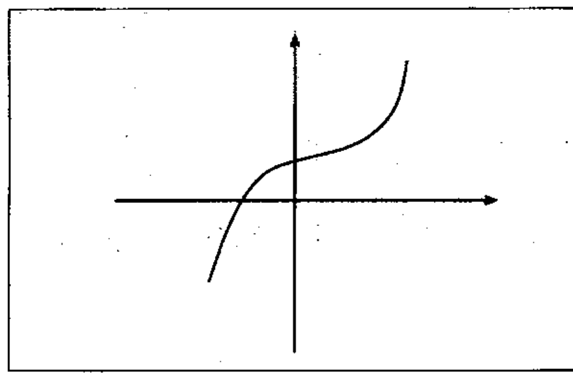
آن‌گاه : $f'(x)\le 0$ و معادلهٔ $f'(x)=0$ ، n تا ریشه دارد که

قابل شمارش است. پس تابع f در $\mathbb{R}$، یک به یک است.

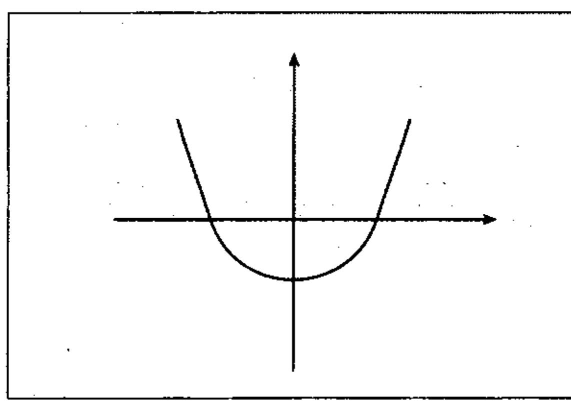
سؤال: نمودار یک تابع در چه صورت، نمودار یک تابع یک به یک است؟

جواب: وقتی که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

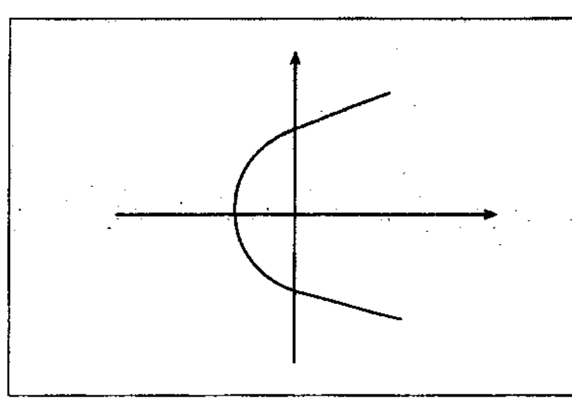
به نمودارهای زیر توجه کنید:



تابع هست، ولی یک به یک است



تابع هست، ولی یک به یک نیست



تابع نیست

۲. تابع معکوس:

اگر f تابعی به صورت $f=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ و g تابعی به صورت $g=\{(a,1),(b,2),(c,3)\}$ باشند، آن‌گاه این دو تابع را معکوس یکدیگر گوییم. ملاحظه می‌کنیم که جای مؤلّفه‌های زوج مرتّب تابع f را عوض کرده‌ایم و تابع g به دست آمده است.

حال این سؤال مطرح می‌شود که: اگر در هر تابع، جای مؤلّفه‌های زوج مرتّب آن را عوض کنیم، آن‌گاه آیا تابع جدیدی به دست می‌آید که معکوس تابع اصلی است؟

پاسخ این سؤال منفی است؛ مگر این که تابع اصلی، یک به یک باشد.

تعریف: اگر f تابعی به صورت $f=\{(x,y) \mid y=f(x)\}$ باشد، چنانچه تابعی مانند g وجود داشته باشد، به طوری که $g=\{(y,x) \mid x=g(y)\}$؛ آن‌گاه دو تابع f و g را معکوس یکدیگر گوییم.

از این تعریف نتیجه می‌شود که تابع g وقتی وجود دارد که تابع f یک به یک باشد.

پس:

۱. تابع f را در بازهٔ $[a,b]\subset D_f$ وقتی معکوس‌پذیر گوییم که این تابع در این بازه یک به یک باشد.

۲. تابع معکوس تابع f را با نماد f^{-1} نشان می‌دهیم (توجه کنیم که $f^{-1}\neq\frac{1}{f}$)

۳. برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس یک تابع معکوس‌پذیر، باید متغیر را از تابع اصلی پیدا کرد، سپس جای تابع و متغیر را عوض کرد (شرایط مسأله را در آن درنظر می‌گیریم).

۴. اگر $A(x,y)$ یک نقطه از تابع f باشد، آن‌گاه $A'(y,x)$ متناظر نقطهٔ A روی تابع f^{-1} است.

۵. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} قرینهٔ یکدیگر نسبت به خط $y=x$ هستند.

مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x \;,\; x\geq 1$ مفروض است:

الف ـ تحقیق کنید f معکوس پذیر است.

ب ـ ضابطهٔ تابع معکوس تابع f را بیابید.

ج ـ نمودارهای هر دو تابع f و $f^{-۱}$ را در یک شکل رسم کنید.

حل الف. $f(x)=x^{۲}-۲x \quad , \quad x\geq ۱$

زیرا: $f'(x)=۲x-۲\geq ۰ \quad , \quad x\geq ۱$

چون $f'(x)\geq ۰$ و معادلهٔ $f'(x)=۰$، یک ریشه دارد، پس تابع f یک به یک است؛ در نتیجه معکوس‌پذیر است.

حل ب.

$$y=x^{۲}-۲x$$

$$x^{۲}-۲x+۱=y+۱\Rightarrow (x-۱)^{۲}=y+۱\Rightarrow x-۱\underset{x\geq ۱}{=}\sqrt{y+۱}\Rightarrow$$

$$x=\sqrt{y+۱}+۱$$

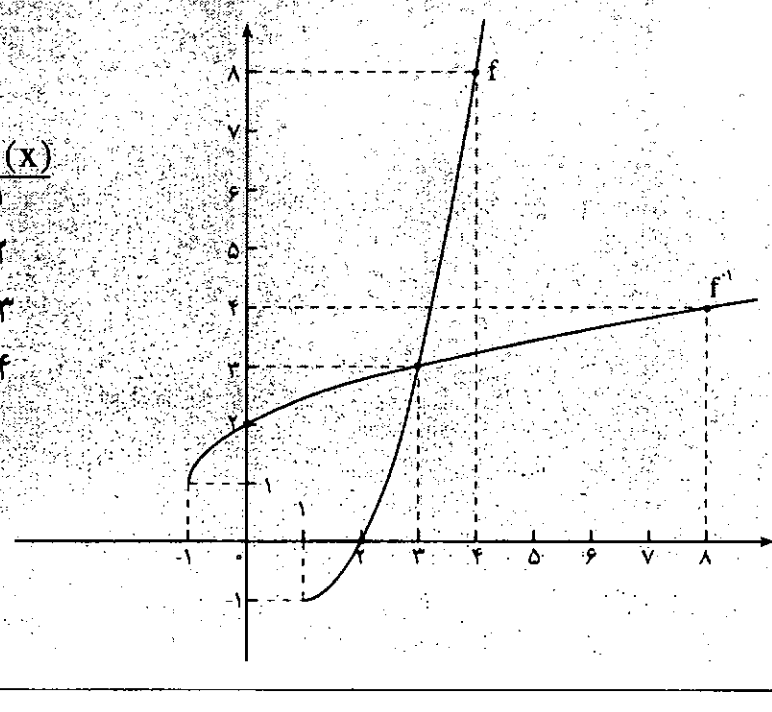
جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{x+۱}+۱=f^{-۱}(x) \quad , \quad x\geq -۱$$

حل ج.

x	f(x)
۱	−۱
۲	۰
۳	۳
۴	۸

x	$f^{-۱}(x)$
−۱	۱
۰	۲
۳	۳
۸	۴



مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{۴}-۸x^{۲}$ با شرط $۰\leq x\leq ۲$ مفروض است:

الف. ثابت کنید این تابع در بازهٔ $[۰,۲]$ معکوس‌پذیر است.

ب. ضابطهٔ تابع معکوس، تابع f را بیابید.

حل الف.

$$f'(x)=۴x^{۳}-۱۶x=۴x\left(x^{۲}-۴\right)=۰\Rightarrow x=۰ \ , \ \pm ۲$$

چون معادلهٔ $f'(x)=۰$ در بازهٔ $[۰,۲]$ دو ریشه ۰ و ۲ دارد و در بازه (۲ و ۰) ریشه ندارند، پس عبارت $f'(x)$ در بازه $[۰,۲]$ مثبت و صفر یا منفی و صفر است. در هر دو صورت، تابع f در بازه $[۰,۲]$ یک به یک است، پس f در این بازه، معکوس‌پذیر است.

حل ب.

$$y=x^{۴}-۸x^{۲}\Rightarrow x^{۴}-۸x^{۲}+۱۶=y+۱۶\Rightarrow$$

$$\left(x^{۲}-۴\right)^{۲}=y+۱۶\Rightarrow x^{۲}-۴\underset{۰\leq x\leq ۲}{=}-\sqrt{y+۱۶}\Rightarrow$$

$$x^{۲}=۴-\sqrt{y+۱۶}\underset{۰\leq x\leq ۲}{\Rightarrow} x=+\sqrt{۴-\sqrt{y+۱۶}}$$

حال جای x و y را با هم عوض می‌کنیم:

$$y=\sqrt{4-\sqrt{x+16}}=f^{-1}(x) \quad , \quad -16\le x\le 0$$

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-3x^2+3x-5$ مفروض است:

الف. ثابت کنید این تابع در $D_f=\mathbb{R}$ یک به یک است.

ب. ضابطهٔ تابع معکوس تابع f را بیابید.

حلّ الف.

$$f'(x)=3x^2-6x+3=3\left(x^2-2x+1\right)=3(x-1)^2\ge 0$$

پس $f'(x)\ge 0$، بنابراین f در $\mathbb{R}$ یک به یک است؛ پس f در $\mathbb{R}$ معکوس‌پذیر است.

حل ب.

$$y=x^3-3x^2+3x-5\Rightarrow$$
$$x^3-3x^2+3x-5=y\Rightarrow x^3-3x^2+3x-1=y+4\Rightarrow$$
$$(x-1)^3=y+4\Rightarrow x-1=\sqrt[3]{y+4}\Rightarrow x=1+\sqrt[3]{y+4}$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم، پس:

$$y=1+\sqrt[3]{y+4}=f^{-1}(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

تذکر: در تست‌ها برای تعیین ضابطهٔ تابع معکوس، از جایگذاری نقاط متناظر استفاده می‌کنیم؛ یعنی یک نقطه مانند A را از تابع f می‌یابیم، سپس A' را به دست می‌آوریم. نقطه A' در هر گزینه که صدق کرد، آن گزینه درست است. چنانچه نقطهٔ A' دو گزینه صدق کند، مختصات نقطهٔ دیگری مانند B را از تابع f درنظر می‌گیریم و B' را می‌یابیم و B' را در آن دو گزینه قرار می‌دهیم.

۶. اگر نمودارهای دو تابع f و f^{-1} متقاطع باشند، معمولاً نقطهٔ تقاطع روی خط، $y=x$ است؛ مگر این که تابع نقاط متناظرپذیر باشد، که در آن صورت، بعضی از نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1}، روی خط $y=x$ نیستند. معمولاً برای تعیین مختصات نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1}، معادلهٔ یکی از آنها را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم.

مثال: مختصات نقطهٔ تقاطع تابع به معادلهٔ $f(x)=x^2-4x \quad , \quad x\ge 2$ را با تابع معکوس آن بیابید.

حل: منحنی به معادلهٔ $y=x^2-4x$ را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم؛ با شرط $x\ge 2$.

$$\begin{cases}y=x^2-4x\\ y=x\end{cases} \quad x^2-5x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غیرقابل قبول}\\ x=5 & \text{قابل قبول}\end{cases}$$

$$x=5\Rightarrow y=5$$

نقطهٔ تقاطع دو تابع f و f^{-1} : $M(5,5)$

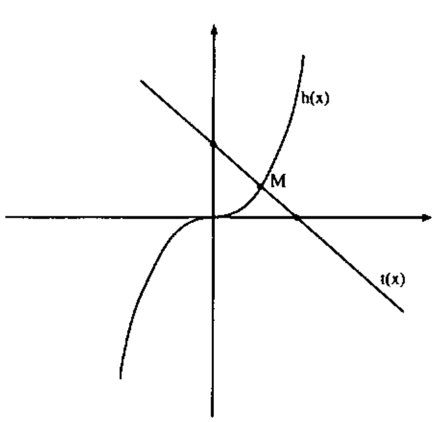
مثال: مختصات نقاط تقاطع تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^3+1$ را با تابع معکوس آن بیابید.

حل: منحنی به معادلهٔ $y=-x^3+1$ را با خط $y=x$ تقاطع می‌دهیم.

$$\begin{cases}y=-x^3+1\\ y=x\end{cases}\Rightarrow x^3+x-1=0 \qquad (1)$$

این معادله به سادگی قابل حل نیست (حداقل می‌توان گفت، در محدودهٔ ریاضی نظام جدید، قابل حلّ نیست)؛ ولی می‌توان ثابت کرد که یک ریشه دارد.

نمودارهای دو تابع $h(x)=x^3$ و $t(x)=-x+1$ را در یک شکل رسم می‌کنیم.



همان‌طوری که در شکل صفحهٔ قبل ملاحظه می‌کنید، نمودارهای دو تابع h و t یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. پس معادلهٔ (۱) یک ریشه دارد، که یکی از نقاط تقاطع دو تابع f و f^{-1} است. برای تعیین مختصات نقاط تقاطع دیگر، به ناچار باید معادله‌های دو تابع f و f^{-1} را با یکدیگر تقاطع دهیم، پس معادلهٔ f^{-1} را به دست می‌آوریم.

$$y=-x^{3}+1 \Rightarrow x^{3}=1-y \Rightarrow x=\sqrt[3]{1-y}$$

جای x و y را با هم عوض می‌کنیم.

$$y=\sqrt[3]{1-x}=f^{-1}(x)$$

حال معادله‌های f و f^{-1} را با هم تقاطع می‌دهیم.

$$\begin{cases} y=-x^{3}+1 \\ y=\sqrt[3]{1-x} \end{cases} \Rightarrow 1-x^{3}=\sqrt[3]{1-x} \Rightarrow$$

$$(1-x)\left(1+x+x^{2}\right)=\sqrt[3]{1-x}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{(1-x)^{3}}\left(1+x+x^{2}\right)-\sqrt[3]{1-x}=0$$

$$\sqrt[3]{1-x}\left(\sqrt[3]{(1-x)^{2}}\left(1+x+x^{2}\right)-1\right)=0$$

نقطهٔ تقاطع: $\sqrt[3]{1-x}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1 : N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$

$$\sqrt[3]{(1-x)^{2}}\left(1+x+x^{2}\right)-1=0 \Rightarrow \sqrt[3]{(1-x)^{2}}\left(1+x+x^{2}\right)=1$$

حلّ این معادله، از حوصلهٔ این مقاله خارج است؛ فقط باید گفت که $x=0$ یکی از ریشه‌های آن است، پس $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ نیز یک نقطهٔ تقاطع است. ملاحظه می‌کنید که دو نقطهٔ تقاطع $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ و $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ روی دو منحنی f و f^{-1} قرار دارند (نقاط تقاطع آنها هستند)؛ ولی هیچ کدام روی خط $y=x$ قرار ندارد.

فقط با در دست داشتن نقطهٔ تقاطع $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ می‌توان به نقطهٔ تقاطع $P\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ دست یافت؛ زیرا:

$N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f است $\Rightarrow$ $N'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f^{-1} است

$N'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f است $\Rightarrow$ $N\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ روی منحنی تابع f^{-1} است

پس نقاط N و N′ هر دو روی هر دو تابع f و f^{-1} هستند، پس نقاط تقاطع آنهاست (که هیچ کدام روی خط $y=x$ نیستند).

۷. ترکیب دو تابع f و f^{-1}، تابعی همانی است؛ یعنی:

$$\left(fof^{-1}\right)(x)=x \qquad \left(f^{-1}of\right)(x)=x$$

۸. اگر از رابطهٔ $\left(f^{-1}of\right)(x)=x$ نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$f'(x)\times\left(f^{-1}\right)'(f(x))=1 \Rightarrow \boxed{\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ $P(a,b)$، برابر m است. شیب خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ $P'(a,b)$ را بیابید.

حل: $m=f'(a)$ و $P\left|\begin{matrix}a=x\\b=f(x)\end{matrix}\right.$

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))=\frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{m}$$

مثال: شیب خط مماس بر منحنی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{5}+x+1$ در نقطهٔ A به طول (۱)، برابر چه عددی است؟ از آن جا شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} را در نقطهٔ A′ متناظر نقطهٔ A بیابید.

$x_A = 1 \Rightarrow y_A = 1+1+1 = 3 \quad A\left|\begin{matrix}1\\3\end{matrix}\right. \Rightarrow A'\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.$

شیب خط مماس بر منحنی f در نقطهٔ A:

$$A\left|\begin{matrix}1 = a = x\\ 3 = b = f(x)\end{matrix}\right. \quad , \quad f'(x) = 5x^4 + 1 \Rightarrow f'(1) = 6$$

شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} در نقطهٔ A':

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(x)\right) = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

نتیجهٔ (۱): اگر شیب خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A، برابر m باشد، آن‌گاه شیب خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} (تابع معکوس f) در نقطهٔ A' متناظر A، برابر $\frac{1}{m}$ است.

نتیجهٔ ۲: اگر شیب خط قائم بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A، برابر k باشد، آن‌گاه شیب خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A، برابر $\frac{1}{k}$ است.

۹. خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A، تابع معکوس خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A است.

۱۰. خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر نقطهٔ A، تابع معکوس خط قائم بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A است.

مثال: اگر خط مماس بر منحنی تابع معکوس‌پذیر f در نقطهٔ A به صورت $y = 2x - 4$ باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A، چنین است.

جای x و y را با هم عوض می‌کنیم

$$y = 2x - 4 \Rightarrow 2x = y + 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}y + 2$$

معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطهٔ A' متناظر A

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

۱۱. اگر $x = a$ مجانب قائم تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $y = a$ مجانب افقی تابع f^{-1} است.

۱۲. اگر $y = b$ مجانب افقی تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $x = b$ مجانب قائم تابع f^{-1} است.

۱۳. اگر $y = ax + b$ مجانب مایل تابع معکوس‌پذیر f باشد، آن‌گاه $y = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ (تابع معکوس $y = ax + b$) مجانب مایل تابع f^{-1} است.

مثال: نکتهٔ (۱۳) را در تابع با ضابطه $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ و $x \geq -1$ تحقیق کنید.

۱۴. اگر دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند، آن‌گاه $D_f = R_g$ و $R_f = D_g$، باید توجه داشت که این گزارهٔ شرطی است، نه دو شرطی؛ یعنی:

$$\text{دو تابع f و g معکوس یکدیگر باشند.} \Rightarrow \begin{cases} D_f = R_g \\ R_f = D_g \end{cases}$$

یعنی اگر در دو تابع f و g داشته باشیم $\begin{cases} D_f = R_g \\ R_f = D_g \end{cases}$، آن‌گاه نتیجه نمی‌شود که حتماً دو تابع f و g معکوس یکدیگرند.

۱۵. تابع‌های چند ضابطه‌ای، وقتی معکوس‌پذیرند که:

اولاً: اشتراک دوبه‌دو بردهای ضابطه‌ها تابع تهی باشند.

ثانیاً: هر ضابطه، معکوس‌پذیر باشد.

مثال: ضابطهٔ تابع معکوس تابع f به معادلهٔ $f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq 1 \\ x+1 & , x < 1 \end{cases}$ را بیابید و آنها را در یک شکل رسم کنید.

حل:

$$f(x) = \begin{cases} y_1 = 2x & , x \geq 1 \Rightarrow y_1 \geq 2 \text{ برد تابع} \\ y_2 = x+1 & , x < 1 \Rightarrow y_2 < 2 \text{ برد تابع} \end{cases}$$

به طوری که ملاحظه می‌شود $y \geq 2$ و $y < 2$، پس اشتراک بردها تهی است. در ضمن، هر ضابطهٔ تابع f معکوس‌پذیر است.

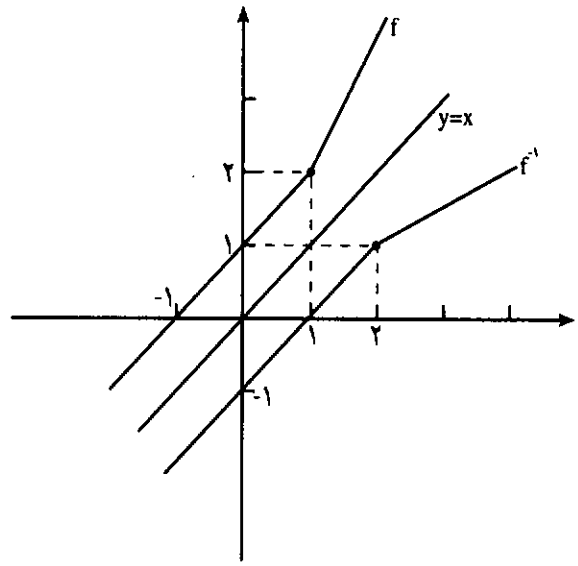
$$y_1 = 2x \Rightarrow x = \frac{y_1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{2} \quad , \quad x \geq 2$$

$$y_2 = x + 1 \Rightarrow x = y_2 - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 1 \quad , \quad x < 2$$

پس ضابطهٔ تابع معکوس چنین است:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2} & , \quad x \ge 2\\ x-1 & , \quad x<2\end{cases}$$

حال دو تابع f و f^{-1} را در یک شکل رسم می‌کنیم.



۱۶. اگر تابع معکوس‌پذیر f در بازهٔ $[a,b]$ صعودی اکید باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} در بازهٔ $[f(a),f(b)]$ نیز صعودی اکید است.

چنانچه تابع معکوس‌پذیر f در بازهٔ $[a,b]$ نزولی اکید باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} در بازهٔ $[f(b),f(a)]$ نیز نزولی اکید است.

۱۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ، $(c\neq 0)$ وقتی بر تابع معکوس خودش منطبق است که: $\boxed{a+d=0}$

زاویهٔ حادّه بین دو منحنی f و f^{-1} (f تابعی معکوس‌پذیر باشد) با بیان یک مثال، مطلب روشن خواهد شد.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2x \;,\; x\ge 1$ مفروض است، زاویهٔ بین دو منحنی f و f^{-1} را در نقطهٔ تقاطع آنها بیابید.



حل:

$$\begin{cases}y=x^2-2x\\ \\ y=x\end{cases} \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow \begin{cases}x=0 & \text{غیرقابل قبول، زیرا } x\ge 1\\ x=3 & \text{طول نقطهٔ تقاطع دو تابع } f \text{ و } f^{-1}\end{cases}$$

$f'(x)=2x-2 \Rightarrow f'(3)=4=m \quad , \quad m'=\dfrac{1}{4}$ شیب مماس بر منحنی f^{-1}

زاویهٔ بین دو منحنی f و f^{-1}:

$$\tan\alpha=\left|\frac{m-m'}{1+mm'}\right|=\left|\frac{4-\frac{1}{4}}{1+1}\right|=\frac{15}{8}\Rightarrow \alpha=\operatorname{Arc\,tan}\frac{15}{8}$$

قسمت اول

مقاطع مخروطی

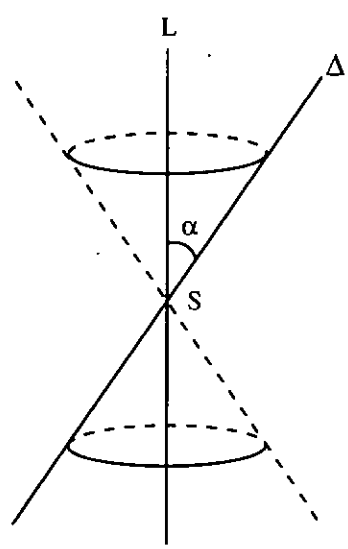
حمیدرضا امیری

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشته ریاضی

تقریباً از زمان آپولونیوس (ریاضی‌دان بزرگ یونانی) به بعد شکل کلاسیک ۴ نوع منحنی مسطح به نام‌های دایره، بیضی، سهمی و هذلولی که ویژگی‌های بسیار مهم و کاربردی دارند، مورد توجه قرار گرفتند. در این مقاله به چگونگی ایجاد، فرمول و خواص هریک از این ۴ منحنی می‌پردازیم. هریک از منحنی‌های مذکور از تقاطع یک صفحه با یک سطح یا رویهٔ مخروطی حاصل می‌شوند.

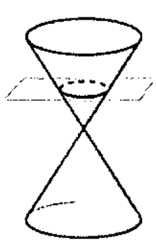
تعریف رویهٔ مخروطی

اگر مطابق شکل دو خط L و Δ در نقطهٔ S متقاطع و با هم زاویهٔ ($\alpha \neq 90^\circ$) داشته باشند و خط L را ثابت فرض کرده و خط Δ را در فضا حول خط L دوران دهیم، سطح یا رویهٔ حاصل از این دوران به رویهٔ مخروطی دوّار یا به اختصار رویهٔ مخروطی معروف است. خط Δ را مولّد، خط L را محور رویهٔ مخروطی و نقطهٔ S (محل تقاطع دو خط) را رأس رویهٔ مخروطی می‌نامیم.

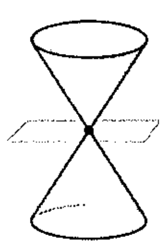


حال اگر یک صفحه در فضا این رویهٔ مخروطی را قطع کند بسته به این که با چه زاویه‌ای و در چه محلی این برخورد صورت پذیرد شکل‌های متفاوتی حاصل می‌شود که به مهمترین آنها خواهیم پرداخت:

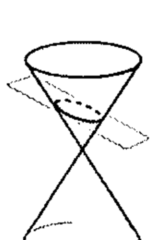
۱ـ دایره: هرگاه صفحه‌ای عمود بر محور رویهٔ مخروطی، آن را قطع کند فصل مشترک این صفحه با رویهٔ مخروطی یک دایره است. (مطابق شکل)

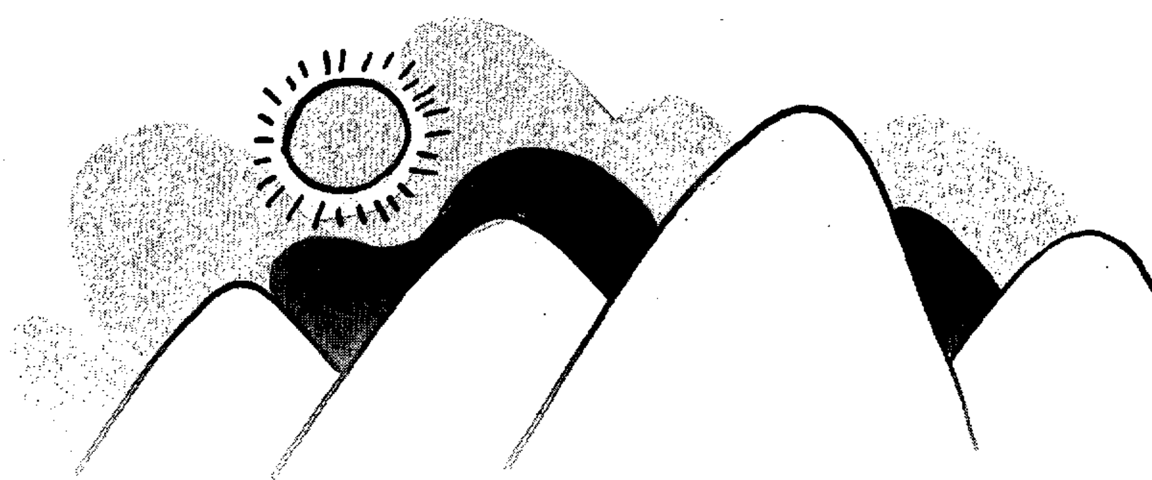


۲ـ هرگاه صفحه‌ای عمود بر محور رویهٔ مخروطی و در رأس با رویهٔ مخروطی تلاقی کند فصل مشترک حاصل یک نقطه است. (مطابق شکل)

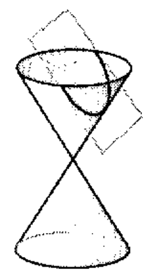


۳ـ هرگاه صفحه‌ای غیرعمود بر محور و غیرموازی با مولد در بالا یا پایین رأس، رویهٔ مخروطی را قطع کند شکل حاصل بیضی است. (مطابق شکل)

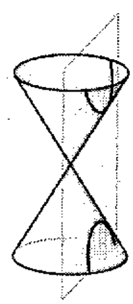




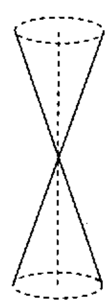
۴ـ اگر صفحه‌ای با مولد رویهٔ مخروطی موازی باشد فصل مشترک حاصل یک سهمی است. (مطابق شکل) (در حالت خاص که صفحه بر رویه مماس است شکل حاصل یک خط است.)



۵ـ هرگاه صفحه‌ای به موازات محور، رویهٔ مخروطی را قطع کند و از رأس عبور نکند، فصل مشترک حاصل، از دو منحنی تشکیل یافته که هذلولی نامیده می‌شود. (مطابق شکل)



۶ـ اگر صفحه‌ای به موازات محور، هردو قسمت بالا و پایین رأس را قطع کرده و از رأس رویهٔ مخروطی نیز عبور کند (شامل محور و رأس باشد)، فصل مشترک حاصل دو خط متقاطع است. (مطابق شکل)



حال به بررسی خواص و ویژگی‌های این مقاطع مخروطی پرداخته و با توجه به تعریف هندسی هریک فرمولهایی برای هر کدام به دست آورده و مسائلی را طرح و حل می‌کنیم.

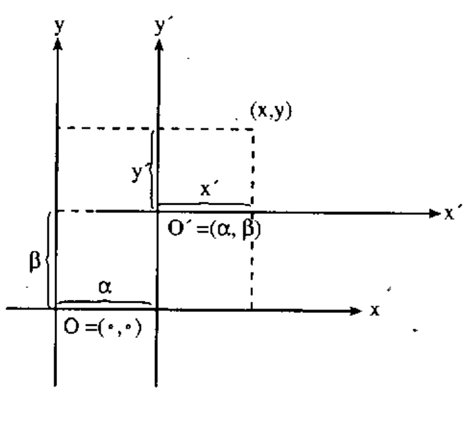
۱ـ دایره

تعریف. دایره مکان هندسی همه نقاطی از یک صفحه است که فاصلهٔ هریک از آن نقاط از یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز، مقدار ثابتی است. به فاصلهٔ نقاط تا مرکز دایره، مقدار ثابت شعاع دایره گفته می‌شود.

در این قسمت، قبل از آن که بخواهیم معادلهٔ دایره را معرفی کنیم لازم است تا بحث راجع به انتقال محورهای مختصات را یادآوری کنیم تا بتوانیم معادلهٔ هریک از مقاطع مخروطی را در حالت کلّی بنویسیم.

انتقال محورهای مختصات: اگر مبدأ مختصات یعنی $O=(0,0)$ را به نقطهٔ $O'=(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم به‌طوری که محورهای مختصات جدید و قدیم نظیر به نظیر موازی یکدیگر باشند، و نقطه‌ای دلخواه به مختصات (x,y) در دستگاه قدیم در نظر بگیریم این نقطه در دستگاه جدید (انتقال یافته) دارای مختصات (x',y') است که با توجه به شکل واضح است. رابطهٔ زیر بین مختصات جدید و قدیم برقرار است.

$$\begin{cases} x' = x-\alpha \\ y' = y-\beta \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = x'+\alpha \\ y = y'+\beta \end{cases}$$



مثال: اگر در دستگاه مختصات دکارتی معادلهٔ خط L به صورت $2x - y = 3$ باشد و مبدأ مختصات را از نقطه $O = (0,0)$ به نقطهٔ $O' = (-1,2)$ منتقل کنیم معادلهٔ جدید خط یعنی L' را در دستگاه جدید بیابید.

اگر $P = (x,y)$ یک نقطهٔ دلخواه از خط L باشد پس از انتقال محورها، مختصات این نقطه یعنی P' به صورت $\begin{cases} x' = x-(-1) \\ y' = y-2 \end{cases}$ می‌باشد، پس $\begin{cases} x = x'-1 \\ y = y'+2 \end{cases}$ که با قرار دادن x و y برحسب x' و y' در معادلهٔ خط خواهیم داشت:

$$2x - y = 3 \Rightarrow 2(x'-1)-(y'+2) = 3 \Rightarrow 2x'-y' = 7$$

همان‌طور که مشاهده کردید دو خط با هم موازی هستند یعنی در انتقال محورها به صورت موازی، زاویه تغییر نمی‌کند.

حال به بحث اصلی خودمان یعنی معادلهٔ مقاطع مخروطی برمی‌گردیم:

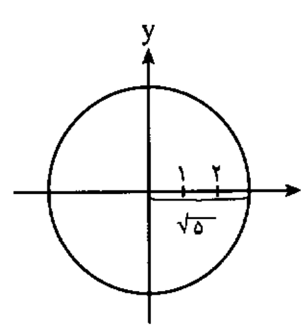
معادلهٔ دایره: می‌خواهیم معادلهٔ دایره‌ای را بیابیم که مرکز آن مبدأ مختصات $O = (0,0)$ و اندازهٔ شعاع آن r باشد.

واضح است که نقطهٔ $P = (x,y)$ روی دایرهٔ مذکور است اگر و فقط فاصلهٔ P تا O برابر با r باشد پس:

$$|OP| = r \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = r \Rightarrow x^2+y^2 = r^2$$

پس معادلهٔ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات $O = (0,0)$ و به شعاع r به شکل زیر است:

$$x^2+y^2 = r^2$$



مثال: دایره به معادلهٔ $x^2+y^2 = 5$ را رسم کنید.

حال اگر بخواهیم معادلهٔ دایره‌ای به شعاع r و به مرکز (α,β) را بنویسیم کافی است مبدأ مختصات را به نقطهٔ (α,β) انتقال دهیم که در این صورت اگر $P = (x',y')$ نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ مزبور باشد معادلهٔ آن به صورت $x'^2+y'^2 = r^2$ می‌باشد که با توجه به انتقال محورها $\begin{cases} x' = x-\alpha \\ y' = y-\beta \end{cases}$ پس معادلهٔ دایره‌ای به شعاع r و به مرکز (α,β) به شکل روبرو است:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$$

مسألهٔ مهم: اگر $O = (\alpha,\beta)$ مرکز دایره‌ای به شعاع r باشد با استفاده از مطالب فصل بردارها معادلهٔ این دایره را بیابید.

حل: فرض کنیم $O = (\alpha,\beta)$ مرکز دایره و r شعاع آن باشد. شرط لازم و کافی برای آن که نقطهٔ $M = (x,y)$ روی دایره باشد (با توجه به تعریف دایره) آن است که $|\overrightarrow{OM}| = r$

پس خواهیم داشت:

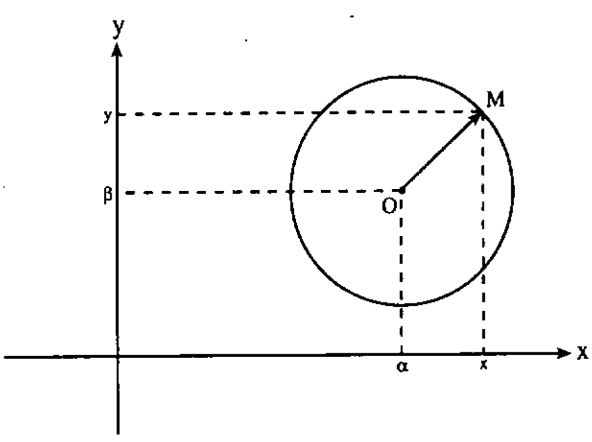
$$|\overrightarrow{OM}| = r \Rightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = r \Rightarrow$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2 \qquad \text{(معادله دایره)}$$

در حالت خاص اگر $O = (0,0)$ آنگاه:

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = r \Rightarrow x^2+y^2 = r^2$$

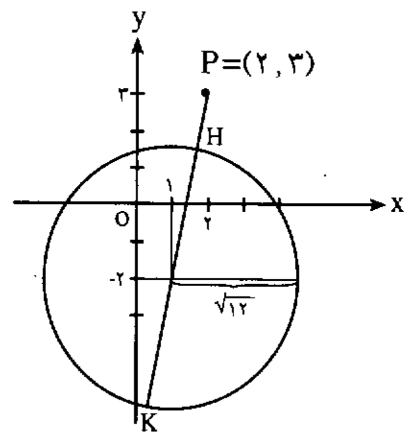
(معادله دایره به مرکز مبدأ مختصات)



مسائل حل شده و نکات مهم

مسألهٔ ۱: دایره به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2 = 12$

مفروض است. نقطهٔ $P=(۲,۳)$ در داخل دایره قرار دارد یا در خارج آن؟



مرکز دایره $(۱,-۲)$ بوده و شعاع آن $\sqrt{۱۲}$ می‌باشد.
همان‌طور که مشاهده می‌کنید نقطه در خارج دایره واقع است حال اگر مختصات نقطه را در معادلهٔ دایره قرار دهیم خواهیم داشت:

$$(۲-۱)^۲+(۳+۲)^۲=۲۶>۱۲$$

تذکر: با توجه به شکل واضح است که برای یافتن کمترین و بیشترین فاصلهٔ P از دایره کافی است از P به مرکز دایره وصل کرده و امتداد دهیم تا دایره را در دو نقطهٔ H و K قطع کند. طول PH و PK به ترتیب کمترین و بیشترین فاصلهٔ P از دایره است. برای مشخص کردن مختصات نقاط H و K معادلهٔ خط شامل O و P را با معادلهٔ دایره قطع می‌دهیم.
روش دوم برای یافتن اندازه‌های PH و PK که فرض کنیم $|OP|=d$ در این صورت:

$$|PH|=|OP|-|OH|=|d-r|$$ و

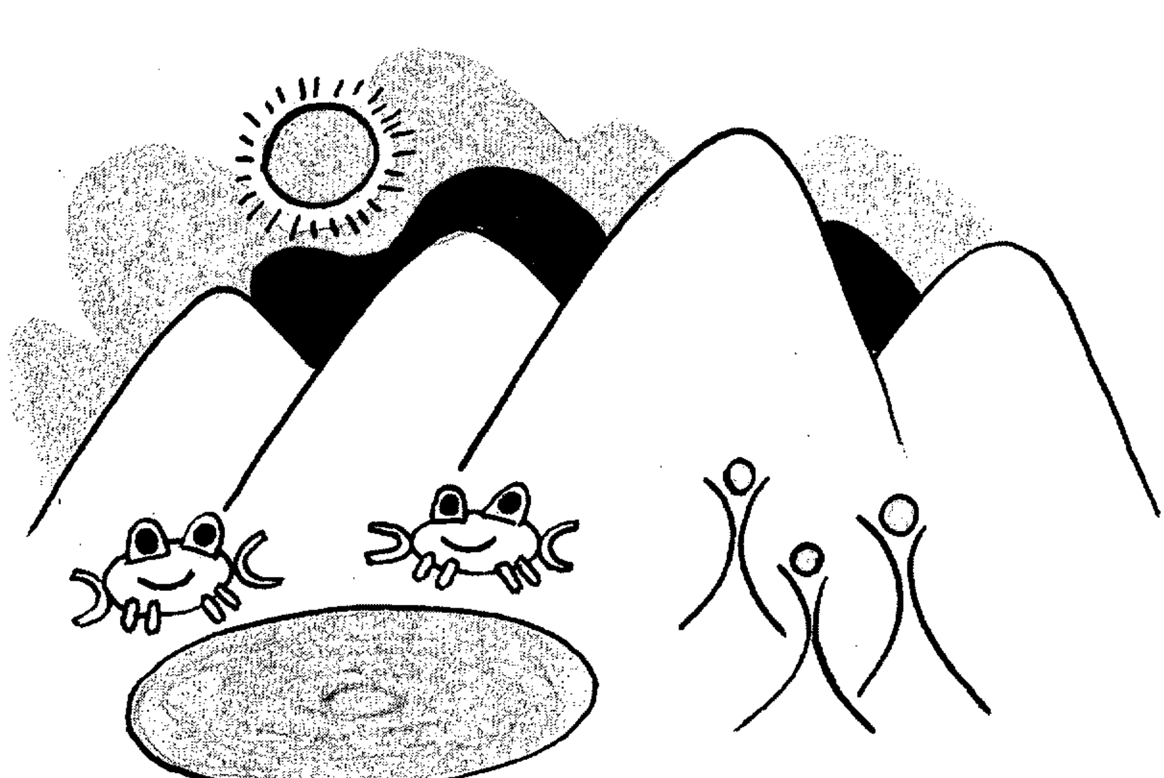
$$|PK|=|OP|+|OK|=d+r$$.

مسألهٔ ۲: مکان هندسی نقاطی از صفحه مانند $P=(x,y)$ را بیابید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $H=(۲,-۱)$، $\sqrt{۳}$ برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $K=(۶,-۳)$ باشد.

$$|HP|=\sqrt{۳}|KP|$$

$$\sqrt{(x-۲)^۲+(y+۱)^۲}=\sqrt{۳}\sqrt{(x-۶)^۲+(y+۳)^۲}$$

$$\Rightarrow (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۳\left[(x-۶)^۲+(y+۳)^۲\right]$$



$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2+2y+1=$$
$$3x^2-36x+108+3y^2+18y+27$$
$$\Rightarrow 2x^2-32x+2y^2+16y+130=0$$
$$\Rightarrow x^2-16x+y^2+8y+65=0$$
$$\Rightarrow (x-8)^2-64+(y+4)^2-16+65=0\Rightarrow$$
$$(x-8)^2+(y+4)^2=15$$

پس مکان هندسی مورد نظر دایره‌ای است به شعاع $\sqrt{15}$ و به مرکز $(8,-4)$.

نکتهٔ مهم: هرگاه بخواهیم عبارت $x^2 \pm mx$ را به عبارتی شامل یک عبارتِ مربع کامل تبدیل کنیم کافی است $\frac{m^2}{4}$ به آن اضافه و کم کنیم.

$$x^2 \pm mx = x^2 \pm mx + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} = (x \pm \frac{m}{2})^2 - \frac{m^2}{4}$$
$$x^2+8x=(x+4)^2-\frac{64}{4}=(x+4)^2-16$$
$$x^2-5x=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$$

مسألهٔ ۳: معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $P=(5,2)$ و از نقطهٔ $A=(2,-2)$ عبور کند.

برای حل این مسأله کافی است اندازهٔ شعاع دایره را به دست آوریم که همان فاصلهٔ نقطهٔ A تا مرکز یعنی P است.

$$r=|AP|=\sqrt{(5-2)^2+(2+2)^2}=\sqrt{25}=5$$

معادلهٔ دایره : $(x-5)^2+(y-2)^2=25$

مسألهٔ ۴: معادلهٔ خطی را بنویسید که در نقطهٔ $A=(3,-3)$ بر دایرهٔ به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+3)^2=4$ مماس باشد.

حل: می‌دانیم شعاع وارد بر نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است بنابراین ابتدا ضریب زاویهٔ شعاع وارد بر نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم که اگر مرکز دایره را C بنامیم خواهیم داشت، $C=(1,-3)$.

$$m_{AC}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{-3-(-3)}{3-1}=\frac{0}{2}=0$$

پس شعاع وارد بر نقطهٔ A موازی با محور xها بوده و درنتیجه خط مماس بر محور xها عمود است و چون باید از نقطهٔ $A=(3,-3)$ عبور کند معادلهٔ آن به صورت $x=3$ می‌باشد.

(توجه دارید که اگر شیب شعاع AC برابر $k\neq 0$ باشد و ضریب زاویهٔ خط مماس را m' بنامیم می‌بایست $m'\times m_{AC}=-1$ که در این صورت $m'=\frac{-1}{k}$ بوده و با داشتن مختصات نقطهٔ A از دایره معادلهٔ خط مماس نوشته می‌شود.)

مسألهٔ ۵: از نقطه $P=(4,0)$ دو مماس بر دایره به معادلهٔ $x^2+y^2=4$ رسم کرده‌ایم. اگر نقاط تماس A و B باشند، مختصات A و B و طول وتر AB را بیابید.

حل: مطابق شکل صفحهٔ بعد اگر فرض کنیم $A=(x_1,y_1)$ و $B=(x_2,y_2)$ در این صورت ضریب زاویهٔ شعاع وارد بر نقطهٔ A برابر است با $m_{OA}=\frac{y_1}{x_1}$ پس ضریب زاویهٔ خط مماس عبارت است از: $m_{\text{مماس}}=\frac{-x_1}{y_1}$

پس معادلهٔ خط مماس که از P عبور می‌کند برابر است با :

$$(y-0)=\frac{-x_1}{y_1}(x-4)\Rightarrow y=\frac{-x_1}{y_1}(x-4)$$

چون این خط باید از A عبور کند پس مختصات A نیز در آن صدق می‌کند یعنی :

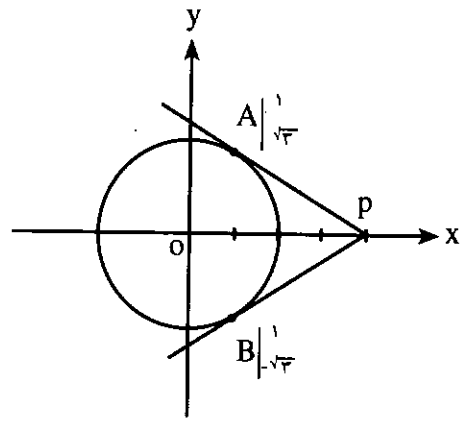
$$y_1=\frac{-x_1}{y_1}(x_1-4)\Rightarrow y_1^2=-x_1^2+4x_1 \quad (1)$$

از طرفی چون A روی دایره قرار دارد پس $x_1^2+y_1^2=4$ لذا معادلهٔ (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y_1^2+x_1^2=4x_1\Rightarrow 4=4x_1\Rightarrow x_1=1\overset{(1)}{\Rightarrow} y_1=\pm\sqrt{3}$$

پس مختصات دو نقطهٔ A و B به ترتیب به صورت $(1,\sqrt{3})$ و $(1,-\sqrt{3})$ به‌دست آمد.

$$|AB|=\sqrt{(1-1)^2+(\sqrt{3}+\sqrt{3})^2}\Rightarrow |AB|=2\sqrt{3}$$



مسألهٔ ۶ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $A=(4,-1)$ و $B=(2,7)$ مختصات دو سر یک قطر این دایره باشد.

حل : چون قطر از مرکز دایره عبور می‌کند و فاصلهٔ مرکز تا دو نقطهٔ A و B برابر است پس مرکز دایره وسط AB قرار دارد بنابراین :

مرکز دایره $C=(\frac{4+2}{2},\frac{7-1}{2})\Rightarrow C=(3,3)$

$$r=|AC|=\sqrt{(3-4)^2+(3+1)^2}=\sqrt{17}$$

معادلهٔ دایره : $(x-3)^2+(y-3)^2=17$

مسألهٔ ۷ : معادلهٔ دایره‌ای را بیابید که مرکز آن $C=(1,-3)$ بوده و بر خط به معادلهٔ $2x-y=1$ مماس باشد.

حل : برای یافتن شعاع دایره کافی است فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس را بیابیم :

$$r=|CH|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2\times 1+(-1)\times(-3)-1|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

معادلهٔ دایره : $(x-1)^2+(y+3)^2=\frac{16}{5}$

مسألهٔ ۸ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که دو خط به معادله‌های $y=-x+1$ و $y=2x-5$ دو قائم بر آن بوده و بر خط $y=x$ مماس باشد.

حل : چون هر خط قائم بر دایره از مرکز دایره عبور می‌کند پس نقطهٔ تلاقی دو قائم مرکز دایره خواهد بود پس :

$$\begin{cases}y=-x+1\\ y=2x-5\end{cases}\Rightarrow C=(2,-1)$$

و فاصلهٔ مرکز تا خط مماس، شعاع دایره است یعنی :

$$r=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|1\times 2+(-1)\times(-1)+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

معادلهٔ دایره : $(x-2)^2+(y+1)^2=\frac{9}{2}$

مسألهٔ ۹ : منحنی به معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ مفروض است. این معادله با چه شرطی معادلهٔ یک دایره است؟

حل :

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

شرط لازم و کافی برای آن که معادلهٔ اخیر معادلهٔ دایره باشد آن است که :

$$\frac{a^2+b^2-4c}{4}=r^2>0 \quad \text{یا} \quad a^2+b^2>4c$$

که در این صورت $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ شعاع و $C=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ مرکز دایره خواهد بود.

نکتهٔ مهم : اگر در معادلهٔ $x^2+y^2+ax+by+c=0$ عدد حقیقی c صفر باشد یا منفی باشد همواره $a^2+b^2>4c$ خواهد بود و معادله یک دایره را مشخص می‌کند.

مسألهٔ ۱۰ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطه $A=(0,0)$ ، $B=(1,1)$ و $C=(2,3)$ عبور کند، سپس مرکز و شعاع دایره را مشخص کنید.

حل: اگر معادله دایره را به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ در نظر بگیریم باید مختصات این سه نقطه در معادلهٔ فوق صدق کند.

$$A=(0,0)\Rightarrow 0+0+0+0+c=0\Rightarrow c=0$$

$$B=(1,1)\Rightarrow 1^2+1^2+a+b+0=0\Rightarrow a+b=-2$$

$$C=(2,3)\Rightarrow 2^2+3^2+2a+3b+0=0\Rightarrow 2a+3b=-13$$

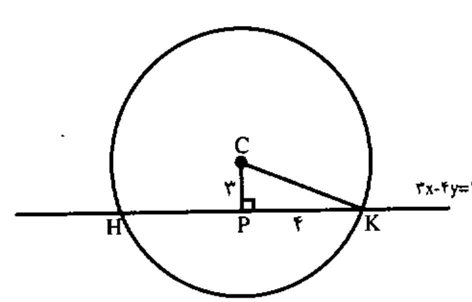
$$\begin{cases}a+b=-2\\ 2a+3b=-13\end{cases}\Rightarrow b=-9,a=7$$

معادلهٔ دایره : $x^2+y^2+7x-9y=0$

مرکز دایره : $O=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(-\frac{7}{2},\frac{9}{2})$

شعاع دایره : $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}=\sqrt{49+81}=\frac{1}{2}\sqrt{130}$

مسألهٔ ۱۱ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $C=(2,-2)$ مرکز آن بوده و طول وتر حاصل از تقاطع خط به معادلهٔ $3x-4y=-1$ با دایره برابر ۸ باشد.



حل: با توجه به شکل اگر خط، دایره را در دو نقطهٔ H و K قطع کند از نقطهٔ C مرکز دایره عمود CP را بر HK رسم کرده که در این صورت داریم:

$$HK=8\Rightarrow PK=4$$

$$|CP|=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\times 2+(-4)\times(-2)+1|}{\sqrt{9+16}}=\frac{15}{5}=3$$

$$\overset{C\hat{P}K}{\Rightarrow}|CK|^2=3^2+4^2\Rightarrow |CK|=r=5$$

معادلهٔ دایره : $(x-2)^2+(y+2)^2=25$

مسألهٔ ۱۲ : معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن روی محور xها بوده و بر دو خط به معادله‌های $y=-x$ و $y=-x+8\sqrt{2}$ مماس باشد.

حل:

$$HH'=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|0+8\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=8$$

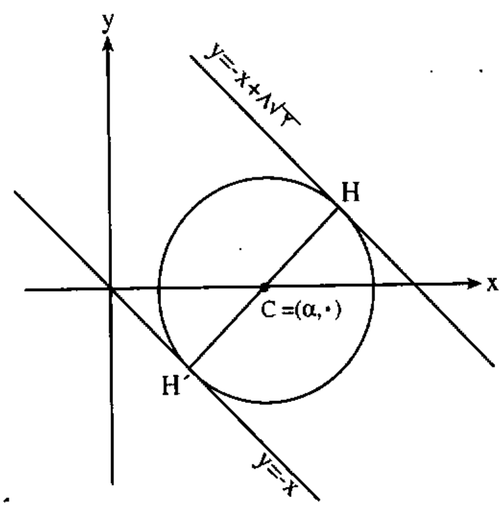
$$2r=8\Rightarrow r=4$$

مرکز دایره $C=(\alpha,0)$

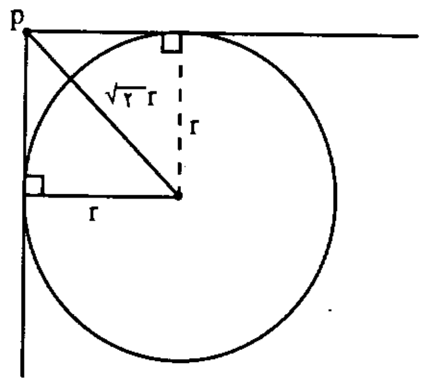
$$|CH'|=4\Rightarrow\frac{|1\times\alpha+(-1)\times 0+0|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\Rightarrow\frac{|\alpha|}{\sqrt{2}}=4$$

$$\Rightarrow|\alpha|=4\sqrt{2}$$

معادلهٔ دایره : $(x-4\sqrt{2})^2+y^2=16$



نکتهٔ مهم: شرط این که از نقطه‌ای خارج دایره به شعاع r بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایره رسم کرد آن است که طول هر مماس برابر شعاع دایره یعنی r و فاصلهٔ آن نقطه تا مرکز دایره برابر با $\sqrt{2}r$ باشد. (به شکل توجه کنید) در ضمن مکان هندسی همهٔ نقاطی چون P که می‌توان از آنها دو مماس عمود برهم بر دایره‌ای به شعاع r رسم کرد، دایره‌ای است هم مرکز با همان دایره و به شعاع $\sqrt{2}r$.



نکته : اگر معادلهٔ دایره‌ای به شکل $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ مفروض باشد و نقطهٔ $A=(x_1,y_1)$ نیز در دست باشد و مختصات A را در معادلهٔ دایره قرار دهیم عددی چون k حاصل می‌شود که در این صورت :

۱ـ نقطه A روی دایره است اگر $k=r^2$

۲ـ نقطهٔ A در داخل دایره واقع است اگر $k<r^2$

۳ـ نقطه A در خارج دایره واقع است اگر $k>r^2$

حال اگر معادلهٔ دایره به صورت $x^2+y^2+ax+by+c=0$ مفروض باشد و مختصات A را در معادله (به جای x و y) قرار دهیم عددی چون k به دست می‌آید که در این صورت داریم :

۱ـ A روی دایره است اگر $k=0$

۲ـ A خارج دایره است اگر $k>0$

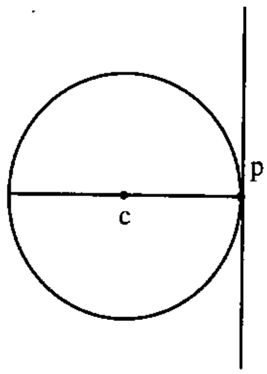
۳ـ A داخل دایره است اگر $k<0$

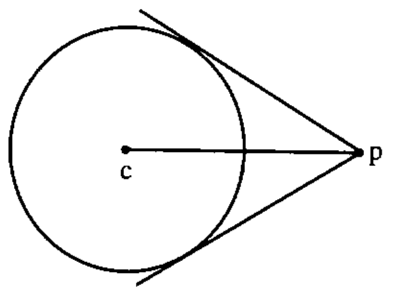
۴ـ A روی مرکز دایره است اگر $k=-r^2$

نکتهٔ مهم : اگر نقطهٔ P و دایره به مرکز C و به شعاع r مفروض باشد در این صورت تعداد مماس‌ها و قائم‌هایی که از P بر دایره می‌توان رسم کرد با توجه به مکان P به قرار زیر است :

۱) اگر P خارج دایره باشد، دو مماس و یک قائم می‌توان بر دایره رسم کرد.

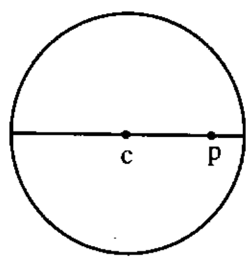
۲) اگر P روی دایره باشد، یک قائم و یک مماس می‌توان بر دایره رسم کرد.

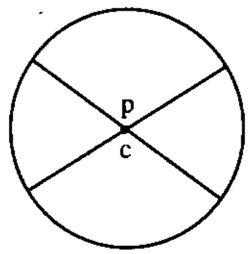




۳) اگر P داخل دایره باشد و روی مرکز نباشد فقط یک قائم می‌توان بر دایره رسم کرد و مماسی نمی‌توان رسم کرد.

۴) اگر P روی مرکز دایره باشد بی‌شمار قائم می‌توان بر دایره رسم کرد.





تذکر : توجه دارید که خط قائم بر دایره از مرکز دایره عبور کرده و در حالت (۱) طول دو مماس با هم برابر است.



آزمون چند گزینه‌ای؟

هشدار!

محمّد طاهر معیّری

در ارزشیابی دانش و توانایی ذهنی افراد، از روش‌های گوناگون استفاده می‌شود. امتحانات دوره‌ای و مقطعی، معمولی‌ترین آنهاست. در این جریان، نوع آزمون، اعتبار سؤال‌ها و زمان و ترتیب ارزشیابی، نقش قابل توجه دارند. چه بسا که شیوه و روش، جریان داوری را به کلّی مقلوب کند. اعتبار روش، مهمترین ضرورت ارزشیابی است.

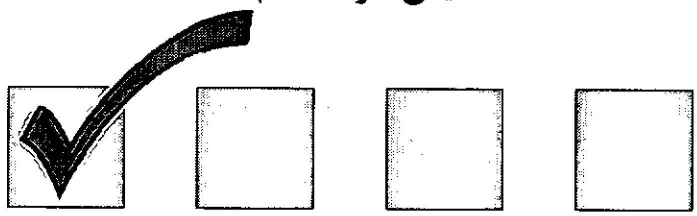
در مجموعهٔ عوامل مؤثر در نتیجهٔ ارزشیابی، نوع پرسش‌ها اهمیّت اساسی دارد. ارزشیابی نوشتاری را از لحاظ نوع سؤال به سه وجه مختلف می‌توان ترتیب داد:

۱. طرح سؤال‌های کلی که به هریک از آنها باید به صورت یک مقالهٔ جامع پاسخ بدهند. این گونه پرسش‌ها قهراً باید از حیث تعداد، معدود و از لحاظ وسعت، در قالب فرصتی باشد که برای جلسهٔ امتحان منظور می‌شود.

۲. سؤال‌های کوتاه و متعدّد که پاسخ گفتن به هریک از آنها به ذکر یک کلمه یا یک تاریخ، و حدّاکثر یک یا دو سطر اظهارنظر نیاز دارد. این گونه پرسش‌ها به صورت‌های مختلف مطرح می‌شوند. گاهی سؤال مستلزم اظهارنظری کوتاه و مشخص است، گاهی باید بین پاسخ‌های درست و نادرست، آن‌را که درست است، تشخیص داد و در پاسخ به سؤال، به نشانه‌گذاری اکتفا می‌شود، و گاهی قسمت‌هایی از یک متن از قبل تهیه شده را که جای آنها در ورقهٔ امتحانی برای اظهارنظر باقی است، باید تکمیل کرد، در هر حال، در این شیوهٔ امتحان، پرسش‌ها متعدّد جواب‌ها کوتاه است.

۳. وجه سوّم، ترکیبی از دو صورت قبلی است؛ به این معنا که پرسش امتحانی، آمیخته‌ای از سؤال‌های کلی و کوتاه است که ممکن است در دو جلسهٔ مختلف یا به توالی مطرح شوند. به این ترتیب که در مرحلهٔ اوّل، امتحان‌دهندگان با وقت محدود، به تعداد زیادی از سؤال‌ها، پاسخ کوتاه می‌دهند و در مرحلهٔ تکمیلی آزمایش، در مقابل چند سؤال کلی قرار می‌گیرند، تا بحال آن‌را داشته باشند دربارهٔ موضوع مورد ارزشیابی، هر قدر آگاهی و توانایی دارند، به کار گیرد و شایستگی

سؤال های کلی، به امتحان دهنده فرصت می دهد که همهٔ اطلاعات خود را دربارهٔ موضوع سؤال عرضه کند، ورقهٔ امتحانی را به سلیقه و تشخیص خود تنظیم کند.



خود را نشان دهند؛ یعنی در پاسخ های نوع دوم، آنها که ممتاز شوند، جای خود را در میان گروه باز می یابند. گاهی آزمایش مرحلهٔ دوم، فقط در گروه قوی و ممتاز اجرا می شود تا برای تمیز بین خوب و بد، فرصت بهتری را فراهم کند و بر اساس این بازبینی مجدّد، شایسته ترین امتحان دهندگان شناخته شوند. مصاحبه و امتحان شفاهی هم برحسب مورد، ممکن است جای امتحان مرحلهٔ دوم را بگیرد، که جای بحث و انتقاد وسیع دارد و اعتبار آن به ملاک ها و نحوهٔ اجرایش وابسته است.

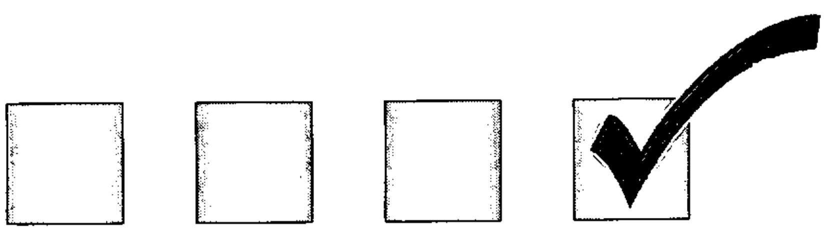
سؤال های کلی، به امتحان دهنده فرصت می دهد که همهٔ اطلاعات خود را دربارهٔ موضوع سؤال عرضه کند، ورقهٔ امتحانی را به سلیقه و تشخیص خود تنظیم کند، با آزادی و وقت کافی در هر موضوع اظهار نظر کند و وسعت دید خود را با ملاک های دقیق تری نشان دهد.

در پاسخ گفتن به سؤال های کلّی، که توصیف و بازشکافی مسائل را ایجاد می کنند، امتحان دهنده باید به همهٔ ابعاد مسأله توجه کند و این، مستلزم تسلط کافی بر مطلب است. در این روش، ورقهٔ امتحانی از صورت قالبی، فقط شامل رئوس مطالب مصون خواهد ماند، آنکه بیشتر می داند، بهتر و بیشتر به بحث می پردازد و ورقهٔ بهتری ارائه می دهد؛ نه آن که لقمه از پیش ساخته ای را بشناسد و ببلعد.

سؤال های کلی، جایی برای حدس و گمان باقی نمی گذارند و امتحان دهنده فقط وقتی می تواند به سؤال پاسخ دهد که دربارهٔ موضوع، علم و آگاهی قبلی داشته باشد و بر پیوستگی و تقدّم و تأخّر مطالب و نتیجه گیری قادر باشد.

به هر حال، در اعتبار این گونه ارزشیابی، از بسیاری جهات تردید نیست. امّا افسوس که در مقیاس وسیع میلیونی آزمایش شوندگان و در سطح و حدّ تحصیلات یک دوره یا یک سال تحصیلی، به چنین روشی دسترسی نیست. آن گاه که تعداد امتحان کنندگان از حدّ متعارف، مثلاً صد تا پانصد نفر، بالاتر می رود، بررسی پاسخ های مربوط به سؤال های وصفی از حدّ امکانات عادی فراتر

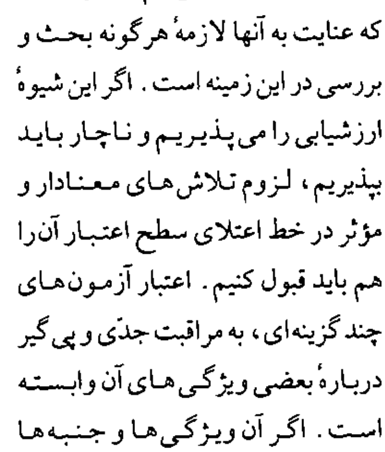




می‌رود و صورت غیر عملی به خود می‌گیرد. در مقیاس وسیع تعداد امتحان‌دهندگان، تصحیح اوراق جز با استفاده از حسابگرها میسّر نخواهد بود. کاربرد رایانه فقط با استفاده از رمزهایی که بر پاسخ‌های کوتاه بنا می‌شود، می‌تواند عملی باشد. کدگذاری که لازمهٔ استفاده از حسابگرهاست، لزوماً پاسخ‌های کوتاه صریح و سریع را طلب می‌کند. پاسخ‌های کوتاه را نمی‌توان با پرسش‌های تفصیلی فراهم کرد. علاوه بر آن، پاسخ‌های کوتاه به تعداد زیاد و متعدّد جواب نیاز دارد و این، با معدود سؤال‌های تفصیلی میسّر نیست. بدین سبب، ارزشیابی و امتحان در مقیاس وسیع، پای روش و شیوه‌ای با تعداد سؤال کافی و پاسخ‌های کوتاه رمزپذیر را به میان می‌کشد که شناخته‌ترین شکل آن، همان آزمون‌های چند گزینه‌ای است.

در ارزشیابی با سؤال‌های متعدّد، که می‌توان به همهٔ بخش‌های هر مطلب رسید، برای عرضهٔ آگاهی‌ها، مجال بیشتری فراهم می‌شود. در این گونه ارزشیابی، آزمایشی به اظهارنظر دربارهٔ چند موضوع معیّن محدود نیست. اگر احیانا در موارد ضعف و کمبود داشته باشد، می‌تواند به دیگر قسمت‌ها بپردازد، و این بر دقّت ارزشیابی می‌افزاید و چه بسا که بیش از چند سؤال معدود، می‌تواند جانب حقّ افراد را ملحوظ دارد؛ زیرا کسی که در برخورد مثلاً با پنجاه تا صد پرسش کوتاه با مباحث گوناگون در همهٔ قسمت‌ها ناتوانی نشان دهد، به راستی ناتوان و ضعیف است و ورقهٔ امتحانی، به داوری قطعی‌تری می‌رسد.

در مقابل این امتیازها، این گونه امتحان را نقاط ضعفی هم متصوّر است که عنایت به آنها لازمهٔ هرگونه بحث و بررسی در این زمینه است. اگر این شیوهٔ ارزشیابی را می‌پذیریم و ناچار باید بپذیریم، لزوم تلاش‌های معنادار و مؤثر در خط اعتلای سطح اعتبار آن‌را هم باید قبول کنیم. اعتبار آزمون‌های چند گزینه‌ای، به مراقبت جدّی و پی‌گیر دربارهٔ بعضی ویژگی‌های آن وابسته است. اگر آن ویژگی‌ها و جنبه‌ها دستخوش غفلت باشند، انحراف نتیجهٔ ارزشیابی را از خط مطلوب سبب می‌شوند. مباد که در عین الزام به

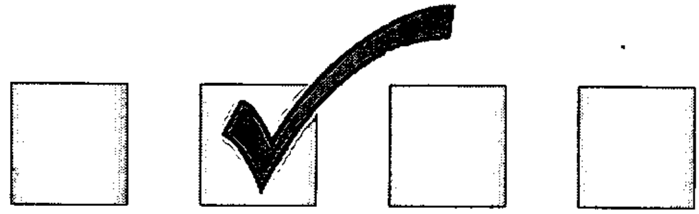


تمسک به چنین شیوهٔ امتحان، در حالی که مبتکران آن در این باره شک و تردید نشان می‌دهند و مُدام درصدد تغییر و اصلاح و تکمیل آن هستند، ما با تمام وجود به آنها تکیه کنیم و تصمیم‌های اساسی را آن‌چنان وابسته کنیم ک[ه] نبودش به ز بود باشد، و در نهایت، از داوری منصفانه و عادلانه در تشخیص ارزش‌ها دور بیفتیم و حق‌ها پایمال شود.

این ویژگی‌ها کدامند؟

آزمون‌های چند گزینه‌ای، شرایطی لازم است که در دو گروه اصلی و اساسی، یکی به خود پرسش‌ها باز می‌گردد و دیگری به لزوم بازسازی مستمر و حفظ و نگهداری سالم آنها. در آزمون‌های چند انتخابی، نخستین مسألهٔ مهم در تعداد انتخاب‌ها، در هر سؤال ظاهر می‌شود. در این گونه پرسش‌ها در مقابل هر موضوع، ممکن است دو یا سه یا چهار و... حالت مختلف مطرح شود، که فقط یکی از آن‌ها درست باشد. روشن است که به این ترتیب، هر قدر در هر سؤال تعداد انتخاب‌ها کمتر باشد، پاسخ گفتن مهم‌تر است و در مقابل جواب درست، آن‌که نادرست است، آشکار و صریح خود را نشان می‌دهد و مستلزم در نظر گرفتن حالت‌ها دیگر نیست، و این برای امتحان‌دهنده، از لحاظ صرف وقت و

برای دانش‌آموزان دوره متوسطه و پیش دانشگاهی





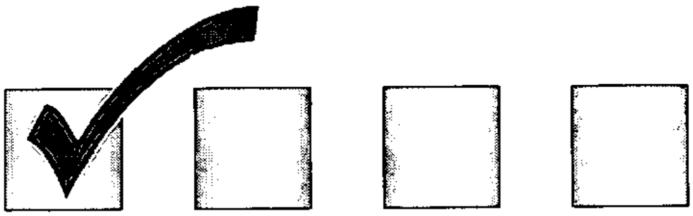
کوچک بودن دامنهٔ تفکر، تسهیلاتی فراهم می‌آورد و تهیه کنندهٔ سؤال را هم کمک مؤثری است که ناچار نخواهد بود برای یافتن گزینه‌های مناسب در هر مبحث، به جست‌وجوی وسیع بپردازد.

دیگر ضعف این آزمون‌ها در این است که به رغم بسیاری محاسن، خطر آن‌را دارد که به حق برجستگان گروه چنانکه باید، نرسد یا آنهایی را که ناتوانی مفرط دارند، در حد ضعف و کمبودشان، طبقه‌بندی نکند؛ زیرا که مجال بر آنها که توانایی بیشتر و عالی‌تر در هر زمینه، مباحث بسیاری برای طرح اطلاعات و دانش خود دارند، تنگ می‌کند و فقط به (آری و نه) دربارهٔ هر موضوع، محدود و موظّف می‌کند. به این سبب، این روش به مقیاس دیگر روش‌ها توانایی رده‌بندی گروه را در میدانی وسیع ندارد و عملاً دامنهٔ تغییرات نمره‌های امتحانی را محدود می‌کند. به همین دلیل است که گاهی پس از چنین آزمونی، در یک امتحان مکمّل، برای شناخت استعدادهای برتر، فرصت‌هایی فراهم می‌آورند تا خوب و بد را فاصله‌ای فراهم شود و برجستگان در گروه قوی و ممتاز قرار گیرند و تمیز خوب و بد به وجه بهتری میسّر شود.

نقطهٔ ضعف دیگر آزمون‌های چند گزینه‌ای، در این است که در آنها اصالت و عمق اطلاعات، دستخوش بی‌اعتنایی است. پرسش چند گزینه‌ای برای ابراز جنبه‌های بنیادی آگاهی‌ها، مجال باقی نمی‌گذارد. امتحان‌دهنده را وادار می‌کند که فقط در خطی حرکت کند که مطالب جزئی و احیاناً کوتاه و چه بسا کم‌اهمیتی را که می‌تواند در آزمون چند گزینه‌ای مطرح باشد، به خاطر بسپارد، و با پاره‌ای محفوظات قالبی برای مقابله با ضرورت‌های آزمون آماده شود. چنین است که با اجرای تدریجی این برنامه‌ها، معلمانی در کلاس مؤفق‌ترند که چکیده‌های سطحی برنامه‌ها را هرچه آشکارتر و مختصرتر مطرح کنند و به اصالت مطلب توجه نداشته باشند. بازار تهیه و فروش و اجرای این گونه آزمون‌ها رایج می‌شود و راه را بر توجه به عمق تحصیلات مدرسه‌ای می‌بندد. آن این گونه آزمون‌ها رایج و سرنوشت‌ساز باشد، داوطلب شرکت در امتحان، به کنجکاوی و تحلیل وسیع مطالب نیاز ندارد، با کوشش سازنده، تفکر دربارهٔ مباحث مختلف فاصله می‌گیرد و به تدریج عمق تحصیلات مدرسه‌ای از لحاظ وسعت آگاهی‌ها، به سطح نازلتری سقوط می‌کند.

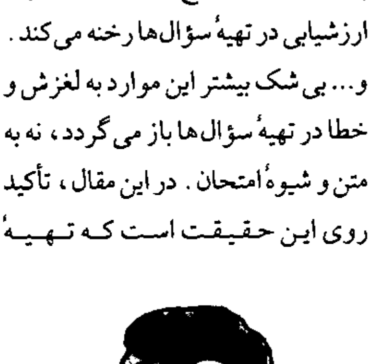
انتخاب سؤال

در هرگونه آزمون، انتخاب سؤال مرحله‌ای حسّاس است. سؤال امتحانی باید با بیان صریح، روشن، قابل فهم، و حتی‌المقدور کوتاه مطرح شود تا امتحان دهندگان، به سادگی مقصود را درک کرده و پاسخ را تشخیص دهند. پرسش امتحانی باید با همهٔ آنچه که مورد توجه ارزشیابی است ـ مثلاً ما با همهٔ برنامهٔ تحصیلی دورهٔ مربوطه ـ ارتباط



داشته باشد و فقط روی یک یا چند بخش متمرکز نباشد. پرسش امتحانی باید با مقدار پیامد وقتی که برای جواب گفتن به آزمایشی اختصاصی داده می‌شود، مناسبت معقول داشته باشد. وقت زیاد و کم، هریک متضمّن پیامدهایی است که دقت و اعتبار ارزشیابی را ساقط می‌کند. سؤال‌های امتحانی باید با رشد ذهنی و سن، به خصوص با هدف ارزشیابی، مناسب داشته باشند. پرسش‌های امتحانی، باید حتی‌المقدور مستقل از هم باشند تا موجب دوباره کاری و اتلاف وقت نشوند. سؤال‌های امتحانی از لحاظ سهولت و دشواری، باید حالت متعادل و میانی داشته باشند؛ نه چنان پیچیده و دشوار باشند که دست اکثریت گروه را در تهیهٔ پاسخ ببندند و نه آن‌چنان سهل و روشن که همه به آنها، به آسانی جواب دهند و مجال را بر طبقه‌بندی درست امتحان دهندگان تهیه کند.

با توجه به این ضرورت‌ها، ببینیم در تهیهٔ دو گونه سؤال‌های توصیفی و کوته جواب، معمولاً چه مسائلی پیش می‌آید؟ در ارتباط با پرسش‌های چندگزینه‌ای، مسأله اساسی این است که تهیهٔ این گونه پرسش‌ها، خود به علم و آگاهی متناسب با شرایط آزمون نیاز دارد. هر پرسش چند گزینه‌ای، فقط باید یک پاسخ درست داشته باشد. نحوهٔ مطرح کردن این پاسخ در پاسخنامه، اهمیت اساسی دارد. مهمتر از آن، انتخاب سه یا چهار پاسخ نادرست برای هر پرسش است. انتخاب پاسخ‌های نادرست، از منابع مهم بروز نارسایی‌هاست. گاهی پیش می‌آید که پاسخ‌های نادرست، چنان پیش پا افتاده و بی محتوا در می‌آیند که تشخیص پاسخ درست، کمرنگ جلوه می‌کند و به صورت خود به خودی ظاهر می‌شود. گاهی آزمون‌ها یا جواب درست ندارد یا بیش از یک جواب درست دارد و یا چنان مبهم است که تشخیص درست و نادرست را دشوار می‌کند. گاهی سلیقه و برداشت تهیه‌کننده در پیش‌بینی مطالب، بیش از پراکندگی موضوع و محتوای مورد ارزشیابی در تهیهٔ سؤال‌ها رخنه می‌کند. و... بی شک بیشتر این موارد به لغزش و خطا در تهیهٔ سؤال‌ها باز می‌گردد، نه به متن و شیوهٔ امتحان. در این مقال، تأکید روی این حقیقت است که تهیهٔ



پرسش‌های چند گزینه‌ای، فی نفسه دشوار و نیازمند صلاحیت و تخصّص کافی است. با این همه، اکنون اجرای آزمون‌های چند گزینه‌ای، معمول و به حکم ضرورت‌های اجتناب ناپذیر، جای دیگر روش‌ها را گرفته است. در این صورت، باید به کوشش وسیع و معنادار برای بازسازی، بهسازی و پاکسازی آن از موانع و زواید پرداخت.

ارزشیابی پرسش‌های امتحانی

بی گمان نتیجه و بنابراین، اعتبار هر امتحان، تابع عوامل گوناگون است. انتخاب سؤال، نظم و انضباط اجرای، مأخذ درست نمره‌گذاری و تصحیح اوراق، همه در اعتبار ارزشیابی مؤثرند. اجرای برنامه‌های وسیع ارزیابی سؤال‌ها، به ویژه در مواردی چون آزمون‌های گزینش دانشجو، و آنها که ملاک اختصاص امتیازهای قابل توجهی هستند که با سرنوشت انبوه جوانان برخورد دارند، به مراقبت جدّی شدید و مستمر نیاز دارند، و این مستلزم اتخاذ راه و روند مناسب و معتبر برای ارزشیابی خود جریان و شیوهٔ ارزشیابی است.

تهیهٔ سؤال‌های مناسب امتحان مرحله‌ای، بسیار دشوار است و جنبهٔ حسّاس ارزشیابی دارد. هرچه را که بتوان پرسید، نمی‌توان گفت که سؤال امتحانی است. سؤال‌های امتحانی را

غربال و صافی های دقیق لازم است تا در ارتباط با همهٔ آثار امتحان، نارسایی ها را شناسایی کنند و به حداقل تقلیل دهند. به حکم همین ضرورت، سؤال های امتحانی باید نتیجهٔ ارزشیابی های متعدد و با مجال تراز شده و قابل استناد باشند.

و امّا پرسش های امتحانی را چگونه می توان ارزیابی کرد؟ خوشبختانه برای این منظور، معیارهای نسبتاً دقیق فراهم کرده اند. در اجرای این برنامه، در درجهٔ اول، طبقه بندی امتحان دهندگان در سه گروه قوی، متوسط و ضعیف، بر اساس نتیجهٔ کلی امتحان لازم است، که از نتیجهٔ مستقل کار هر گروه و مقایسهٔ آنها، می توان به ویژگی های معیّنی رسید. برای این گروه بندی از تعداد امتحان دهندگان، می توان در هر طرف درصد معینی در نظر گرفت. درآزمایش صعودی نتیجهٔ کلی امتحان مثلاً ۲۵ درصد افراد را در هر طرف به عنوان دو گروه ضعیف و قوی و ۵۰ درصد میانی را گروهی متوسط در نظر می گیریم. در ارزشیابی سؤال ها، آنها را یک به یک مورد توجه قرار می دهیم. هر سوال برای خود معیارهایی به دست می دهد. برای شناسایی سؤال های بهتر، می توان از ملاک های مختلف استناد کرد؛ سختی و آسانی، قدرت تمیز، سلامت سؤال از لحاظ موضوع و متن و... از جمله ضابطه های ارزشیابی هر سؤالند.

شاخص ها را بر اساس نتایجی که از کاربرد مکرّر سوال ها حاصل می شود، باید فراهم کرد. سؤال هایی که در مقیاس انبوه با پاسخ های ناکافی، نارسا و غیر مربوط برخورد می کنند، فی نفسه مصون از عیب و نقص نیستند. در حقیقت، ماهیت این گونه پرسش ها را نقصانی است که به صورت ناتوانی گروه در مقابله با آنها ظاهر شده است.

باری، در جامعهٔ امروز که نوجوانان برای سال های دراز و به مدت قابل ملاحظه، عمر خود را به حکم اجبار و به پیروی از رسم زمان، در کلاس درس می گذرانند و توجه آنان به خط واحدی از پیروزی، یعنی راه یافتن به تحصیلات دانشگاهی است، ملاک های انتخاب باید قوی، قابل دفاع، نفوذناپذیر و بنا شده بر پشتوانه های علمی منطقی و نوآور باشد. مبادا که در آخرین مرحلهٔ تحصیلات دبیرستانی، خدای ناکرده بی میزانی و معیار دست رد بر سینهٔ بعضی گذاشته شود که نخیر، تو برای آنچه سال ها متر صد آن بوده ای، شایسته نیستی، و از این بدتر آن که، راه دیگری هم پیش پای آنها نگذاشته باشیم. از این مقوله بگذریم که، لُبّ سخن این که از ارزشیابی مستمر پرسش های امتحانی، قابل قبول ترین سؤال ها را از نقطه نظرهای مختلف باید شناسایی کنیم و در حفظ و سالم نگهداری آنها بکوشیم، و همواره همتراز و موازی این کوشش ها، درصدد آن باشیم که وقتی روش کار کهنه و شناخته شد، از شیوه های بهتر، مؤثرتر و سنجیده تری برای انتخاب به راستی بهترین ها سود بگیریم؛ در عین آن که برای دیگران نیز به فراخور شایستگی ها و توانایی هایشان، راه و خط های دیگری فراهم آورده باشیم.



به هر حال، سرنوشت را به خصوص آن گاه که نسل جوان، و در نهایت، جامعه، به نتیجهٔ آزمون های عمومی چشم دوخته اند و امیدها دارند، چشم بسته به پاره ای معیارهای نیم بند نباید سپرد. آزمون عمومی هم به ترازوهای دقیق و سالم نیاز دارد، هم وزنه ها و معیارهای موحّد و بدون شورش لازم است تا عدالت اجتماعی را مرعی دارد و انتخاب های شایسته تری را برای مقابله با شرایط فردا فراهم آورد. برای زندگی فردا مهارها را به دست آنهایی باید داد که به راستی مهارت پذیر باشند. ان شاءلله

گراف‌ها و کاربردهای آن

قسمت اول

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

«نظریهٔ گراف‌ها یکی از معدود رشته‌های ریاضی است که تاریخ دقیق پیدایش آن کاملاً مشخص است. نخستین مقالهٔ مربوط به گراف‌ها را لئونهارد اویلر ریاضی‌دان سوئیسی که یکی از تأثیرگذارترین افراد در تاریخ علوم است در سال ۱۷۳۶ میلادی نوشت و منتشر کرد، وی زمانی که سرگرم نوشتن مقاله‌اش دربارهٔ گراف‌ها بود بینایی یکی از چشمانش را از دست داد و به هنگام پیری کاملاً نابینا شد، ولی حتی این پیشامد موجب کاهش میزان نوشته‌های او نشد، اویلر مقاله خود دربارهٔ گراف‌ها را با بررسی معمایی به نام مسأله پلهای کونیگسبرگ آغاز کرد و در نهایت این مسأله باعث بوجود آمدن گراف‌های اویلری شد.»[1]

آشنایی با گراف

فرض کنید مدرسه‌ای تعداد ۵ عدد رایانه دارد که می‌خواهد با ایجاد یک شبکه ارتباطی بین رایانه‌ها، دسترسی به اطلاعات و ارائه خدمات به دانش‌آموزان آسانتر شود، لذا با اتصالات زیر رایانه‌ها را به همدیگر متصل می‌کند:

رایانه A را به رایانه‌های B و C و E متصل می‌کند.

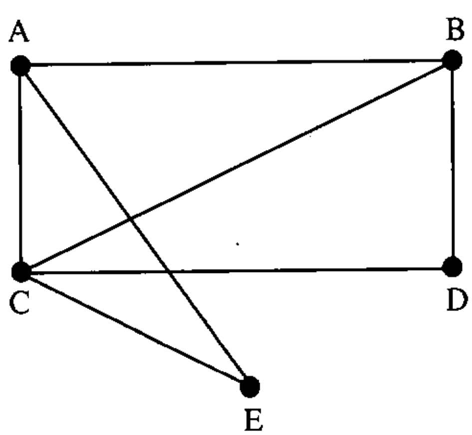
رایانه B را به رایانه‌های C و D متصل می‌کند.

رایانه C را به رایانه‌های A و B و D و E متصل می‌کند.

رایانه D را به رایانه‌های B و C متصل می‌کند.

رایانه E را به رایانه‌های A و C متصل می‌کند.

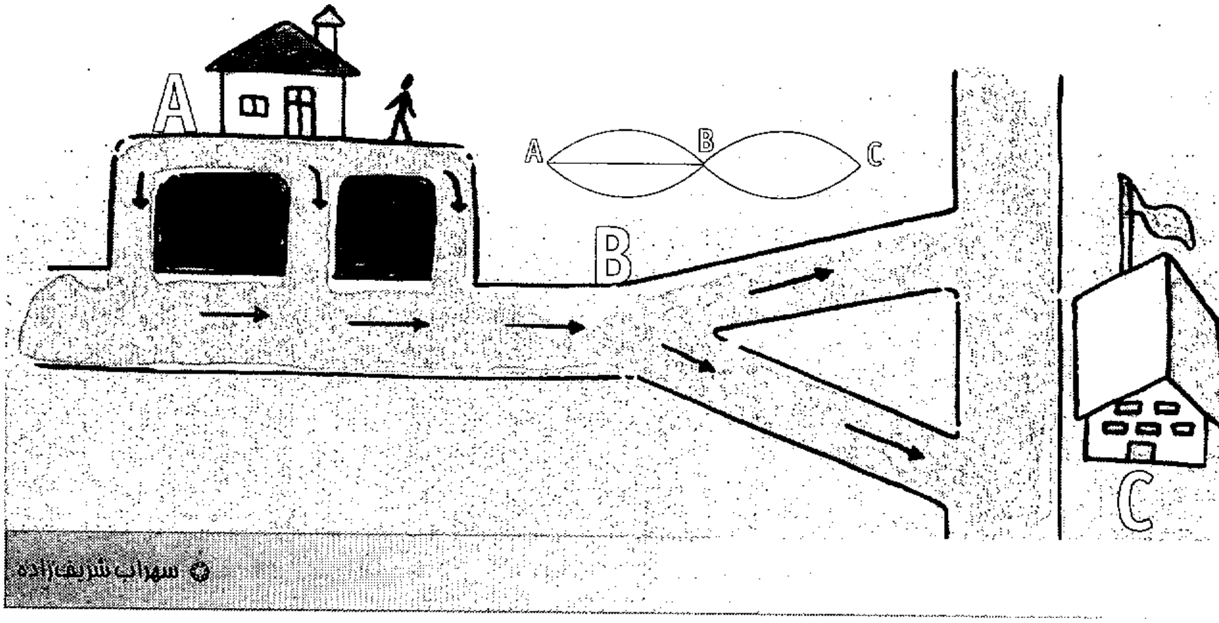
اتصالات بین رایانه‌ها را می‌توان به صورت نمودار زیر نمایش داد.



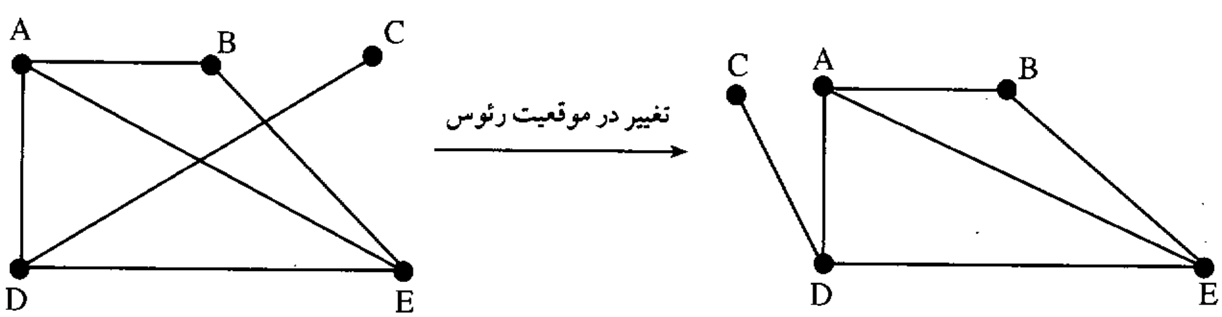
نمودار بالا را یک گراف می‌نامند، نقطه‌های A و B و C و D و E را **رأس‌های گراف** می‌گویند و پاره‌خط‌هایی که رأس‌های گراف را به هم متصل می‌کنند، **یال‌های گراف** می‌نامند، مانند: AB و CE و...

تذکر ۱: در هر گراف امکان دارد یال‌ها به صورت کمان یا منحنی نیز باشد.

تذکر ۲: چون گراف را در صفحه رسم کرده‌ایم، امکان دارد یال‌های گراف یکدیگر را در نقاطی غیر از رئوس قطع کنند، لذا برای پرهیز از این مشکل، با تغییر در موقعیت رئوس می‌توان، آن را طوری رسم کرد که یال‌ها همدیگر را در نقطه‌ای غیر از رئوس قطع کنند.

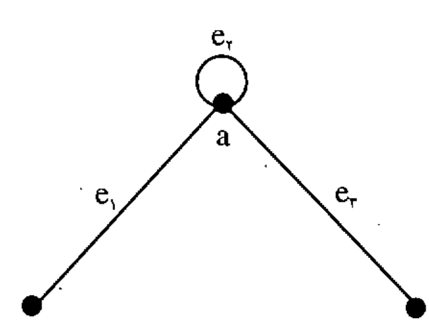


سهراب شریف‌زاده



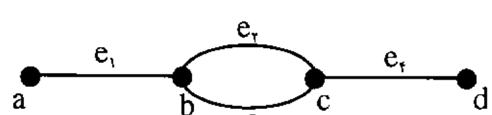
طوقه (حلقه)

یالی است که هر رأس را به خود آن رأس وصل می‌کنند، مانند یال e_2 در گراف زیر:



یال‌های موازی

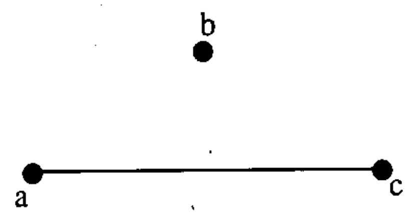
هرگاه بین دو رأس متمایز بیش از یک یال موجود باشد، به آن یال‌ها، یال‌های موازی می‌گویند، مانند یال‌های e_2 و e_3 در گراف زیر:



رأس تنها (ایزوله یا منفرد)

اگر رأسی با هیچ یالی به رأس دیگر متصل نباشد، آن رأس

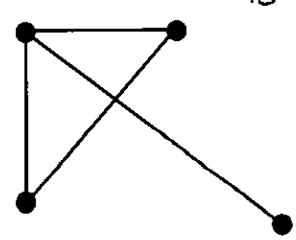
را رأس تنها می‌نامند، مانند رأس b در گراف زیر :



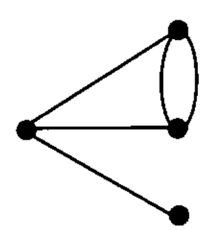
گراف ساده

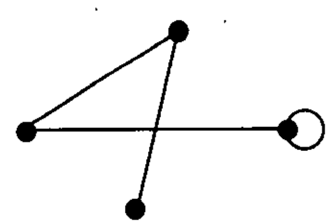
گراف‌هایی که دارای هیچ طوقه و یال موازی نمی‌باشند، گراف ساده می‌نامند.

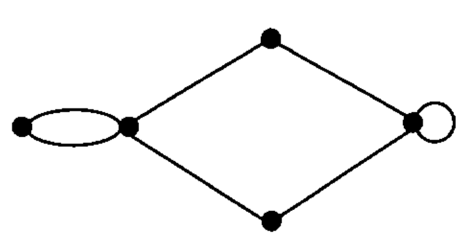
مثال۱) گراف زیر یک گراف ساده است، زیرا دارای طوقه و یال موازی نمی‌باشد.



مثال ۲) گراف‌های زیر ساده نمی‌باشد، زیرا دارای طوقه یا یال موازی و یا هر دو می‌باشند.



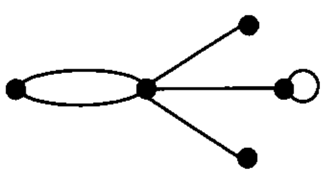


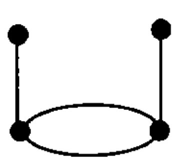


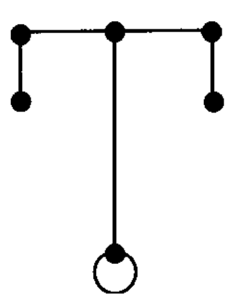
گراف چندگانه

گرافی که ساده نباشد یک گراف چندگانه است. به عبارت دیگر «گرافی که در آن، بین دو رأس بیش از یک یال موجود باشد یا این که رأسی به وسیله یک یال به خودش متصل باشد، گراف چندگانه می‌نامند»

مثال ۳) گراف‌های زیر چندگانه‌اند؟ (توجه کنید که در مثال ۲ نیز تمامی گراف‌ها چندگانه‌اند)



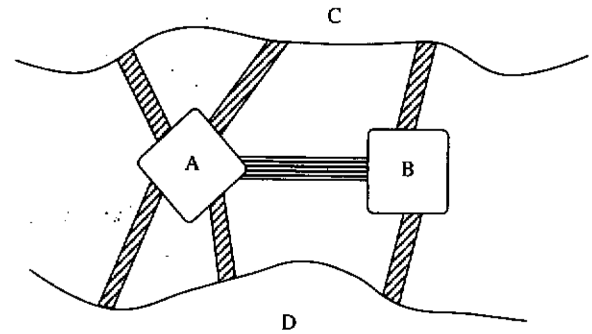




گراف مسأله شهر کونیگسبرگ یک گراف چندگانه است :

مسأله چنین است :

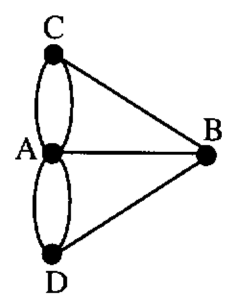
شهر کونیگسبرگ در کشور روسیه از دو ساحل رودخانه پرگل و دو جزیرهٔ مجزا تشکیل شده بود و هفت پل این دو جزیره را به صورت شکل صفحهٔ بعد، به هم وصل می‌کردند :



مسأله‌ای سال‌ها ذهن مردم را به خود مشغول کرده بود و آن مسأله این بود که:

«چگونه می‌توان با شروع از یک نقطه شهر و با گذشتن تنها یک بار از هر پل در شهر گشتی زد و به همان نقطه اولیه برگشت»

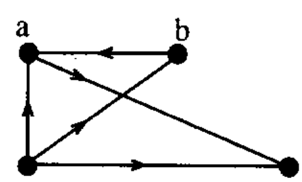
مردم این شهر سعی می‌کردند با قدم زدن و روش سعی و خطا این مسأله را حل کنند ولی در عمل نتیجه‌ای نمی‌گرفتند شهردار این شهر با نامه‌ای حل این مسأله را از اویلر درخواست می‌کند. اویلر بوسیلهٔ گراف زیر ثابت می‌کند که چنین کاری امکان‌پذیر نیست.



نمودار گراف مسأله این شهر یک گراف چندگانه است زیرا دارای یال‌های موازی می‌باشد.

گراف جهتدار

گرافی است که دارای یال‌های جهتدار می‌باشد، مانند گراف زیر:



تذکر: در گراف جهتدار به ازای هر دو رأس متمایز حداکثر دو یال جهتدار از یک رأس به رأس دیگر و بالعکس وجود دارد.

تعریف گراف ساده

تعریف: گراف ساده $G=(V,E)$ عبارت است از یک مجموعهٔ متناهی و غیرتهی V که اعضایش را رأس می‌نامیم و E زیرمجموعه‌ای است از مجموعه تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعه V، که اعضایش را یال می‌نامیم.

تذکر ۱: مجموعه رئوس G را به $V(G)$ و مجموعه یال‌های آن را به $E(G)$ نیز نمایش می‌دهند.

تذکر ۲: برای هر دو عضو a و b از V اگر $\{a,b\} \in E$ آنگاه یالی بین a و b وجود دارد و اگر $\{a,b\} \notin E$ یعنی یالی بین a و b نیست.

تذکر ۳: در این مقاله هرجا از کلمه «گراف» استفاده شود منظور گراف ساده است مگر آنکه خلاف آن گفته شود.

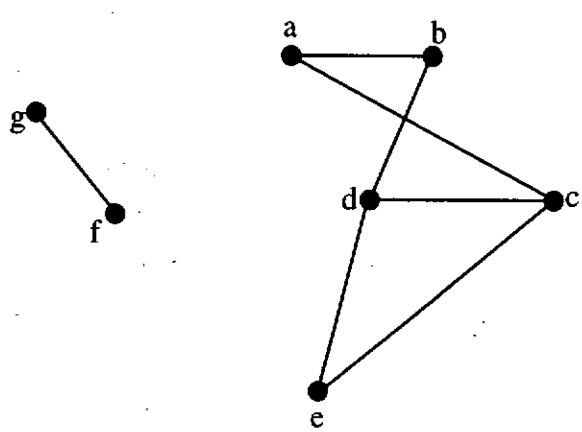
مثال ۴) قرار است بین هفت روستای a و b و c و d و e و f و g جاده‌هایی احداث گردد و به طوری که توسط این جاده‌ها:

روستای a با b و c و روستای f با g در ارتباط باشند.

روستای c با e و d و روستای d با b و e در ارتباط باشند.

گراف متناظر را رسم کنید.

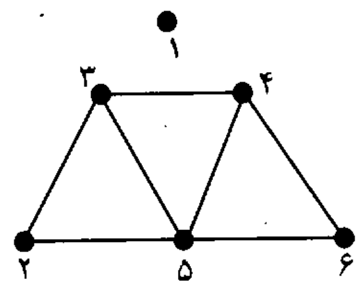
حل: نمودار گراف چنین است:



مثال ۵) اگر $V=\{1,2,3,4,5,6\}$ و $E=\left\{\{x,y\}\middle|\frac{y}{x}\notin N, x,y\in V\right\}$ ، اعضای E را بنویسید و نمودار گراف ساده $G=(V,E)$ را رسم کنید.

حل:

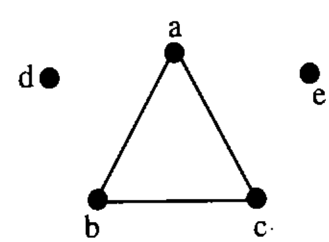
$$E=\{\{2,3\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\}\}$$



توجه: در گراف $G=(V,E)$ و $a,b,\in V$ به جای $\{a,b\}\in E$ ، برای سادگی از این به بعد می‌نویسیم: $ab\in E$

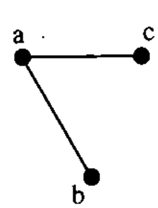
مثال ۶) فرض کنید G با $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و $E(G)=\{ab,ac,bc\}$ داده شده باشد، گراف آن را رسم کنید.

حل: نمودار گراف به صورت زیر است:



توجه: گراف بالا از سه بخش جدا از هم تشکیل شده است و همچنین گراف‌های داده شده در مثال‌های ۱ و ۲ هر کدام از دو بخش تشکیل شده‌اند.

دو رأس مجاور



دو رأس a و b در گراف $G=(V,E)$ را مجاور گوئیم هرگاه توسط یالی به هم متصل شده باشند. و رأس‌های a و b را دو سر یال ab می‌نامند. مثلاً در گراف مقابل دو رأس a و c مجاورند.

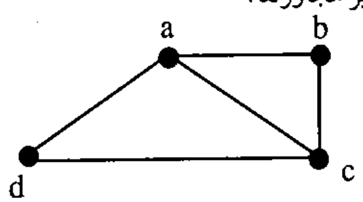
رأس مجاور به خود

در طوقه چون ابتدا و انتهای یک یال، یک رأس است به آن رأس، رأس مجاور به خود می گویند.

دو یال مجاور

هر دو یالی که محدود به یک رأس باشند، دو یال مجاور می‌نامند.

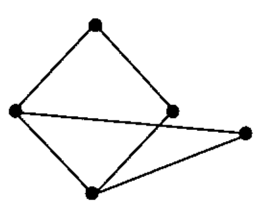
مثال در گراف زیر یال‌های ab و bc یال‌های مجاورند، زیرا هر دو یال به رأس b محدود هستند و امّا یال‌های ab و cd یال‌های غیر مجاورند.



مرتبه و اندازه در گراف

در گراف $G=(V,E)$ ، تعداد اعضای V را مرتبه G و تعداد اعضای E را اندازه G می‌نامند و آن‌ها را به ترتیب با p (یا p(G)) و q (یا q(G)) نمایش می‌دهند.

مثال۷) $q=6$ ، $p=5$



توجه کنید:

> دیدیم در گراف ساده $G=(V,E)$ ، مجموعه E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. بنابراین در گراف G با p رأس و q یال حداکثر تعداد عضوهای E برابر $\binom{p}{2}$ خواهد بود، لذا خواهیم داشت:
>
> $$0\leq q\leq\binom{p}{2}=\frac{1}{2}p(p-1)$$

آزمون۱: کدام عدد نمی‌تواند برابر تعداد یال‌های یک گراف مرتبه ۱۰ باشد؟

۱) ۳۶ ۲) ۱۸

۳) ۴۵ ۴) ۴۸

حل: گزینه (۴)

$$0 \le q \le \binom{10}{2} = \frac{10\times 9}{2} = 45 \to q \in [0,45]$$

اعداد صحیحی که متعلق به بازه [۰,۴۵] می‌باشند، می‌توانند برابر تعداد یال‌های گراف مرتبه ۱۰ باشند.

نکته: در هر گراف ساده از مرتبه p و اندازه q:

$$p \ge \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$$

آزمون۲: اندازه یک گراف ساده برابر ۴۰ می‌باشد، حداقل مرتبه این گراف کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۰

۳) ۱۲ ۴) ۱۵

حل: گزینه (۲)

$$q = 40 \to p \ge \frac{1+\sqrt{321}}{2} = 9/45 \xrightarrow{p\in N} P_{min} = 10$$

نکته۱: تعداد گراف‌های ساده با p رأس برابر است با:

$$2^{\binom{p}{2}}$$

نکته۲: تعداد گراف‌های ساده با p رأس و q یال برابراست با:

$$\binom{\binom{p}{2}}{q}$$

آزمون۳: چند گراف متفاوت با رئوس $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}$ می‌توان تعریف کرد، که دارای دو یال باشند؟

۱) ۹۹۰ ۲) ۸۷۰

۳) ۴۹۰ ۴) ۷۸۰

حل: گزینه (۱)

$$\binom{\binom{10}{2}}{2} = \binom{45}{2} = \frac{45\times 44}{2} = 45\times 22 = 990$$

آزمون۴: تعداد گراف‌های ساده p رأسی برابر 2^{10} است، p کدام است؟

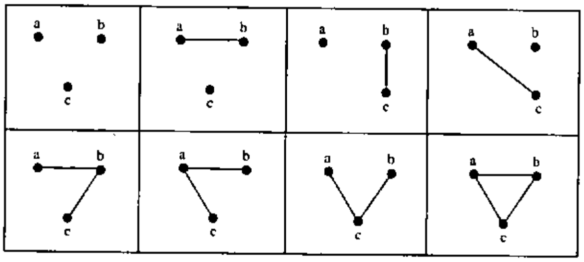
۱) ۱۰ ۲) ۵

۳) ۴ ۴) ۸

حل: گزینه (۲) $2^{\binom{p}{2}} = 2^{10} \to \binom{p}{2} = 10 \to p = 5$

مثال ۸) همه گراف‌های ساده با ۳ رأس را رسم کنید.

حل: تعداد $8 = 2^{\binom{3}{2}}$ گراف ساده با ۳ رأس می‌توان رسم کرد که عبارتند از:

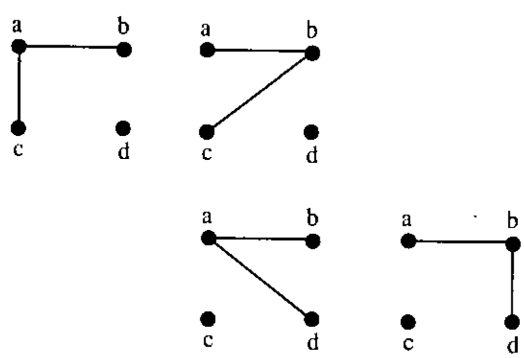


آزمون ۵: چند گراف ساده با رئوس {a,b,c,d} و دو یال می‌توان رسم کرد که یکی از یال‌های آن ab باشد؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

حل: گزینه (۳) مطابق گراف‌های زیر:



نکته۳: تعداد گراف‌های جهتدار با p رأس برابر است با: 2^{p^2}

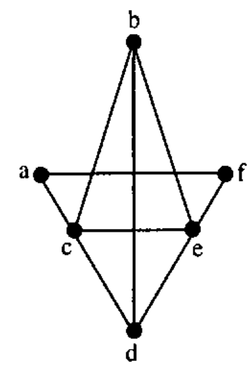
نکته۴: تعداد گراف‌های جهتدار بدون طوقه با p رأس برابر است با: 2^{p^2-p}

درجه

در گراف $G=(V,E)$ که $a \in V$ ، درجه رأس a عبارتست از تعداد یال‌هایی که از رأس a می‌گذرند، این عدد با dega یا $\deg_G^a$ نمایش می‌دهند.

تذکر ۱ : در گراف G درجه رأسی که فرد باشد رأس فرد و درجه رأسی که زوج باشد، رأس زوج می‌نامیم.

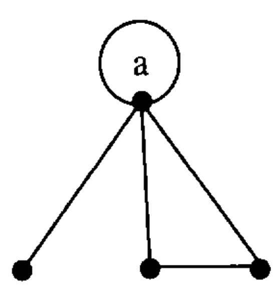
مثال ۹) رئوس فرد $\begin{cases}\deg b = ۳ \\ \deg d = ۳\end{cases}$ رئوس زوج $\begin{cases}\deg a = ۲ \\ \deg c = ۴ \\ \deg e = ۴ \\ \deg f = ۲\end{cases}$



$G=(V,E)$

تذکر ۲ : اگر گرافی دارای یال طوقه باشد، در شمارش درجات رئوس، درجه آن رأس به ازای آن طوقه دوبار شمارش می‌شود.

مثال) $\deg a = ۵$



تذکر ۳ : در گراف $G=(V,E)$ از مرتبه p، به ازای هر $vi \in V$ ، $۰ \le \deg vi \le p-۱$ ، $i = ۱,۲,۳,\cdots,p$

قضیه (نخستین قضیه گراف‌ها)

اگر $V=\{v_۱, v_۲, \cdots, v_p\}$ مجموعه رئوس گراف G با اندازه q باشد آنگاه:

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg vi = ۲q$$

اثبات : در شمارش درجات رئوس G چون هر یال دو سر دارد، بنابراین هر یال دوبار شمارش می‌شود.

نتیجه ۱ : مجموع درجات رئوس هر گراف، عددی زوج است.

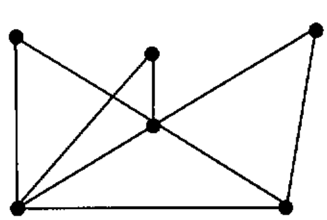
نتیجه ۲ : تعداد رئوس فرد در هر گراف، زوج است.

سئوال : آیا تعداد رئوس زوج در هر گراف همواره عددی زوج است؟

پاسخ : خیر ـ با توجه به اینکه مجموع درجات رئوس زوج عددی همواره زوج است، پس تعداد رئوس زوج در هر گراف می‌تواند فرد یا زوج باشد.

آزمون ۶ : در گراف مقابل مجموع درجات رئوس کدام است؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۸
۳) ۱۶ ۴) ۱۲



حل : گزینه (۲)

$$\sum_{i=۱}^{۶} \deg vi = ۲+۴+۲+۵+۳+۲=۱۸$$

آزمون ۷ : در گرافی که سه رأس زوج از درجه ۴ دارد، اندازه برابر ۲۰ است، مجموع درجات رئوس فرد کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰
۳) ۲۰ ۴) ۳۲

حل : گزینه (۱)

$$\sum \deg vi = ۲q = A + B \rightarrow ۲\times۲۰ = ۳\times۴ + B \rightarrow B = ۲۸$$

A: مجموع درجات رئوس زوج B: مجموع درجات رئوس فرد

آزمون ۸ : اگر گراف G از مرتبه ۱۴ ، دارای ۸ رأس از درجه یک ، سه رأس از درجه ۳ ، یک رأس از درجه ۵ و ۲ رأس از درجه ۲ باشند ، G چند یال دارد؟

۱) ۱۲   ۲) ۱۳

۳) ۱۴   ۴) ۱۹

حل : گزینه (۲)

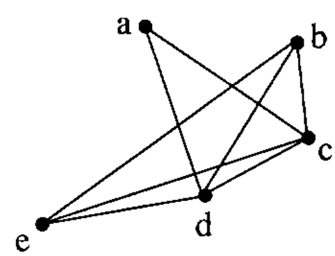
$$(8\times1)+(3\times3)+(1\times5)+(2\times2)=2q \to 8+9+5+4=2q \to q=13$$

ماکسیمم درجه و می‌نیمم درجه

در بین درجه‌های رئوس یک گراف بزرگترین عدد را ماکسیمم درجه و کوچک‌ترین عدد را می‌نیمم درجه آن گراف می‌نامیم ، ماکسیمم درجه را به Δ یا $\Delta(G)$ و می‌نیمم درجه را به δ یا $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم .

تذکر : رأس تنها دارای درجه صفر است .

مثال۱۰) در گراف مقابل : $\Delta = 4$, $\delta = 2$



نکته : در هر گراف : $\Delta \le p-1$, $\delta \ge 0$

آزمون ۹ : در یک گراف $\Delta = 12$ است ، کمترین مقدار p کدام است؟

۱) ۱۱   ۲) ۱۲

۳) ۱۳   ۴) نمی‌توان مشخص کرد.

حل : گزینه (۳) $\Delta \le p-1 \to p \ge \Delta+1 = 12+1 = 13$

توجه کنید:

> در هر گراف از مرتبه p و اندازه q : $\delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$
> ($\frac{2q}{p}$ را میانگین درجات رئوس گراف می‌نامند)

اثبات : فرض کنیم $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ مجموعه رئوس گراف G باشد ، داریم :

$$\delta \le \deg v_i \le \Delta \longrightarrow \sum_{i=1}^{p}\delta \le \sum_{i=1}^{p}\deg v_i \le \sum_{i=1}^{p}\Delta \to p\delta \le 2q \le p\Delta$$

$$\to \delta \le \frac{2q}{p} \le \Delta$$

آزمون ۱۰ : درجه هر رأس در گراف مرتبه ۱۵ حداکثر برابر ۶ می‌باشد ، این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۴۲   ۲) ۴۴

۳) ۴۵   ۴) ۴۸

حل :

$$\frac{2q}{p} \le \Delta \to q \le \frac{p\Delta}{2} = \frac{6\times15}{2} = 45 \to Max(q) = 45$$

آزمون ۱۱ : (آزمون سوم پایندگان ـ۷۹) در گرافی با ۱۸ یال حداقل درجه بین رئوس برابر ۳ است ، کدام عدد **نمی‌تواند** برابر تعداد رئوس این گراف باشد؟

۱) ۹   ۲) ۱۲

۳) ۸   ۴) ۱۴

حل :

$$\begin{cases} p \ge \dfrac{1+\sqrt{1+8q}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{1+8\times18}}{2} = 6/5 \to p \ge 7 \\ p \le \dfrac{2q}{\delta} = \dfrac{2\times18}{3} = 12 \qquad \to 7 \le p \le 12 \end{cases}$$

پس اعدادی که در نامساوی بالا صدق می‌کنند ، می‌توانند برابر مرتبه گراف مزبور باشند که بین گزینه‌ها عدد ۱۴ در نامساوی مزبور صدق نمی‌کند و نمی‌تواند برابر مرتبه این گراف باشد .

آزمون ۱۲ : در گراف G از مرتبه ۱۲ و اندازه ۴۸ کدام عدد **نمی‌تواند** برابر Δ باشد؟

۱) ۷   ۲) ۸

۳) ۱۰   ۴) ۱۱

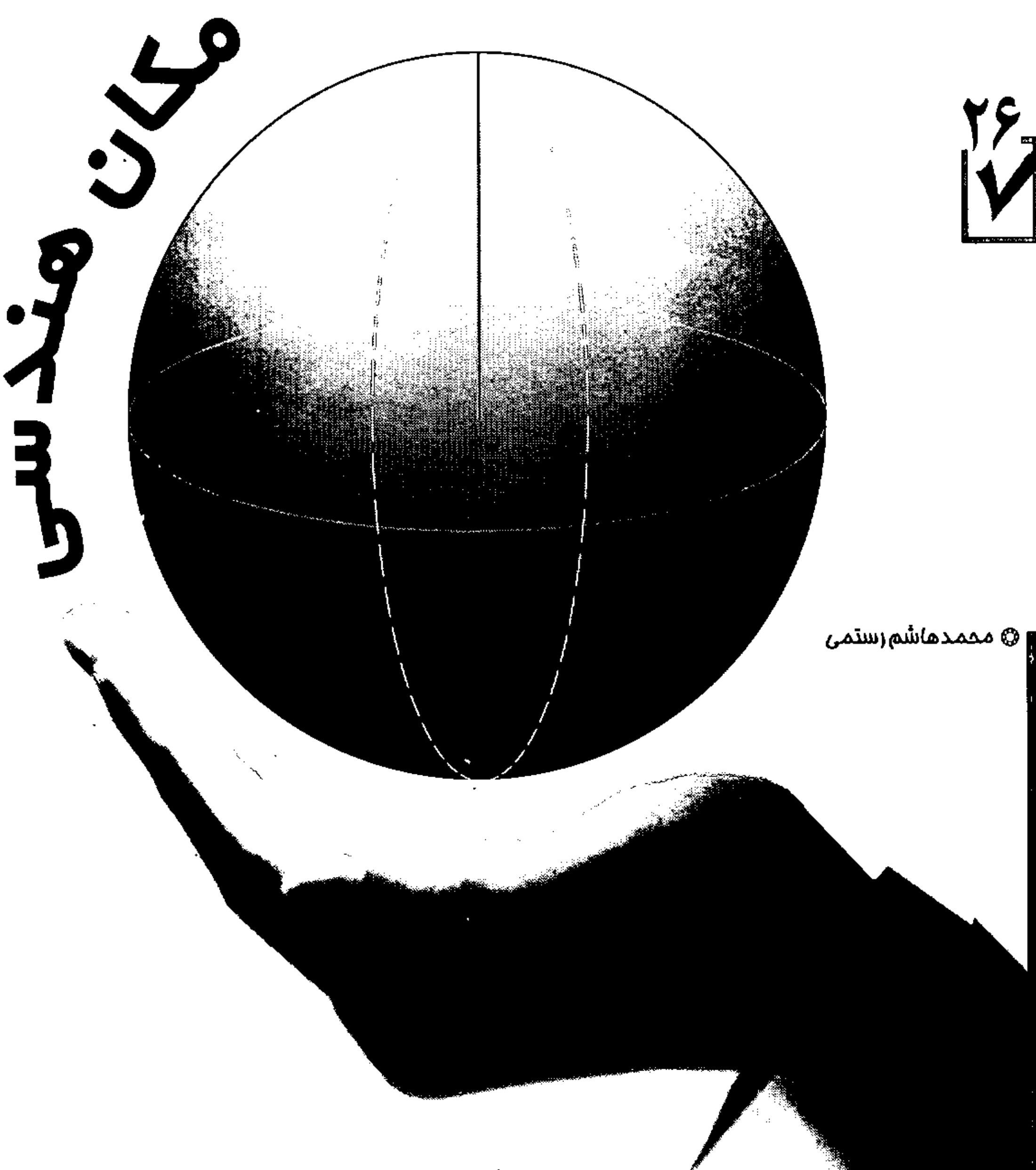
$$\frac{2q}{p} \le \Delta \le p-1 \to \frac{2\times48}{12} \le \Delta \le 12-1 \to 8 \le \Delta \le 11$$

پس نمی‌تواند برابر ۷ باشد .

پانویس

۱ـ گراف و کاربردهای آن ـ اُیستین اُرـ ترجمهٔ منتخب

مکان هندسی



محمدهاشم رستمی

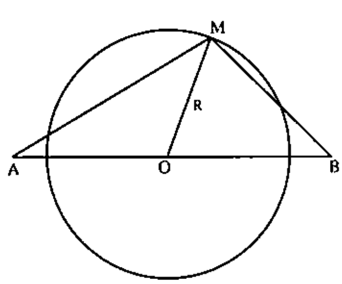
مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابتی است

مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB است.

اثبات به روش هندسی. اگر نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و AB=a و M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم:

$$MA^2 + MB^2 = k^2 \qquad (1)$$

در مثلث MAB، پاره‌خط MO میانهٔ نظیر ضلع AB است



و بنا به رابطهٔ میانه‌ها در مثلث می‌توان نوشت:

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}$$

یا :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{a^2}{2} \qquad (2)$$

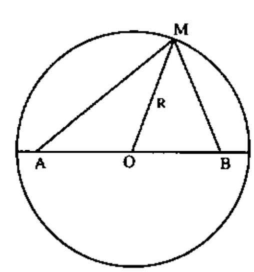
از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) داریم :

$$2MO^2 + \frac{a^2}{2} = k^2 \Rightarrow OM = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2} \qquad (3)$$

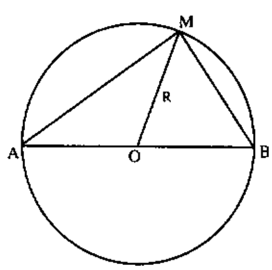
با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O و مقدارهای k^2 و a، رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ است . بعکس هر نقطه روی این دایره انتخاب کنیم، مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k^2 است .

بحث. شرط امکان مسأله آن است که $2k^2 - a^2 \geq 0$ یا $k^2 \geq \frac{a}{2}$ باشد . در این صورت :

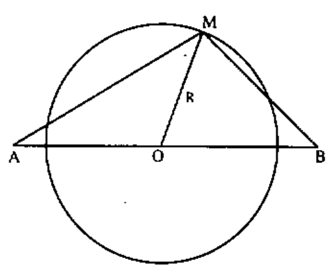
۱ . اگر $k^2 > a^2$ باشد، $R > \frac{a}{2}$ و درنتیجه دو نقطهٔ A و B درون دایرهٔ مکان واقع می‌شوند .



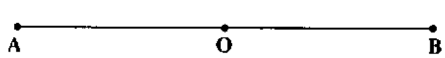
۲ . اگر $k^2 = a^2$ باشد، $R = \frac{a}{2}$ ، و دایرهٔ مکان از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد . درحقیقت در این حالت، دایرهٔ مکان، دایرهٔ به قطر پاره‌خط AB است .



۳ . اگر $\frac{a^2}{2} < k^2 < a^2$ باشد، $R < \frac{a}{2}$ و دو نقطهٔ A و B در بیرون دایرهٔ مکان قرار می‌گیرد .

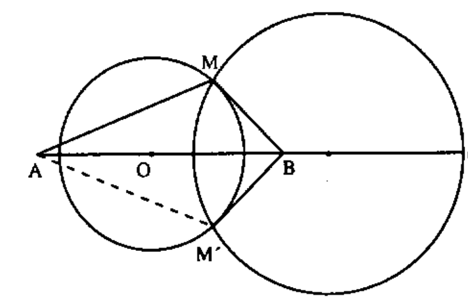


۴ . اگر $k^2 = \frac{a^2}{2}$ باشد، $R = 0$ و درنتیجه تنها نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB ، جواب مسأله است .

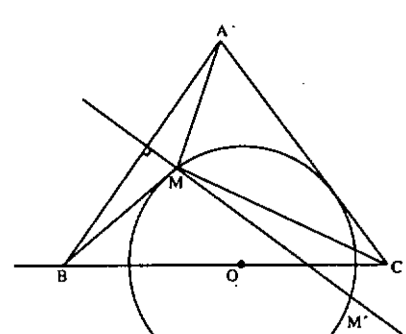


مثال ۱ . دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند . نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از این دو نقطه برابر k^2 و نسبت فاصله‌اش از همین دو نقطه برابر k' باشد .

حل . می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k^2 است ، دایره‌ای است به مرکز O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ (دایرهٔ C) . این دایره را رسم می‌کنیم . از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k' باشد ، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k' تقسیم می‌کند . این دایره را نیز رسم می‌کنیم و (C') می‌نامیم . نقطه‌های برخورد این دو دایره (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند .

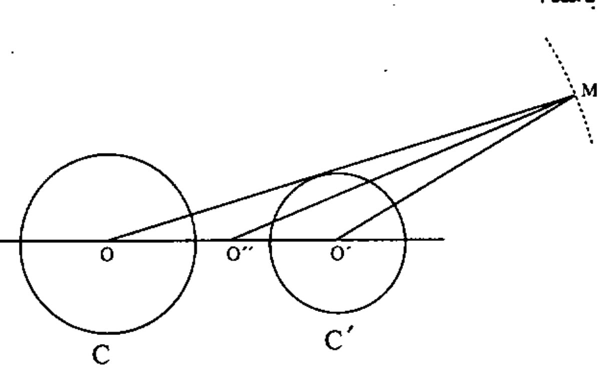


مثال ۲ . سه نقطهٔ A ، B و C غیرواقع بر یک خط راست در یک صفحه داده شده‌اند . نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر k^2 و از دو نقطهٔ A و B نیز به یک فاصله باشد .



حل . می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر مقدار ثابت k^2 باشد ، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط BC و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - BC^2}$ است . این دایره را رسم می‌کنیم . از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است ، عمودمنصّف پاره‌خط AB است . این مکان را نیز رسم می‌کنیم . نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان (در صورت وجود) جواب مسأله است .

مثال ۳ . دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در یک صفحه داده شده‌اند ، مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که مجموع قوت‌های آن نسبت به این دو دایره برابر مقدار ثابت k باشد .



حل . فرض می‌کنیم M یکی از نقطه‌های مکان هندسی مورد نظر باشد ؛ یعنی داشته باشیم : $P_{M(C)} + P_{M(C')} = k$. با توجه به این که :

$$P_{M(C')} = MO'^2 - R'^2 \text{ و } P_{M(C)} = MO^2 - R^2$$

است ، با جایگذاری در رابطهٔ بالا داریم :

$$MO^2 - R^2 + MO'^2 - R'^2 = k$$
$$\Rightarrow MO^2 + MO'^2 = k + R^2 + R'^2 \quad (1)$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که مجموع مربع‌های فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت O و O' برابر مقدار ثابت $k + R^2 + R'^2$ است ؛ بنابراین مکان هندسی این نقطه ، دایره‌ای به مرکز وسط

پاره‌خط OO' و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2(k+R^2+R'^2)-\overline{OO'}^2}$ است.

مثال ۴. دو نقطهٔ $A(-1,3)$ و $B(2,-1)$ در دستگاه مختصات xOy داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ این دستگاه مختصات را بیابید که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۱۷ باشد.

حل. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یکی از نقطه‌های مکان هندسی خواسته شده باشد. در این صورت داریم:

$M(x,y)$ و $A(-1,3)$ و $B(2,-1)$ و

$$MA^2+MB^2=17$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+(y-3)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=17$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-2x-4y=2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-x-2y=1 \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{9}{4}$$

این معادله نشان می‌دهد که مکان هندسی مورد نظر، دایره‌ای به مرکز $O_1(\frac{1}{2},1)$ و به شعاع $R=\frac{3}{2}$ است.

مثال ۵. نقطه‌ای روی خط $\Delta: 2x+y-1=0$ بیابید که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ $A(-2,1)$ و $B(2,1)$ برابر ۱۶ باشد.

حل. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربع‌های فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت ۱۶ است، دایره‌ای به مرکز وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است. بنابراین معادلهٔ این دایره را نوشته، نقطه یا نقطه‌های برخورد آن، با خط Δ را به دست می‌آوریم:

$M(x,y)$ و $A(-2,1)$ و $B(2,1)$

$$MA^2+MB^2=16$$

$$\Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-1)^2=16$$

$$\Rightarrow 2x^2+2y^2-4y=6 \Rightarrow x^2+y^2-2y-3=0$$

$$\Rightarrow x^2+(y-1)^2=4$$ معادلهٔ دایرهٔ مکان هندسی

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=4 \\ 2x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2=4 \Rightarrow x^2=\frac{4}{5} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

نقطه‌های جواب مسأله

$$\Rightarrow M_1(\frac{2\sqrt{5}}{5},1-\frac{4\sqrt{5}}{5}) \text{ و } \Rightarrow M_2(\frac{-2\sqrt{5}}{5},1+\frac{4\sqrt{5}}{5})$$

حل مسابقه‌ای برهان ۳۵

ثابت کنید مجموعه عددهای طبیعی به فرم 2^n-3 $(n \in N)$ که هر دو عضو آن نسبت به هم اول هستند، یک مجموعهٔ نامتناهی است، یعنی بی‌شمار عدد طبیعی به فرم 2^n-3 یافت می‌شوند که همگی دو به دو نسبت به هم اول باشند.

حل: اثبات به کمک برهان خلف انجام می‌شود. فرض کنیم مجموعهٔ این گونه عددها یک مجموعهٔ متناهی S با k عضو به صورت زیر باشند:

$$S=\{2^{m_1}-3, 2^{m_2}-3, \dots, 2^{m_k}-3\}$$

و طبق فرض مسأله:

$$\forall 1 \le i, j \ge k: (2^{m_i}-3, 2^{m_j}-3)=1$$

اکنون فرض می‌کنیم همهٔ عوامل اول این k عدد، عددهای اول P_1 و P_2 و ... و P_t باشند، عدد طبیعی $N=2^{(P_1-1)(P_2-1)\dots(P_t-1)+1}$ را تشکیل می‌دهیم. روشن است که چون همهٔ عددهای به فرم 2^n-3، عددهایی فرد هستند (چرا؟)، لذا $P_i \neq 2$ $(1 \le i \le k)$ و در نتیجه $(P_i,2)=1$ و طبق قضیهٔ کوچک فرما ($(a,p)=1 \Rightarrow a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$) خواهیم داشت:

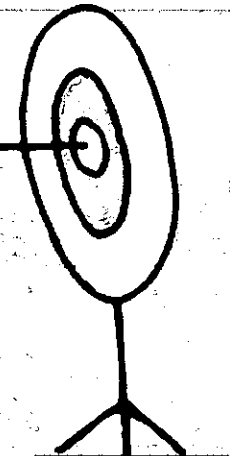
$$\forall 1 \le i \le k: 2^{P_i-1} \overset{P_i}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow \left[2^{(P_i-1)}\right]^{(P_1-1)(P_2-1)\dots(P_t-1)/(P_i-1)} \overset{P_i}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{(P_1-1)(P_2-1)\dots(P_t-1)+1} \overset{P_i}{\equiv} 2$$

$$\Rightarrow N \overset{P_i}{\equiv} 2 \Rightarrow N-3 \overset{P_i}{\equiv} -1$$

و لذا هیچ یک از عددهای اول p_1 و p_2 و ... و p_t عدد $N-3$ را نمی‌شمارند و در نتیجه $N-3$ نسبت به همهٔ عددهای عضو S اول است. ولی روشن است که $N-3$ نیز به فرم 2^n-3 بوده و عضو S نمی‌باشد، پس S نامتناهی است.

احتمال در فضای نم



● میر شهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی

با مفهوم احتمال در فضای نمونه‌ای گسسته آشنا شده‌اید، در این مقاله احتمال در فضای نمونه‌ای پیوسته را بررسی خواهیم کرد. در این نوع فضای نمونه‌ای، پیشامدی مانند A از فضای نمونه‌ای S وجود دارد به طوری که $A \neq S, A \subset S$ ولی $P(A) = P(S) = ۱$، یا پیشامدی مانند $B \neq \varnothing$ موجود است به طوری که $P(B) = ۰$. تصور چنین پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای گسسته قابل باور نیست، اما با آوردن مثال‌هایی در فضای نمونه‌ای پیوسته، این نوع پیشامدها را بررسی می‌کنیم.

ابتدا فضاهای نمونه‌ای را بیان می‌کنیم، سپس با آوردن مثال‌هایی احتمال در فضای نمونه‌ای پیوسته را مطالعه می‌کنیم.

فضای نمونه‌ای

مجموعهٔ همهٔ حالت‌های ممکن در به‌وقوع پیوستن یک آزمایش تصادفی را، فضای نمونه‌ای آن آزمایش تصادفی گوییم. فضای نمونه‌ای، دو نوع گسسته و پیوسته دارد.

فضای نمونه‌ای گسسته

فضای نمونه‌ای که تعداد اعضای آن، با شمارش قابل اندازه‌گیری باشد، فضای نمونه‌ای گسسته است. به‌طور معمول، فضای نمونه‌ای گسسته را با حرف S و تعداد اعضای مجموعهٔ S را با n(S) نمایش می‌دهیم.

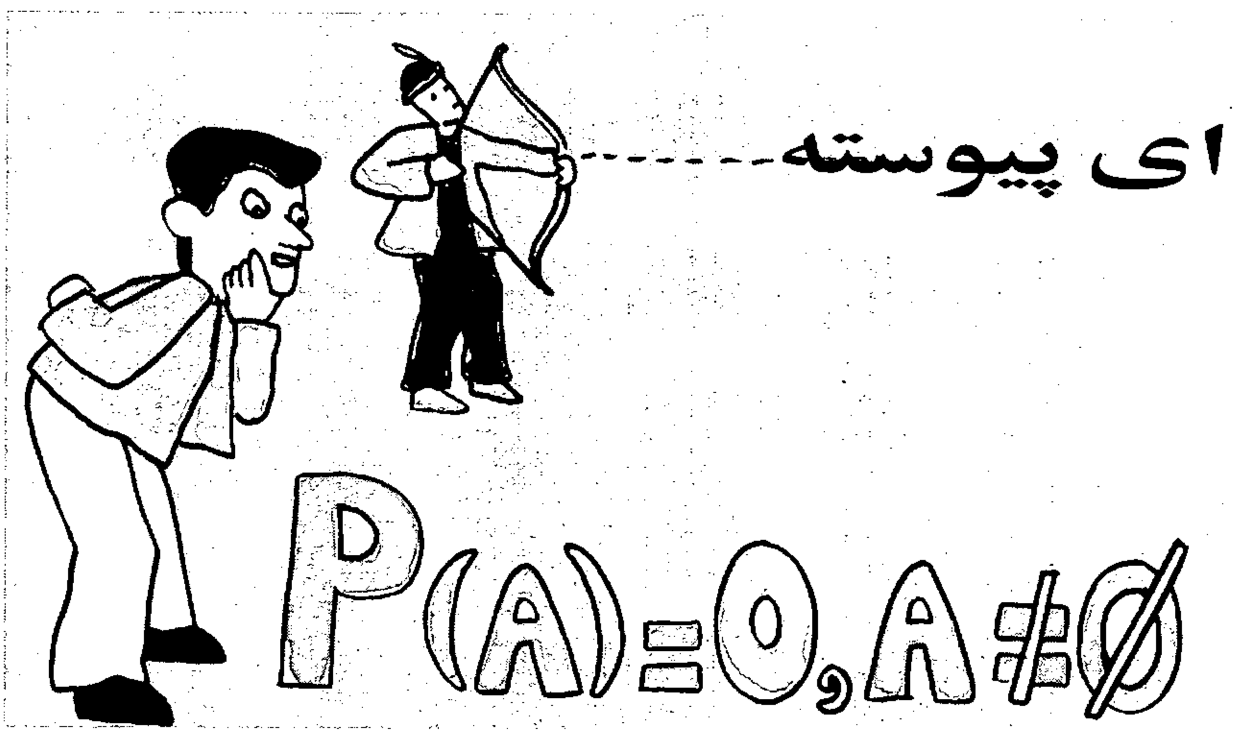
فضای نمونه‌ای پیوسته

فضای نمونه‌ای که تعداد اعضای آن با شمارش قابل اندازه‌گیری نباشد، فضای نمونهٔ پیوسته است. برای محاسبهٔ اندازهٔ فضای نمونه‌ای پیوسته، سه حالت زیر را داریم:

حالت اول. اگر فضای نمونه‌ای یک بازه باشد یا $S \subset \mathbb{R}$، در این حالت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای، برابر طول بازه است و طول فضای نمونه‌ای را با L_S نمایش می‌دهیم.

مثال. یک عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۳ و کوچک‌تر از ۸ را تصادفی انتخاب می‌کنیم، در این حالت، $S = (۳,۸)$ و $L_S = ۵$.

مثال. قرار است بین ساعت ۵ تا ۵:۴۰ تصادفی دوست خود را ملاقات کنید، در این حالت داریم:

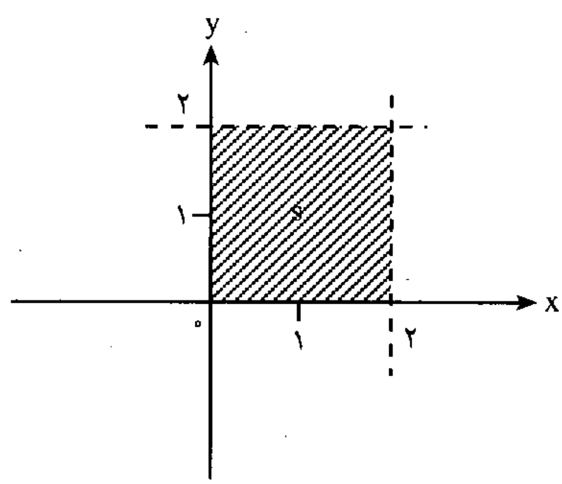


ای پیوسته

$S = (۵,۵:۴۰); L_S = ۴۰$ دقیقه یا $L_S = ۲۴۰۰$ ثانیه

حالت دوم. اگر فضای نمونه‌ای یک شکل بسته در صفحه باشد یا $S \subset \mathbb{R}^۲$، در این حالت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای برابر با مساحت شکل است و مساحت فضای نمونه‌ای را با a_s نمایش می‌دهیم.

مثال. دو عدد حقیقی بین ۰ و ۲ را تصادفی انتخاب می‌کنیم. اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟



حل. یک عدد حقیقی بین ۰ و ۲ را روی محور طول‌ها و عدد حقیقی دیگر را بین ۰ و ۲ روی محور عرض‌ها انتخاب می‌کنیم:

$S = \{(x,y) | x \in (۰,۲)$ و $y \in (۰,۲)\}; a_s = ۲ \times ۲ = ۴$

مثال) تیراندازی، به طرف یک هدف دایره‌ای شکل با قطر ۸۰ سانتیمتر تیراندازی می‌کند، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟

حل. اندازهٔ فضای نمونه‌ای، برابر با مساحت هدف دایره‌ای شکل است:

$a_s = \pi r^۲ = \pi(۴۰)^۲ = ۱۶۰۰\pi$

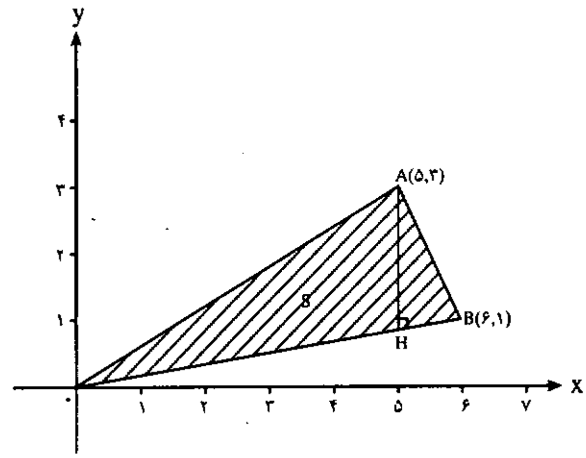
مثال) یک نقطه را تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ انتخاب می‌کنیم. اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟

حل. اندازهٔ فضای نمونه برابری با مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع است. از طرفی چون مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ است،

بنابراین داریم:

$$a_s = \frac{\sqrt{3}}{4}(4)^2 = 4\sqrt{3}$$

مثال. یک نقطه (x, y) را تصادفی داخل یا روی مثلثی به رأس‌های (۰,۰) ، (۵,۳) و (۶,۱) انتخاب می‌کنیم، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟



حل.

$$a_s = \frac{AH \times OB}{2};\ \ OB = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$$

طول AH برابر با فاصلهٔ نقطه A تا ضلع OB است؛ بنابراین ابتدا معادلهٔ خط OB را می‌نویسیم، سپس فاصلهٔ نقطه A را تا این خط محاسبه می‌کنیم:

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1);\ \ (y - 0) = \frac{1 - 0}{6 - 0}(x - 0)$$

$$\Rightarrow x - 6y = 0$$

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + C|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times 5 + (-6) \times 3|}{\sqrt{1^2 + 6^2}} = \frac{13}{\sqrt{37}}$$

$$a_s = \frac{\frac{13}{\sqrt{37}} \times \sqrt{37}}{2} = \frac{13}{2}$$

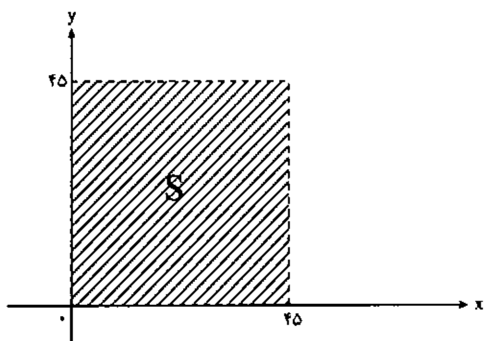
مثال. حمید و هوشنگ قرار گذاشتند که هنگام بازدید از موزه فرش ایران یکدیگر را بین ساعت ۳۰ : ۱۴ تا ۱۵ : ۱۵ ملاقات کنند، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را پیدا کنید؟

حل. اگر حمید x دقیقه بعد از ساعت ۳۰ : ۱۴ و هوشنگ y دقیقه بعد از ساعت ۳۰ : ۱۴، سر قرار حاضر شوند، درصورتی که زمان رسیدن دو نفر را به صورت زوج مرتب (x,y) نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$0 < x < 45$$
$$, 0 < y < 45$$

(زیرا x دقیقه و y دقیقه بعد از ساعت ۳۰ : ۱۴ تا ساعت ۱۵ : ۱۵، به صورت $0 < x < 45$ و $0 < y < 45$ است).

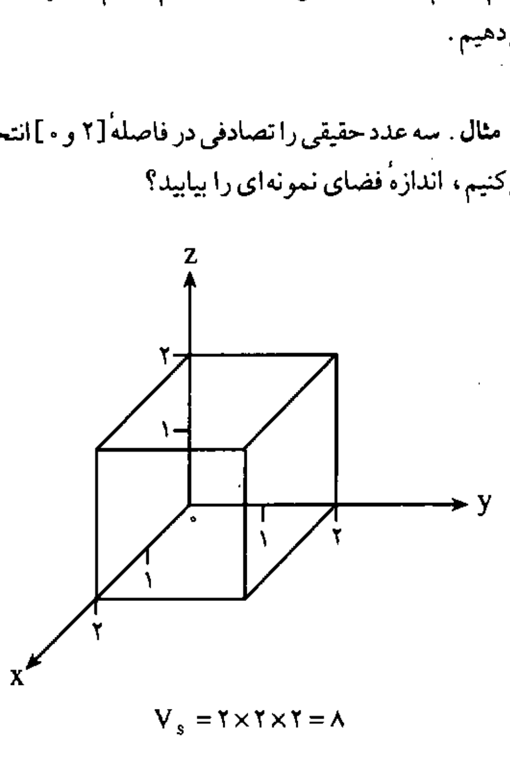
$$S = \{(x, y) | 0 < x < 45, 0 < y < 45\}$$



$$a_S = (45)^2$$

حالت سوم. اگر فضای نمونه‌ای حجم یک جسم در فض[ا] باشد یا $S \subset \mathbb{R}^3$ ، در این صورت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای براب[ر] حجم جسم است. در این حالت، حجم جسم را با V_s نمایش می‌دهیم.

مثال. سه عدد حقیقی را تصادفی در فاصلهٔ [۰ و ۲] انتخاب می‌کنیم، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را بیابید؟



$$V_s = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

پیشامد تصادفی

هر زیرمجموعه از یک فضای نمونه‌ای را، پیشامد تصادفی در آن فضا می‌نامیم. برای محاسبهٔ اندازهٔ پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای پیوسته لازم است که حل نامعادلات خطی را در صفحه مختصات به‌خاطر داشته باشید و در حل مسائل به‌کار ببرید.

مثال. عددی را به تصادف بین $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۷}{۲}$ انتخاب می‌کنیم، اگر انتظار داشته باشیم که این عدد بین $\frac{۳}{۴}$ و ۳ باشد، مطلوب است:

الف. اندازهٔ فضای نمونه‌ای

ب. اندازهٔ پیشامد.

حل. الف. چون عدد x را در بازهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۲})$ انتخاب می‌کنیم، پس $L_S = \frac{۷}{۲} - \frac{۱}{۲} = ۳$

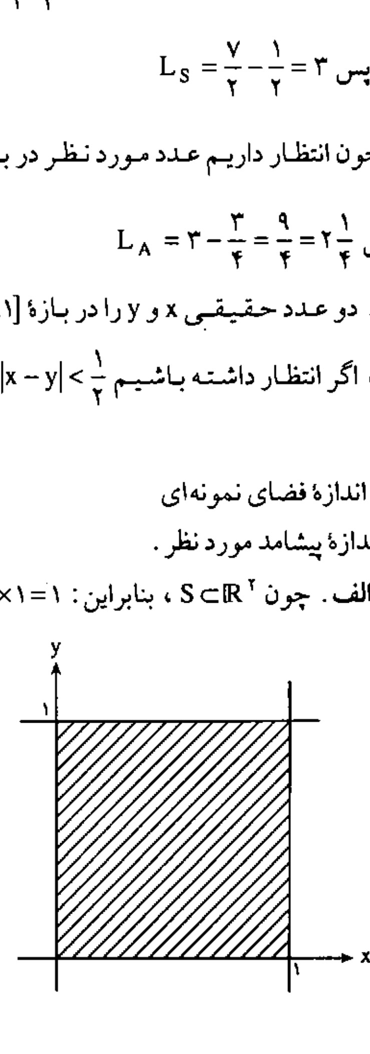
ب. چون انتظار داریم عدد مورد نظر در بازهٔ $(\frac{۳}{۴},۳)$ باشد، پس $L_A = ۳ - \frac{۳}{۴} = \frac{۹}{۴} = ۲\frac{۱}{۴}$

مثال. دو عدد حقیقی x و y را در بازهٔ $[۰,۱]$ در نظر می‌گیریم، اگر انتظار داشته باشیم $|x-y| < \frac{۱}{۲}$، مطلوب است:

الف. اندازهٔ فضای نمونه‌ای

ب. اندازهٔ پیشامد مورد نظر.

حل. **الف.** چون $S \subset \mathbb{R}^۲$، بنابراین: $a_S = ۱ \times ۱ = ۱$.



ب.
$$|x-y| < \frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲} < x-y < \frac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x-y < \frac{۱}{۲} & (۱) \\ \text{و} \\ x-y > -\frac{۱}{۲} & (۲) \end{cases}$$

برای محاسبهٔ اندازهٔ پیشامد، باید جواب نامعادله‌های (۱) و (۲) را در داخل فضای نمونه‌ای پیدا کنیم.

برای حلّ نامعادلهٔ (۱)، ابتدا نمودار خط به معادلهٔ $x-y=\frac{۱}{۲}$ را رسم می‌کنیم. این خط، صفحهٔ مختصات $\mathbb{R}^۲$ را به سه ناحیه تقسیم می‌کند، که عبارتند از: ۱) مجموعهٔ نقاط روی خط ۲) مجموعهٔ نقاط طرف راست خط ۳) مجموعهٔ نقاط طرف چپ خط.

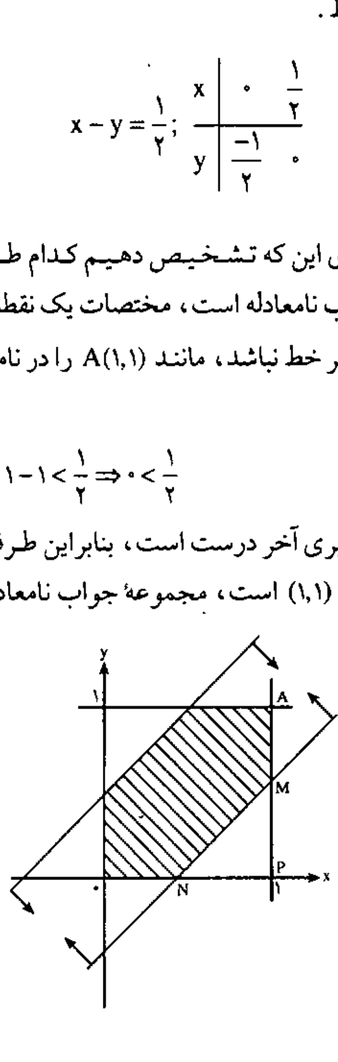
$x-y=\frac{۱}{۲};$

x	۰	$\frac{۱}{۲}$
y	$\frac{-۱}{۲}$	۰

اکنون برای این که تشخیص دهیم کدام طرف خط، مجموعهٔ جواب نامعادله است، مختصات یک نقطهٔ دلخواه از $\mathbb{R}^۲$ که واقع بر خط نباشد، مانند $A(۱,۱)$ را در نامعادله قرار می‌دهیم:

$$A(۱,۱) \Rightarrow ۱-۱ < \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۰ < \frac{۱}{۲}$$

چون نابرابری آخر درست است، بنابراین طرفی از خط که شامل نقطهٔ $(۱,۱)$ است، مجموعهٔ جواب نامعادله است:



در این مرحله، نامعادلهٔ (۲) را حل می‌کنیم، برای این منظور، ابتدا خط به معادلهٔ $x - y = \frac{-1}{2}$ را رسم می‌کنیم.

$$x - y = -\frac{1}{2};\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline y & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$\frac{-1}{2} < 0$ درست است $A(1,1) \Rightarrow 0 > \frac{-1}{2}$ نقطهٔ دلخواه

مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $|x - y| < \frac{1}{2}$ از اشتراک مجموعهٔ جواب‌های دو نامعادلهٔ (۱) و (۲) در داخل فضای نمونه‌ای به‌دست می‌آید که در شکل قبل سایه خورده است. درنتیجه، اندازهٔ پیشامد برابر با مساحت ناحیهٔ سایه خورده است:

$$a_A = a_S - 2S_{\hat{MNP}} = 1 - 2\times\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

احتمال در فضای پیوسته

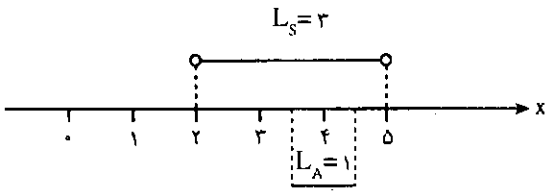
در ابتدا، فضاهای نمونه‌ای را ارائه کردیم که اعضای آنها با شمارش، قابل اندازه‌گیری نبود. این نوع فضاهای نمونه‌ای را فضای نمونه‌ای پیوسته نامیدیم؛ مانند بازه‌ها، شکل‌های بسته در صفحهٔ مختصات $\mathbb{R}^2$ و حجم یک جسم در $\mathbb{R}^3$. همچنین اندازهٔ پیشامدهای مختلفی را روی فضاهای نمونه‌ای پیوسته مطرح کردیم. اکنون احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی را در این نوع فضاهای نمونه‌ای تعریف می‌کنیم.

حالت اول. اگر فضای نمونه‌ای یک بازه باشد یا $S \subset \mathbb{R}$، در این **حالت**، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را با L_S و اندازهٔ مجموعهٔ پیشامد را با L_A نمایش می‌دهیم و احتمال وقوع پیشامد A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_S}$$

مثال. از میان اعداد حقیقی بین ۲ و ۵، یک عدد را تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این عدد بین ۳/۵ و ۴/۵ باشد، کدام است؟

حل.



$$P(A) = \frac{L_A}{L_S} = \frac{1}{3}$$

مثال. نقطه‌ای مانند x را تصادفی در بازهٔ (۱۰ و ۰) انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که این عدد در بازهٔ (۲،۴) یا در بازهٔ (۵،۸) باشد، کدام است.

حل.

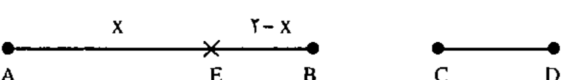
$S = (0,10) \Rightarrow L_S = 10;\ \ A = (2,4) \Rightarrow L_A = 2;$

$B = (5,8) \Rightarrow L_B = 3$

$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{10} + \frac{3}{10} = \frac{1}{2}$$

مثال. دو قطعه چوب ۱ متری و ۲ متری داریم. چوب بزرگ‌تر را تصادفی به دو قسمت ارّه می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که سه قطعه چوب تشکیل مثلث دهند؟

حل. فرض کنیم قطعه چوب AB به طول ۲ متر باشد، اگر تصادفی آن را در نقطهٔ E اره کنیم، آن‌گاه دو قطعه چوب با طول‌های x و $2 - x$ و یک قطعه چوب به طول ۱ متر مانند CD داریم؛ بنابراین طبق اصل نابرابری‌ها در مثلث خواهیم داشت:



$$\begin{cases} AE + EB > CD \Rightarrow x + 2 - x > 1 \Rightarrow 2 > 1 \\ AE + CD > EB \Rightarrow x + 1 > 2 - x \Rightarrow 2x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{2} \\ CD + EB > AE \Rightarrow 1 + 2 - x > x \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

اشتراک مجموعهٔ جواب‌های نامعادله‌های خطی بالا، مجموعهٔ پیشامد را نشان می‌دهد:

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x < \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \Rightarrow L_A = 1$$

از طرفی $L_S = 2$، بنابراین داریم:

$$P(A) = \frac{L_A}{L_S} = \frac{1}{2}$$

مثال. عددی را تصادفی از بازهٔ $[0,8]$ انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آن که الف) عدد ۲ انتخاب شود.
ب) عدد در بازهٔ (۸ و ۰) باشد.

حل.

الف. اگر S فضای نمونه‌ای و $A = \{2\}$ پیشامد مطلوب باشد، داریم:

$L_S = 8;\ L_A = 0$ (طول نقطه، برابر صفر است.)

$P(A) = \frac{0}{8} = 0$ (توجه دارید که $A \neq \varnothing$ ؛ ولی $P(A) = 0$)

ب. $L_S = 8,\ L_A = 8$

$P(A) = \frac{8}{8} = 1$ (توجه دارید که $A \neq S, A \subset S$ ولی $P(A) = 1$)

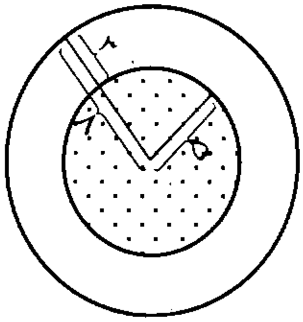
حالت دوم. اگر فضای نمونه‌ای یک شکل بسته در صفحه باشد یا $S \subset \mathbb{R}^2$، در این حالت، اندازهٔ فضای نمونه‌ای را با a_S و اندازهٔ مجموعه پیشامد را با a_A نمایش می‌دهیم و احتمال وقوع پیشامد A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S}$$

مثال. سکه‌ای به شعاع ۳ روی صفحه‌ای دایره‌ای شکل به شعاع ۸ انداخته می‌شود. احتمال آن که سکه محیط دایره را قطع نکند، چه‌قدر است؟

حل. فضای نمونه‌ای، سطح صفحه دایره شکل به شعاع ۸ است؛ بنابراین:

$$a_S = 64\pi$$



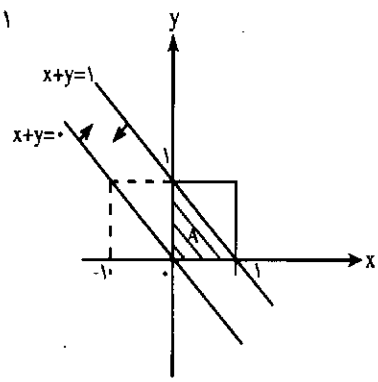
اگر بخواهیم سکه به شعاع ۳ محیط دایره را قطع نکند، باید مرکز سکه در فاصله‌ای بیشتر از ۳ از محیط دایره قرار بگیرد. درنتیجه، مجموعهٔ پیشامد، سطح دایره‌ای شکل هم مرکز با دایره بزرگ و شعاع $r = 8 - 3 = 5$ است:

$$a_A = 25\pi;\ p(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{25\pi}{64\pi} = \frac{25}{64}$$

مثال. دو عدد x و y را تصادفی در بازهٔ $[0,1]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که $0 < x + y < 1$ را پیدا کنید؟

حل.

$$a_S = 1 \times 1 = 1$$

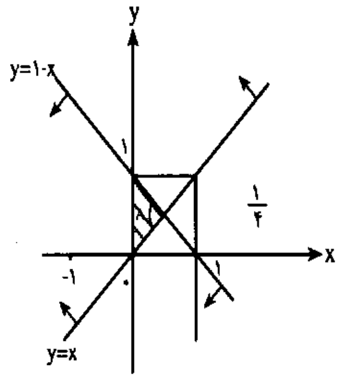


$$0 < x + y < 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y < 1;\ x + y = 1 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array} \\ x + y > 0;\ x + y = 0 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array} \end{cases};$$

$$a_A = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

مثال. نقطهٔ $A(x,y)$ را تصادفی از سطح مربع $S=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که $x\le y\le 1-x$ را پیدا کنید؟

حل.



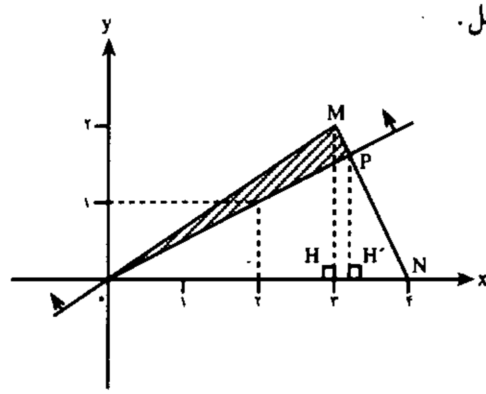
$$a_S=1\times 1=1$$

$$\begin{cases} x\le y;\ x=y \\ y\le 1-x;\ y=1-x \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 \end{array}\end{cases}$$

$$a_A=\frac{1}{4}\ a_S=\frac{1}{4};P(A)=\frac{1}{4}$$

مثال. نقطهٔ $A(x,y)$ را به‌طور تصادفی داخل سطح مثلثی شکل به رأس‌های (۰،۰)، (۴،۰) و (۳،۲) انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که $x\le 2y$.

حل.



$$a_S=\frac{MH\times ON}{2}=\frac{2\times 4}{2}=4$$

$$x<2y;\ \ x=2y \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 2 \\ \hline y & 0 & 1 \end{array}$$

اندازهٔ مجموعهٔ پیشامد، برابر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{OMP}$ است، برای این منظور داریم:

$$S_{\overset{\Delta}{OMP}}=S_{\overset{\Delta}{OMN}}-S_{\overset{\Delta}{OPN}}=4-\frac{4\times PH'}{2}$$

با توجه به شکل، ملاحظه می‌کنیم $PH'=y_p$؛ بنابراین برای محاسبهٔ مختصات نقطهٔ P باید نقطهٔ تقاطع دو خط MN و OP را به‌دست آوریم.

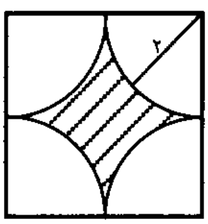
$$MN: y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\Rightarrow y-0=\frac{2-0}{3-4}(x-4)$$

$$MN: y=-2x+8,\ \ OP: y=\frac{1}{2}x$$

$$\begin{cases} y=-2x+8 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}\Rightarrow -2x+8=\frac{1}{2}x\Rightarrow x=\frac{16}{5},y=\frac{8}{5};p(\frac{16}{5},\frac{8}{5})$$

$$S_{\overset{\Delta}{OMP}}=4-\frac{4\times\frac{8}{5}}{2}=\frac{4}{5}\Rightarrow a_A=\frac{4}{5};P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{4}{5}}{4}=\frac{1}{5}$$

مثال. نقطه‌ای را تصادفی داخل مربع به ضلع ۴ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را بیابید که فاصلهٔ این نقطه از هر رأس مربع بزرگتر از ۲ باشد؟



حل. ابتدا از هر رأس مربع کمانی به شعاع ۲ رسم می‌کنیم، ناحیه سایه‌خورده، مجموعه پیشامد می‌باشد، برای محاسبه اندازهٔ مجموعهٔ پیشامد کافی است از مساحت مربع، مساحت دایره به شعاع ۲ را کم کنیم:

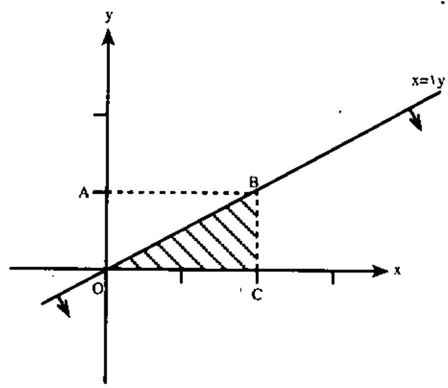
$$a_S=4\times 4=16$$

$$a_A=a_S-\pi(2)^2=16-4\pi=4(4-\pi);$$

$$p(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{4(4-\pi)}{16}=\frac{4-\pi}{4}$$

مثال. نقطهٔ (x,y) را به طور تصادفی داخل یک مستطیل به رأس‌های $(۰,۰)$ ، $(۰,۱)$ ، $(۲,۰)$ و $(۲,۱)$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که $x > ۲y$.

حل.



$$a_S = ۲ \times ۱ = ۲$$

$x > ۲y;\ x = ۲y$

x	۰	۲
y	۰	۱

$$a_A = S_{OBC}^{\Delta} = \frac{۲ \times ۱}{۲} = ۱$$

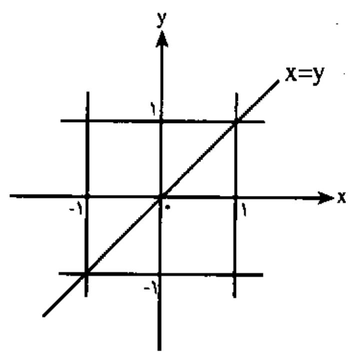
$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{۱}{۲}$$

مثال. نقطهٔ (x,y) را تصادفی در بازهٔ $[۱$ و $۱-]$ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که $x=y$.

حل. اگر S فضای نمونه‌ای و A پیشامد مطلوب باشد، داریم: (مساحت خط برابر صفر است)

$$a_S = ۲ \times ۲ = ۴;\ a_A = ۰$$

$$P(A) = \frac{۰}{۴} = ۰$$

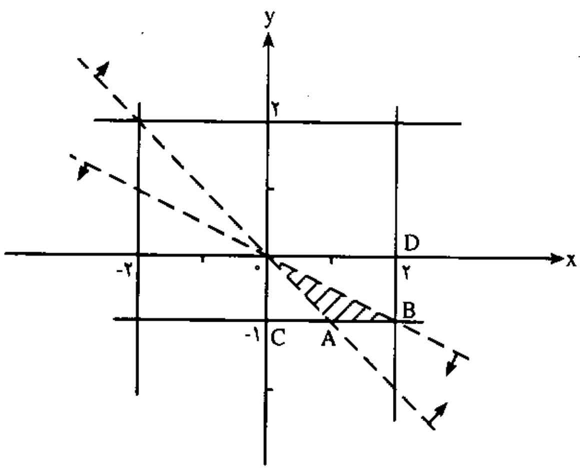


(توجه دارید که $A \neq \varnothing$ ولی $P(A) = ۰$)

مثال. در معادلهٔ $ax + b = ۰$ ، ضریب a به طور تصادفی عددی در بازهٔ $[۲$ و $۲-]$ و ضریب b نیز به طور تصادفی عددی در بازهٔ $[۲$ و $۱-]$ انتخاب شده است. احتمال این که جواب معادله بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ و کوچکتر از ۱ باشد.

حل. ضریب a را روی محور xها در بازهٔ $[۲$ و $۲-]$ و ضریب b را روی محور yها در بازهٔ $[۲$ و $۱-]$ در نظر می‌گیریم، بنابراین فضای نمونه‌ای به صورت زیر است:

$$a_S = ۲ \times ۳ = ۶$$



جواب معادله $ax + b = ۰$ برابر با $x = -\frac{b}{a}$ است که باید بین $\frac{۱}{۲}$ و ۱ باشد، بنابراین داریم:

$$\frac{۱}{۲} < -\frac{b}{a} < ۱ \Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{a} < ۱;\ -\frac{b}{a} = ۱ & \begin{array}{c|cc} a & ۰ & ۱ \\ \hline b & ۰ & -۱ \end{array} \\ -\frac{b}{a} > \frac{۱}{۲};\ -\frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} & \begin{array}{c|cc} a & ۰ & ۲ \\ \hline b & ۰ & -۱ \end{array} \end{cases}$$

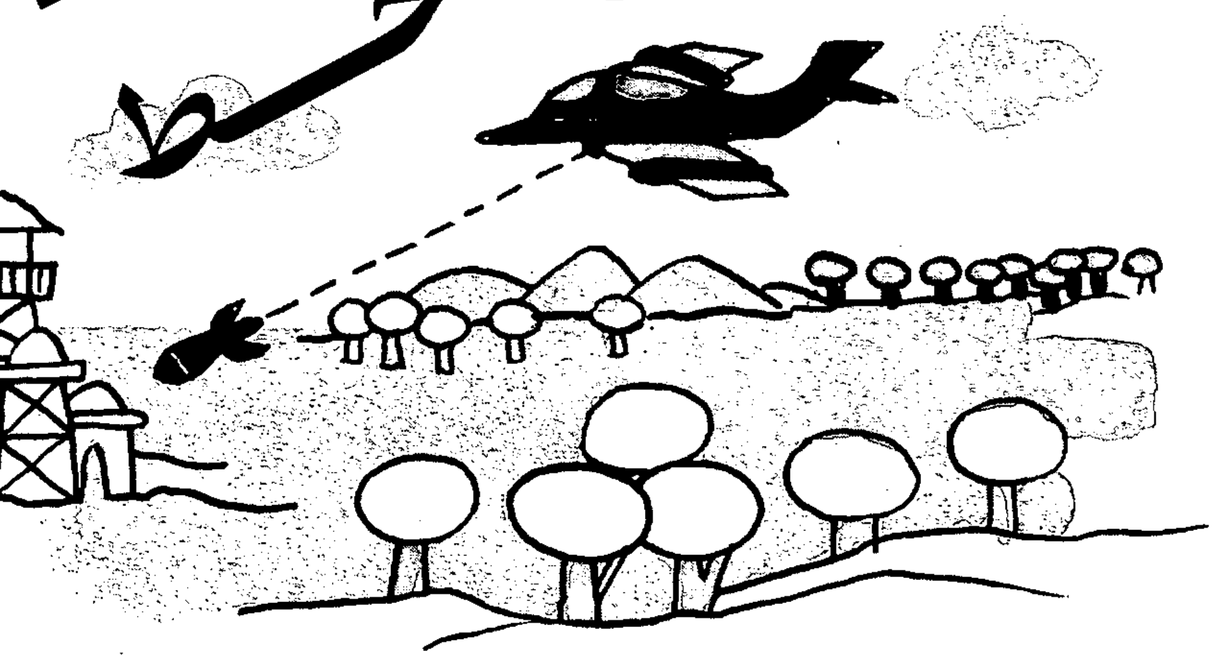
$$a_A = S_{ODBC}^{\square} - S_{OAC}^{\Delta} - S_{OBD}^{\Delta} = (۲ \times ۱) - (\frac{۱ \times ۱}{۲}) - (\frac{۲ \times ۱}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

$$P(A) = \frac{a_A}{a_S} = \frac{\frac{۱}{۲}}{۶} = \frac{۱}{۱۲}$$

معادله خط

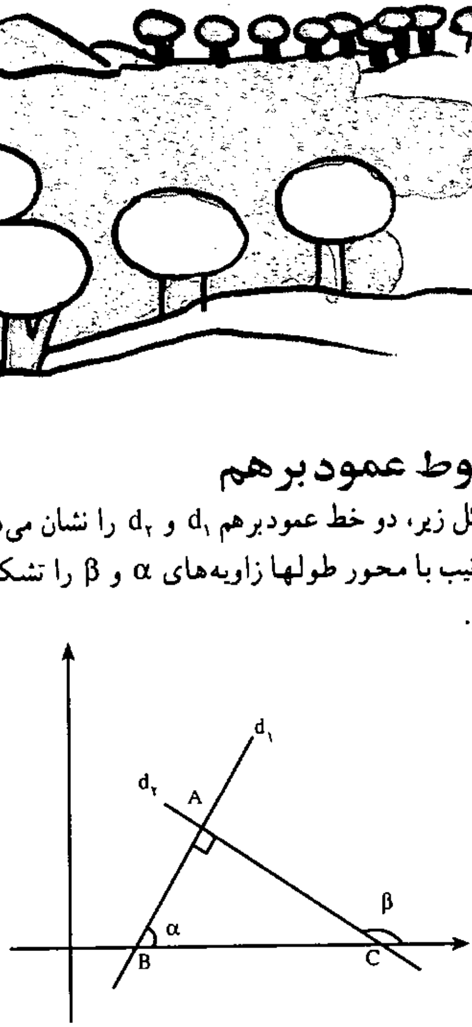
قسمت دوم

● رضا پیکر



خطوط عمود برهم

شکل زیر، دو خط عمودبرهم d_1 و d_2 را نشان می‌دهد که به‌ترتیب با محور طولها زاویه‌های α و β را تشکیل داده‌اند.



اگر m_1 و m_2 به‌ترتیب شیبهای دو خط d_1 و d_2 باشند، شیب خط d_1 برابر با $tg\alpha$ و شیب خط d_2 برابر با $tg\beta$ است یا $m_1 = tg\alpha$ و $m_2 = tg\beta$، اکنون مثلث قائم‌الزاویه ABC را درنظر بگیرید. در این مثلث داریم:

$$tg(\angle ABC = tg\alpha) = \frac{AC}{AB}$$

$$tg(\angle ACB) = tg(180 - \beta) = \frac{AB}{AC}$$

از ضرب طرفین دو رابطهٔ بالا داریم:

$$tg\alpha . tg(180 - \beta) = 1$$

و با توجه به تساوی $tg(180 - \beta) = -tg\beta$ داریم:

$$tg\alpha . (-tg\beta) = 1 \Rightarrow tg\alpha . tg\beta = -1$$

و با توجه به تساویهای $m_1 = tg\alpha$ و $m_2 = tg\beta$ می‌توانیم بنویسیم:

$$m_1 . m_2 = -1 \quad \text{یا} \quad m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

بنابراین می‌توان گفت، حاصلضرب شیبهای دو خط عمودبرهم، برابر با ۱- است یا شیبهای دو خط عمودبرهم، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}۴\\۵\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-۱\\-۵\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}-۱۰\\۱۲\end{bmatrix}$ سه رأس یک مثلث می‌باشند. نشان دهید این مثلث در رأس A قائمه است.

حل: برای این منظور، باید نشان دهیم شیبهای خطوطی که ضلعهای AB و AC بر آن واقعند، قرینهٔ معکوس یکدیگرند.

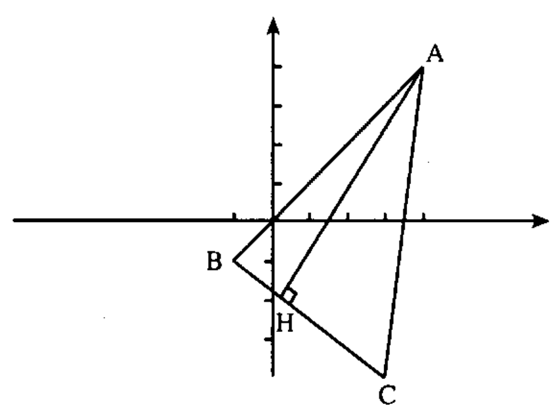
$$m_{AB}=\frac{۵-(-۵)}{۴-(-۱)}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

$$m_{AC}=\frac{۵-۱۲}{۴-(-۱۰)}=\frac{-۷}{۱۴}=-\frac{۱}{۲}$$

از آن‌جا که $m_{AB}.m_{AC}=-۱$، پس مثلث ABC در رأس A قائمه است.

مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}۴\\۴\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-۱\\-۱\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}۳\\-۴\end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند. معادلهٔ ارتفاع AH را بنویسید و مساحت مثلث را محاسبه کنید.

حل:



شیب ارتفاع AH قرینهٔ معکوس شیب ضلع BC است.

$$m_{BC}=\frac{-۴-(-۱)}{۳-(-۱)}=\frac{-۳}{۴}\ \Rightarrow\ m_{AH}=\frac{۴}{۳}$$

معادلهٔ AH: $(y-۴)=\frac{۴}{۳}(x-۴)$ یا $۳y=۴x-۴$

برای محاسبهٔ مساحت مثلث، اندازهٔ ضلع BC و ارتفاع AH لازم است و برای محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع AH مختصات نقطهٔ H موردنیاز است. برای به‌دست آوردن مختصات نقطهٔ H، دو خط AH و BC را در یک دستگاه حل می‌کنیم. معادلهٔ ضلع BC عبارت است از:

$$(y+۱)=\frac{-۳}{۴}(x+۱)\quad \text{یا}\quad ۴y=-۳x-۷$$

$$\begin{cases}۴y=-۳x-۷\\ ۳y=۴x-۴\end{cases}\ \Rightarrow\ H\begin{bmatrix}-\frac{۱}{۵}\\ -\frac{۸}{۵}\end{bmatrix}$$

$$|AH|=\sqrt{\left(۴+\frac{۱}{۵}\right)^۲+\left(۴+\frac{۸}{۵}\right)^۲}=\sqrt{\frac{۱۲۲۵}{۲۵}}=۷$$

$$|BC|=\sqrt{(۳+۱)^۲+(-۴+۱)^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

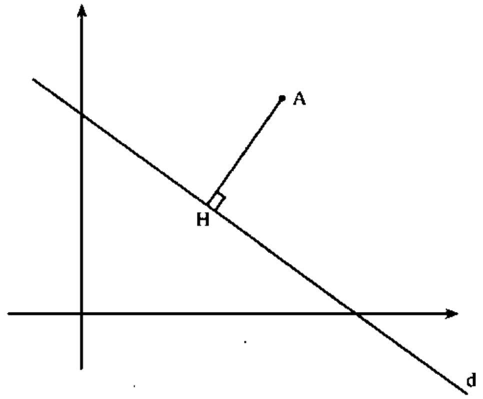
$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}\times|AH|\times|BC|=\frac{۱}{۲}\times۷\times۵=\frac{۳۵}{۲}$$

فاصلهٔ نقطه از خط

برای محاسبهٔ فاصلهٔ یک نقطه از خط راست، وقتی که مختصات نقطه و معادلهٔ خط راست معلوم باشد، می‌توان یک دستور به‌دست آورد.

برای به‌دست آوردن این دستور، از همان شیوه‌ای استفاده می‌کنیم که در مثال قبل، برای محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ H از خط BC استفاده کردیم.

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{bmatrix}x_۱\\y_۱\end{bmatrix}$ از خط معلوم $d: ax+by+c=۰$، ابتدا معادلهٔ خطی را می‌نویسیم که از نقطهٔ A بگذرد و بر خط d عمود باشد.



از آن‌جا که شیب خط d برابر با $\frac{-a}{b}$ است، شیب خط موردنظر برابر با $\frac{b}{a}$ می‌باشد. بدین‌ترتیب، معادلهٔ خط عمود بر d و گذرنده از نقطهٔ A عبارت است از :

$$d': y - y_1 = \frac{b}{a}(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad \frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a}$$

با درنظر گرفتن معادله‌های خطوط d و ′d می‌توان مختصات نقطهٔ H (پای عمودی که از A بر خط d رسم می‌شود) را به‌دست آورد :

$$\begin{cases} \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{x - x_1}{a} \\ ax + by + c = 0 \end{cases}$$

برای سهولت کار فرض می‌کنیم :

$$\frac{y - y_1}{b} = \frac{x - x_1}{a} = k$$

داریم :

$$\begin{cases} x = ak + x_1 \\ y = bk + y_1 \end{cases}$$

(x و y همان مختصات نقطهٔ H می‌باشند.)

مقادیر x و y را در معادلهٔ خط d قرار می‌دهیم :

$$a(ak + x_1) + b(bk + y_1) + c = 0$$
$$\Rightarrow \ k = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

چنانچه $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مختصات نقطهٔ H و $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ مختصات نقطهٔ Aباشند، می‌توانیم بنویسیم :

$$|AH| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$
$$|AH| = \sqrt{(aK + x_1 - x_2)^2 + (bK + y_1 - y_1)^2}$$
$$|AH| = \sqrt{a^2K^2 + b^2K^2} = |K|\sqrt{a^2 + b^2}$$

با قرار دادن مقدار K در رابطهٔ بالا داریم :

$$|AH| = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

(AH همان فاصلهٔ نقطهٔA از خط d می‌باشد.)

مثال: فاصلهٔ نقطهٔ $A\begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ را از خط $8y = 6x + 5$ محاسبه کنید.

حل: ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت $8y - 6x - 5 = 0$ می‌نویسیم. اگر این فاصله برابر با h باشد، داریم :

$$h = \left|\frac{(8 \times 5) - 6 \times (-5) - 5}{\sqrt{8^2 + 6^2}}\right| = \frac{65}{10} = 6/5$$

مثال: دو خط $d_1: 3x - 4y = 5$ و $d_2: 3x - 4y = 10$ معادله‌های دو ضلع مقابل یک مربع هستند. مساحت این مربع را محاسبه کنید.

حل: برای محاسبهٔ مساحت مربع، فاصلهٔ یک نقطهٔ دلخواه متعلق به خط d_1 را از خط d_2 محاسبه می‌کنیم یا بعکس. این فاصله اندازهٔ یک ضلع مربع است. برای مثال، فاصلهٔ نقطهٔ $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ را که متعلق به خط d_1 می‌باشد، از خط d_2 محاسبه می‌کنیم. داریم :

$$h = \left|\frac{3 \times 3 - 4 \times 1 - 10}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}}\right| = \left|\frac{-5}{5}\right| = 1$$

بنابراین، مساحت این مربع، یک واحد مربع است.

فاصلهٔ دو خط موازی

دو خط موازی d و ′d را درنظر بگیرید.

$$\begin{cases} d: ax + by + c = 0 \\ d': ax + by + c' = 0 \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن فاصلهٔ این دو خط، نقطهٔ $(x_۱,y_۱)$ را روی خط d' انتخاب می‌کنیم. در این‌صورت، فاصلهٔ این نقطه از خط d برابر است با :

$$H=\frac{|ax_۱+by_۱+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

و چون $\begin{bmatrix}x_۱\\y_۱\end{bmatrix}$ روی خط d' است، پس باید : $ax_۱+by_۱+c'=۰$ باشد. در نتیجه، $ax_۱+by_۱=-c'$ با جایگذاری این رابطه در تساوی اخیر، رابطه به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$H=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

حل: مثال قبل از طریق دیگر :

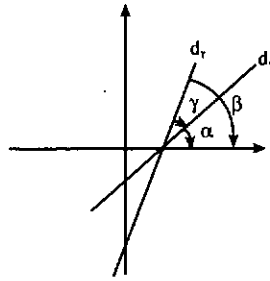
چنانچه معادله‌های اضلاع مقابل را به‌صورت زیر بنویسیم، خواهیم داشت :

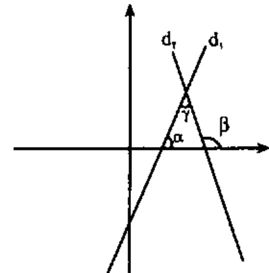
$$d_۱: ۳x-۴y-۵=۰ \Rightarrow c=-۵$$
$$d_۲: ۳x-۴y-۱۰=۰ \Rightarrow c'=-۱۰$$
$$H=\frac{|-۵-(-۱۰)|}{\sqrt{۳^۲+(-۴)^۲}}=\frac{۵}{۵}=۱$$

بنابراین، مساحت این مربع، یک واحد مربع است.

محاسبهٔ زاویهٔ بین دو خط

شکلهای زیر، دو خط $d_۱$ و $d_۲$ را نشان می‌دهند که با یکدیگر زاویه γ و با محور طولها به‌ترتیب زوایای α و β را تشکیل می‌دهند.





اگر $m_۱$ و $m_۲$ به‌ترتیب شیبهای خطوط $d_۱$ و $d_۲$ باشند، داریم : $m_۱=tg\alpha$ و $m_۲=tg\beta$.

با توجه به شکلها می‌توانیم بنویسیم :

$$\alpha+\gamma=\beta \Rightarrow \gamma=\beta-\alpha$$

از دو طرف رابطهٔ بالا تانژانت می‌گیریم :

$$tg\gamma=tg(\beta-\alpha) \Rightarrow tg\gamma=\frac{tg\beta-tg\alpha}{۱+tg\alpha.tg\beta}$$

چنانچه مقادیر $tg\alpha$ و $tg\beta$ را بر حسب $m_۱$ و $m_۲$ قرار دهیم، داریم :

$$tg\gamma=\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱.m_۲} \Rightarrow \gamma=\text{Arctg}\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱.m_۲}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد، زاویهٔ بین دو خط $d_۱$ و $d_۲$ با شیبهای $m_۱$ و $m_۲$ ، زاویه‌ای است که تانژانت آن برابر است با : $\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱.m_۲}$

از آن‌جا که زاویهٔ دو خط را با زاویه‌ای که در فاصلهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ قرار داشته باشد، عنوان می‌کنند، رابطه اخیر را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\gamma=\text{Arctg}\left|\frac{m_۲-m_۱}{۱+m_۱.m_۲}\right|$$

مثال: دو خط زیر با هم چه زاویه‌ای تشکیل می‌دهند؟

$$d_۱: y=\sqrt{۳}x$$
$$d_۲: y=-\sqrt{۳}x$$

حل: اگر γ زاویه بین این دو خط باشد، داریم :

$$m_{d_۱}=\sqrt{۳}\ ,\ m_{d_۲}=-\sqrt{۳}$$
$$\gamma=\text{Arctg}\left|\frac{\sqrt{۳}-(-\sqrt{۳})}{۱+(\sqrt{۳})(-\sqrt{۳})}\right|$$
$$\gamma=\text{Arctg}\left|\frac{۲\sqrt{۳}}{-۲}\right|=\text{Arctg}|-\sqrt{۳}|=۶۰^\circ$$

مثال: معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$ می‌گذرد و با خط $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$ زاویهٔ ۴۵ درجه می‌سازد.

حل: شیب‌خط $\frac{x}{5}-\frac{y}{2}=1$ برابر با $\frac{2}{5}$ است و اگر شیب‌خط موردنظر برابر با m باشد، داریم:

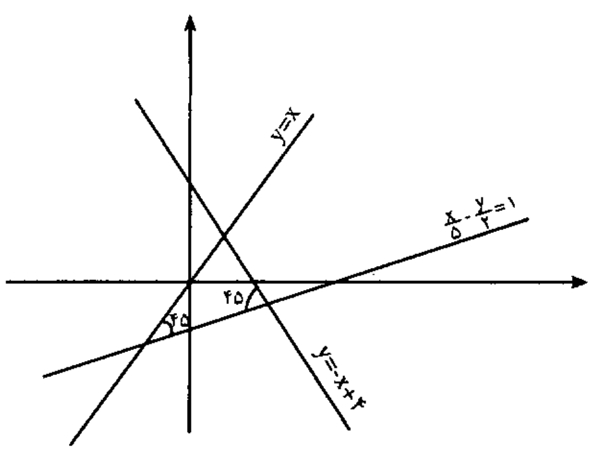
$$tg45^\circ=\left|\frac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}\right|$$

$$\left|\frac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}\right|=1\Rightarrow\begin{cases}\frac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}=1\Rightarrow m=1\\ \frac{m-\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}m}=-1\Rightarrow m=-1\end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ خط موردنظر عبارت است از:

$(y-2)=(x-2)\Rightarrow\ y=x$

$(y-2)=-(x-2)$ یا $\Rightarrow y=-x+4$



همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، مسأله دو جواب دارد.

مکان هندسی یک نقطهٔ متغیر

نقطهٔ $A(P,3)$ را درنظر بگیرید. نقطهٔ A، نقطهٔ ثابتی روی صفحهٔ مختصات نیست و با تغییر مقدار P، مکان خود را روی صفحه عوض می‌کند. عرض نقطهٔ A مقدار ثابت ۳ می‌باشد و نقطهٔ A تنها در مکانهایی می‌تواند باشد که عرض آن برابر با ۳ باشد. بنابراین نقطهٔ A روی خط $y=3$ واقع است. خط $y=3$ را مکان هندسی نقطهٔ A می‌نامیم.

در حالت کلی، وقتی طول و عرض یک نقطه شامل پارامتر باشند، می‌توان با حذف پارامتر، رابطه‌ای بین طول و عرض نقطه و مستقل از پارامتر نوشت.

مثال: مکان هندسی نقطهٔ $M\begin{bmatrix}2m\\1-m\end{bmatrix}$ را با حذف پارامتر m به‌دست آورید.

حل: پارامتر $2m$ معرّف طول نقطهٔ M و پارامتر $1-m$ معرّف عرض نقطهٔ M می‌باشد، داریم:

$2m=x$

$1-m=y$

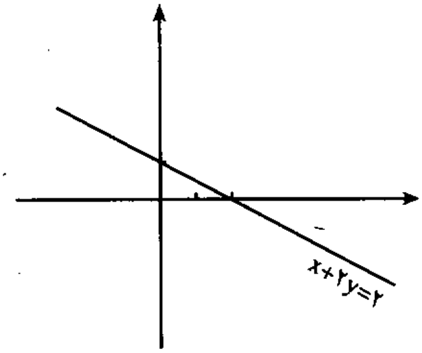
از تساوی $2m=x$، مقدار m را بر حسب x محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$m=\frac{x}{2}$$

در رابطهٔ $1-m=y$، مقدار m را بر حسب x قرار می‌دهیم.

$$1-\frac{x}{2}=y\Rightarrow\ x+2y=2$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ $M\begin{bmatrix}2m\\1-m\end{bmatrix}$، خط $x+2y=2$ می‌باشد، یا به بیان دیگر، نقطهٔ M به‌ازای هر مقدار m روی خط $x+2y=2$ قرار دارد. شکل صفحه بعد، مکان هندسی نقطهٔ M را نشان می‌دهد.



مثال: نقاط $A\begin{bmatrix}-۱\\ ۴\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}۳\\ -۲\end{bmatrix}$ مفروضند. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید، اگر داشته باشیم:

$$|MA|^۲-|MB|^۲=۸$$

حل: اگر مختصات M را $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ فرض کنیم، داریم:

$$|MA|^۲=(x+۱)^۲+(y-۴)^۲$$
$$|MB|^۲=(x-۳)^۲+(y+۲)^۲$$
$$\Rightarrow |MA|^۲-|MB|^۲=۸x-۱۲y+۴$$

با برقرار کردن شرط مسأله داریم:

$$۸x-۱۲y+۴=۸ \Rightarrow ۲x-۳y=۱$$

پس نقطهٔ M روی خط $۲x-۳y=۱$ قرار دارد.

توانایی خود را با حلّ چند تمرین ارزیابی کنید.

۱. معادلهٔ اضلاع مثلثی را به‌دست آورید که مختصات یکی از رئوس آن $\begin{bmatrix}۴\\ -۱\end{bmatrix}$ و معادله‌های ارتفاع و میانهٔ نظیر رأس دیگر آن به‌ترتیب $۲x-۳y+۱۲=۰$ و $۲x=-۳y$ است.

۲. معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ $A\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}$ گذشته و محورهای مختصات را در دو نقطه قطع کند که فاصلهٔ آن دو نقطه از مبدأ مختصات، برابر هم و مخالف صفر باشد.

۳. معادلهٔ خطی را بنویسید که با خط $۸x-۵y+۱۵=۰$ موازی بوده و از نقطهٔ $M\begin{bmatrix}-۶\\ -۳\end{bmatrix}$ به فاصلهٔ ۴ باشد.

۴. نقاط $M_۱\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$، $M_۲\begin{bmatrix}۵\\ ۳\end{bmatrix}$ و $M_۳\begin{bmatrix}۳\\ -۴\end{bmatrix}$ مختصات اوساط سه ضلع مثلثی هستند. معادلهٔ ضلعهای این مثلث را به‌دست آورید.

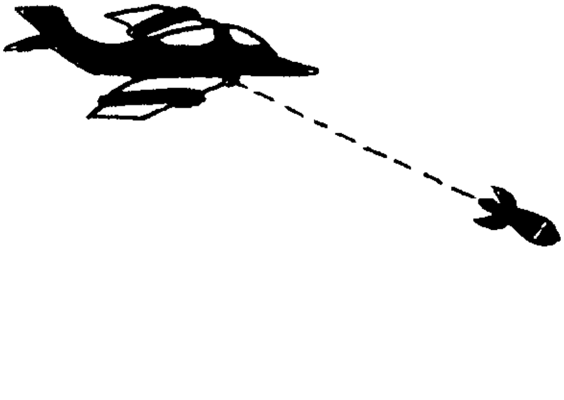
۵. نقاط $A\begin{bmatrix}-۴\\ a\end{bmatrix}$، $B\begin{bmatrix}-۱\\ ۶\end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix}a\\ -۲\end{bmatrix}$ مفروضند. مقدار a را طوری تعیین کنید که در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه باشد.

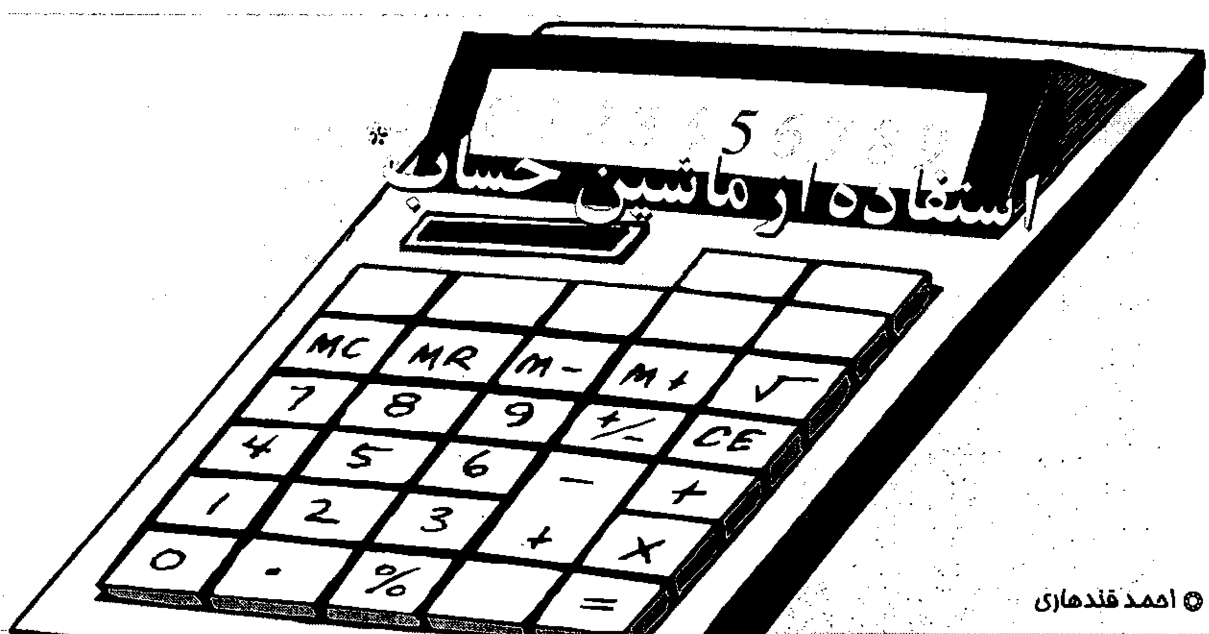
۶. معادله‌های اضلاع مثلثی عبارتند از: $x+۵y=+۷$، $۳x-۲y-۴=۰$ و $۷x+y+۱۹=۰$، مساحت این مثلث را حساب کنید.

۷. مساحت مثلثی ۸ واحد مربع است و دو رأس آن عبارتند از $A\begin{bmatrix}۱\\ -۲\end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix}۲\\ ۳\end{bmatrix}$، و رأس سوّم آن روی خط $۲x+y=۲$ قرار دارد. مختصات رأس سوّم را به‌دست آورید.

۸. روی محور طولها، نقطه‌ای بیابید که مجموع مربعات فواصلش از دو نقطهٔ $M\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}$ و $N\begin{bmatrix}۳\\ ۴\end{bmatrix}$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۹. اگر معادله‌های قطرهای یک مستطیل $۳x+۲y-۸=۰$ و $۴x+y-۱۴=۰$ باشند و مختصات یکی از رئوس مستطیل $\begin{bmatrix}۲\\ ۱\end{bmatrix}$ باشد، معادلهٔ ضلعهای مستطیل را به‌دست آورید.





استفاده از ماشین حساب *

◎ احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال اول

استفاده از ماشین حساب علمی برای دانش‌آموزان دبیرستانها ضروری است. در طرح «تیمز»، ایران در ارزیابی پیشرفت تحصیلی ریاضی و علوم دورهٔ ابتدایی، درمیان ۴۲ کشور جهان، رتبهٔ ۳۸ و ۳۹ را به خود اختصاص داد و نتایج این طرح، توسط پژوهشکدهٔ (تعلیم و تربیت) در سه جلد منتشر شده است.

(همشهری، ۱۵ دیماه ۱۳۷۷)

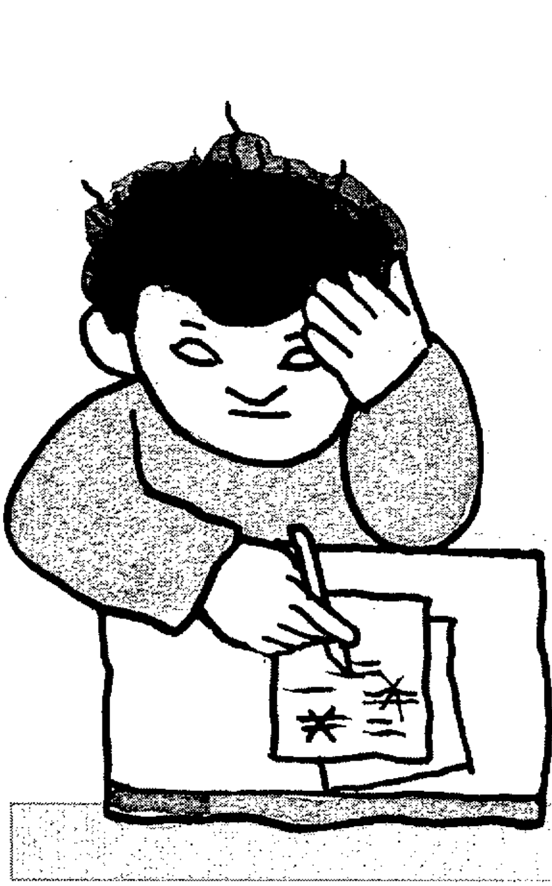
به طور مسلّم بابت این عقب‌ماندگی، عوامل بسیاری دخالت دارند، که عبارت است از: معلّم، ابزار آموزشی، روش آموزشی و روش ارزیابی و... که بررسی هریک از آنها، هم به زمان نیاز دارد و هم به بررسی کارشناسانه.

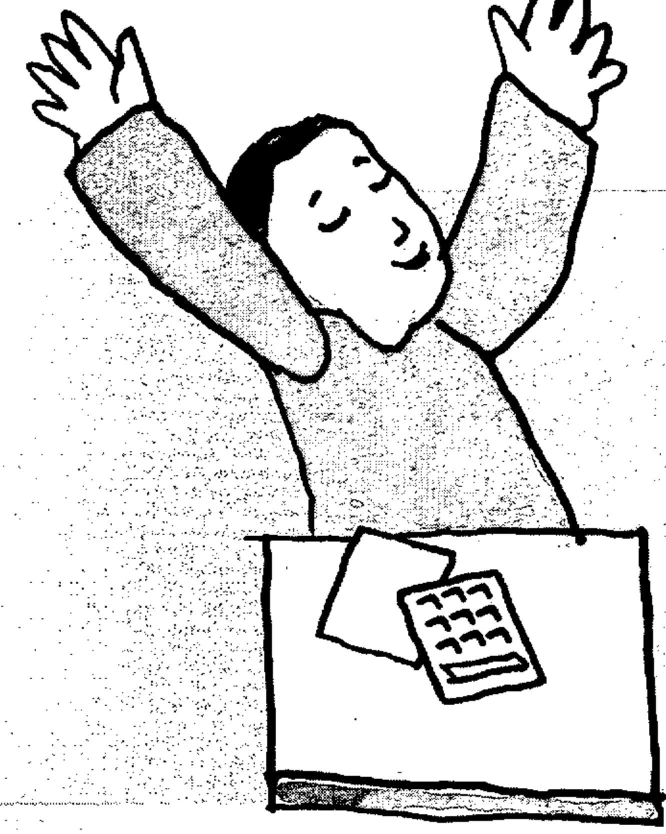
در محدودهٔ روش آموزشی که خود گسترهٔ وسیعی است، به یکی از نکات می‌پردازیم و آن به‌کارگیری ماشین حساب علمی و احیاناً استفاده از کامپیوترهای کوچک در محاسبه‌های تکراری ریاضی است.

متأسفانه ما عادت کرده‌ایم که با طرح مسائل خاص در یک مبحث، دانش‌آموز را خسته کنیم. (نمونه‌اش پلی‌کپیهای مسائل سنگین در بعضی از مدرسه‌های غیر انتفاعی و نیز مدارس خاصی است).

این که ما دانش‌آموزان را فقط و فقط برای موفّقیت در کنکور آماده کنیم. بسیار تأسّف‌بار است و این طرز تفکر که تقریباً در کلّ جامعه وجود دارد، یک نوع آماده‌خواری فکری است. م به جای آن‌که دانش‌آموز را به تفکر وادار کنیم، او را ب ضبط صوت تبدیل می‌کنیم و با مسائل سنگین هم او را خست می‌کنیم. ما باید به گونه‌ای، خلاقیت و تفکر اصولی ریاضی را در دانش‌آموزان ایجاد کنیم. چون وقت دانش‌آموز در هر سال تحصیلی محدود است، باید محاسبه‌های عددی مسائل را به ماشین‌حساب واگذار کنیم تا دانش‌آموز، فرصت کافی برای اندیشیدن دربارهٔ مطالب بعدی را داشته باشد؛ بخصوص از طرف معلّم باید اندیشیدن دربارهٔ مطالب درسی، ا دانش‌آموز خواسته شود.

شاید در سالهای اوّل تحصیلی، لازم باشد که دانش‌آمو از ذهن خود برای عملکردهای ریاضی استفاده کند و در سالهای بالای تحصیلی متوسطه، لزومی ندارد محصّل را خسته کنیم او باید بتواند از فرصت‌های باقیماندهٔ خود، در حلّ مسائل جدید استفاده کند. چرا نیروی فکری دانش‌آموز را صرف جذ گرفتن و کعب گرفتن کنیم؛ دنیای تحصیلی از این مراحل گذشته است. محصّل باید بتواند به چراهای ریاضی، پاسخ منطقی بدهد. در اکثر کشورهای پیشرفتهٔ علمی، در کتاب





درسی، استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر توصیه شده است و در انتهای هر مبحثی، برنامهٔ کامپیوتری محاسبه‌های آن مبحث و روش استفاده از ماشین حساب، بیان شده است.

با این مقدمه، طرز کار با ماشین حساب را شروع می‌کنیم.

در این مقایسه، دکمه‌های ماشین حساب را به علامت [ ] نشان می‌دهیم.

۱ـ می‌خواهیم مقدار عددی عبارت $۳x^۲ - ۲x + ۵$ را وقتی $x = ۹/۷$ باشد، بیابیم.

می‌نویسیم.

[C] ۳ [×] ۹/۷ [$x^۲$] − ۲ [×] ۹/۷ [+] ۵ [=] ۲۶۷/۸۷

تمرین: عبارت $۵x^۲ = ۱۱x + ۲/۳$ را به ازای $x = ۷/۲۵$ بیابید.

۲ـ اگر
$$\begin{cases} a = ۳/۶ \\ b = -۰/۵ \\ c = -۱/۳ \end{cases}$$
مطلوب است محاسبه $ab - c$

روش اوّل:

[C] ۳/۶ [×] ۰/۵ [+/−] −۱/۳ [+/−] ۹ [=] −۰/۵

روش دوم:

[C] ۳/۶ [×] ۰/۵ [+/−] [+] −۱/۳ [=] −۰/۵

مثال: اگر
$$\begin{cases} a = ۱/۲۵ \\ b = -۱/۷۵ \\ c = -۱/۴ \\ d = ۱/۳۵ \end{cases}$$
مطلوب است محاسبه $(abc - d)$

حل:

[C] ۱/۲۵ [×] ۱/۷۵ [+/−] [×] −۱/۴ [+/−] [−] ۱/۳۵ [=] ۱/۷۱۲۵

تمرین اگر
$$\begin{cases} a = ۱/۱۲۵ \\ b = -۲/۰۰۲ \\ c = -۱/۰۱۵ \\ d = ۱/۰۲۷ \end{cases}$$
مطلوب است محاسبه $(ab - cd)$

۳ـ می‌خواهیم حاصل $(۳٫۵)^۵$ را محاسبه کنیم، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

[C] ۳/۵ [y^x] ۵ [=] ۵۲۵/۲۱۸۷۵

تمرین: $(۲٫۷۵)^۵$، $(۱٫۰۹)^۹$ و $(۳٫۰۱۲)^۴$ را محاسبه کنید.

۴ـ می‌خواهیم، حاصل $\sqrt[۵]{۱۲}$ را محاسبه کنیم. به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

$\sqrt[۵]{۱۲} = (۱۲)^{\frac{۱}{۵}} = (۱۲)^{۰/۲}$

روش اوّل:

C ۱۲ y^x ۰/۲ = ۱/۶۴۳۷۵۱۸

روش دوم:

C ۱۲ $\sqrt[x]{y}$ ۵ = ۱/۶۴۳۷۵۱۸

تمرین: $\sqrt[۵]{۲۱}$ و $\sqrt[۷]{۱۱}$ و $\sqrt[۱۱]{۱۳}$ را محاسبه کنید.

۵ـ مقدار $\frac{۱}{۵^۳}$ را بیابید.

روش اوّل:

C ۵ y^x ۳ +/- = $۸-۰۳ = ۸\times۱۰^{-۰۳}$

روش دوم:

C ۵ y^x ۳ $\frac{۱}{x}$ = $۸-۰۳ = ۸\times۱۰^{-۰۳}$

تمرین: اعداد $\frac{۱}{۷^۴}$ و $\frac{۱}{۴^۷}$ و $\frac{۳}{۷^۵}$ را به صورت توان‌های علمی بنویسید. مثلاً $۳\times۱۰^{-۳} = ۰/۰۰۳$ و $۲۱\times۱۰^{-۴} = ۰/۰۰۲۱$

۶ـ حاصل عبارت $۳\sqrt{۵}+\frac{۱}{۵\sqrt{۲}}$ را به صورت اعشاری بیابید.

روش حل:

C ۵ × ۲ √ =

$\frac{۱}{x}$ + ۳ × ۵ √ = ۶/۸۴۹۶۲۵۲۸۷

مثال دیگر: حاصل $۷\sqrt{۱۳}+\frac{۱}{۵\sqrt{۱۱}}$



مانند مثال (۴):

C ۵ × ۱۱ √ =

$\frac{۱}{x}$ + ۷ × ۷ √ = ۲۵/۲۹۹۱۶۱۱۸

۷ـ حاصل $\frac{۵\sqrt{۱۰}}{۴\sqrt{۳}-۳\sqrt{۲}}$ را بیابید.

روش حل:

C ۵ × ۱۰ √ =

÷ (۴ × ۳ √ − ۳ × ۲ √)

= ۵/۸۸۷۵۵۱۶۹۶

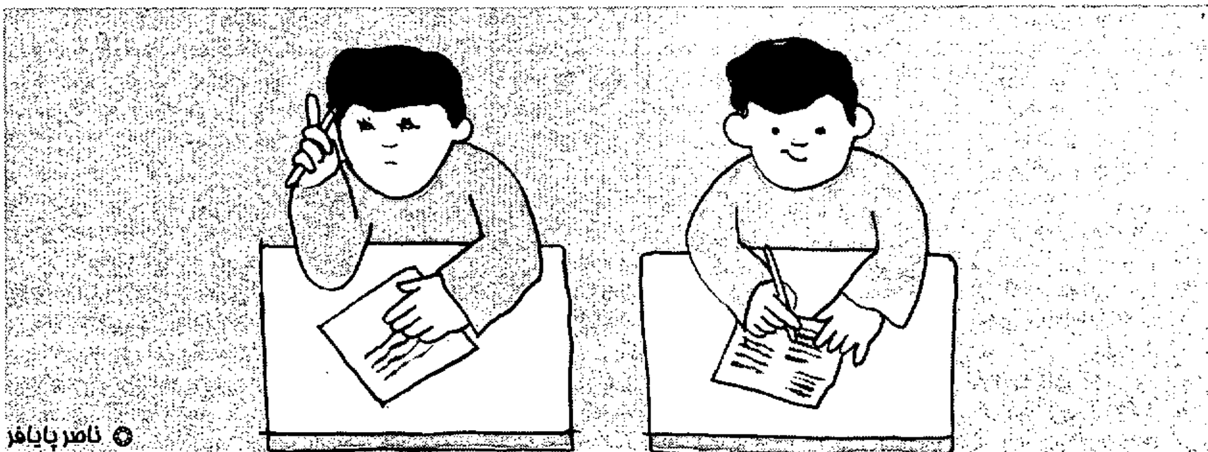
مثال دیگر: حاصل $\frac{۵\sqrt{۷}}{۵\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}}$

C ۳ × ۷ √ =

÷ (۵ × ۲ √ − ۲ × ۳ √)

= ۲/۲۰۰۵۳۴۶۰۴

تمرین: حاصل $\left(۱۱\sqrt{۱۳}+\frac{۱}{۵\sqrt{۱۹}}\right)$ و $\left(\frac{۱۱\sqrt{۸}}{۶\sqrt{۵}-۵\sqrt{۳}}\right)$ و $\left(\frac{۲۱\sqrt{۱۱}}{۹\sqrt{۷}-۷\sqrt{۲}}\right)$ را حساب کنید.



ناصر پایافر

روش های محاسبه سریع

برای دانش‌آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

ضرب خارجی دو بردار – دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ ـ ماتریس الحاقی و ماتریس وارون یک ماتریس ۳×۳

روشی ساده برای محاسبه ضرب خارجی دو بردار

ابتدا دترمینان ماتریس‌های ۲×۲ را یادآوری می‌کنیم، اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ آنگاه دترمینان A را با نماد $|A|$ یا $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال:

$$\begin{vmatrix}3 & 5\\ -2 & 4\end{vmatrix}=3\times 4-(-2)\times 5=12+10=22$$

محاسبه ضرب خارجی دو بردار

دو بردار $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ و $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ را درنظر می‌گیریم، برای محاسبه ضرب خارجی دو برداری که آن را با نماد $\vec{a}\times\vec{b}$ نشان می‌دهیم، ابتدا دو بردار را در دو ستون یا دو سطر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{vmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{vmatrix}\qquad \text{یا} \qquad \begin{matrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{matrix}$$

سپس برای محاسبه ضرب خارجی دو بردار، در سه مرحله به صورت زیر عمل می‌کنیم:

مرحله اول ـ مؤلفه‌های اول دو بردار را رها کرده و با مؤلفه‌های باقیمانده به صورت دترمینان ۲×۲ عمل می‌کنیم؛ عدد حاصل، مؤلفه اول بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ است:

$$\begin{vmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\ -------\\ -------\end{vmatrix}$$

مرحله دوم: این بار مؤلفه‌های دوم دو بردار را حذف کرده و با مؤلفه‌های باقیمانده به صورت دترمینان ۲×۲ عمل می‌کنیم، با این تفاوت که جواب حاصل، در این مرحله را باید قرینه کنیم تا مؤلفه دوم بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ به دست آید:

$$\begin{vmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{vmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}--------\\ -(a_1b_3-a_3b_1)\\ --------\end{vmatrix}$$

مرحله سوم: در این مرحله، مؤلفه‌های سوم دو بردار را حذف کرده و با مؤلفه‌های باقیمانده به صورت دترمینان ۲×۲ عمل می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ a_۳ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_۱ \\ b_۲ \\ b_۳ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ------- \\ ------- \\ a_۱b_۲ - a_۲b_۱ \end{vmatrix}$$

مثال: اگر $\bar{a}=(۲,۳,+۱)$ و $\bar{b}=(۳,۲,۴)$ ، حاصل $\bar{a}\times\bar{b}$ را محاسبه کنید.

حل:

مرحله اول

$$\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۱ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۳\times۴-۱\times۲=۱۰ \\ --------- \\ --------- \end{vmatrix}$$

مرحله دوم

$$\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۱ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ----------- \\ -(۲\times۴-۳\times۱)=-۵ \\ ----------- \end{vmatrix}$$

مرحله سوم

$$\begin{vmatrix} ۲ \\ ۳ \\ ۱ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ---------- \\ ---------- \\ ۲\times۲-۳\times۳=-۵ \end{vmatrix}$$

نتیجه

$$\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=\begin{vmatrix} ۱۰ \\ -۵ \\ -۵ \end{vmatrix}$$

مثال: اگر $\bar{p}=(۱,۰,-۲)$ و $\bar{q}=(۴,-۱,۳)$ حاصل $\bar{p}\times\bar{q}$ را محاسبه کنید.

حل: در این روش مؤلفه‌های دو بردار را به صورت سطری نوشته و $\bar{p}\times\bar{q}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$۱)\quad \begin{array}{ccc} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & -۱ & ۳ \\ \hline \end{array} \qquad ۰\times۳-(-۱)(-۲)=-۲$$

$$۲)\quad \begin{array}{ccc} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & -۱ & ۳ \\ \hline \end{array} \qquad -(۱\times۳-(-۲)\times۴)=-(۳+۸)=-۱۱$$

$$۳)\quad \begin{array}{ccc} ۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & -۱ & ۳ \\ \hline \end{array} \qquad ۱(-۱)-۴\times۰=-۱$$

نتیجه: $\bar{p}\times\bar{q}=(-۲,-۱۰,-۱)$

محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به روشی ساد

با این روش مقدار دترمینان هر ماتریس ۳×۳ را در چن ثانیه می‌توان محاسبه کرد.

دترمینان ماتریس $A_{۳\times۳}$ را در نظر می‌گیریم.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{vmatrix}$$

برای محاسبه آن به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱ـ دو سطر (یا دو ستون) اول و دوم دترمینان را انتخا کرده و مؤلفه‌های اول این دو را حذف می‌کنیم، سپس جوا دترمینان ۲×۲ حاصل را در اولین مؤلفهٔ سطر (یا ستون) سو ضرب می‌کنیم.

۲ـ دو درایه دوم سطرها (یا ستون‌های) انتخاب شده حذف کرده و جواب دترمینان ۲×۲ را در مؤلفهٔ دوم سطر سو (یا ستون سوم) ضرب کرده و سپس حاصل را قرینه می‌کنی

۳ـ در این مرحله دو درایهٔ سوم سطرها (ستون‌ها) در نظ گرفته شده را حذف کرده و جواب دترمینان حاصل را در سومی درآیهٔ سطر (ستون) سوم ضرب می‌کنیم.

۴ـ مجموع عددهای حاصل در سه مرحله بالا، جوا دترمینان ۳×۳ است.

مثال: دترمینان زیر را محاسبه کنید.

$$|A|=\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۴ & -۳ & ۵ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}$$

حل:

مرحله اول:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۴ & -۳ & ۵ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$\times\left(۲\times۵-(-۳)(-۱)\right)=۲(۱۰-۳)=۱۴$$

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۴ & -۳ & ۵ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$۱\times\left(۳\times۵-۴(-۱)\right)]=۱۹$$

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۲ & -۱ \\ ۴ & -۳ & ۵ \\ ۲ & ۱ & -۲ \end{vmatrix}$$

$$-۲\times\left(۳(-۳)-۴\times۲\right)=-۲\times(-۹-۸)=۳۴$$

در نتیجه :

$$|A|=۱۴-۱۹+۳۴=۲۹$$

روشی ساده برای محاسبه ماتریس الحاقی و وارون یک ماتریس ۳×۳

در این روش بدون استفاده از کهاد و همسازه در زمانی بسیار کوتاه می‌توان ماتریس الحاقی یک ماتریس ۳×۳ را محاسبه کرد.

برای محاسبه ماتریس الحاقی مانند محاسبه ضرب خارجی دو بردار عمل می‌کنیم، به این ترتیب که :

مرحله ۱ـ سطر اول را حذف می‌کنیم و هریک از دو سطر دوم و سوم را یک بردار درنظر گرفته و آنها رادرهم ضرب خارجی می‌کنیم. جواب‌های حاصل درایه‌های اولین ستون ماتریس الحاقی است.

مرحله ۲ـ سطر دوم دترمینان را حذف کرده و با این فرض که دو سطر اول و سوم، دو بردار است آنها را در هم ضرب خارجی می‌کنیم سپس جواب‌های بدست آمده را قرینه می‌کنیم. به این ترتیب درایه‌های ستون دوم ماتریس الحاقی به دست می‌آید.

مرحله ۳ـ مرحله آخر سطر سوم را حذف کرده و سطرهای اول و دوم دترمینان را مانند دو بردار در نظر گرفته و آنها را درهم ضرب خارجی می‌کنیم. جواب‌های حاصل درایه‌های ستون سوم ماتریس الحاقی است.

مثال. وارون ماتریس $A=\begin{vmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۱ & -۳ & -۲ \end{vmatrix}$ را محاسبه کنید.

حل: می‌دانیم وارون ماتریس A از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$A^{-1}=\frac{۱}{|A|}A^{*}$$

که در آن A^{*} را ماتریس الحاقی می گوئیم و برای محاسبه آن از دستور بالا استفاده می‌کنیم.

مرحله اول ـ محاسبه درآیه های ستون اول A^{*}

سطر دوم A ← ۰ ۴ ۱

س ← ۱ -۳ -۲

-۵ ۱ -۴

از روش محاسبه ضرب خارجی دو بردار استفاده می‌کنیم تا درایه‌های ستون اول ماتریس الحاقی به دست آید.

مرحله دوم: در این مرحله عناصر ستون دوم ماتریس الحاقی محاسبه می‌شود.

سطر اول A ← ۳ ۱ -۲

ق ← ۱ -۳ -۲

-۸ ۴ -۱۰ ⟶ ۸ -۴ ۱۰

درایه‌های ستون دوم ماتریس الحاقی

مرحله سوم: برای محاسبه درایه‌های ستون سوم A^{*} از دو سطر اول و دوم A استفاده می‌کنیم

درایه‌های ستون سوم ماتریس A^{*}

سطر اول A ← ۳ ۱ -۲

سطر دوم ← ۰ ۴ ۱

۹ -۳ ۱۲

در نتیجه ماتریس الحاقی، ماتریس ۳×۳، A به صورت زیر است :

$$A^{*}=\begin{bmatrix} -۵ & -۸ & ۹ \\ ۱ & ۴ & -۳ \\ -۴ & -۱۰ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

برای محاسبه وارون ماتریس A به کمک روشی که ارائه شد دترمینان A را محاسبه می‌کنیم $|A|=۹\times۱-۳(-۳)+۱۲(-۲)=-۶$

$$A^{-1}=\frac{۱}{-۶}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ & ۱ \\ ۱ & -۳ & -۲ \end{bmatrix}$$



پرویز شهریاری

برخی قوم‌ها به‌عنوان ابزاری برای شمار، نه از انگشتان، بلکه از بندهای انگشتان خود استفاده می‌کردند. در این رابطه، گاهی به دستگاهی به اندازهٔ کافی سودمند و پایدار می‌رسیدند. در این‌جا فرایند محاسبه، به‌این ترتیب انجام می‌شد: انگشت شست یک دست «مأمور شمارش» بندهای بقیهٔ انگشتان این دست بود؛ از آن‌جا که در هریک از چهار انگشت دیگر این دست، سه بند وجود دارد، واحد مرتبهٔ بالاتر، برابر ۱۲ می‌شد. این روند گاهی در ۱۲ متوقف نمی‌شد؛ درضمن، هر انگشت دست دیگر، نمایندهٔ یک واحد از مرتبهٔ بالاتر (یعنی ۱۲) بود و وقتی همهٔ انگشتان دست دوم تمام می‌شد، واحد مرتبهٔ تازه، یعنی ۱۲ × ۵ به‌دست می‌آمد که برابر ۶۰ می‌شود. ممکن است چنین روندی برای شمار، در به‌وجود آمدن مبنای ۶۰ عدد شماری کمک کرده باشد که در سرزمین بابل، مورد استفاده قرار می‌گرفت و پس از آنها هم تا مدت‌ها، به‌وسیلهٔ ریاضیدانان ایرانی به‌کار می‌رفت.

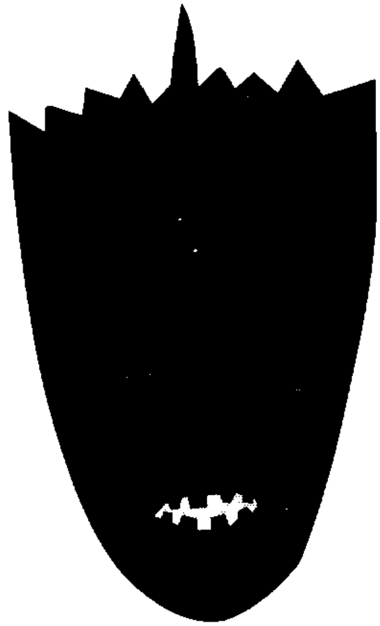
این انتخاب مبنای ۶۰، دلیل دیگری هم می‌تواند داشته باشد. عددشماری در مبنای ۱۰ برای عددی بزرگ که بابلی‌ها به‌ویژه در اخترشناسی به آنها نیاز داشتند، جای زیادی را می‌گرفت؛ درحالی که در مبنای ۶۰ تعداد رقم‌های عدد به سرعت پایین می‌آید.

ردّپای مبنای ۱۲ و مبنای ۶۰ برای عددشماری، تا امروز هم باقی مانده است. در مبنای ۱۲ «دوجین» را داریم که به معنای ۱۲ عدد است و «گروس» به معنای ۱۲ «دوجین»، یعنی ۱۴۴ عدد از مبنای ۶۰ هم هنوز در محاسبهٔ زمان استفاده می‌شو
(ساعت= ۶۰ دقیقه؛ دقیقه و ثانیه و غیره) همچنین برای اندازه‌گیری زاویه‌ها و کمان د مبنای ۶۰ را به‌کار می‌برند (یک درجه زاوی یا کمان برابر است با ۶۰ دقیقه...).

به این ترتیب، با پیشرفت اقتصاد جامع و نیاز به شمردن و محاسبه، دستگاه‌های عددشماری به‌وجود آمد که از بین آنها دستگ با مبنای ۱۰ کم و بیش عمومی شد. همی شیوهٔ شمارش مقدماتی، سنگ بنای اصل ریاضیات را گذاشت و آن را به جایی که امرو می‌بینیم رسانید.

اگر روندهای کار و اقتصاد، انسان ر وادار کرد عددها و نامگذاری آنها را کشف کند، رشد بعدی نیازهای اقتصادی انسان او را در مسیر گسترش و عمیق‌تر کردن مفهو





ـدد انداخت؛ به‌ویژه، وقتی این پیشرفت
یرو گرفت و حرکت به جلو سریع‌تر شد که
ولت و دستگاه دولتی کم یا بیش پیچیده
ه‌وجود آمد. دولت‌ها نیاز داشتند حساب
موال آنها نگهداری شود و دستگاه مالیاتی
سر و صورت داده شود، و وقتی تبادل کالا
کامل یافت و به مرحلهٔ مبادلهٔ پول رسید،
حساب کالاهای تجاری تنظیم شد. این
وضع، از یک‌طرف موجب شد تا عددنویسی
رای ثبت عددها پدید آید و از طرف دیگر،
عمل‌های محاسبه‌ای، یعنی عمل روی
عددها را ایجاب می‌کرد.

نوشتن عددها، در دورانی قدیمی‌تر از
زندگی بشر، که دربارهٔ آنها صحبت کردیم،
ه‌وجود آمد: گره‌ها، نشانه‌هایی که روی
ستخوان یا درخت می‌گذاشتند یا سنگریزه‌ها
و غیره، چیزی جز تولد عددنویسی نبود.
ولی این شکل عددنویسی، پاسخ‌گوی
عددهای بزرگ نبود؛ به‌ویژه وقتی که
می‌خواستند حساب کالاهای گستردهٔ تجاری
را یادداشت کنند. با وجود این، عمل‌های
تجاری محاسبهٔ پیچیده‌ای را طلب می‌کرد.
لازم بود عددها را با هم جمع، از یکدیگر
کم، درهم ضرب و برهم تقسیم کنند؛ ولی
شیوهٔ نوشتن برای این عمل‌ها، روش
ساده‌ای به دست نمی‌داد. در این دوران بود
که انسان به تدریج روش نوشتن عددها را با
استفاده از رقم‌ها آغاز کرد.

بجز این، باید یادآور شد که همراه با رشد
نیازهای انسان در بستگی نزدیک با آن،
به‌تدریج در جامعهٔ انسانی، بجز عدد و
محاسبه، شاخه‌ای از اندیشه و فعالیت عملی
رشد کرد که در تکامل بعدی خود، به دانش
ریاضی یاری رساند. این، عبارت بود از
پیدایش اندازه‌های مختلف و پیشرفت روش
اندازه‌گیری. اگر مفهوم عدد به تکامل یکی
از اساسی‌ترین شاخه‌های ریاضیات ـ یعنی
حساب یاری رساند، مشاهدهٔ چیزهایی که
دوروبر انسان بود، شکل آنها و پیشرفت
روش‌های اندازه‌گیری‌های مختلف، به تولد
شاخهٔ دیگری از ریاضیات ـ یعنی هندسه ـ
یاری رساند.

ما در این جا به طور خلاصه، پیدایش
مفهوم عدد را، که پایهٔ ساختمان محکم آنالیز
به شمار می‌رود، بررسی کردیم؛ اما دربارهٔ
پیدایش مفهوم‌هایی با خصلت هندسی، باید
پیش از هر چیز، یادآوری کرد که در این رابطه
و در آغاز، آشنایی انسان با شکل‌های
مختلفی بود که دورو بر او وجود داشت.

ولی وقتی که این شکل‌ها برای ساختن
ظرف، وسایل کشاورزی و... به کار رفت،
لازم شد که اندازهٔ شکل‌های ساخته‌شده، در
جهت‌های مختلف به‌دست آید و برای
انسان، نخستین اندازه‌های طول، وزن و
حجم شکل گرفت.

طبیعی است، نخستین اندازهٔ طول نزد
انسان، مربوط به اندازه‌های بخشی از بدن
خود او بود. برای نمونه، برای اندازه‌گیری
طول، بیش از همه، اندازهٔ گام یک مرد بالغ
مورد استفاده قرار می‌گرفت. هنوز هم ما
برای اندازه‌گیری فاصله‌ها، از گام‌های خود
استفاده می‌کنیم. اگر به اندازه‌های
کوچکتری نیاز پیدا می‌کرد، مثل
عددشماری‌ها از دست‌ها و پاهای خود
استفاده می‌کرد. درضمن، واحد
اندازه‌گیری برای او، ضخامت یک انگشت
دست، طول انگشت شست، عرض کف
دست، فاصلهٔ بین انگشت شست و انگشت
نشانه یا انگشت میانه، فاصلهٔ بین آرنج تا
انتهای انگشت میانه، اندازهٔ کف پا و... بود.

پیشرفت عددنویسی و اندازه‌گیری،
رابطهٔ مستقیمی با پیشرفت جامعه داشته
است، بنابراین، ملت‌هایی به سرعت پیش
رفته‌اند که به دوران دولت‌داری و حکومت
گام نهاده‌اند.

□

بین ملت‌های کرهٔ زمین، آنهایی که در تلاقی سه قارّه زندگی می‌کردند، شرایط مساعدتری برای زندگی اقتصادی و سیاسی داشتند. این سه قارّه عبارت بودند از اروپا، افریقا و آسیا؛ و همچنین آنها که در شبه‌جزیرهٔ هندوستان و سرزمین چین زندگی می‌کردند، شرایط طبیعی در این کشورها به شدت تغییر می‌کرد. ساحل دریا در این کشورها، گاهی خلیج‌های عمیق را به‌وجود آورده و گاهی روی یک خط پیش رفته است. در همسایگی ساحل، انبوهی از جزیره‌ها ایجاد کرده یا دریای بی‌کران و گسترده، در برابر چشم انسان‌ها قرار گرفته است. بیابان‌های بی‌آب، به‌تناوب با درّه‌های حاصلخیز و پر آب عوض می‌شوند؛ گاهی قارّه از کوهستان پوشیده است و گاهی صدها کیلومتر مرغزار یا مرداب به چشم می‌خورد. اینها زمینهٔ مساعدی برای رشد جامعه‌های انسانی به‌وجود آورد، و محیط زیست اجتماعی را برای مردم ساکن در آن آماده‌تر کرد.

در اعماق تاریخ، وقتی که انسان هنوز از لحاظ صنعتی پیش نرفته بود و قانون‌های طبیعت را نمی‌شناخت و نمی‌توانست بر طبیعت تسلط داشته باشد، تا اندازهٔ زیادی به طبیعت دور و بر خود وابسته بود. ولی حتی در آن زمان، شرایط طبیعی نمی‌توانست اهمیت تعیین‌کننده برای پیشرفت جامعهٔ انسانی نداشته باشد. نیروهای طبیعی در این دوران می‌توانست مانع رشد جامعهٔ انسانی باشد یا آن را به جلو ببرد و مسیر رشد را تندتر یا کندتر کند؛ ولی بی‌تردید، شرایط طبیعی تأثیر زیادی در پیشرفت زندگی اقتصادی ملت‌های کهن در آستانهٔ تشکیل نخستین دولت‌ها داشته‌اند؛ به‌ویژه در مناسبات اجتماعی آن‌ها تأثیر شگرفی به جای گذاشته است.

و در همین منطقه‌های کرهٔ زمین بود که دانش و ریاضیات به معنای امروزی خود به‌وجود آمد.



آزمون سراسری دانشگاه ها با تمام انتقادهایی که همراه خود دارد، در حال حاضر بهترین نوع گزینش دانشجو و بهترین راهکار شناسایی و انتخاب رشته ی دانشگاهی است که در سال های اخیر به ماراتُنی سنگین برای دانش پژوهانِ خواهانِ تحصیلات عالی تبدیل شده است. شرکت کنندگان در آزمون ورودی دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی، برای موفقیت در این آزمون، نیازمند به استفاده و بهره گیری از منابع مطالعاتی مناسب و مفید هستند. انتشارات مدرسه برهان برای پاسخ گویی به این نیاز، در راستای رسالت آموزشی خود، پس از انتشار مجموعه کتاب های از مدرسه تا دانشگاه مجموعه جدیدی را در دستور کار خود قرار داده است.

در این مجموعه جدید برای هریک از کتاب های درسی که به عنوان منبع طرح پرسش در آزمون سراسری معرفی شده است، یک عنوان کتاب، تألیف و منتشر می شود. هدف از تولید این مجموعه جدید تکمیل کتاب های «از مدرسه تا دانشگاه» است که هر دانش آموز با حل تمرین های متنوع و متعدد این مجموعه به یک مهارت نسبی برای کسب موفقیت در آزمون سراسری دست یابد. در این کتاب ها، مطابق سرفصل ها و عناوین هر کتاب تعداد قابل توجهی پرسش های چهارگزینه ای وجود دارد. پاسخ های تشریحی مناسب و کافی ویژگی دیگر این مجموعه است که در این پاسخ ها علاوه بر بررسی مفاهیم درسی، نکته های لازم نیز ارائه شده است در بعضی از موارد گزینه های نادرست نیز برای تفهیم بیشتر مطالب درسی مورد بررسی قرار گرفته است. بیشتر پرسش های آزمون های ورودی دانشگاه ها و مؤسسات آموزش عالی (سراسری و آزاد) برای آشنایی دانش آموزان در این مجموعه گردآوری شده است. انتشارات مدرسه برهان امیدوار است که این مجموعه جدید در کنار کتاب درسی بتواند در جهت کسب مهارت و ایجاد تسلط بر محتوای آموزشی، شما دانش آموز عزیز را یاری کند.

کتاب های ریاضی این مجموعه توسط مؤلفین و دبیران ارزشمندی تدوین و تألیف شده است که در زیر عنوان کتاب ها آمده است:

۱ـ ریاضی سال دوم دبیرستان

۲ـ جبر و احتمال سوم ریاضی

۳ـ حسابان ۱و۲

۴ـ ریاضی سال سوم رشته تجربی

۵ـ ریاضی عمومی ۱ و ۲ رشته تجربی

۶ـ حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱و۲

۷ـ ریاضیات گسسته

۸ـ جبر خطی و هندسه تحلیلی

انتشارات مدرسه برهان
منتشر کرده است
سری کتابهای
«از مدرسه تا دانشگاه»

هدف از چاپ سری کتابهای «از مدرسه تا دانشگاه» پر کردن خلأ موجود بین کتابهای کمک درسی و کتابهای آمادگی برای کنکور است.

دانش آموزان با مطالعهٔ این سری کتابها، اطلاعات لازم، اعم از مفاهیم درسی، نکته های پنهان در لابه لای این مفاهیم و قضیه ها و مسائل مهم را کسب کرده و با پرسشهای چهارگزینه ای و حل تشریحی آنها و آزمونهای چهارگزینه ای آشنا می شوند، تا هم برای پاسخ گویی به پرسشهای تشریحی و هم برای شرکت در کنکورهای سراسری آمادگی پیدا کنند.

از مدرسه تا دانشگاه — ریاضیات سال دوم

از مدرسه تا دانشگاه — ریاضی عمومی ۱ و ۲

از مدرسه تا دانشگاه — حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲

از مدرسه تا دانشگاه — جبر و احتمال

از مدرسه تا دانشگاه — ریاضیات گسسته (دوره پیش دانشگاهی رشته علوم ریاضی)

از مدرسه تا دانشگاه — ریاضیات ۱ و ۲

از مدرسه تا دانشگاه — هندسهٔ تحلیلی و جبر خطی

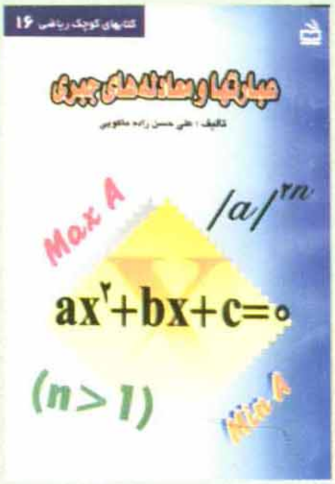
از مدرسه تا دانشگاه — ریاضیات سال سوم (رشته علوم تجربی)

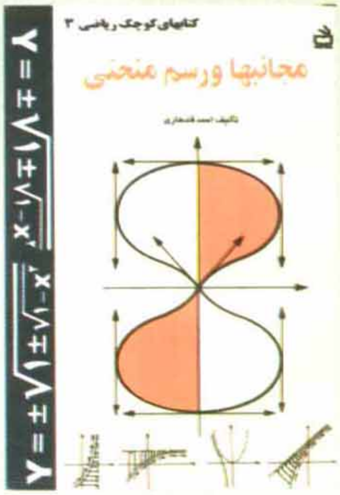
ناشر برگزیده سالهای ۷۵، ۷۲ و ۷۹

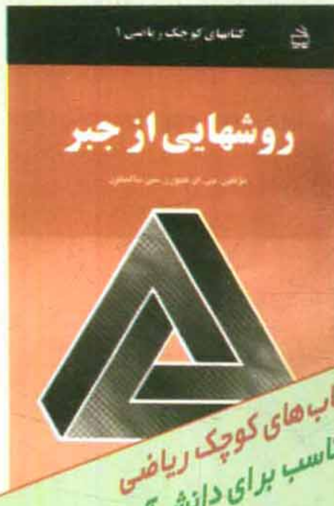

رشد
برهان
۳۸
www.roshdmag.org
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی
سال دوازدهم ،شمارهٔ دوم ۱۳۸۱ ، بها: ۲۰۰۰ ریال
برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

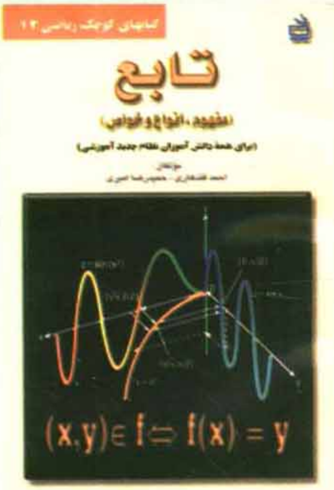
کتاب‌های کوچک ریاضی
مناسب برای همهٔ دانش آموزان

۱. آشنایی با روش های عددی در حل مسائل ریاضی ۱ دکتر محمد علی فریبرزی عراقی
۲. تقارن جبری و روش ضرایب نامعین/ پرویز شهریاری
۳. تثلیث زاویه و تربیع دایره/ پرویز شهریاری - سیامک جعفری
۴. تاریخ ریاضیات/ پرویز شهریاری (در دست چاپ)





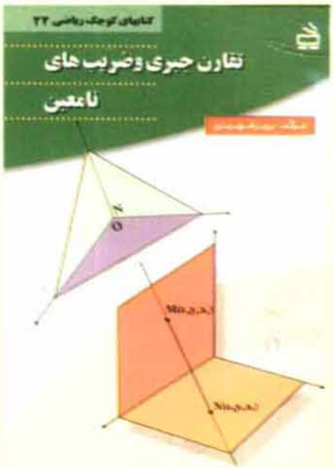




انتشارات مدرسه
منتشر کرده است

تلفن تماس:

۸۸۰۰۳۲۵
۸۸۰۰۳۲۶
۸۸۰۰۳۲۷
۸۸۰۰۳۲۸
۸۸۰۰۳۲۹



کتاب‌های کوچک ریاضی
مناسب برای دانش آموزان سال سوّم

۱. آنالیز ترکیبی و بسط دو جمله ای/ پرویز شهریاری
۲. استقرای ریاضی/ پرویز شهریاری
۳. بخش پذیری در جبر/ پرویز شهریاری
۴. پیوستگی و مشتق پذیری/ احمد قندهاری
۵. تابع/ احمد قندهاری - حمیدرضا امیری
۶. تقارن جبری و روش ضرایب نامعین/ پرویز شهریاری
۷. تعیین دامنه و برد توابع/ سید محمدرضا هاشمی موسوی
۸. حد و مفهوم حد/ سید محمدرضا هاشمی موسوی
۹. روش هایی از جبر/ حمیدرضا امیری
۱۰. مثلثات/ احمد فیروزنیا
۱۱. مجانب ها و رسم منحنی/ احمد قندهاری
۱۲. نابرابری ها و نامعادله ها/ میرشهرام صدر
۱۳. ورودی به نظریه احتمال/ دکتر عین الله پاشا
۱۴. مبانی ریاضیات گسسته/ حمیدرضا امیری - یدالله ایلخانی پور

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی

❖ سال دوازدهم ، شمارهٔ دوم ❖ ۱۳۸۱

❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: ۱۰۰۰۰ نسخه

ه برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

۲ یادداشت سردبیر

۳ از تاریخ بیاموزیم/ پرویز شهریاری

۸ جز صحیح X/ احمد قندهاری

۱۳ پاسخ تفریح اندیشه

۱۴ اثبات چند قضیه هندسه از راه های تازه و ساده/ دکتر احمد شرف الدین

۱۸ ماتریس های تبدیل و کاربردهای آنها/ حمیدرضا امیری

۲۳ ریاضیات تفریحی از منظر تکامل/ غلامرضا یاسی پور

۲۸ مدل سازی مقدماتی ریاضی/ میرشهرام صدر

۳۳ روشی برای اثبات $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ / محمدحسین پورسعید

۳۴ کاربردهایی از اصل شمول و عدم شمول/ دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

۴۴ اتحاد و معادله/ پرویز شهریاری

۴۸ پارادوکس های ریاضی و علوم/ حسن نصیرنیا

۵۰ تابع نمایی و تابع لگاریتمی/ احمد قندهاری

۵۵ گراف ها وکاربرد های آن/ سهراب شریف زاده

۶۲ هنر تشکیل معادله/ علیرضا الهی

رشد برهان ،تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

✍ **نگارش مقاله های کمک درسی**(شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه) ✍ **طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها**(برای دانش آموزان) ✍ **طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها**(برای دانش آموزان) ✍ **طرح معماهای ریاضی** ✍ **نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی** (مانند تاریخ ریاضیات زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان ،هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

✍ مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ✍ مقاله های وارده باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.

✍ مقاله های رسیده مسترد نمی شود. ✍ استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجله: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

یادداشت سردبیر

مطالب درسی را چگونه باید یاد گرفت؟ ابزارهای یادگیری مطالب درسی کدام‌اند؟ از کجا باید شروع کرد؟ برای تثبیت مطالب فرا گرفته شده، چه باید کرد؟ از چه منابعی باید استفاده کرد؟ و...

سؤال‌های بالا برای هر دانش‌آموزی می‌تواند مطرح شود و جواب درست به هر کدام از آن‌ها، تأثیرگذار در وضعیت آموزشی هر فردی است. شاید شما هم درگیر پاسخ دادن به هریک از این سؤال‌ها باشید. ممکن است جواب صحیح را یافته یا در پی یافتن آن باشید. در هر صورت این‌ها پرسش‌هایی هستند که نمی‌توان به راحتی از کنار آن‌ها گذشت. اگر مطلب درسی را ریاضیات در نظر بگیریم، یافتن روش‌های صحیح مطالعه و یادگیری رابطه‌ای مستقیم با کتاب درسی، معلّم، فضای آموزشی، استعدادهای ذاتی، روحیه، علاقه، کتاب‌های کمک درسی، کتاب‌های کمک آموزشی و فرصت مناسب دارد که در بین این عامل‌ها برای شما دانش‌آموزِ علاقه‌مند به ریاضیات، کتاب درسی، کلاس درس و کتاب‌های کمک درسی و کمک آموزشی از اهمیت بیش‌تری برخوردارند و لذا باید هریک از این عامل‌ها که در واقع رکنی از ارکان فرآیند یادگیری را تشکیل می‌دهند به خوبی شناخته و روش صحیح استفاده از آن‌ها را بدانید.

راجع به کتاب درسی صحبت و بحث بسیار است، ولی آنچه مسلّم و قطعی به نظر می‌رسد، این است که کتاب درسی به تنهایی نمی‌تواند راهگشا باشد و کلیّات را در اختیار ما قرار می‌دهد. اولین عامل مؤثر در رسیدن به اهداف آموزشی هر کتاب درسی، معلّم و کلاس درس است. علاوه بر این، شما باید مطالعهٔ خارج از کتاب درسی داشته باشید که این مطلب، رابطه‌ای مستقیم با عامل‌هایی چون علاقه، فرصت مناسب، استفاده و شناخت صحیح و کافی از کتاب‌های کمک درسی و کمک آموزشی را دارد.

راستی یک کتاب جنبه درسی[1] خوب چه ویژگی‌هایی باید داشته باشد؟

سعی می‌کنیم کلیّاتی راجع به استانداردهای یک کتاب کمک درسی را در اختیار شما قرار دهیم که شما راحت‌تر بتوانید کتاب مناسب را، برای مطالعه بیشتر و در جهت تعمیق و تفهیم مطالب فرا گرفته، انتخاب و از آن استفاده کنید.

۱ـ با توجه به هدف‌های آموزشی هر کتاب درسی، کتاب کمک درسیِ مناسب، کتابی است که با این اهداف هم راستا باشد، برای مثال، کتابی که مسائل کتاب درسی را حل کرده باشد، نمی‌تواند با اهداف کتاب درسی هم جهت باشد. یادتان باشد که شما هیچ‌گاه نباید از این گونه کتاب‌ها استفاده کنید، زیرا مسائل کتاب درسی، با این هدف در کتاب گنجانده شده است که شما پی به اشکالات احتمالی خود برده و نقاط ضعف خود را پیدا کرده و در جهت رفع آن کوشش کنید.

۲ـ کتاب درسی با توجه به محدودیت‌هایی که دارد، ممکن است به بعضی مطالب به صورت عمیق و با تشریح کامل، نپرداخته باشد و یا در بعضی زمینه‌ها فاقد مثال‌ها و مسأله‌های کاربردی باشد که کتاب کمک درسیِ مناسب باید این زمینه را فراهم کند تا شما احساس کمبود نکرده و بتوانید با مطالعهٔ آن به بسیاری از پرسش‌های احتمالی خودتان پاسخ دهید.

۳ـ نحوهٔ ارائه مطالب و حتی رسم‌الخط (شیوه نگارش و بکار بردن نمادها و علامت‌ها) در کتاب کمک درسی که انتخاب می‌کنید، نباید با کتاب درسی تفاوتی داشته باشد.

۴ـ کتاب کمک درسی مناسب باید مطالب را به گونه‌ای بیان و مسائل را طوری مطرح کرده باشد که خلاقیّت لازم را در شما ایجاد کرده و باعث شود تا شما به مطلب درسی مورد نظر تسلط کامل پیدا کنید.

۵ـ اگر در کتاب درسی، قضیه‌هایی مطرح شده‌اند، کتاب کمک درسی باید کاربرد این قضیه‌ها را در حل مسائل و حتی اثبات قضیه‌های دیگر به خوبی آشکار کند و حتی اگر روش بهتر و کوتاه‌تری برای اثبات آن‌ها موجود است، آن روش‌ها را بیان کند.

خلاصهٔ مطلب این که، هر کتابی را نمی‌توان مطالعه کرد و قبل از مطالعه هر کتاب یا مطلب، باید ابتدا خودمان را آماده کنیم و شناخت کافی داشته باشیم تا مبادا منحرف شده و وقتمان هدر برود.

ان‌شاءالله سعی می‌کنیم این بحث را در شماره‌های بعدی ادامه دهیم و دیگر ارکان فرآیند یادگیری را نیز بررسی کنیم. شما هم می‌توانید پرسش‌های خود را برای ما ارسال کنید تا پاسخگو باشیم و همچنین از نظریات شما بهره‌مند شویم.

۱ـ منظور از کتاب جنبه درسی، کتاب کمک درسی و کمک آموزشی است.



از تاریخ بیاموزیم

پرویز شهریاری

تاریخ چگونه به ما می‌آموزد؟

تاریخ به ما می‌آموزد... هیچ پژوهشگر علمی نمی‌تواند از «درس ریاضی» روگردان باشد. به یاری تاریخ است که می‌کوشیم قانونمندی‌های حاکم بر دانش، موقعیت کنونی، پیشرفت بعدی و گرایش‌های تکامل دانش را بیابیم.

در ریاضیات مجموعه‌ای از همزمانی‌ها دیده می‌شود که گواه قانونمندی‌های معینی از تاریخ تکامل ریاضیات است. **لباچوفسکی**، **بایای** و **گاوس** در یک زمان، بدون آگاهی از کارهای یکدیگر، هندسهٔ «هیپربولیک» را کشف کردند. مجادلهٔ هواداران **نیوتن** و **لایب‌نیتس** دربارهٔ پیشگامی هریک از آن‌ها در کشف «محاسبهٔ دیفرانسیلی»، مشهور است. همچنین می‌توان از همزمانی کارهای **فرما** و **دکارت** (در کشف هندسهٔ تحلیلی)، **بون تریاکین** و **کوراتوسکی** (در زمینهٔ بنیان گذاری و طرح ریزی گراف‌ها و بسیاری موردهای دیگر) نام برد.

پژوهشگران در یک زمان و مستقل از هم به یک کشف واحد می‌رسند. تعداد این همزمانی‌ها آن قدر زیاد است که به روشنی مسألهٔ «تصادف» را منتفی می‌کند. در این جا باید قانونی از تکامل ریاضیات نهفته باشد که به صورت «همزاد بودن» پیش‌آمدها ظاهر می‌شود.

این قانون تکامل به گونهٔ دیگری هم خود را نشان می‌دهد. گاه قانونی و یا رابطه‌ای در ریاضیات کشف می‌شود، اما مدت‌ها مورد استفاده پیدا نمی‌کند. بعد یک‌باره سر از خاک بیرون می‌آورد و وارد صحنهٔ عمل می‌شود. همه اطلاع دارند که **منخوس** و بعد **آپولونیوس** مقطع‌های مخروطی را کشف کردند و خواص و ویژگی‌های مخروطی را باز گفتند. ولی تا مدت‌ها (نزدیک به دو هزار سال)، کسی جز به ندرت سراغ این کتاب‌ها را نگرفت. این کتاب‌ها مدت دو هزار سال خاک قفسه‌ها را تحمل کردند تا زمان کپلر فرا رسید و معلوم شد سیاره‌ها روی مدار بیضی شکل حرکت می‌کنند. به جز آن **گالیله** ثابت کرد، سنگی که پرتاب می‌شود، روی سهمی حرکت می‌کند و این‌ها باعث شدند مقطع‌های

مخروطی بیاید و قانون‌های آن‌ها مورد بررسی قرار گیرد. یا وقتی که جرج بول قانون‌های منطق ریاضی را کشف کرد، فریادها برآمد که این، بازی با نمادهاست و دشمن هرگونه فکر و اندیشه است. ولی چیزی نگذشت که رایانه‌ها براساس منطق ریاضی طراحی شدند و این ناهمزمانی کشف و کاربرد دلیلی شد بر بحث کاربردی بودن ریاضیات و این که هرچه از ذهن بیرون آید، روزی به‌کار می‌رود.

در تاریخ، قانونمندی به عنوان سازوکار تکامل و منطق درونی تاریخ که ماهیت دگرگونی‌ها را روشن می‌کند، شناخته می‌شود. در این‌جا کلی‌ترین قانونمندی‌ها و یا سازوکارهای تکامل دانش ریاضی، در رابطه با پیشرفت روش تنظیم آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. روشن می‌کنیم، دو روش اساسی برای سازمان دادن و تنظیم دانش ریاضی وجود دارد.

طبیعت منطقی سازوکارهای کلی تکامل دانش، ایجاب می‌کند که هیچ‌یک از این دو روش تنظیم، «جاودانی» نباشد، هریک از آن‌ها دچار تغییر شود و ضرورت جابه‌جایی آن‌ها را پیش آورد. ولی داوری انتزاعی دربارهٔ چنین ضرورتی، از نظر اصولی نادرست است. ضمن بررسی قانونمندی‌های تکامل دانش، نمی‌توان بخش‌های منطقی آن را جدا از تاریخ واقعی دانش در نظر گرفت. داوری نسبت به سازوکارهای تکامل، بدون توجه به تاریخ ناممکن است.

دو روش سازمان دادن دانش ریاضی به عنوان قانونمندی تکامل ریاضیات

در تاریخ ریاضیات، برای «تمامیت» دانش ریاضی، دو گونهٔ اصلی برخورد وجود دارد و برای «یک کاسه کردن» موضوع‌های ریاضی که می‌توان آن‌ها را، «ریاضیات کاربردی» و «ریاضیات نظری» نامید، دو روش در نظر گرفته می‌شود. این‌ها، در اساس با دو شیوهٔ متفاوت، دانش ریاضی را سازمان می‌دهند و برخوردهای متفاوتی نسبت به درک ماهیت ریاضیات و سرنوشت آن دارند. از نظر تاریخی، این شیوه‌های برخورد، به‌تناوب و در دوره‌های گوناگون تکامل ریاضیات، جای هم را گرفته‌اند. هریک از این دوره‌ها با «زنجیره»هایی به ساختارهای ریاضی زمان و فعالیت‌های عملی بشر مربوط می‌شود؛ به این که چگونه می‌شود همهٔ جنبه‌های کاربردی دانش ریاضی را در یک دوره، تحلیل کرد!

فصل اول

ریاضیات کاربردی

تاریخ فعالیت‌های علمی و پدیده‌های گوناگون فرهنگ بر جهت‌گیری تکامل ریاضیات، یکی از موضوع‌های عمیق و اصلی در فلسفهٔ ریاضی است. دوره‌های کاملی از تاریخ را می‌توان دید که در آن‌ها، پیشرفت ریاضیات به شدت تحت‌تأثیر قانونمندی‌های نظری و درونی این دانش بوده است. همچنین دوره‌هایی از تاریخ ریاضیات را می‌توان جدا کرد که عمل و زندگی، انگیزهٔ نیرومندی برای سمت‌گیری ریاضیات و پیدایش و ساختارهای نظری تازه بوده است.

در این‌جا، روشی عملی پیش می‌آید که به یاری آن، همهٔ عنصرهای دانش ریاضی، به‌منظور برآورده شدن نیازهای عملی، به‌کار گرفته می‌شوند. ریاضیات در این میان، مسأله‌های عملی را در خود فرو می‌برد و آماده می‌شود تا در ساختارهای نظری خود، جنبه‌هایی از دنیای واقعی را، به‌عنوان تنها سرچشمهٔ شالوده‌های آن، منعکس کند. احساس «تأثیر غیرقابل درک ریاضیات در دانش‌های طبیعی» (ا. ویگنر) و گریز «معمایی» ساختارهای ریاضیات نظری به سمت کاربرد آن‌ها (نیکلا بورباکی) را، باید در سازوکار تکامل ریاضیات کاربردی، همچون سمت‌دهندهٔ دانش ریاضی، به‌طور کلی جست‌وجو کرد.

ریاضیات کاربردی، به عنوان نخستین روش تاریخی، در سازمان دادن آگاهی‌های ریاضی

از این تصور بسیار سخن رفته است که ریاضیات، همچون دستگاهی از آگاهی‌ها، در یونان باستان پدید آمد. درحالی که پیش از آن، تنها عنصرهایی از دستگاه آینده و نطفه‌هایی از بحث و استدلال نظری وجود داشت. از جمله ک. ای. روزاوین در اثر خود به نام «دربارهٔ طبیعت دانش ریاضی»

می‌نویسد:

«در زمان‌های دور باستانی، مجموعه‌ای از آگاهی‌ها و نتیجه‌گیری‌های نخستین که به‌شمار، اندازه‌گیری سطح و حجم و غیره مربوط می‌شد، از راه تجربه پیدا شد. این آگاهی‌ها در آغاز به هم مربوط نبودند و به همین دلیل نمی‌شد نام «دانش» را بر آن‌ها گذاشت. به‌تدریج که این آگاهی‌ها از تصادفی بودن و از استثنا پاک می‌شدند، توانستند رابطهٔ بین خود را ظاهر سازند. برخی نتیجه‌ها که در آغاز از راه تجربه به‌دست آمده بودند، توانستند با استدلال منطقی از نتیجه‌گیری دیگری بیرون کشیده شوند.»

همان‌طور که دیده می‌شود ساختار نظری دانش ریاضی، به‌عنوان یکی از عامل‌های عبور ریاضیات به موقعیت علمی خود، در مقابل موقعیت غیرساختاری و «پیش علمی» قرار داده می‌شود. این عقیده کم و بیش عام شده است که در مصر باستان و میان دو رود، مصالح تجربی فراوانی روی هم جمع شده بودند. ولی تنها در یونان باستان بود که دانش ریاضی به‌عنوان دستگاهی مرتبط، موقعیت خود را به‌دست آورد. از جمله و. ن. مولووشی در رسالهٔ «مسأله‌های فلسفی ریاضیات» می‌نویسد:

ریاضیات، در آغاز پیدایش خود و در طول هزاران سال، دانشی سازمان‌یافته نبود و تنها از حقیقت‌های جداگانه‌ای تشکیل می‌شد که نتیجه‌ای از تجربه بودند. ریاضیات، به‌عنوان آگاهی‌هایی سازمان‌یافته و به‌عنوان یک دانش، به ظاهر در یونان باستان و در سده‌های چهارم و پنجم پیش از میلاد شکل گرفت.

درضمن، این امر هم بدیهی به حساب آمده است که تنها شیوهٔ تنظیم آگاهی‌های ریاضی و پیوند دادن مصالح گوناگون آن به یکدیگر، عبارت است از: روش نتیجه‌گیری منطقی برخی از حقیقت‌ها، از برخی دیگر. این گونه برخورد با دانش ریاضی را می‌توان، به عنوان عبور «از یک مجموعهٔ ناشی از تجربه، به دستگاه نظری» تعریف کرد. این تعریف، در ارزیابی ن. بورباکی هم، وجود دارد؛ ولی به صورت پنهانی. «... تمامی جبر بابلی را با شیوه‌های ظریف و سنجیدهٔ آن، نمی‌توان به‌عنوان مجموعهٔ ساده‌ای از مسأله‌ها که ضمن تجربه و کورمال کورمال می‌شده‌اند، در نظر گرفت». بورباکی جبر بابلی را که برای آن ارزش قائل است و آن را سازمان‌یافته و نظری می‌داند، در برابر مجموعه‌ای از مسأله‌های درهم‌جوش، جدا از هم و سازمان‌نیافته می‌گذارد. اگر در این‌جا، آگاهی‌های درهم‌جوشی که در اعماق تاریخ از راه تجربه به‌دست آمده‌اند، در مقابل دستگاهی قرار می‌گیرند که به عنوان دستگاه نظری پذیرفته شده است، به این دلیل است که درواقع حالت سومی وجود ندارد: به دنبال هر دوره‌ای که مجموعه‌ای از داده‌های تجربی رو هم جمع می‌شوند، دوره به سازمان درآمدن و نظری شدن مصالح فرامی‌رسد.

با وجود این، دلیل‌های زیادی وجود دارند که ریاضیات پیش از یونان، شکلی سازمان‌یافته داشته، گرچه روش سازمان دادن آن، به کلی غیر از تنظیم نظری آن است. وقتی که ریاضیات به‌عنوان راهنمای عمل و



برای یافتن نیازهای خاص اجتماعی در شرایط موجود، در نظر گرفته می‌شود، آن وقت سازمان‌دهی ریاضیات، به صورتی واحد و خاص خود انجام می‌گیرد. عبور از آگاهی‌های ریاضی به حالت نظری هم، عبور از ملقمه از آگاهی‌های جدا از هم به دستگاه نظری نیست، بلکه ویرانی یک‌گونه و به‌وجود آمدن گونهٔ دیگر به‌طور کامل است.

برای این که ماهیت تغییری را که رخ می‌دهد، روشن کنیم، جنبه‌های اصلی دانش «سازمان‌یافته و نظری» ریاضیات را مشخص می‌کنیم: وجود ارتباط‌های منطقی که به مفهوم‌هایی خاص مربوط می‌شود، استفاده از «ایده‌آل»های ریاضی و پیدایش تاریخی اختلاف بین ایده‌آل‌ها با جسم‌های فیزیکی دنیای واقع.

وقتی به یاری استدلال‌های منطقی، گزاره‌ای ریاضی را به گزارهٔ دیگری تبدیل می‌کنیم، ساده‌تر آن است که در ذهن خود روی «ایده‌آل‌ها» کار کنیم، و نه خود جسم‌های واقعی. می‌توان گفت که انتزاع‌های ریاضی «زندگی خاص خودشان را دارند» و در ضمن، به‌طور دائم به تکمیل ساختارهای نظری یاری می‌رسانند. قبل از حالت نظری آگاهی‌های ریاضی، خبری از این جنبه‌ها نیست، با وجودی که سازمان‌یافته‌اند.

برای این که ریاضیات به‌عنوان یک دانش نظری پدید آید، باید نیازهای فعالیت عملی، ضرورت وجود آن را تأیید کنند. ولی سازمان اجتماعی ـ تولیدی نخستین وقتی که هنوز تولید انفرادی رشد نکرده بود یا وجود نداشت، مستلزم عمل‌های اجتماعی مشترک بود. تقسیم جریان واحد کار به فضاهای جداگانه، هنوز در این زمان پیش نیامده بود. هر عضو جامعه ابزاری داشت که برای همهٔ فعالیت‌ها به‌کار می‌آمد و همه‌جا به یک شیوه از آن استفاده می‌شد. همه دستاوردهای مادی و معنوی، واحد غیرقابل تجربه به‌حساب می‌آمدند و دارایی مشترک همه بودند. همچنین، نتیجهٔ فعالیت‌های جامعه به هر فرد و نتیجهٔ کار هر فرد، به جامعه تعلق داشت و تقسیم طبیعی کار در خانواده، برای تغییر این وضع کافی نبود. تنها، رشد بعدی نیازها، موجب افزایش فعالیت‌ها شد و همین، دستاوردها را افزایش داد؛ به‌نحوی که دیگر درخور افراد جداگانه نبود.

همان‌طور که یکپارچگی فعالیت مادی، متناظر با یکپارچگی دستورهای آن است، تقسیم فعالیت به حوزه‌های جداگانه، یعنی پیدایش تخصص، به معنای تقسیم دستاوردها به حوزه‌های گوناگون است. بغرنج شدن فعالیت و تبدیل آن به دستگاهی از کارهای سودمند برای جامعه (تعاونی‌های نخستین)، به نوبهٔ خود نطفه‌های روابط اجتماعی را به‌وجود آورد. نیروی کار و ابزار کار، در رابطه با استعدادهای طبیعی، نیازها را تقسیم می‌کند و تنوع می‌پذیرد. درنتیجه به‌خاطر تقسیم دستاوردها به رشته‌های متعددی مربوط به فعالیت، تخصص‌های پیش از دانش و استنتاج‌های نزدیک به دانش به‌وجود می‌آیند. پیدایش تخصص‌ها، وسیلهٔ نیرومندی برای رشد و درضمن، تنوع بعدی دستاوردها و درنتیجه، تحکیم تخصص‌ها و همچنین دگرگونی ساختار فعالیت می‌شود.

شرایط لازم اولیه برای به‌وجود آمدن عنصرهای نخستین ریاضیات (پیش ریاضیات)، یعنی دستاوردهای قابل اندازه‌گیری و قابل مقایسه با یکدیگر، نیاز مبرم به محاسبه را به‌وجود آورد، تا بتوان دستاوردهای محصول فعالیت را به صورت کتبی ثبت کرد. در آغاز، برای ثبت نوشته‌ها، حداقل آمادگی کفایت می‌کرد و وجود کاتب، امری موقتی و گذرا به‌حساب می‌آمد. برای مثال در نوشته‌ای با خط هیروگلیفی بر دیوارهای مقبرهٔ «ابوسیر»، خدمتگذار دربار «مه‌چن» (در پایان سلسلهٔ سوم و آغاز سلسلهٔ چهارم در مصر باستان)، اطلاع داده می‌شود که این خدمتگذار «... در رأس کاتبان محل خوارو‌بار و رئیس آن‌جا بود. او حسابدار و پزشک بود...».

بعدها کار نوشتن کتاب و ثبت نوشته‌ها، به یک حرفه و یک وظیفهٔ تخصصی تبدیل شد. دلیل این حرفه‌ای شدن و دقیق‌تر شدن کار کتابت را باید در تکامل خط و نوشتن جست‌وجو کرد. از جمله در میان دو رود، در مرحلهٔ اول تکامل خط میخی، از کوتاه

شدهٔ واژه‌ها (لولوگرافی) استفاده می‌شد و نشانه‌های واژه‌ای (لولوگرام‌ها) که بیش‌تر به‌کار می‌رفتند، معنای خود را پیدا کردند.

بعدها برای نامگذاری چیزها و موردهای تازه و همچنین نام‌های خاص، سازندگان این دستگاه (دستگاه خط میخی)، با زیرکی از همان نشانه‌های واژه‌ای که پیش از آن قبول کرده بودند، استفاده کردند. از ترکیب آن‌ها «هجاها» را ساختند و به این ترتیب، «نشانه‌های صوتی» (فتوگرام‌ها) را به‌وجود آوردند. هجاها (به‌طور معمول واژه‌های یک سیلابی) را بدون در نظر گرفتن معنای نخستین آن‌ها که کوتاه شدهٔ یک واژه بود، می‌خواندند. درنتیجه اختلاطی عجیب پیدا شد: کاهنان که هنوز رسم قبلی را کنار نگذاشته بودند و از نشانه‌ها به‌عنوان کوتاه‌شدهٔ واژه‌ها (لولوگرام) استفاده می‌کردند، در جای دیگر از همان متن نوشتهٔ خود، نشانه‌ها را به‌عنوان نشانهٔ صدا (فتوگرام) به‌کار می‌بردند. درضمن هیچ اضافه‌ای چه از نظر رسم نشانه و چه از نظر دیگر، بین «مونوگرام» و «فتوگرام» دیده نمی‌شد. این اختلاط و درهمجوشی دستگاه و استفاده از یک نشانهٔ واحد، برای یادداشت‌های متفاوت، موجب دشواری‌های زیادی شد که کاتبان با آن روبه‌رو بودند و برای برطرف کردن آن‌ها، باید دوره‌های سخت و طولانی آموزش را می‌گذرانند. [لئو اوپن‌هایم در کتاب «میان دو رود باستان»].

به این مناسبت، با این که بعدها از این روش ثبت‌نوشته‌ها صرف‌نظر کردند، به‌هرحال روش ساده‌ای که در آغاز برای ثبت دستاوردهای فعالیت وجود داشت، به‌طور جبران‌ناپذیری از بین رفت و «کاتبان به گروه متخصصان والامقامی تبدیل شدند» [همان‌جا]. شبیه همین تحول را در نوشته‌های مصر باستان هم می‌توان دید.

پیچیده‌تر شدن فعالیت، وجود تخصص را ضروری می‌کرد. گروه خاصی به‌وجود آمد که پاسخگوی فعالیت نوشتاری بود؛ گروه کاتبان. این حرفه در مصر، میان دو رود و چین، بدون این که افراد هیچ ارتباطی باهم داشته باشند، شکل گرفت. سرچشمه‌های ریاضیات را هم باید در همین نیاز اجتماعی جست‌وجو کرد. ریاضیات به‌عنوان آگاهی‌هایی که به کار عمل می‌خورند، درست درجهتی بود که نیازهای عملی گروه متخصصی از افراد را تأمین می‌کرد. و. بوبی نین، کاتبان مصری را این گونه معرفی



می‌کند: «کاتبان... طبقهٔ سوم کاهنان مصری را تشکیل می‌دادند. در سلسله‌مراتب مذهبی کاتب مقام سوم را داشت؛ پَری بر سر و کتاب و خط‌کش و مرکب و قطعه چوبی برای نوشتن در دست‌هایِ خود داشت. در ادارهٔ کاتبان، کسانی جمع بودند که به بخش ساختمانی معبد و دارایی‌های ارضی آن مربوط می‌شدند. به ظاهر مجموعهٔ آگاهی‌هایی که باید یادمی گرفتند و به‌کار می‌بستند، ارتباط دقیقی با وظیفهٔ آن‌ها داشت. در برنامهٔ درسی آن‌ها، این مواد وجود داشتند؛ دانش هیروگلیف و تزئین نمای بیرونی معبد، توانایی در تنظیم دقیق بخش‌های معبد در سمت معلوم افق؛ رسم «نیل»؛ اخترشناسی؛ هندسه، جغرافیای مصر و جغرافیای عمومی؛ شرح جهان هستی یا کیهان‌نگاری.

بنابراین آگاهی‌های مربوط به ریاضیات، اخترشناسی و جغرافیا از تخصص‌های مهم و اساسی کاهنان به‌شمار می‌رفتند. آنچه که یادگرفتن آن‌ها برای کاهنان اجباری بود، در «۱۰ کتاب بزرگ جمع کرده بودند که تعداد کل آن‌ها به ۴۳ می‌رسید. کتاب‌هایی هم وجود داشتند که به‌طور کلی، شامل همهٔ آگاهی‌های لازم برای هر شش طبقه از قشرهای کاهنان بود». [ریاضیات مصر قدیم از روی پاپیروس رایند].



جزء صحیح X

$\lfloor X \rfloor$

بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی X را جزء صحیح X گوییم و آن را با نماد $\lfloor x \rfloor$ نشان می‌دهیم. یعنی می‌توان نوشت:

$$\forall x \in R \,,\; n \in z \;;\; n \le x < n+1 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = n$$

مثال:

$$2 \le x < 3 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 2$$
$$\lfloor x \rfloor = -1 \Leftrightarrow -1 \le x < 0$$
$$-4 \le x < -3 \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = -4$$
$$2 < x < 2/3 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 2$$
$$x = \sqrt{2} \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 1$$

سؤال ۱. اگر $2\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 2$، آن‌گاه حدود X کدام است؟

۱) $-1 \le x < 1$ ۲) $-2 \le x < 0$

۳) $-3 \le x < -1$ ۴) $-4 \le x < -2$

حل: گزینهٔ (۳)

$$2\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor - 3\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 2 \Rightarrow$$
$$-\left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = 2 \Rightarrow \left\lfloor \frac{x-1}{2} \right\rfloor = -2 \Rightarrow -2 \le \frac{x-1}{2} < -1 \Rightarrow$$
$$-4 \le x-1 < -2 \Rightarrow -3 \le x < -1$$

خاصیت (۱) $\forall n \in z \;;\; \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

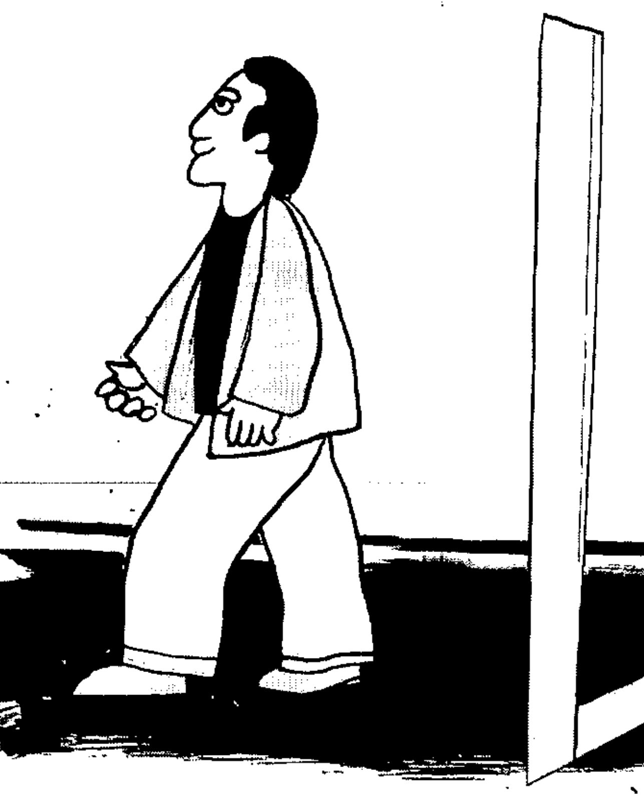
مثال:

$$\lfloor x+5 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 5$$
$$\lfloor x-2 \rfloor = \lfloor x \rfloor - 2$$
$$\lfloor x + \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$$

سؤال ۲. جواب معادلهٔ $\lfloor 3(\lfloor x \rfloor + 2) + \lfloor x \rfloor \rfloor = 22$ کدام است؟

۱) $4 \le x < 5$ ۲) $3 \le x < 4$

۳) $2 \le x < 3$ ۴) $1 \le x < 2$



احمد قندهاری

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی

حل: گزینهٔ (۱)

$$\lfloor ۳\lfloor x\rfloor+۶+\lfloor x\rfloor\rfloor=۲۲ \Rightarrow ۳\lfloor x\rfloor+۶+\lfloor x\rfloor=۲۲ \Rightarrow$$
$$۴\lfloor x\rfloor=۱۶ \Rightarrow \lfloor x\rfloor=۴ \Rightarrow ۴\le x<۵$$

سؤال ۳. جواب معادلهٔ $۳\left\lfloor\frac{x+۵}{۲}\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{x+۷}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+۹}{۲}\right\rfloor=۲۲$ کدام است؟

۱) $۲\le x<۴$ ۲) $۲\le x<۳$

۳) $۱\le x<۲$ ۴) $۱\le x<۳$

حل: گزینهٔ (۴)

$$۳\left\lfloor\frac{(x+۱)+۴}{۲}\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{(x+۱)+۶}{۲}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{(x+۱)+۸}{۲}\right\rfloor=۲۲$$

$$\Rightarrow ۳\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۲\right\rfloor+۲\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۳\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}+۴\right\rfloor=۲۲ \Rightarrow$$

$$۳\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۶+۲\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۶+\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor+۴=۲۲ \Rightarrow$$
$$۶\left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor=۶ \Rightarrow \left\lfloor\frac{x+۱}{۲}\right\rfloor=۱ \Rightarrow ۱\le\frac{x+۱}{۲}<۲ \Rightarrow$$
$$۲\le x+۱<۴ \Rightarrow ۱\le x<۳$$

سؤال ۴. اگر $x=\sqrt{۲}+۱$ و $\sqrt{۲}\simeq۱/۴$ و داشته باشیم، $\left\lfloor\frac{۲y-۱}{۲}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor+\lfloor x^۲\rfloor+\lfloor x^۳\rfloor$، آن‌گاه حدود y کدام است؟

۱) $\frac{۴۱}{۲}\le y<۲۱$ ۲) $\frac{۴۱}{۲}\le y<\frac{۴۳}{۲}$

۳) $\frac{۳۹}{۲}\le y<\frac{۴۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳۹}{۲}\le y<۲۰$

حل: گزینهٔ (۲)

$$x=\sqrt{۲}+۱\simeq۱/۴+۱=۲/۴ \Rightarrow \lfloor x\rfloor=۲$$
$$x^۲\simeq(۲/۴)^۲=۵/۸ \Rightarrow \lfloor x^۲\rfloor=۵$$
$$x^۳\simeq x(x^۲)=۲/۶(۵/۸)=۱۳/۸ \Rightarrow \lfloor x^۳\rfloor=۱۳$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{2y-1}{2} \right\rfloor = 2+5+13 \Rightarrow \left\lfloor \frac{2y-1}{2} \right\rfloor = 20 \Rightarrow$$

$$20 \le \frac{2y-1}{2} < 21 \Rightarrow 40 \le 2y-1 < 42 \Rightarrow 41 < 2y < 43$$

$$\Rightarrow \frac{41}{2} \le y < \frac{43}{2}$$

سؤال ۵ .

اگر، $\lfloor x \rfloor = \lfloor \log 1 \rfloor + \lfloor \log 2 \rfloor + \lfloor \log 3 \rfloor + \cdots \lfloor \log 100 \rfloor$ ،
آن‌گاه حدود x کدام است؟

۱) $100 \le x < 101$ ۲) $93 \le x < 94$

۳) $92 \le x < 93$ ۴) $91 \le x < 92$

حل: گزینهٔ (۳)

$$\lfloor \log 1 \rfloor = \lfloor \log 2 \rfloor = \lfloor \log 3 \rfloor = \cdots = \lfloor \log 9 \rfloor = 0$$

$$\underbrace{\lfloor \log 10 \rfloor = \lfloor \log 11 \rfloor = \lfloor \log 12 \rfloor = \cdots = \lfloor \log 99 \rfloor = 1}_{\text{تعداد آن‌ها } (99-10+1)=90}$$

$$\lfloor \log 100 \rfloor = 2$$

$$\lfloor x \rfloor = 90 + 2 = 92 \Rightarrow 92 \le x < 93$$

سؤال ۶ . معادلهٔ $(\lfloor x \rfloor - 3)! = 1$ چند جواب عضو Z دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) بی‌شمار

حل: گزینهٔ (۲)

می‌دانیم: $0! = 1$ و $1! = 1$ در نتیجه:

الف) $\lfloor x \rfloor - 3 = 0 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 3 \Rightarrow 3 \le x < 4, x \in z \Rightarrow x = 3$

ب) $\lfloor x \rfloor - 3 = 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = 4 \Rightarrow 4 \le x < 5, x \in z \Rightarrow x = 4$

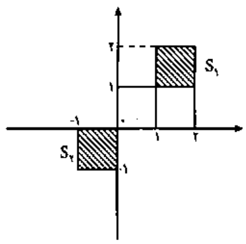
سؤال ۷ . اندازهٔ مساحت محدود به نمودار $\lfloor x \rfloor . \lfloor y \rfloor = 1$ ، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

حل: گزینهٔ (۲)

$$\lfloor x \rfloor . \lfloor y \rfloor = (1)(1) = (-1).(-1)$$



الف) $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \le x < 2 \\ \lfloor y \rfloor = 1 \Rightarrow 1 \le y < 2 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} \lfloor x \rfloor = -1 \Rightarrow -1 \le x < 0 \\ \lfloor y \rfloor = -1 \Rightarrow -1 \le y < 0 \end{cases}$

$$S = S_1 + S_2 = 1 + 1 = 2$$

مسأله: ثابت کنید: $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

حل: $x = n + p \ , \ n \in z \ , \ 0 < p < 1 \Rightarrow \lfloor x \rfloor = n$

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor 2n + 2p \rfloor = 2n + \lfloor 2p \rfloor$$

$$\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor n + p + \frac{1}{2} \right\rfloor = n + \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$2n + \lfloor 2p \rfloor = n + n + \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

باید ثابت کنیم:

$$2n + \lfloor 2p \rfloor = 2n + \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

حال باید ثابت کنیم:

$$\lfloor 2p \rfloor = \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

الف) $0 \le p \le \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 2p < 1 \Rightarrow \lfloor 2p \rfloor = 0 \\ \frac{1}{2} \le p + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lfloor 2p \rfloor = \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

ب)

$\frac{1}{2} \le p < 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \le 2p < 2 \Rightarrow \lfloor 2p \rfloor = 1 \\ 1 \le p + \frac{1}{2} \le (\frac{3}{2} \Rightarrow \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 \Rightarrow \end{cases}$

$$\lfloor 2p \rfloor = \left\lfloor p + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

خاصیت (۲): $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$

سؤال ۸ . جواب معادلهٔ $\lfloor ۲x \rfloor - \lfloor x \rfloor = -۱$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۲} \le x < -\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲} \le x < \frac{۱}{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲} \le x < \frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲} \le x < \frac{۵}{۲}$

حل: گزینهٔ (۱): در مسأله قبل، ثابت شد

$$\lfloor ۲x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor$$

پس: $\lfloor ۲x \rfloor - \lfloor x \rfloor = -۱ \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor = -۱ \Rightarrow$

$$\left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor = -۱ \Rightarrow -۱ \le x + \frac{۱}{۲} < ۰ \Rightarrow -\frac{۳}{۲} \le x < -\frac{۱}{۲}$$

سؤال ۹ . جواب معادلهٔ $۲\left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor x - \frac{۱}{۲} \right\rfloor = ۲$ کدام است؟

۱) $۲ \le x < ۳$ ۲) $۱ \le x < ۲$

۳) $\frac{۳}{۲} \le x < \frac{۵}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲} \le x < \frac{۳}{۲}$

حل: گزینهٔ (۴)

$$\left\lfloor x - \frac{۱}{۲} \right\rfloor = \left\lfloor (x + \frac{۱}{۲}) - ۱ \right\rfloor = \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor - ۱$$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$۲\left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor + \left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor - ۱ = ۲ \Rightarrow$$
$$۳\left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor = ۳ \Rightarrow$$
$$\left\lfloor x + \frac{۱}{۲} \right\rfloor = ۱ \Rightarrow ۱ \le x + \frac{۱}{۲} < ۲$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \le x < \frac{۳}{۲}$$

خاصیت(۳) $\forall x \in R$ ؛ $۰ \le x - \lfloor x \rfloor < ۱$ ، $x - ۱ < \lfloor x \rfloor \le x$

سؤال ۱۰ . اگر $x = ۴\left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor + k$ ، آن‌گاه حدود k کدام است؟

۱) $-۴ \le k < ۰$ ۲) $-۳ \le k < ۱$

۳) $۰ \le k < ۴$ ۴) $۰ \le k < ۸$

حل: گزینهٔ (۳)؛ دو طرف را بر ۴ تقسیم می‌کنیم.

$$x = ۴\left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor + k$$
$$\frac{x}{۴} = \left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor + \frac{k}{۴} \Rightarrow \frac{x}{۴} - \left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor + \frac{k}{۴}$$

بنا به خاصیت (۳)؛ داریم: $۰ \le \frac{x}{۴} - \left\lfloor \frac{x}{۴} \right\rfloor < ۱$

پس: $۰ \le \frac{k}{۴} < ۱ \Rightarrow ۰ \le k < ۴$

سؤال ۱۱ . اگر $\frac{x}{۲} = \left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor$ ، آن‌گاه معادله چند جواب دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینهٔ (۲):

$$\frac{x}{۲} = k, k \in z \Rightarrow x = ۲k$$
$$\left\lfloor \frac{x}{۳} \right\rfloor = k \Rightarrow k \le \frac{x}{۳} < k + ۱ \Rightarrow ۳k \le x < ۳k + ۳, x = ۲k$$
$$\Rightarrow ۳k \le ۲k < ۳k + ۳ \Rightarrow \begin{cases} ۳k \le ۲k \Rightarrow k \le ۰ \\ ۳k + ۳ > ۲k \Rightarrow k > -۳ \end{cases}$$
$$\Rightarrow -۳ < k \le ۰ \Rightarrow k = -۲, -۱, ۰$$
$$x = ۲k \Rightarrow x = -۴, -۲, ۰$$

سؤال ۱۲ . معادلهٔ $x^۲ + ۳ = ۴\lfloor x \rfloor$ چند جواب دارد:

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

حل: گزینهٔ (۲)

$$x^۲ + ۳ > ۰ \Rightarrow ۴\lfloor x \rfloor > ۰ \Rightarrow x > ۰$$
$$\lfloor x \rfloor = k, k \in z^+ \Rightarrow k \le x < k + ۱ \Rightarrow$$
$$k^۲ \le x^۲ < (k + ۱)^۲ \Rightarrow k^۲ + ۳ \le x^۲ + ۳ < (k + ۱)^۲ + ۳$$

داشتیم: $x^۲ + ۳ = ۴k$

$$\Rightarrow k^۲ + ۳ \le ۴k < k + ۲k + ۴ \Rightarrow \begin{cases} k^۲ - ۲k + ۴ > ۰ \\ k^۲ - ۴k + ۳ \le ۰ \end{cases}$$

همواره برقرار است. زیرا $\Delta < ۰, a > ۰$

$$k^۲ - ۴k + ۳ = ۰ \Rightarrow k = ۱,۳ , k^۲ - ۴k + ۳ \le ۰ \Rightarrow ۱ \le k \le ۳$$

$$\xrightarrow{k \in z} k = ۱,۲,۳$$

$$x^۲ + ۳ = ۴k \xrightarrow{k=۱} x^۲ = ۱ \Rightarrow x = ۱$$

$$x^۲ + ۳ = ۴k \xrightarrow{k=۲} x^۲ = ۵ \Rightarrow x = \sqrt{۵}$$

$$x^۲ + ۳ = ۴k \xrightarrow{k=۳} x^۲ = ۹ \Rightarrow x = ۳$$

خاصیت (۴) $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} ۰ & , x \in z \\ -۱ & , x \in (R - z) \end{cases}$

سؤال ۱۳. مجموعهٔ جواب معادلهٔ $۲\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = ۵$ کدام است؟

۱) $(۴,۵) \cup \{۶\}$ ۲) $(۶,۷) \cup \{۴\}$

۳) $(۳,۴) \cup \{۵\}$ ۴) $(۶,۷) \cup \{۵\}$

حل: گزینهٔ (۴)

الف) $x \in z$ ؛ $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = ۰ \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$ ؛

در معادله قرار می‌دهیم:

ب) $۲\lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor = ۵ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۵ \Rightarrow ۵ \le x < ۶, x \in z \Rightarrow x = ۵$ ؛ $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -۱ \Rightarrow \lfloor -x \rfloor = -۱ - \lfloor x \rfloor$ ؛

$x \in (R - z)$

در معادله قرار می‌دهیم:

$$۲\lfloor x \rfloor - ۱ - \lfloor x \rfloor = ۵ \Rightarrow \lfloor x \rfloor = ۶ \Rightarrow ۶ \le x < ۷, x \in (R - z)$$
$$\Rightarrow ۶ < x < ۷$$

مجموعهٔ جواب معادله: $(۶,۷) \cup \{۵\}$

سؤال ۱۴. اگر $k \in z^+, A = \{(x,y) | x,y \in R, \lfloor x^۲ + y^۲ \rfloor = k\}$ آن‌گاه مساحت شکل حاصل کدام است؟

۱) $k\pi$ ۲) $\frac{k\pi}{۲}$

۳) $\frac{k\pi}{۴}$ ۴) π

حل: گزینهٔ (۴) $\lfloor x^۲ + y^۲ \rfloor = k \Rightarrow k \le x^۲ + y^۲ < k + ۱$

دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $R = \sqrt{k}$

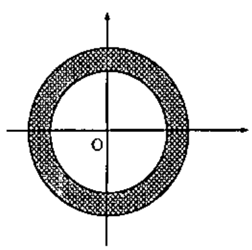
$x^۲ + y^۲ = k$

دایره‌ای است به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $R' = \sqrt{k + ۱}$

$x^۲ + y^۲ = k + ۱$

مساحت مورد نظر، سطح بین دو دایره است.

$$A = S_۱ - S_۲ = \pi R'^۲ - \pi R^۲ = (k + ۱)\pi - k\pi = \pi$$



سؤال ۱۵. دنبالهٔ $\left\{ \frac{\lfloor \sqrt{k} n \rfloor}{n} \right\}$ به کدام عدد زیر همگراست؟ $(k > ۰)$

۱) $\sqrt{k}$ ۲) $\sqrt{k - ۱}$

۳) $\lfloor \sqrt{k} \rfloor - ۱$ ۴) $\lfloor k \rfloor + ۱$

حل: گزینهٔ (۱) بنا به خاصیت ۳ داریم: $x - ۱ < \lfloor x \rfloor \le x$

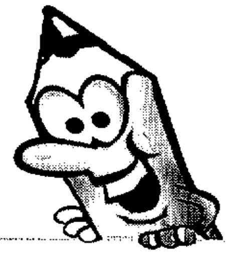
پس می‌توان نوشت: $\sqrt{k}n - ۱ < \lfloor \sqrt{k} n \rfloor \le \sqrt{k}n$

نامساوی را بر $n \in N$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{k}n}{n} - \frac{۱}{n} < \frac{\lfloor \sqrt{k} n \rfloor}{n} \le \frac{\sqrt{k}n}{n}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{k}n}{n} - \frac{۱}{n} \right) < \lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor \sqrt{k} n \rfloor}{n} \le \lim_{n \to \infty} \sqrt{k} \Rightarrow$$

$$\sqrt{k} < \lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor \sqrt{k} n \rfloor}{n} \le \sqrt{k} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\lfloor \sqrt{k} n \rfloor}{n} = \sqrt{k}$$



پاسخ تفریح اندیشه ۱ و ۲

پاسخ ۱ :

$D=\{(۱۲,۸),\ (۸,۱۲),\ (-۸,-۱۲),\ (-۱۲,-۸)\}$

$x^۲+y^۲=۲۰۸ \qquad (۱)$

$xy=۹۶ \qquad (۲)$

از (۲) :

$۲xy=۱۹۲ \qquad (۳)$

افزودن (۳) به (۱) می‌دهد :

$x^۲+y^۲+۲xy=۲۰۸+۱۹۲$

$(x+y)^۲=۴۰۰,\ \ x+y=\pm۲۰ \qquad (۴)$

با تفریق (۳) از (۱) داریم :

$x^۲+y^۲-۲xy=۲۰۸-۱۹۲$

$(x-y)^۲=۱۶,\ \ x-y=\pm۴ \qquad (۵)$

از (۴) و (۵) دستگاه‌های زیر را حل می‌کنیم :

الف) $\begin{cases}x+y=۲۰\\x-y=۴\end{cases}$ ب) $\begin{cases}x+y=۲۰\\x-y=-۴\end{cases}$

ج) $\begin{cases}x+y=-۲۰\\x-y=۴\end{cases}$ د) $\begin{cases}x+y=-۲۰\\x-y=-۴\end{cases}$

جواب دستگاه (الف) عبارت است از : $y=۸$ ، $x=۱۲$

جواب دستگاه (ب) عبارت است از : $y=۱۲$ ، $x=۸$

جواب دستگاه (ج) عبارت است از : $y=-۱۲$ ، $x=-۸$

جواب دستگاه (د) عبارت است از : $y=-۸$ ، $x=-۱۲$

پاسخ ۲ : ۳۵° ، ۵۵° و ۱۴۵°

حل : مجموع زاویه‌های درونی یک n ضلعی $۱۸۰(n-۲)$ درجه است . با قرار دادن $n=۸$ ، به‌دست می‌آوریم :

$۱۸۰^\circ(۶)=۱۰۸۰^\circ$

در این صورت ، مجموع زاویه‌های باقیمانده عبارت است از :

$۱۰۸۰^\circ-۸۴۵^\circ=۲۳۵^\circ$

توجه داریم که سه زاویهٔ باقیمانده ، شامل دو زاویهٔ مکمل و دو زاویهٔ متمم هستند . در نتیجه ، یکی از این زاویه‌ها در این جفت مشترک است . فرض می‌کنیم اندازهٔ این زاویه x° باشد . در نتیجه ، اندازه‌های دو زاویهٔ دیگر ، به ترتیب $(۱۸۰-x)^\circ$ و $(۹۰-x)^\circ$ است :

$x+(۱۸۰-x)+(۹۰-x)=۲۳۵$

$x=۳۵$

در نتیجه :

$(۱۸۰-x)=۱۴۵$

$(۹۰-x)=۵۵$

به این ترتیب ، سه زاویهٔ مورد نظر ۳۵° ، ۵۵° و ۱۴۵° هستند .



اثبات چند قضیهٔ هندسه از راه‌های تـازه و ساده



دکتر احمد شرف‌الدین

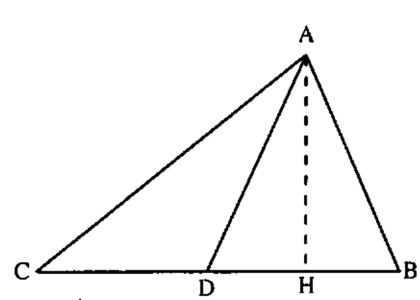
برای دانش‌آموزان سال سوم

در این مقاله، چند قضیهٔ هندسه را از راه‌های جدید و ساده اثبات می‌کنیم. ممکن است این اثبات‌ها تازگی داشته باشند.

۱. **قضیه**. در هر مثلث، سه میانه همرأسند.

برهان. برهان این قضیه را در چند مرحله انجام می‌دهیم:

الف) در هر مثلث، هر یک از میانه‌ها، آن مثلث را به دو مثلث هم مساحت بخش می‌کند. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و میانهٔ AD را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم مساحت‌های دو مثلث ABD و ACD برابرند.



از نقطهٔ A عمود AH را بر خط BC فرود می‌آوریم.

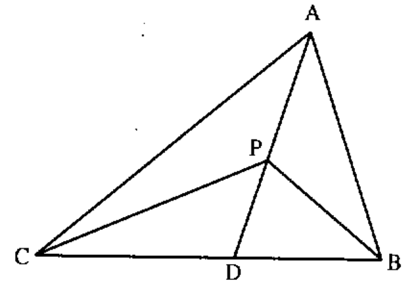
پاره‌خط AH، هم ارتفاع مثلث ABD است و هم ارتفاع مثلث ACD. پس می‌توان نوشت:

$$\text{ABD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{BD}\ .\ \overline{AH}$$

$$\text{ACD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{CD}\ .\ \overline{AH}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ بالا، با رعایت آن‌که $\overline{BD} = \overline{CD}$ است (زیرا خط AD میانه مثلث است)، نتیجه می‌شود که دو مثلث ABD و ACD هم مساحت هستند.

ب) مثلث ABC و میانهٔ AD از آن را در نظر می‌گیریم. روی میانهٔ AD نقطهٔ دلخواه P را اختیار می‌کنیم. ادعا می‌کنیم که دو مثلث APB و APC هم مساحت هستند.

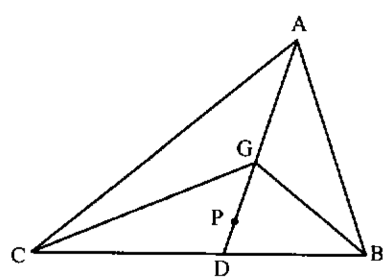


می گوییم چون خط AD میانهٔ مثلث ABC است، پس دو مثلث ABD و ACD هم مساحت هستند. همچنین چون خط PD میانهٔ مثلث PBC است، پس دو مثلث PBD و PCD هم مساحت هستند. نتیجه می شود که دو مثلث APB و ABC هم مساحت هستند.

پ) مثلث ABD و میانهٔ AD را در نظر می گیریم. ادعا می کنیم که روی میانهٔ AD نقطه‌ای چون G وجود دارد، به طوری که مساحت‌های سه مثلث GAB، GBC و GCA برابرند.

روی میانهٔ AD نقطه‌ای چون f نزدیک به نقطهٔ D در نظر می گیریم و آن نقطه را روی میانهٔ DA به سوی نقطهٔ A حرکت می‌دهیم تا به نقطه‌ای چون G برسیم؛ به طوری که مساحت مثلث GBD ثلث مساحت مثلث ABC باشد (هنگامی که نقطهٔ P از نزدیکی نقطهٔ D به سوی نقطهٔ A حرکت می کند، مساحت مثلث PBC از عددی نزدیک صفر زیاد می شود تا به مساحت مثلث ABC برسد. پس در لحظه‌ای مساحت مثلث PBC ثلث مساحت ABC می شود). در این لحظه، سه مثلث GAB، GBC و GCA دارای یک مساحت هستند.

پس روی میانهٔ AD یک نقطهٔ یکتا چون G وجود دارد؛ به طوری که مساحت‌های سه مثلث GAB، GBC و GCA برابرند.

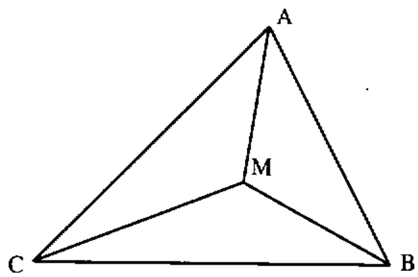


ت) از آنچه در (پ) شرح دادیم، نتیجه می‌شود که روی هریک از سه میانهٔ مثلث، نقطه‌ای وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی هم مساحت حاصل می‌شود.

ث) در داخل یک مثلث، فقط یک نقطه وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت هستند.

مثلث ABC را در نظر می گیریم و فرض می کنیم که نقطهٔ M، نقطه‌ای است از درون مثلث؛ به طوری که:

مساحت مثلث MCA = مساحت مثلث MBC = مساحت مثلث MAB



اگر نقطه‌ای چون P را داخل مثلث در نظر بگیریم که بر نقطهٔ M منطبق نباشد، این نقطهٔ P یا در درون یکی از سه مثلث‌های جزئی MAB، MBC و MCA قرار دارد و یا داخل یکی از سه پاره‌خط MA، MB و MC.

اگر نقطهٔ P داخل یکی از مثلث‌های جزئی مثلاً داخل مثلث MBC قرار گیرد، آن‌گاه مساحت مثلث PBC کم‌تر از مساحت مثلث MBC می‌شود و در نتیجه، مساحت مثلث PBC یک سوم مساحت مثلث ABC نمی‌شود. بنابراین مساحت‌های سه مثلث PAB، PBC و PCA برابر نمی‌شود.

اگر نقطهٔ P درون یکی از سه پاره‌خط MA، MB و MC، مثلاً درون پاره‌خط MA قرار گیرد، آن‌گاه مساحت مثلث PAB کمتر از مساحت مثلث MAB می‌شود و در نتیجه، مساحت مثلث PAB یک سوم مساحت مثلث ABC نمی‌شود. بنابراین مساحت‌های سه مثلث PAB، PAB و PCA برابر نمی‌شوند.

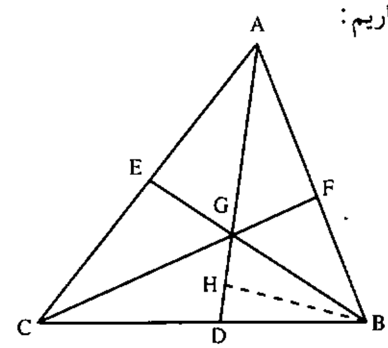
پس داخل یک مثلث، تنها یک نقطه وجود دارد که اگر از

آن نقطه به سه رأس وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت هستند.

ج) در بند (پ) ثابت کردیم که در درون مثلث یک نقطه وجود دارد که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی هم مساحت حاصل می‌شود. در بند (ث) ثابت کردیم که اگر چنین نقطه‌ای وجود داشته باشد، یکتاست.

چ) از آنچه داده شد، نتیجه می‌شود که سه میانهٔ یک مثلث، از یک نقطه می‌گذرند و اگر از این نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث جزئی حاصل، هم مساحت می‌شوند.

ح) در هر مثلث، سه میانهٔ AD، BE و CF در یک نقطهٔ G و چنین داریم:



$$\begin{cases} \overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{DA} \\ \overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{EB} \\ \overline{GF} = \frac{1}{3}\overline{FC} \end{cases}$$

کافی است رابطهٔ $\overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{DA}$ را ثابت کنیم. دو مثلث ABD و GBC را در نظر می‌گیریم. ثابت کردیم که مساحت مثلث GBC یک سوم مساحت مثلث ABD است. از نقطهٔ B عمود BH را بر خط AD فرود می‌آوریم. پاره‌خط BH هم ارتفاع مثلث CBD است و هم ارتفاع مثلث ABD.

ما چنین می‌نویسیم:

$$\text{ABD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{AD}\,.\,\overline{BH}$$

$$\text{GBC مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{GD}\,.\,\overline{BH}$$

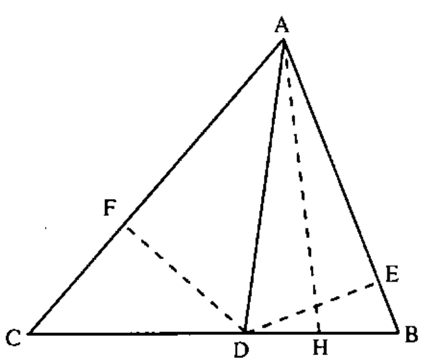
از مقایسه دو رابطهٔ اخیر، با رعایت آن که مساحت مثلث GBD یک سوم مساحت مثلث ABD است، نتیجه می‌شود که $\overline{GD} = \frac{1}{3}\overline{DA}$.

با همین شیوهٔ استدلال، نتیجه می‌شود که:
$\overline{GE} = \frac{1}{3}\overline{EB}$ و $\overline{GF} = \frac{1}{3}\overline{FC}$.

۲. **قضیه**. در هر مثلث، نیمساز هر زاویه، ضلع روبه‌روه را به نسبت دو ضلع دیگر بخش می‌کند.

برهان. در مثلث ABC، خط AD نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$



از نقطهٔ D پای نیمساز AD عمود DE را بر خط AB و عمود DF را بر خط AC فرود می‌آوریم.

چنین داریم:

$$\text{ABC مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{AB}\,.\,\overline{DE} \quad (1)$$

$$\text{ACD مساحت مثلث} = \frac{1}{2}\overline{AC}\,.\,\overline{DF} \quad (2)$$

از مقایسهٔ دو رابطه (۱) و (۲) رابطهٔ (۳) حاصل می‌شود:

$$(۳)\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\text{مساحت مثلث } ABD}{\text{مساحت مثلث } ABD}$$

زیرا $\overline{DE} = \overline{DF}$ (به دلیل آن‌که نقطهٔ D روی نیمساز AD است، لذا از دو ضلع زاویه BAC به یک فاصله است).

اکنون عمود AH را از نقطهٔ A بر خط BC فرود می‌آوریم. دو رابطهٔ زیر برقرار است:

$$(۴)\quad ADB \text{ مساحت مثلث } = \frac{1}{2}\overline{DB}\,.\,\overline{AH}$$

$$(۵)\quad ADC \text{ مساحت مثلث } = \frac{1}{2}\overline{DC}\,.\,\overline{AH}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۴) و (۵) رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

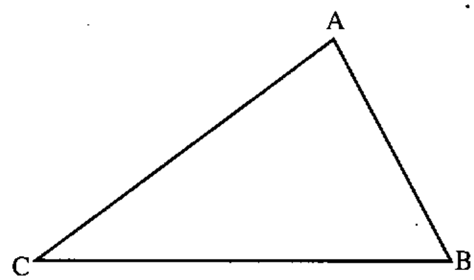
$$(۶)\quad \frac{\text{مساحت مثلث } ADB}{\text{مساحت مثلث } ADC} = \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$$

از مقایسهٔ دو رابطهٔ (۳) و (۶) رابطهٔ مطلوب زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

۳. قضیه. در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه.

برهان. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را در نظر می‌گیریم که در آن BC وتر است. می‌خواهیم ثابت کنیم رابطهٔ زیر برقرار است:



$$(۱)\quad \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

برای اثبات رابطهٔ (۱)، تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(۲)\quad y = \sin^2 x + \cos^2 x$$

مشتق تابع (۲) را حساب می‌کنیم؛ حاصل می‌شود:

$$(۳)\quad y' = 2\sin x.\cos x - 2\cos.\sin x$$

پس $y' \equiv 0$، یعنی برای تمام مقادیر متغیر x، مقدار مشتق تابع (۲) برابر صفر است؛ پس تابع $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ ثابت است. برای تعیین این مقدار ثابت، کافی است مقدار این تابع را برای یک مقدار دلخواه از متغیر x حساب کنیم. مثلاً مقدار تابع را برای $x = 0$ حساب می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$(۴)\quad \sin o = 0 \text{ و } \cos o = 1$$

اگر مقادیر (۴) را در عبارت $(\sin^2 x + \cos^2 x)$ ببریم، حاصل می‌شود:

$$(۵)\quad (\sin^2 o + \cos^2 o) = 1$$

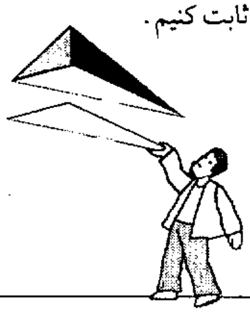
نتیجه می‌شود که عبارت $\sin^2 x + \cos^2 x$ برای تمام مقادیر x برابر (۱) است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC چنین داریم:

$$(۶)\quad \sin B = \frac{AC}{BC} \text{ و } \cos B = \frac{AB}{BC}$$

از رابطه‌های (۶) رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sin^2 B + \cos^2 B = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} + \frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{BC}^2}$$

و چون ثابت کردیم $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$، پس $\frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = 1$ یا $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.



تذکر: اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ به کمک قضیهٔ فیثاغورث ثابت می‌شود. آن را به کمک مشتق ثابت کردیم و سپس به کمک این اتّحاد، قضیهٔ فیثاغورث را ثابت کردیم.

قسمت اول

ماتریس های تبدیل



تبدیل در صفحه

اگر یک نقطه چون $A_1=(x_1,y_1)$ را با ماتریس $M_1=\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$ و دو نقطهٔ $A_1=(x_1,y_1)$ و $A_2=(x_2,y_2)$ را با ماتریس $M_2=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\y_1 & y_2\end{bmatrix}$ و طور کلی اگر، n نقطهٔ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ را با ماتریس $2\times n$ مانند $M_n=\begin{bmatrix}x_1\ x_2 \ldots x_n\\y_1\ y_2\ldots y_n\end{bmatrix}$ نمایش دهیم ماتریس M_n را ماتریس نقاط می‌نامیم.

حال اگر مختصات رئوس یک n ضلعی در صفحه مفروض باشد، می‌توان یک ماتریس $2\times n$ تشکیل داد. تبدیل این nضلعی به یک nضلعی دیگر در صفحه، بحث اصلی ما در این بخش است و سپس تعمیم آن یعنی تبدیل بی‌شمار نقطه (مانند مجموعه نقاط روی یک خط یا یک منحنی) به نقاطی دیگر در صفحه یعنی در $\mathbb{R}^2$، اگر بخواهیم این عمل تبدیل توسط ماتریس‌ها صورت پذیرد، به دنبال ماتریسی چون T_n هستیم که با ضرب شدن در یک ماتریس نقاط، ماتریسی نقاط حاصل کند. یعنی باید

$$T_n\times\begin{bmatrix}x_1\ x_2\ldots x_n\\y_1\ y_2\ldots y_n\end{bmatrix}_{2\times n}=\begin{bmatrix}x'_1\ x'_2\ldots x'_n\\y'_1\ y'_2\ldots y'_n\end{bmatrix}_{2\times n}$$

که با توجه به تعریف ضرب در مجموعهٔ ماتریس‌ها، ماتریس T_n فقط می‌تواند 2×2 باشد تا تبدیل در صفحه را برای ما به انجام برساند و هر نقطه در صفحه را به نقطه‌ای در همان صفحه تبدیل کند. درواقع، هر ماتریس 2×2 به عنوان یک عملگر می‌تواند، روی هر نقطه از صفحهٔ $\mathbb{R}^2$ تأثیر کند و نقطهٔ جدیدی را در $\mathbb{R}^2$ تولید کند.

به هر ماتریس 2×2 یک **ماتریس تبدیل در صفحه** گفته می‌شود و اگر ماتریس 2×2 چون A روی نقطه‌ای چون B اثر کند و حاصل B' باشد، B' را تبدیل یافتهٔ نقطهٔ B تحت تأثیر ماتریس A می‌نامیم.

به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم تبدیل یافتهٔ نقطهٔ $A\begin{vmatrix}2\\-1\end{vmatrix}$ را تحت تأثیر ماتریس $T=\begin{bmatrix}4 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}$ بیابیم، بنابراین T را از چپ در ماتریس نقطهٔ A ضرب کنیم:

... و کاربردهای آنها



● حمیدرضا امیری

ماتریس تبدیل کلّ (تبدیلات متوالی)

فرض کنیم نقطهٔ $A_۱$، تحت تأثیر ماتریس تبدیل $T_۱$ به نقطهٔ $A_۲$ تبدیل شده باشد و سپس ماتریس تبدیل $T_۲$ روی $A_۲$ اثر کرده و نقطهٔ $A_۳$ حاصل شود و... و درنهایت ماتریس T_n روی نقطهٔ A_n اثر کرده و نقطهٔ $A_{n+۱}$ به دست آید، می‌خواهیم ماتریسی بیابیم که کار این n تبدیل را یک‌جا برای ما انجام دهد و با تأثیر روی $A_۱$ مستقیماً به $A_{n+۱}$ برسیم. این ماتریس که به ماتریس تبدیل کلّ (در این n تبدیل متوالی) معروف است، از ضرب ماتریس‌های تبدیل به دست می‌آید که این ضرب از چپ به راست و از آخرین ماتریس تبدیل شروع و به اولین آنها ختم می‌شود:

$$T_۱(A_۱)=A_۲$$
$$T_۲(A_۲)=A_۳$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$T_{n-۱}(A_{n-۱})=A_n$$
$$T_n(A_n)=A_{n+۱}$$

$$T_n(A_n)=A_{n+۱} \Rightarrow T_n\Big(\underbrace{T_{n-۱}(A_{n-۱})}_{A_n}\Big)=A_{n+۱}$$

$$\Rightarrow T_n\left(T_{n-۱}\big(\underbrace{T_{n-۲}(A_{n-۲})}_{A_{n-۱}}\big)\right)=A_{n+۱}$$

$$T_n\Big(T_{n-۱}\big(\dots(T_۱(A_۱))\dots\big)\Big)=A_{n+۱}$$

$$\Rightarrow \underbrace{T_nT_{n-۱}\dots T_۱}_{T}(A_۱)=A_{n+۱} \Rightarrow T(A_۱)=A_{n+۱}$$

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

مثال: مثلث ABC که $A\Big|_{۳}^{۲}$ و $B\Big|_{۲}^{-۱}$ و $C\Big|_{۱}^{۱}$ مفروض است اگر این مثلث تحت تأثیر ماتریس تبدیل $T=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ به مثلث $A'B'C'$ تبدیل شود محیط مثلث $A'B'C'$ را بیابید.

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & -۲ & ۲ \\ ۶ & ۴ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow A'\Big|_{۶}^{۴},\ B'\Big|_{۴}^{-۲},\ C'\Big|_{۲}^{۲}$$

$$\left.\begin{aligned} A'B' &= \sqrt{۳۶+۴}=\sqrt{۴۰} \\ A'C' &= \sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰} \\ B'C' &= \sqrt{۱۶+۴}=\sqrt{۲۰} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P=\sqrt{۴۰}+۲\sqrt{۲۰}$$

(T همان ماتریس تبدیل کُل است)

مثال: نقطهٔ $A\begin{vmatrix}1\\-2\end{vmatrix}$ را به ترتیب و متوالیاً تحت تأثیر ماتریس‌های تبدیل $T_1=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}$ و $T_2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ و $T_3=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$ قرار داده‌ایم تا نقطهٔ B حاصل شود؛ ماتریس تبدیل کلّ را برای این سه تبدیل متوالی به دست آورده و توسط آن مختصات B را محاسبه کنید.

$$T=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-1\\0&-1\end{bmatrix}$$

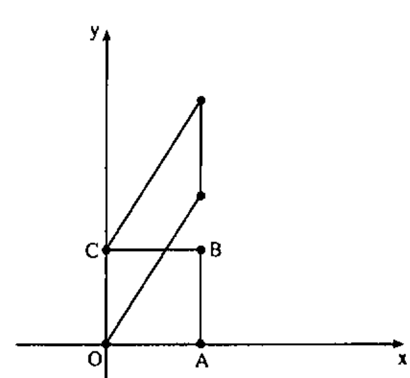
$$T(A)=B\Rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}=B$$

تذکر: مربعی که طول هر ضلع آن برابر با یک واحد باشد و $O\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ و $A\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ مختصات رئوس آن باشند **مربع واحد** نامیده می‌شود و ماتریس نقاط این مربع به صورت زیر است:

ماتریس نقاط مربع واحد $=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$

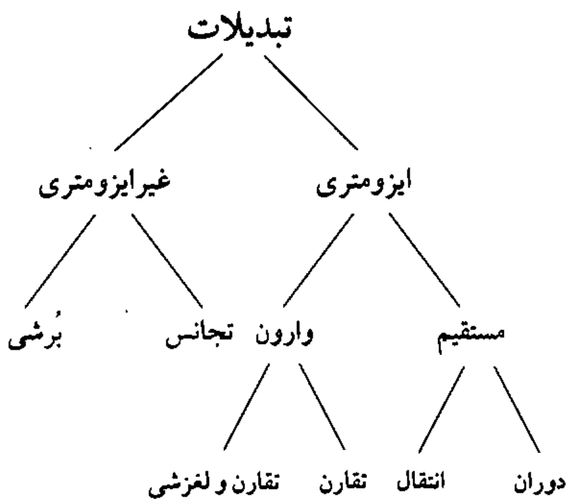
مثال: تبدیل یافتهٔ مربع واحد تحت تأثیر ماتریسِ تبدیل $\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$ را تعیین کرده و هر دو را در یک دستگاه رسم کنید.

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&2&3&1\end{bmatrix}$$



انواع تبدیل در صفحه

به طور کلّی تبدیلات مهّم را می‌توان طبق نمودار زیر دسته‌بندی کرد:



که تبدیلات **ایزومتری** به تبدیلاتی گفته می‌شود که با تأثیر آن‌ها، فاصلهٔ بین هر دو نقطه ثابت می‌ماند و یا به عبارت دیگر شکل تغییر نمی‌کند.

تبدیلات ماتریسی مهّم

۱ـ **ماتریس تجانس:** نقطهٔ $A'\begin{vmatrix}kx\\ky\end{vmatrix}$ را مجانس نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix}$ با نسبت تجانس k می‌نامیم و ماتریسی که می‌تواند A را به A' تبدیل کند، عبارت است از $T=\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}$ که به آن ماتریس تجانس می‌گوییم. اگر شکلی تحت تأثیر ماتریس تجانس تصویر شود (تبدیل شود) برحسب مقادیر مختلف k داریم:

الف) اگر $k=1$ باشد، ماتریس همان تبدیلِ همانی است و تصویر شکلی بر خودش قابل انطباق است.

ب) اگر $k>1$ باشد، شکل در جهت مثبت بزرگ‌تر می‌شود.

ج) اگر $0<k<1$ باشد، شکل در جهت مثبت کوچک می‌شود.

د) اگر $k = -1$ باشد، تبدیل را تقارن مرکزی نامیده و در واقع شکل نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌شود و تصویر بر خودش قابل انطباق است.

هـ) اگر $k < -1$ باشد، شکل حاصل در جهت منفی بزرگ می‌شود.

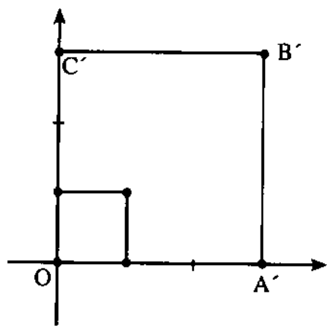
و) اگر $-1 < k < 0$ باشد، شکل حاصل در جهت منفی کوچک می‌شود.

تذکر مهّم: هر شکل تحت تأثیر ماتریس تجانس، مساحتش k^2 برابر می‌شود بنابراین تجانس یک تبدیل غیرایزومتری است، البته به شرطی که $k \neq \pm 1$ باشد.

مثال: مربع واحد تحت تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ به چه شکلی تبدیل می‌شود؟

$$\begin{matrix} & & & 0 \;\; A' \;\; B' \;\; C' \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

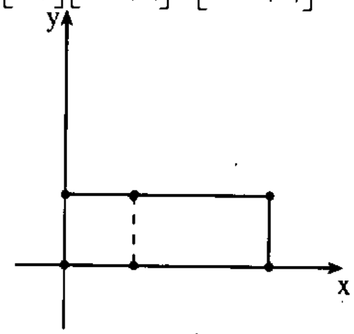


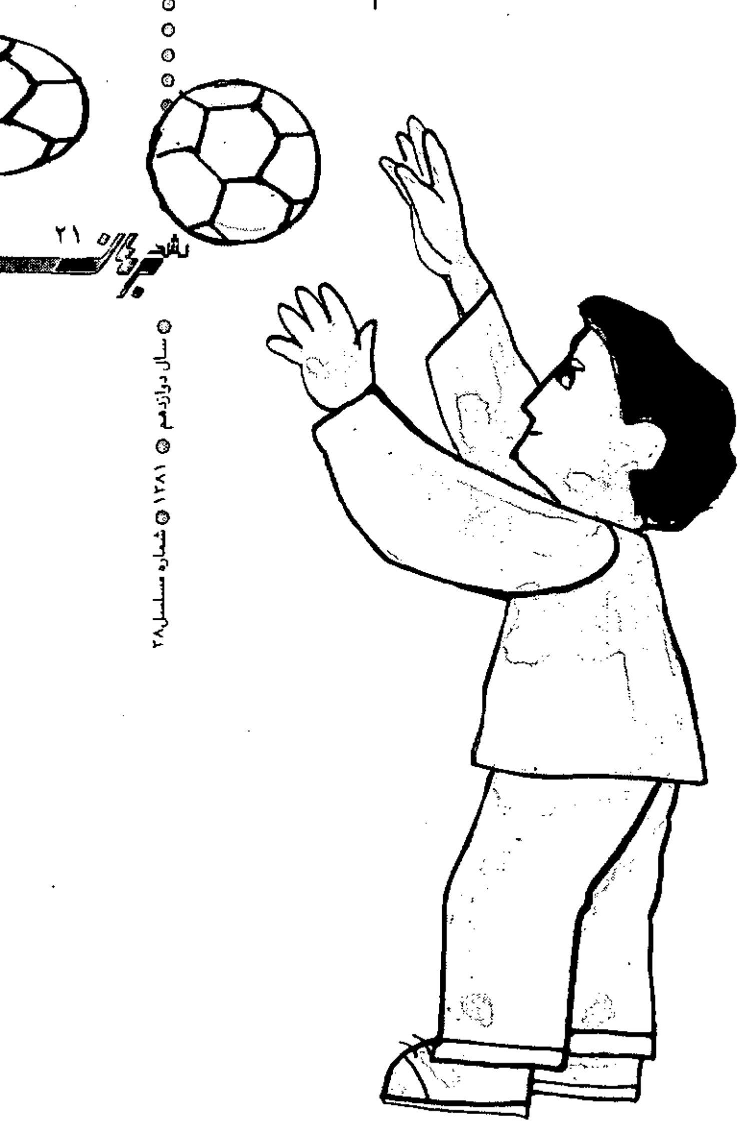
همان طور که مشاهده می‌کنید توسط ماتریس تجانس، شکل حاصل همواره با شکل اولیه متشابه هستند یعنی همهٔ ابعاد شکل به یک نسبت بزرگ یا کوچک شده و زاویه‌ها حفظ می‌شوند.

۲ـ ماتریس‌های کشش: ماتریس‌های $T_1 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ به ترتیب ماتریس‌های کشش در امتداد محور xها و کشش در امتداد محور yها نامیده می‌شوند.

مثال: شکل حاصل از تبدیل مربع واحد تحت تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را رسم کنید.

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$





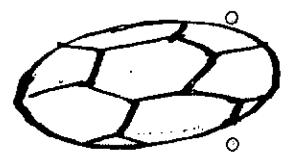
همانطور که مشاهده می‌کنید مربع واحد در امتداد محور xها توسط ماتریس کشش در امتداد محور xها کشیده شده و به یک مستطیل تبدیل یافته است.

سؤال: منحنی به معادلهٔ $(x-1)^2 + y^2 = 4$ مفروض است، شکل حاصل از تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ روی این منحنی کدام است؟

۱ـ دایره　　　۲ـ بیضی قائم

۳ـ بیضی افقی　　　۴ـ هذلولی قائم

حل: منحنی داده شده یک دایره به مرکز $w\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ و به شعاع $r = 2$ است که اگر دایره در امتداد





محور yها کشیده شود (توسط ماتریس T این کار انجام می‌شود) به یک بیضی قائم تبدیل می‌شود پس گزینهٔ (۲) صحیح است.

تذکر مهم: هر شکل تحت تأثیر ماتریس کشش، مساحتش $|k|$ برابر می‌شود پس تبدیل های کششی در امتداد محورهای x و y از نوع غیرایزومتری هستند باز هم به شرط آن که $k \neq \pm 1$ باشد.

نکته: در حالت کلّی اگر T یک ماتریس تبدیل باشد و دترمینان ماتریس T برابر با α باشد یعنی $|T| = \alpha$ در این صورت مساحت شکل تبدیل یافته تحت تأثیر T، $|\alpha|$ برابر مساحت اولیه است.

درواقع اگر فرض کنیم $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس تبدیل دلخواهی در صفحه باشد و روی مربع واحد تأثیر کند، می‌بایست مساحت شکل حاصل $|ad - bc| \times 1$ باشد.

$$\begin{matrix} & A & B & C & D & & A' & B' & C' & D' \end{matrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & a+b & b \\ 0 & c & c+d & d \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه رابطه‌های $x_{A'} + x_{C'} = x_{B'} + x_{D'}$ و $y_{A'} + y_{C'} = y_{B'} + y_{D'}$ برقرارند نتیجه می‌شود که چهارضلعی حاصل یک متوازی‌الاضلاع است که برای محاسبهٔ مساحت آن کافی است. نقاط B' و D' را در فضای $\mathbb{R}^3$ و روی صفحه xy درنظر بگیریم که در این صورت دو بردار $\vec{oD}' = (b,d,o)$ و $\vec{oB}' = (a,c,o)$ حاصل می‌شود که متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط این دو بردار همسان متوازی‌الاضلاع موردنظر بوده که مساحت آن از رابطهٔ $\left\| \vec{oB}' \times \vec{oD}' \right\|$ به دست می‌آید (خط های عمودی بیرونی نشانهٔ قدرمطلق است)

$$S = \left\| (a,c,o) \times (b,d,o) \right\| = \left\| (o,o,ad-bc) \right\| = \sqrt{(ad-bc)^2}$$
$$\Rightarrow S = |ad - bc|$$

نکته: در حالت کلّی $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ و $C = (x_3, y_3)$ سه رأس یک مثلث باشند مساحت مثلث از رابطهٔ $S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} \right|$ به دست می‌آید و مساحت متوازی‌الاضلاعی که سه نقطه فوق سه رأس آن باشند، دوبرابر مساحت فوق‌الذکر است. (خط های عمودی بیرونی نشانهٔ قدرمطلق است.)

با توجه به نکته قبل مساحت متوازی‌الاضلاع حاصل که نقاط $A' = (0,0)$ و $B' = (a,c)$ و $D' = (b,d)$ سه رأس آن هستند برابر است با:

$$S = \left| \begin{vmatrix} a-0 & c-0 \\ b-0 & d-0 \end{vmatrix} \right| \Rightarrow S = |ad - bc|$$

تذکر: اگر T ماتریس تبدیل و دترمینان T یعنی $|T|$ برابر صفر باشد طبق نکتهٔ ذکر شده مساحت شکل حاصل صفر برابر مساحت شکل قبل بوده، یعنی مساحت شکل حاصل صفر می‌باشد درواقع نقاط تبدیل یافته همگی بر یک راستا واقعند و مساحتی تشکیل نمی‌شود.



قسمت اول

ترجمه غلامرضا یاسی‌پور

نظریهٔ تکامل از ۱۸۵۹ به بعد، یعنی زمانی که **چارلز داروین**[1] آن را در کتابش «دربارهٔ اصل انواع با استفاده از انتخاب طبیعی»[2] مطرح کرد، یکی از منابع دائمی جر و بحث و مناقشه بوده است. این وضعیت جای تعجب ندارد، زیرا نظریهٔ مزبور که به وقایعی بسیار دور اشاره دارد، جایگاه انسان‌ها را نه تنها به عنوان قله رفیع موجودات، بلکه به عنوان غایت آفرینش نیز زیر سؤال می‌برد و با بعضی از مذاهب این سیاره به بحث می‌نشیند.

بسیاری از فرقه‌ها، با در نظر گرفتن این نظریه به عنوان ساختاری که توسط خداوند برای خلقت انسان به کار رفته، با او به بحث پرداختند. اما دیگران ـ از قبیل «عالمان آفرینش»[3] در ایالات متحده ـ به سیاسی‌کاری پرداختند و نظریه‌های خود را به جای نظریهٔ داروین تبلیغ کردند.

در دههٔ ۱۹۸۰، ایالات «آرکانزاس» و «لوئیزیانا» قانونی گذراندند که خواستار برخورد برابر با تکامل و علم آفرینش در مدرسه‌ها بود، گرچه مورد اخیر به اندازهٔ نظریهٔ اول هدف تحقیق و تفحص علمی قرار نگرفته بود. قانون مزبور، پس از اعتراضاتی قابل ملاحظه، توسط دادگاه عالی، به عنوان ناقض جدایی قانونی کلیسا و دولت رد شد.

درک این موضوع مهم است که تکامل داروین تنها یک نظریهٔ علمی، و نه یک حقیقت قطعی است. اما این مطلب نیز دارای اهمیت است که نظریه‌های علمی عموماً سرافرازتر از حقایق ادعایی (بعضی) فیلسوفان از امتحان بیرون می‌آیند.

تحقیقات مربوط به تکامل همچنان ادامه دارد. اما همان طور که

به زودی ملاحظه خواهیم کرد، بسیاری از مسائل آن همچنان حل نشده باقی مانده‌اند. ایدهٔ اصلی داروین یعنی این که ترکیب جهش و دگرگونی تصادفی و رقابت بین تولید مثل افراد به گونه‌ای اجتناب ناپذیر به فرایندی تکاملی و تشکیل انواع مرتب پیچیده‌تر می انجامد سادگی با ظرافتی دارد. آن قدر ساده است که بعضی اشخاص آن را توضیح واضحات می‌دانند (که به یک معنی هست) و بنابراین توضیح آن را ناممکن می‌دانند (که در واقع چنین نیست).

اما دانش تنها با پذیرفتن ایده‌ها، فقط به این دلیل که ظریفند پیشرفت نمی‌کند؛ بلکه پیشرفتش از این جاست که آن‌ها را مورد دقیق‌ترین آزمون‌های ممکن قرار می‌دهد و پیش‌بینی‌هایش را با مشاهده‌های عملی مقایسه می‌کند. البته این کار با تکامل آن قدرها هم آسان نیست، زیرا پیش‌بینی‌های مورد بحث به گذشته‌های دور ارجاع دارند و امتحان آن‌ها به مقدار نسبتاً زیادی از طریق مدارک فسیلی‌ای انجام می‌گیرد که تقریباً از بدترین انواع پایگاه‌های اطلاعاتی به شمار می‌روند که یک محقق مایل به کار کردن با آن‌هاست؛ یعنی، اسنادی غیر قابل اطمینان، صعب‌التفسیر، پر از رخنه، و مستعد تجدیدنظر و اصلاح در هر لحظه. این موضوع البته اوضاع را مضحک می‌سازد و آتش جر و بحث را برمی‌افروزد.



یکی از جروبحث‌هایی که اخیراً گسترش یافته ـ و تنها مورد است، زیرا موارد دیگر همه آمیخته با یکدیگرند ـ جر و بحث بین دو گروهی است که می‌توان آن‌ها را آداب گرایان[4] و تدرّج گرایان[5] نامید. تدرج گرایان که (با اندکی تساهل) می‌توان **ریچارد داوکینز**[6] را سخنگوی آنان دانست، بر این باورند که تکامل فرایندی پیوسته است و به صورت رشتهٔ طویلی از مراحلی بسیار ظریف رخ می‌دهد.

آداب گرایان، که معروف‌ترین آن‌ها **استیفن جی گولد**[7] است، بر این ادعا هستند که تکامل یک نوع جدید، تنها در انفجارهای سریع انجام می‌گیرد.

تمام ما شجره‌نامه‌های دقیق کتاب‌های درسی را دیده‌ایم (شکل ۱) که شاخه‌های دوشعبه‌ای آن‌ها شکوهمندانه به سوی آسمان سرکشیده تا در اوج، به بشر خردمند برسند؛ موجود خردمندی که پیروزمندانه بر بالای آن، مانند ستاره‌ای بر درخت کریسمس قرار گرفته است.

شجره‌های بازسازی شدهٔ مزبور بسیار مرتبند، در حالی که اسناد فسیلی مبتنی بر آن‌ها بسی سست و نامنظمند.

تدرج گرایان این گسستگی‌های ظاهری را به صورت رخنه‌هایی در ثبت فسیلی مطرح می‌کنند؛ رخنه‌هایی که شاید در کشفیات آینده از فسیل‌های جدید پر شوند، یا تقدیرشان چنان باشد که به علت طریق درهم و برهمی که صخره‌ها مطابق آن بنا شده‌اند، همچنان پر نشده باقی بمانند. در این مورد باید گفت که نظر مزبور نظری نامعقول نیست.

اما از طرف دیگر، آداب گرایان بر این اعتقادند که گسستگی‌های موجود در ثبت فسیل‌ها حقیقی‌اند،

و در واقع تنها منبع انواع جدید به شمار می‌روند.

اینک حق با چه کسی است؟ آداب گرایان، یا تدرج گرایان یا هیچیک؟

***

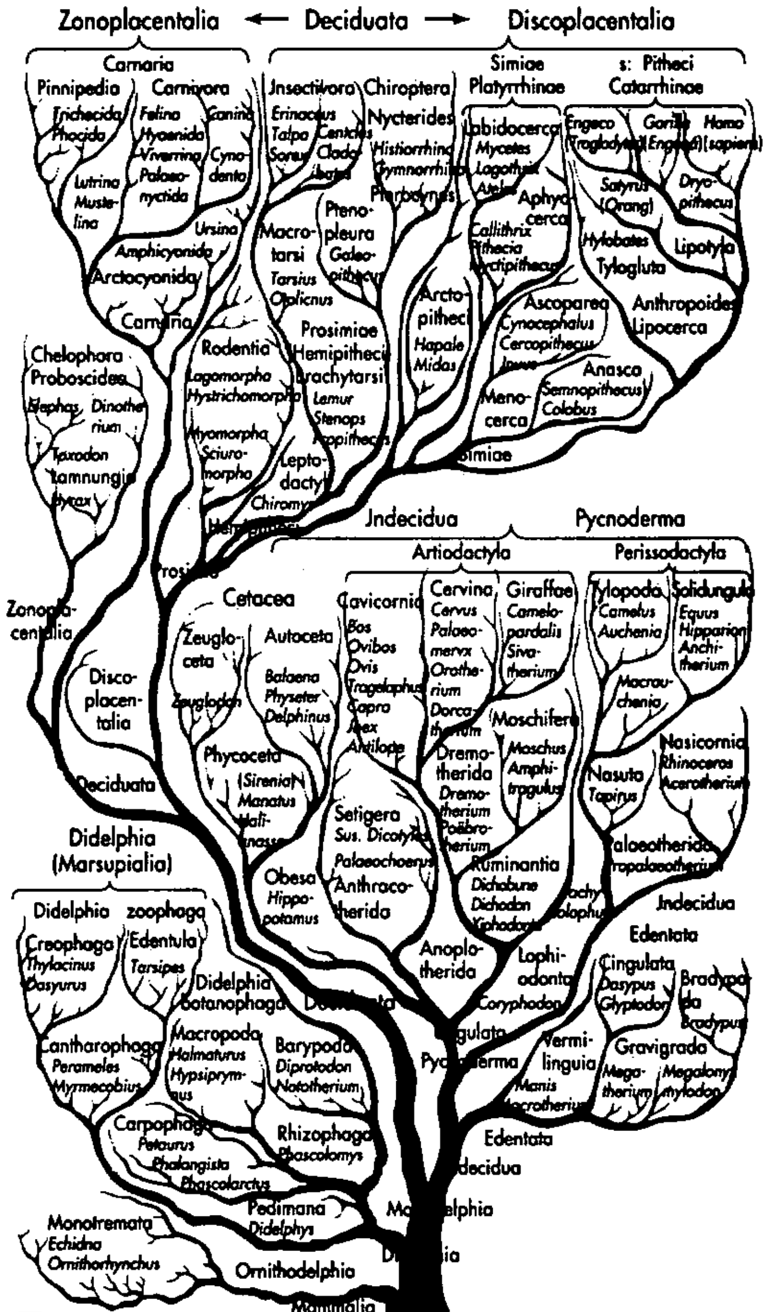
یک روز عصر روی کاناپه نشسته بودم و در حالی که گربهٔ خانه، کنارم بود، با تنبلی به مسألهٔ تغییرات تدریجی و ناگهانی تکامل فکر می‌کردم که زنگ در خانه به صدا درآمد. پیام‌آوری با یک بسته بود. بسته با کاغذ قهوه‌ای ساده‌ای پوشیده شده بود، با برچسبی آبی با این نوشته: «شرکت ابزارهای بوم ـ ریاضی» و برچسب قرمزی با کلمهٔ «شکستنی!»

حیرت‌آور بود. چرا که من نه هیچگاه دربارهٔ شرکت ابزارهای بوم ـ ریاضی چیزی شنیده بودم، نه اصلاً چیزی از آن خواسته بودم. چون نمی‌شد حدس زد که درون بسته چیست، کاغذ روی آن را کناری زدم و جعبه‌ای مقوایی را مشاهده کردم که روی آن نوشته شده بود: «ماشین تکامل: نمونهٔ اصلی.»

تعجبم زیادتر شد. در جعبه را باز کردم و سربند عجیب و غریبی پیدا کردم که چیزی بین استریوی شخصی و عینک بود. جعبهٔ کنترل پر از عقربه، دکمه، پیچ، دسته، و چراغ‌های چشمک‌زن بود. بله، درست شبیه یک استریوی شخصی به نظر می‌رسید.

زیر آن نیز یک کتاب ضخیم با جلد پلاستیکی قرار داشت.

سربند را برداشتم و روی سرم گذاشتم. حس غریبی از گسسته شدن از اطراف به من دست داد. لحظه‌ای اتاق دور سرم گردید؛ آن وقت متمرکز شد، و تمام اشیا تفاوت کردند. به جای اتاق سطحی صاف قرار داشت. در واقع سطح نبود؛



شکل۱. شجره نامه تکامل،بابشریت در قله آن. این شجره نامه از منبع زیر است:
one from Generelle Morphologie by E.Haeckel, 1866

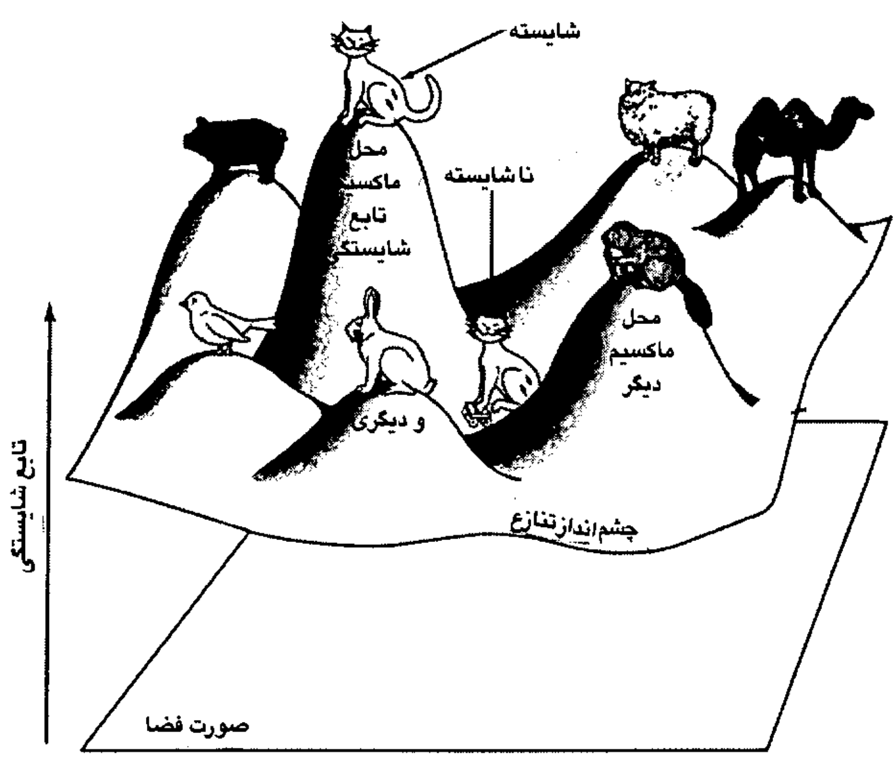
هرچه بیش‌تر تمرکز می‌کردم، بعدهای بیش‌تری می‌دیدم. صدها، هزارها، میلیون‌ها... اما من همچنان آن را به صورت سطح تصور می‌کردم.

اتاق پر از غریب‌ترین موجوداتی بود که تا آن زمان دیده بودم؛ موجوداتی که از سر و کول هم بالا می‌رفتند. به جایی نگاه کردم که قرار بود گربه‌ام باشد. در واقع گربه‌ام را دیدم، اما یک کپه موی قهوه‌ای خواب‌آلود. اما پهلوی او گربه‌ای دیگر بود، و یکی دیگر، و یکی دیگر. میلیون‌ها گربه، چسبیده به هم، چسبیده‌تر از ماهی‌های هر قوطی ساردینی... و با نظر دقیق‌تر، همه متفاوت از هم. بعضی خط‌دار بودند، بعضی سیاه و سفید؛ بعضی چاق، بعضی لاغر.

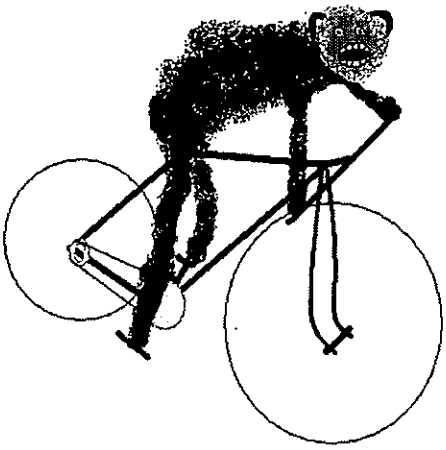
چون به دورتر نگاه کردم، گربه‌هایی را دیدم با دو دم، پنج پا، سه چشم؛ گربه‌ای سبز که به جای پا چرخ داشت، گربه‌ای شفاف؛ گربه‌ای کروی که روی زمین به دنبال موشی به همان اندازه کروی قل می‌خورد...

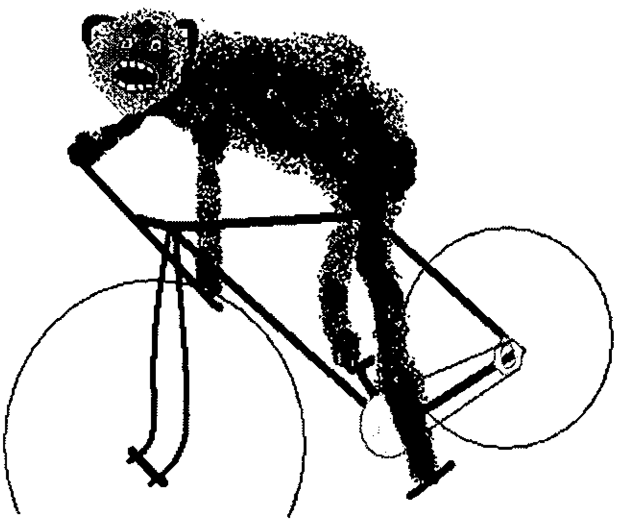
چه‌طور آن‌ها در فضایی به این کوچکی جا گرفته بودند!؟ شگفت‌زده، کتاب را به تندی باز کردم. کتاب تقریباً مثل تمام کتاب‌های دستی بود؛ یعنی، دیرفهم. با مقداری اِشکال، مدخلی را پیدا کردم که مربوط به نظر می‌رسید:

صورتْ‌فضا: شیوهٔ غیابی ماشین تکامل، ارائهٔ نمایی ایستا از صورتْ فضای حقیقی-زمان[8] است. هر نقطه در این پیوستار چند بعدی[9]، متناظر با صورت یک موجود درندهٔ بالقوه است. ماشین تکامل نه تنها مشاهدهٔ مستقیم فضا، بلکه ملاحظهٔ موجودات وابسته با هریک از نقاط آن را ممکن می‌کند. برای انتخاب صلاحیت بقا، دکمه‌ای را فشار دهید که بر واحد کنترل، با برچسب **تابع شایستگی**[10] مشخص شده است.



شکل ۲. چشم انداز تنازع. صورت هایی که مواضع ماکسیمم را اشغال کرده اند، شایسته رقابت و بقا هستند.صورت هایی که در دره ها قرار دارند،شایسته و نابود شدنی اند.





دکمه را پیدا کردم و فشار دادم. سطح مزبور شروع کرد به باد کردن و تبدیل شدن به چشم‌اندازی گرد و تپه‌ای (شکل ۲). گربه‌ام جلوی دماغم به حرکت درآمد و روی یک برآمدگی کوچک قرار گرفت. در فاصله‌ای دورتر، سگ‌ها بودند و یک گاو، یک زرافه، و یک کرم خاکی؛ هر یک نشسته بر تپهٔ خودش. موجودات عجیب و غریب دیگری هم بودند: یکی از آن‌ها را فیلوفون نامیدم؛ زیرا شبیه فیلی با تنه‌ای تلفن شکل بود. نیز لاک بز (بزی با لاکی حلزونی بر پشتش) و خفاشی جیرجیرکی (طبیعتاً، دورگه‌ای بین جیر جیرک و خفاش) وجود داشتند. گور میمون و قوگارو، و سوس باغه، و باله خرچنگ نیز حاضر بودند.

به جست‌وجوی گربهٔ پاچرخی برآمدم، اما موفق به دیدنش نشدم. خوب که نگاه کردم، او را در گوشه‌ای در دره‌ای عمیق پیدا کردم که در آن‌جا در وضعیت کمین، توسط گربه‌هایی از نوع خودش محاصره شده بود.

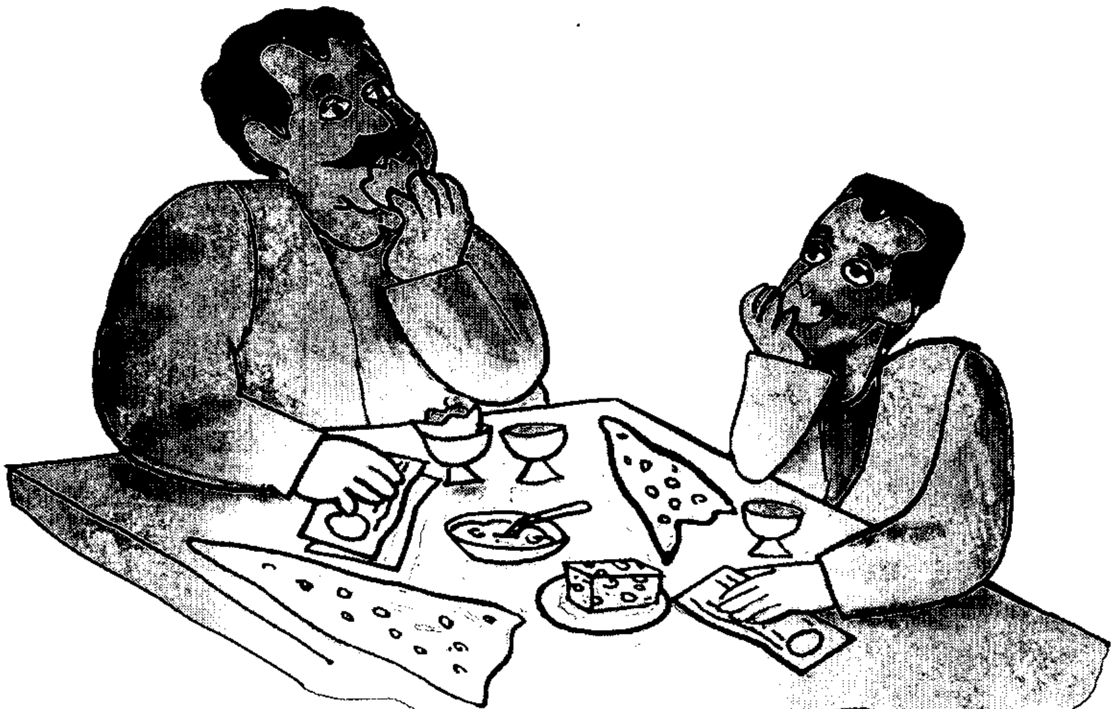
در واقع، به زودی متوجه شدم که به نظر می‌رسد که آشناترین موجودات تماماً قله‌های تپه‌ها را اشغال کرده‌اند، و حیوانات عجیب و غریب‌تر در ته دره‌ها سکنا گزیده‌اند.

موجودات چشم‌انداز، همچنان که چشمم شیب از ته دره‌ها تا نوک تپه‌ها را می‌پیمود، به تدریج آشناتر می‌شدند: در قلهٔ تپه‌ها، منحصراً حیواناتی ساکن بودند که توانستم آن‌ها را به صورت ساکنان سیارهٔ خودمان شناسایی کنم. اما چنین به نظر می‌رسید که بعضی از پشته‌ها هنوز اشغال نشده، مانده‌اند.

هرچه دست نوشته را بیش‌تر ورق می‌زدم، موضوع روشن‌تر می‌شد.

زیرنویس

1. Charles Darwin
2. On the Origin of Species by Means of Natural Selection
3. creation Scientists
4. punctualists
5. gradualists
6. Richard Dawkins
7. Stephen Jay Gould
8. real Time form space
9. multidimensional continuum
10. Fitness Function



مدل سازی مقدماتی ریاضی

تابع و مدل های ریاضی

برای دانش آموزان سال های دوم و سوم

ترجمه: میرشهرام صدر

ورود به مطلب

نمرهٔ درس تاریخ شما، تابعی از مدت زمانی است که مطالعه کرده‌اید. یا درآمد شما می‌تواند تابعی از سطح تحصیلاتتان باشد. درهریک از حالت های ذکر شده، متوجه می‌شویم که یک وابستگی بین کمیت اولی و دومی وجود دارد. در این مقاله، ابتدا با مفهوم ریاضی یک تابع آشنا می‌شویم. سپس تابع را به عنوان یک مدل ریاضی بین متغیرهای زندگی روزمره (دنیای واقعی) بررسی خواهیم کرد.

تابع ها و مدل های ریاضی

در یک رستوران، صبحانه شامل تخم مرغ، نان، مربا و پنیر است و قیمت صبحانه براساس تعداد تخم مرغ هایی که مشتری سفارش می دهد، محاسبه می شود. در زیر جدول قیمت گذاری صبحانه در این رستوران آمده است:

قیمت صبحانه	تعداد تخم مرغ ها
۱۲۴۰۰ ریال	۱
۱۶۰۰۰ ریال	۲
۱۸۸۰۰ ریال	۳
۲۱۲۰۰ ریال	۴

جدول (۱)

بیش‌تر کاربردهای ریاضی مستلزم استفاده از عددها و متغیرهاست. به طوری که آن‌ها کمیت‌های دنیای واقعی را بیان می‌کنند. با توجه به جدول بالا، فرض کنید n، تعداد تخم‌مرغ‌های سفارش داده شده و p قیمت صبحانه باشد. در این صورت، جدول (۱) رابطه‌ای را بین n و p بیان می‌کند. این رابطه، نمونه‌ای از توابع ریاضی است. زیرا برای هر n (تعداد تخم‌مرغ‌های سفارش داده شده) یک قیمت متناظر p وجود دارد که برای صرف صبحانه پرداخت می‌شود. در این جا، مفهوم کلیدی این است که هر تعداد تخم‌مرغ مشخص، فقط یک قیمت دارد. درحقیقت، فهرست (منوی) غذایی، قاعده‌ای برای مشخص کردن قیمت صبحانه در اختیار ما قرار می‌دهد. اگر شما تعداد تخم‌مرغ‌های صبحانهٔ خود را بدانید، در این صورت قیمت صبحانهٔ خود را می‌دانید. اگر شما و دوستتان هرکدام یک تخم‌مرغ سفارش دهید، در این صورت هر دوی شما توقع دارید که مبلغ یکسانی را پرداخت کنید. به راستی اگر به یکی از شما بگویند، برای صرف صبحانه بیش از ۱۲۴۰۰ ریال پرداخت کنید، به طور قطع اعتراض خواهید کرد.

تعریف تابع

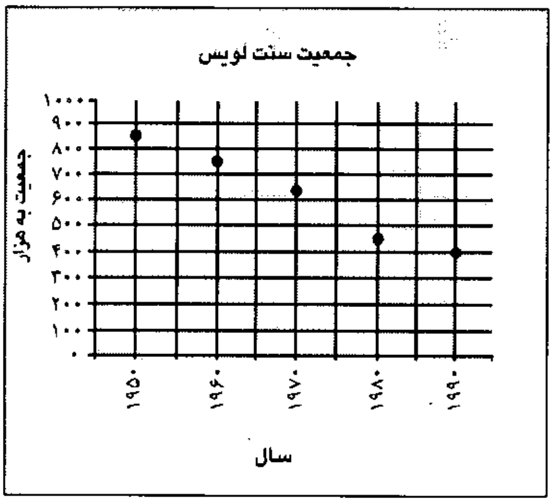
تابع f، قاعده‌ای است که روی مجموعهٔ D تعریف می‌شود؛ به طوری که به هر عدد $x \in D$، یک عدد مشخص $f(x)$ را نسبت می‌دهد.

عدد $f(x)$ که خوانده می‌شود: «اف x» ـ مقدار تابع f به ازای عدد x نامیده می‌شود. کلمهٔ «قاعده» که در تعریف تابع به آن اشاره شد، می‌تواند با یک جدول، یک فرمول یا نمودار یا حتی با یک جمله مشخص شود. به طوری که با استفاده از آن، مقدار $f(x)$ به ازای عدد x داده شده مشخص می‌شود. معمولاً از x برای نشان دادن متغیر و از f برای نشان دادن تابع استفاده می‌کنیم. همچنین می‌توانیم، از حرف دیگری که دوست داریم یا در یک وضعیت خاص مناسب‌تر است، استفاده کنیم.

مثال ۱. در تابع رستوران که ذکر کردیم، مجموعهٔ D از همهٔ مقادیر ممکن برای تعداد تخم‌مرغ‌ها تشکیل شده است؛ مجموعهٔ اعداد: $\{۱،۲،۳،۴\}$. در این جا آن‌ها را با n (ترجیحاً با x) مشخص می‌کنیم. با معلوم بودن عدد n در ستون اول جدول، به راحتی قیمت متناظر $p(n)$ را از ستون دوم جدول پیدا می‌کنیم. برای مثال: $p(۳) = ۱۸۸۰۰$؛ زیرا ۱۸۸۰۰ ریال قیمت صبحانه با ۳ تخم‌مرغ است.

مثال ۲. شکل ۱ جمعیت شهر سنت‌لویس را در سرشماری‌های بین سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۹۰ نشان می‌دهد. این نمودار (به طور تقریبی) تابع p را توصیف می‌کند که برای هریک از سال‌های ۱۹۵۰، ۱۹۶۰، ۱۹۷۰، ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ تعریف شده است. زیرا برای هریک از این سال‌ها، فقط یک جمعیت وجود دارد که با یک نقطه در نمودار مشخص شده است. برای مثال، واضح است که در سال ۱۹۹۰ جمعیت سنت‌لویس تقریباً ۴۰۰ هزار نفر بود. بنابراین داریم:

$$P(۱۹۹۰) = ۴۰۰ \text{ (هزارنفر)}$$



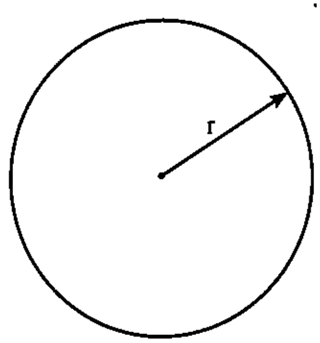
شکل ۱

مثال ۳. اگر در هرسال، سپردهٔ حساب پس‌انداز شما ۴٪ سود داشته باشد، منفعت I (سود سالیانه) از روی مبلغ A که در حساب پس‌انداز شما موجود است، به کمک فرمول $I = ۰/۰۴A$ محاسبه می‌شود. این فرمول مشخص

می‌کند که I تابعی از A است. بنابراین اگر مبلغ حساب شما ۵۰۰۰۰ ریال باشد، در این صورت افزایش حساب شما پس از یک سال $۲۰۰۰ = (۵۰۰۰۰)(۰/۰۴)$ ریال خواهد بود.

مثال‌های ۱ تا ۳ نشان می‌دهند که توابع، رابطه‌هایی را بین متغیرهای زندگی روزمره (زندگی واقعی) نشان می‌دهند. ریاضیات، راه‌حلی برای تجزیه و تحلیل وضعیت‌های گوناگون زندگی روزمره در اختیار ما قرار می‌دهد که اغلب به شناسایی رابطه‌های بین متغیرهایی منجر می‌شود که وضعیت‌ها را توصیف می‌کنند. در زیر مثال‌هایی از توابعی آمده‌اند که با یک فرمول مشخص می‌شوند و ممکن است آن‌ها را در درس ریاضی یا فیزیک از قبل مطالعه کرده باشید.

مثال ۴. مساحت (A) دایره‌ای به شعاع r (شکل ۲) از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:



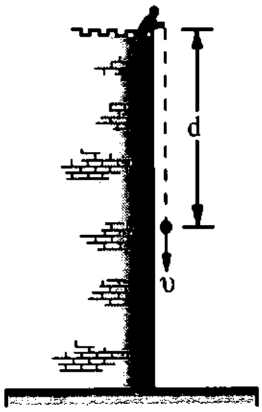
$A = \pi r^{۲}$

$(\pi \simeq ۳/۱۴۱۶)$

شکل ۲

به طور معمول این فرمول را با نماد تابعی به صورت $A(r) = \pi r^{۲}$ می‌نویسیم تا مشخص شود، مساحت یعنی A، وابسته به شعاع یعنی r است. r را متغیر مستقل و A را متغیر وابسته می‌گوییم.

مثال ۵. اگر یک سنگ‌ریزه از بالای یک برج (شکل ۳) به طرف پائین رها شود و شتاب جاذبهٔ زمین $۳۲\, ft / Sec^{۲}$ باشد، در این صورت سرعت (به طرف پائین) V بعد از t ثانیه و فاصلهٔ پیموده شدهٔ d از موقع رها شدن پس از t ثانیه، از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:



$V(t) = ۳۲t$

$d(t) = ۱۶t^{۲}$

شکل ۳

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، V و d هر دو تابع‌هایی از t هستند. بنابراین در این دو تابع، t متغیر مستقل و V و d هر دو متغیرهای وابسته به t هستند.

مثال ۶. اگر دمای یک نمونهٔ ۳ گرمی دی‌اکسید کربن °۲۷ باشد، در این صورت، حجم آن (V) برحسب لیتر از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$V(p) = \frac{۱۶۸}{p}$$

که در آن p فشار گاز برحسب اتمسفر است. در این تابع، p متغیر مستقل و V متغیر وابسته است.

دامنه و برد تابع

وقتی تابع با یک رابطه بین متغیرها تعریف می‌شود، این مطلب خیلی مهم است که بدانیم، چه عددهایی می‌توانند جایگزین متغیرها شوند.

تعریف دامنه

مجموعهٔ همهٔ عددهایی را که به ازای آن‌ها f(x) تعریف می‌شود، دامنهٔ تعریف تابع f می‌نامیم و آن را با نماد D مشخص می‌کنیم.

مثال ۷. دامنهٔ تابع حجم V(p) در **مثال ۶**، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی مثبت است. زیرا فشار گاز می‌تواند هر عدد مثبتی برحسب اتمسفر باشد و این بی‌معنی است که

بگوییم، فشار عددی منفی یا حتی صفر است. (طبیعت با خلأ سنخیتی ندارد).

مثال ۸. دامنهٔ تابع معکوس $f(x)=\frac{1}{x}$، مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی غیر صفر است؛ یعنی مجموعهٔ همهٔ عددها به غیر از صفر. چون با جایگزینی هر عدد غیر صفر به جای x، یک مقدار عددی برای f(x) به دست می‌آید.

تعریف برد

مجموعهٔ همهٔ مقادیر ممکن برای $y = f(x)$، برد تابع f نامیده می‌شود که آن را با نماد R مشخص می‌کنیم.

مثال ۹. فرض کنید هزینهٔ کل چاپ (c) برای تولید n نسخه کتاب دیوان حافظ، ۴/۰۰۰/۰۰۰ ریال برای کار با ماشین چاپ به اضافهٔ ۱۵/۰۰۰ ریال برای چاپ هر کتاب باشد. در این صورت، c تابعی از n است که از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$C = 4000000 + 15000n$$

دامنهٔ تابع هزینهٔ C، مجموعهٔ $\{1,2,3,\cdots\}$ از همهٔ عددهای صحیح مثبت است. زیرا این بی‌معنی است که بگوییم، تعداد کتاب‌های چاپ شده عددی منفی یا عددی گویا است.

آیا برد تابع C تمام عددهای مشخص شده در لیست زیر است؟

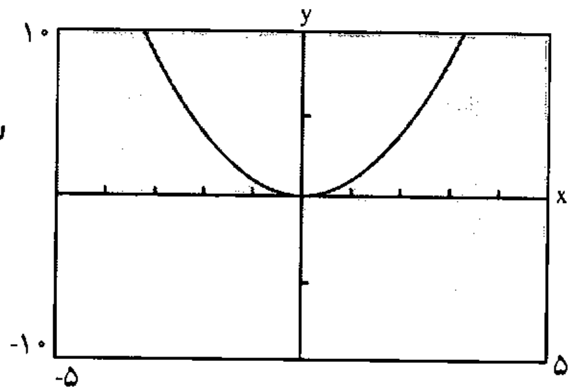
$$R = \{4015000, 4030000, 4045000, 4060000, \ldots\}$$

مثال ۱۰. برد تابع معکوس $f(x)=\frac{1}{x}$ (مانند دامنه‌اش) مجموعهٔ همهٔ عددهای حقیقی غیر صفر است. زیرا عبارت $\frac{1}{x}$ می‌تواند هر مقدار غیر از صفر را به خود بگیرد.

مثال ۱۱. تابع مجذور (مربع) با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ مشخص می‌شود.

این تابع به هر عدد x، مربع آن یعنی x^2 را نسبت می‌دهد. زیرا هر عدد می‌تواند، مربع (مجذور) داشته باشد. دامنهٔ تابع f مجموعهٔ عددهای حقیقی $\mathbb{R}$ است؛ اما هر عدد غیرمنفی، مربع (مجذور) یک عدد حقیقی است. بنابراین، برد تابع f مجموعهٔ همهٔ عددهای غیرمنفی است. یعنی: $R = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$

شکل ۴. نمودار تابع $y = x^2$ را به وسیلهٔ ماشین حساب نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ماشین حساب فقط قسمتی از نمودار تابع را نشان می‌دهد که در نمایش پنجره‌ای استاندارد قرار دارد (روی محور xها بین ۵ و ۵- و روی محور yها بین ۱۰ و ۱۰- است). نمودار نشان می‌دهد که برد تابع f عددهای غیرمنفی هستند.



شکل ۴. نمودار تابع $f(x)=x^2$ با ماشین حساب

مثال‌های ۹ تا ۱۱ روند پیدا کردن برد یک تابع را توضیح می‌دهند. با وجود این، اغلب، دامنهٔ تابع بیش‌تر از برد تابع موردنظر است. زیرا برای ما بسیار مهم است که بدانیم چه عددهایی را می‌توانیم جایگزین متغیر x کنیم تا به طور محسوس (شهودی) مقدار f(x) را به دست آوریم.

تمرین

در تمرین‌های ۱ تا ۶، ضابطه‌های توابعی داده شده‌اند. متغیر وابسته و متغیر مستقل را در هرکدام از آن‌ها مشخص کنید:

۱. $y = x^3 - 8$

۲. $x=(t+1)^3$

۳. $V=8\sqrt{h}$

۴. $T=4u-7$

۵. $C=2\pi r$

۶. $V=S^3$

در تمرین‌های ۷ تا ۱۱، y تابعی از x تعریف شده است. این توابع را با ضابطهٔ (فرمول) یا جدول مشخص کنید.

۷. بالاترین درجهٔ حرارت (y) را در تهران برای هر ماه (x) از سال یادداشت کنید.

۸. قیمت درخت کریسمس (y) براساس طول قد (x) است. اگر:

الف) یک درخت ۶ فوتی باشد، قیمت آن بین ۲۰/۰۰۰ ریال و ۵۰/۰۰۰ ریال است.

ب) یک درخت ۸ فوتی باشد، قیمت آن بین ۲۵/۰۰۰ ریال و ۷۵/۰۰۰ ریال است.

ج) یک درخت ۱۱ فوتی باشد، قیمت آن بین ۱۰۰/۰۰۰ ریال و ۲۰۰/۰۰۰ ریال است.

د) یک درخت ۱۳ فوتی باشد، قیمت آن ۳۰۰/۰۰۰ ریال یا بیش‌تر است.

۹. $y=x^2$

۱۰. $x=y^2$

۱۱. $4x-3y=8$

در تمرین‌های ۱۲ تا ۱۵، مقدار سادهٔ شدهٔ $f(-1)$، $f(0/5)$، $f(\sqrt{2})$، $f(a^2)$ و $f(2-a)$ را در هریک از تابع‌های زیر به دست آورید.

۱۲. $f(x)=2x+3$

۱۳. $f(x)=x^2+1$

۱۴. $f(x)=\frac{1}{2x+1}$

۱۵. $f(x)=\sqrt{x^2+2}$

در تمرین‌های ۱۶ تا ۱۹، مقادیری از a را به دست آورید که در رابطهٔ $g(a)=13$ صدق می‌کنند.

۱۶. $g(x)=3x+4$

۱۷. $g(x)=\frac{12}{1-x}$

۱۸. $g(x)=\sqrt{5x+4}$

۱۹. $g(x)=x^2-36$

در تمرین‌های ۲۰ تا ۲۷، دامنهٔ توابع را بیابید (به یاد داشته باشید که زیر رادیکال با فرجه زوج نمی‌تواند عدد منفی قرار بگیرد و مخرج هر کسر، مخالف با صفر است).

۲۰. $f(x)=2x-7$

۲۱. $f(x)=x^2-7$

۲۲. $h(x)=\sqrt{x-3}$

۲۳. $h(x)=\sqrt{x+2}$

۲۴. $f(x)=\frac{1}{x-1}$

۲۵. $g(t)=\frac{1}{t^2+1}$

۲۶. $g(t)=\frac{1}{t^2-4}$

۲۷. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+5}}$

در تمرین‌های ۲۸ تا ۳۳ برد توابع داده شده را بیابید.

۲۸. تابع قیمت کل (C) برای چاپ n نسخه از کتاب به صورت $C(n)=2500000+195n$ است.

۲۹. مساحت دایره با شعاع r به صورت $A(r)=\pi r^2$ است.

۳۰. $f(x)=10-x$

۳۱. $f(x)=3x-1$

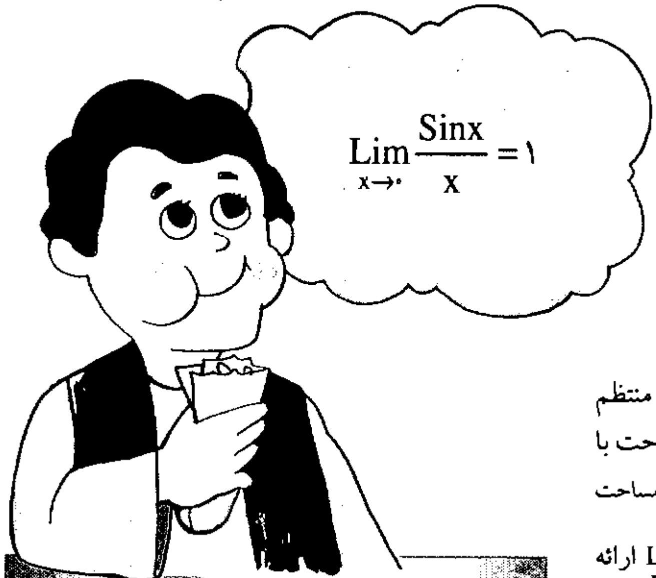
۳۲. $f(x)=8+x^2$

۳۳. $f(x)=\sqrt{x}-6$

منبع

Elementary Mathematical Modeling - Mary Ellen davis C.Henry Edwards/ university of Georgia

روشی برای اثبات $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$



محمد حسین پور سعید ـ گروه ریاضی دانشگاه لرستان

اگر با سیمی به طول «l» بتوان «n» ضلعی‌های منتظم ($n\in N, n\ge 3$) را ساخت، نشان می‌دهیم که مساحت با افزایش تعداد اضلاع افزایش می‌یابد (یا دایره بیش‌ترین مساحت را داراست) و سپس روشی برای اثبات $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ ارائه می‌شود.

الف) نظر به این که میزان مساحت، تابعی از تعداد اضلاع است، بنابراین با تعیین ضابطهٔ این تابع و مشتق گیری از آن نسبت به «n»، می‌توان اکسترمم تابع را تعیین کرد.

بدیهی است که محیط «n» ضلعی و هر ضلع آن به ترتیب برابر با «l» و «$\frac{l}{n}$» است، اگر «n» ضلعی را به «n» مثلث متساوی‌الساقین افراز کنیم، به‌طوری که رأس مشترک آن‌ها مرکز «n» ضلعی باشد، طول قاعدهٔ تمام مثلث‌ها برابر با «$\frac{l}{n}$» و اندازهٔ زاویهٔ روبه‌رو به قاعدهٔ آن‌ها برابر است با «$\frac{2\pi}{n}$». بنابراین، مساحت «n» ضلعی منتظم، «n» برابر مساحت هریک از مثلث‌ها خواهد بود. یعنی:

$$S=f(n)=n\left(\frac{l^2}{4n^2\tan(\frac{\pi}{n})}\right)=\frac{l^2}{4n}\,\frac{\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin(\frac{\pi}{n})}$$

با وجودی که بنا به تعریف «n» عددی صحیح است، برای این که تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر داشته باشیم، فرض می‌کنیم، «n» بتواند تمام اعداد حقیقی در بازهٔ $[3,\infty)$ را بپذیرد. بنابراین داریم:

$$\frac{df}{dn}=\frac{l^2}{4n^2}\times\frac{\frac{\pi}{n}-\sin(\frac{\pi}{n})\cos(\frac{\pi}{n})}{\sin^2(\frac{\pi}{n})}$$

$$=\frac{l^2}{8n^2\sin^2(\frac{\pi}{n})}\times\left(\frac{2\pi}{n}-\sin(\frac{2\pi}{n})\right)$$

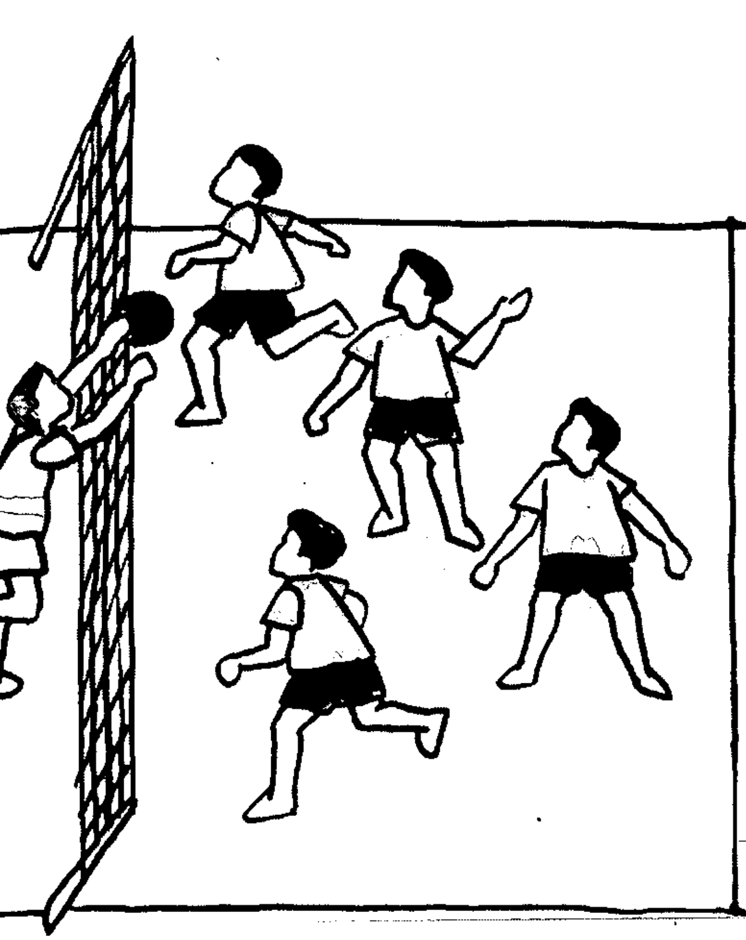
به آسانی می‌توان نشان داد که $t\ge \sin t : t\ge 0$. حال اگر تعریف کنیم $t=\frac{2\pi}{n}$ آن‌گاه با توجه به رابطهٔ فوق، $\frac{df}{dn}\ge 0$ را خواهیم داشت؛ یعنی مساحت، تابعی غیر نزولی از «n» است و با افزایش «n»، مساحت نیز افزایش می‌یابد یا به بیان معادل، دایره بیش‌ترین مساحت را دارد.

ب) برای اثبات $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$، می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال، مبحث هم‌ارزی توابع یا از قضیهٔ فشار استفاده کرد. با این وجود با بهره گیری از مطالب فوق، روش مناسب زیر ارائه می‌شود:

می‌دانیم که مساحت دایره‌ای با محیط «l» برابر است با $\frac{l^2}{4\pi}$. بنابراین با توجه به قسمت الف داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{l^2}{4n\tan(\frac{\pi}{n})}=\frac{l^2}{4\pi}\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\tan(\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi}{n}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

که با توجه به رابطهٔ $\frac{\sin x}{x}=\frac{\tan x}{x}\times\cos x$ و استفاده از قضایای «حد» به آسانی می‌توان درستی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ را نشان داد.

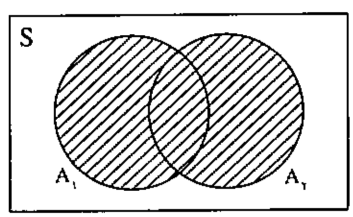


کاربردهایی از اصل شمول و عدم شمول

اصل شمول و عدم شمول، یکی از روش‌های حلّ مسائل شمارشی در ریاضیات ترکیباتی است که ابتدا به معرفی این روش می‌پردازیم و سپس آن‌را روی چند مثال پیاده می‌کنیم. فرض کنید $|A|$ به معنای تعداد اعضای مجموعهٔ متناهی A باشد.

گزارهٔ ۱ : اصل شمول و عدم شمول برای دومجموعهٔ متناهی

فرض کنیم S مجموعه N عضوی و A_1 و A_2 دو زیرمجموعه از S باشند. در این صورت تعداد اعضای اجتماع این دو مجموعه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید (شکل ۱) :

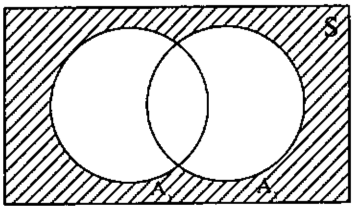


شکل ۱

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \qquad (1)$$

یعنی: تعداد اعضایی از S که حداقل به یکی از دو مجموعهٔ A_1 یا A_2 تعلق دارند، برابر است با تعداد اعضای دو مجموعهٔ A_1 و A_2 منهای تعداد اعضای مشترک این دو مجموعه (شکل ۱).

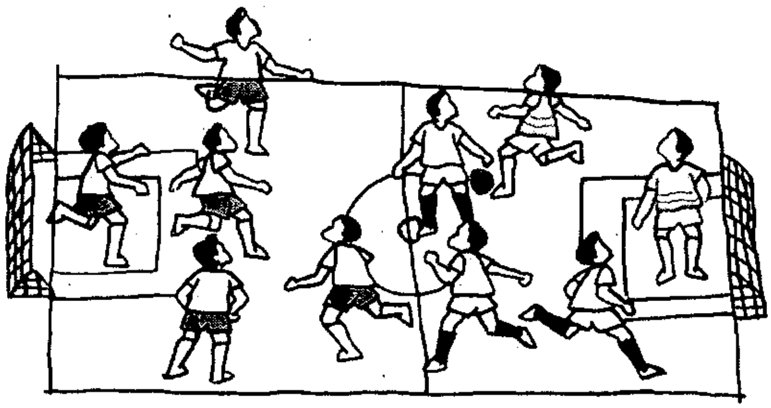
اگر A_1 و A_2 اشتراکی با یکدیگر نداشته باشند، ($|A_1 \cap A_2| = 0$) بنابراین از رابطهٔ (۱) داریم: $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$. علت نامگذاری «شمول و عدم شمول» روی این اصل، آن است که در محاسبهٔ $|A_1| + |A_2|$ ، اعضای مشترک بین دو مجموعهٔ A_1 و A_2 دوبار شمرده می‌شوند و این به معنای «شمول» دوبارهٔ این اعضاست. از این رو برای به دست آوردن تعداد کلّ اعضای اجتماع دو مجموعه، باید یکی از این دوبار را کنار گذاشت و این به معنای «عدم شمول» یک بار اعضای مشترک این دو مجموعه است و به این ترتیب، رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود. حال اگر هدف، یافتن اعضایی از S باشد که در هیچ‌کدام از دو مجموعهٔ A_1 و A_2 نیستند، به صورت زیر عمل می‌کنیم (شکل ۲).



شکل ۲

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |\overline{A_1 \cup A_2}| = N - |A_1 \cup A_2| \qquad (2)$$

دکتر محمّد علی فریبرزی عراقی
عضو هیأت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران





برای دانش‌آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

مثال ۱ : در یک کلاس ۴۰ نفری، ۳۲ نفر در درس فیزیک و ۲۴ نفر در درس ریاضی افتاده‌اند و تنها ۴ نفر این دو درس را گذرانده‌اند؛ تعیین کنید چند نفر در هر دو درس افتاده‌اند؟

حل : اگر S مجموعهٔ دانش‌آموزان این کلاس باشد، آن‌گاه $|S| = 40$ است. فرض کنیم A_1 و A_2 به ترتیب مجموعهٔ دانش‌آموزانی باشند که در درس فیزیک و درس ریاضی افتاده‌اند، در این صورت: $|A_1| = 32, |A_2| = 24$ و چون ۴ نفر در این کلاس، این دو درس را گذرانده‌اند، پس تعداد دانش‌آموزانی که حداقل دریکی از این دو درس افتاده‌اند، برابر است با :

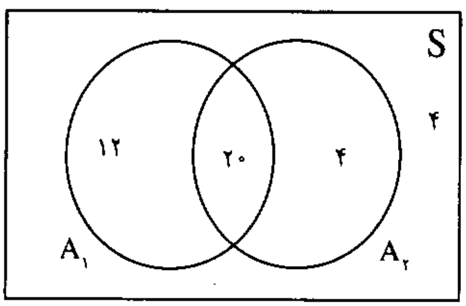
$$|A_1 \cup A_2| = 40 - 4 = 36$$

حالا بنابر رابطهٔ (۱) داریم :

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2|$$
$$\Rightarrow |A_1 \cap A_2| = 32 + 24 - 36 = 20$$

بنابراین ۲۰ نفر در هر دو درس فوق افتاده‌اند. همان‌طوری که در شکل ۳ ملاحظه می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت :

$12 = |A_1| - |A_1 \cap A_2| =$ تعداد دانش‌آموزانی که فقط در درس فیزیک افتاده‌اند

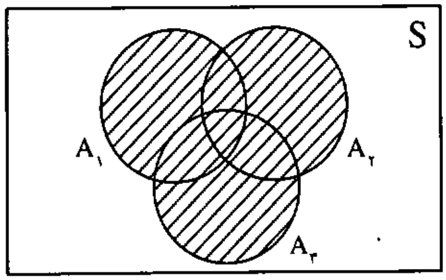


شکل ۳

$4 = |A_2| - |A_1 \cap A_2| =$ تعداد دانش‌آموزانی که فقط در درس ریاضی افتاده‌اند

گزارهٔ ۲ : «اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعهٔ متناهی»

فرض کنیم S مجموعه‌ای N عضوی و A_1 و A_2 و A_3 سه زیر مجموعه از S باشند، در این صورت تعداد اعضای اجتماع این سه مجموعه، از رابطهٔ صفحه بعد به دست می‌آید :



شکل ۴

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3|-\big[|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|\big]+|A_1\cap A_2\cap A_3| \qquad (3)$$

برهان: با استفاده از گزارهٔ ۱ و قوانین مجموعه‌ها، رابطهٔ ۳ را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $B_1 = A_2\cup A_3$ در این صورت:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1\cup B_1| = |A_1|+|B_1|-|A_1\cap B_1| \qquad (4)$$

از طرفی:

$$|B_1| = |A_2\cup A_3| = |A_2|+|A_3|-|A_2\cap A_3|$$

و

$$|A_1\cap B_1| = |A_1\cap (A_2\cup A_3)| = |(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3)|$$
$$= |A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|-|(A_1\cap A_2)\cap(A_1\cap A_3)|$$
$$= |A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3|$$

با جایگذاری این نتایج در رابطهٔ (۴)، رابطهٔ (۳) به دست می‌آید.

نتیجه: اگر سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 با هم اشتراکی نداشته باشند، آن‌گاه:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = |A_1|+|A_2|+|A_3| \qquad (5)$$

همچنین تعداد اعضایی از مجموعهٔ S که به هیچ کدام از سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 تعلّق ندارند، برابرند با:

$$|\overline{A}_1\cap \overline{A}_2\cap \overline{A}_3| = |\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}| = N-|A_1\cup A_2\cup A_3| \qquad (6)$$

به منظور حلّ مثال‌هایی از رابطه‌های (۳) و (۶)، ابتدا گزاره‌ای از بحث ترکیبات را یادآوری می‌کنیم:

گزارهٔ ۳: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+\dots+x_k=n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{n}$. دو مثال زیر را برای آشنایی با گزارهٔ ۳ حل می‌کنیم:

مثال ۲: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=20$ را به دست آورید.

حل: هدف، یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=20$ با شرط $x_i>0$، $i=1,2,3$، است که معادل است با شرط $x_i\geq 1$، $i=1,2,3$. فرض می‌کنیم $y_i = x_i - 1$، با جایگذاری آن در معادله خواهیم داشت:

$$y_1+1+y_2+1+y_3+1=20$$
$$\Rightarrow y_1+y_2+y_3=17,\quad y_i\geq 0,\quad i=1,2,3$$

لذا مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+y_3=17$ می‌شود که بنا به گزارهٔ (۳) برابر است با:

$$\binom{17+3-1}{17}=\binom{19}{17}=\binom{19}{2}=\frac{19\times 18}{2}=171$$

مثال ۳: تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $y_1+y_2+y_3=20$ را با شرط $x_1>2$ و $x_3>3$ به دست آورید.

حل: دو شرط فوق معادلند با $x_1\geq 3$ و $x_3\geq 4$. فرض می‌کنیم $y_1=x_1-3$ و $y_3=x_3-4$، با جایگذاری آن‌ها در معادله خواهیم داشت:

$$y_1+3+x_2+y_3+4=20\Rightarrow y_1+x_2+y_3=13$$

که در آن $x_2\geq 0$، $y_1\geq 0$ و $y_3\geq 0$. بنابر گزارهٔ ۳ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ اخیر برابر است با:

$$\binom{۱۳+۳-۱}{۱۳}=\binom{۱۵}{۱۳}=\binom{۱۵}{۲}=\frac{۱۵\times ۱۴}{۲}=۱۰۵$$

نتیجه: به منظور یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+...+x_k=n$ با شرط $x_i \ge a_i$ و $i=۱,...,k$ از تغییر متغیر $y_i=x_i-a_i$ استفاده می‌کنیم تا معادلهٔ فوق به معادلهٔ زیر تبدیل شود:

$$y_1+y_2+...+y_k=n-(a_1+a_2+...+a_k)$$

که در آن $y_i \ge ۰$ است. حال اگر $l=a_1+a_2+...+a_k$ و $n \ge l$، مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+...+y_k=n-l$، می‌شود که بنابر گزاره ۳ برابر است با:

$$\binom{n-l+k-۱}{n-l}$$

مثال ۴: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=۲۰$ را با شرط‌های $x_i \le ۱۰$ و $i=۱,۲,۳$ به دست آورید.

حل: فرض می‌کنیم S مجموعهٔ جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله باشد، بنابر گزارهٔ ۳ داریم:

$$|S|=\binom{۲۰+۳-۱}{۲۰}$$

$$\Rightarrow |S|=N=۲۳۱$$

چون یافتن تعداد جواب‌های صحیح این معادله، با شروط داده شده، به طور مستقیم مقدور نیست، شروط مذکور را به گونه‌ای تغییر می‌دهیم که بتوان تعداد جواب‌های صحیح را به طور مستقیم و به شیوه‌ای که در نتیجهٔ فوق مطرح شده است، به دست آورد. به این منظور، نقیض سه شرط فوق را می‌آوریم و سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

شرط ۱ $x_1 \le ۱۰ \xrightarrow{\text{نقیض}} x_1 > ۱۰ \Rightarrow$

$A_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in S|\ x_1>۱۰\}$

شرط ۲ $x_2 \le ۱۰ \xrightarrow{\text{نقیض}} x_2 > ۱۰ \Rightarrow$

$A_2=\{(x_1,x_2,x_3)\in S|\ x_2>۱۰\}$

شرط ۳ $x_3 \le ۱۰ \xrightarrow{\text{نقیض}} x_3 > ۱۰ \Rightarrow$

$A_3=\{(x_1,x_2,x_3)\in S|\ x_3>۱۰\}$

بنابراین مجموعهٔ A_i، $i=۱,۲,۳$ عبارت است از مجموعهٔ جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=۲۰$ با شرط $x_i>۱۰$ و $i=۱,۲,۳$.
حال هدف، یافتن تعدادی از اعضای S است که در هیچ کدام از مجموعه‌های A_1، A_2 و A_3 قرار ندارند؛ یعنی محاسبهٔ $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}|$.

به منظور استفاده از رابطهٔ (۳) ابتدا $|A_1|$ را می‌یابیم که معادل است با یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=۲۰$ با شرط $x_1 \ge ۱۱$. با فرض $y_1=x_1-۱۱$ این مسأله معادل است با یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+x_2+x_3=۹$ که برابر است با $\binom{۹+۳-۱}{۹}=۵۵$ لذا $|A_1|=۵۵$ و به طور مشابه: $|A_2|=|A_3|=۵۵$.

از طرفی چون سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 دو به دو با هم اشتراک ندارند، بنابر رابطهٔ (۵).

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|=۵۵+۵۵+۵۵=۱۶۵$$

و بنابر رابطهٔ (۶) داریم:

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}|=۲۳۱-۱۶۵=۶۶$$

یعنی این معادله دارای ۶۶ جواب با شرط $x_i \le ۱۰$ و $i=۱,۲,۳$ است.

مثال ۵: تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3=۲۰$ را با شرط $۲ \le x_1 \le ۴$ و $۳ \le x_2 \le ۶$ و $۴ \le x_3 \le ۱۲$ بیابید.

حل: شروط داده شده در این مثال را به شروطی تبدیل می‌کنیم که منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادله‌ای می‌شود که بتوان به طور مستقیم تعداد جواب‌های آن را یافت.

شرط اول $۲ \le x_1 \le ۴ \Rightarrow ۰ \le x_1-۲ \le ۲ \Rightarrow$

$۰ \le y_1 \le ۲$ و $y_1=x_1-۲$

شرط دوم $3 \le x_2 \le 6 \Rightarrow 0 \le x_2 - 3 \le 3 \Rightarrow$

$y_2 = x_2 - 3$ و $0 \le y_2 \le 3$

شرط سوم $4 \le x_3 \le 12 \Rightarrow 0 \le x_3 - 4 \le 8 \Rightarrow$

$y_3 = x_3 - 4$ و $0 \le y_3 \le 8$

با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$y_1+2+y_2+3+y_3+4=20 \Rightarrow$$
$$y_1+y_2+y_3=11$$

لذا مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+y_3=11$ با شرط‌های $y_1 \le 2$ و $y_2 \le 3$ و $y_3 \le 8$ می‌شود. مشابه آنچه که در مثال قبل گفته شد، سه مجموعهٔ A_1، A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

شرط ۱ $y_1 \le 2 \xrightarrow{\text{نقیض}} y_1 > 2 \Rightarrow y_1 \ge 3 \Rightarrow$

$A_1 = \{(y_1,y_2,y_3)\in S \mid y_1 \ge 3\}$

شرط ۲ $y_2 \le 3 \xrightarrow{\text{نقیض}} y_2 > 3 \Rightarrow y_2 \ge 4 \Rightarrow$

$A_2 = \{(y_1,y_2,y_3)\in S \mid y_2 \ge 4\}$

شرط ۳ $y_3 \le 8 \xrightarrow{\text{نقیض}} y_3 > 8 \Rightarrow y_3 \ge 9 \Rightarrow$

$A_3 = \{(y_1,y_2,y_3)\in S \mid y_3 \ge 9\}$

که در آن S عبارت است از مجموعهٔ جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+y_3=11$ که بنا بر گزارهٔ ۳ $N=|S|=\binom{13}{11}=78$ و هدف به دست آوردن $|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$ است. به این منظور، ابتدا $|A_1|$ را می‌یابیم؛ یعنی یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+y_3=11$ با شرط $y_1 \ge 3$ که با فرض $z_1=y_1-3$، منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $z_1+y_2+y_3=8$ می‌شود و برابر است با $\binom{10}{8}=45$، لذا $|A_1|=45$ و به طور مشابه $|A_2|=\binom{7+3-1}{7}=36$ و $|A_3|=\binom{4}{2}=6$

همچنین $|A_1 \cap A_2|$ یعنی تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $y_1+y_2+y_3=11$ با شرط‌های $y_1 \ge 3$ و $y_2 \ge 4$ که با فرض $Z_1=y_1-3, Z_2=y_2-4$ مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $Z_1+Z_2+y_3=4$ می‌شود که برابر است با $\binom{6}{4}=15$. لذا $|A_1\cap A_2|=15$. در ضمن چون A_1 و A_3 و همچنین A_2 و A_3 با هم اشتراکی ندارند،

$|A_1\cap A_3|=0$ و $|A_2\cap A_3|=0$ و
$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$

بنابر رابطهٔ (۳):

$$|A_1\cup A_2\cup A_3| = 45+36+6-15=72$$

در نتیجه بنابر رابطهٔ ۶ خواهیم داشت:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}| = 78-72=6$$

این ۶ جواب عبارتند از: (۱۰ ,۶ ,۴) و (۱۱ ,۵ ,۴) و (۱۲ ,۴ ,۴) و (۱۱ ,۶ ,۳) و (۱۲ ,۵ ,۳) و (۲ ,۶ ,۱۲)

مثال ۶: مطلوب است تعیین تعداد اعداد صحیح و مثبت n به طوری که $n \le 600$ و n بر ۳ یا ۵ یا ۷ بخش‌پذیر نباشد.

حل: فرض کنیم $S=\{1,2,3,\dots,600\}$ و A_1 و A_2 و A_3 به ترتیب مجموعهٔ اعضایی از S باشند که بر ۳، ۵ و ۷ بخش‌پذیرند. هدف، محاسبهٔ $|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$ است. می‌دانیم اگر x عدد صحیح و مثبتی باشد، تعداد اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از n که بر x بخشپذیرند، برابر است با $\left[\frac{n}{x}\right]$ که در آن [ ] به معنای جزء صحیح عدد حاصل است. بنابراین:

$$A_1=\{n\in s \mid 3 \mid n\} \Rightarrow |A_1|=\left[\frac{600}{3}\right]=200$$

$$A_2=\{n\in s \mid 5 \mid n\} \Rightarrow |A_2|=\left[\frac{600}{5}\right]=120$$

$$A_3=\{n\in s \mid 7 \mid n\} \Rightarrow |A_3|=\left[\frac{600}{7}\right]=85$$

از طرفی $|A_1\cap A_2|$ به معنای تعداد اعضایی از S است

که هم بر ۳ و هم بر ۵، یعنی بر ۱۵ بخش‌پذیرند؛

بنابراین: $|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{600}{15}\right] = 40$ و به طور مشابه:

$|A_1 \cap A_3| = \left[\frac{600}{21}\right] = 28$ و $|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{600}{35}\right] = 17$

و در نهایت: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{600}{105}\right] = 5$، لذا بنابر رابطه (۳) داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 200+120+85-[40+17+28]+5 = 325$$

و در نتیجه بنابر رابطهٔ (۶):

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 600-325 = 275$$

یعنی ۲۷۵ عدد از اعضای S وجود دارند که بر ۳ یا ۵ و یا ۷ بخش‌پذیر نیستند.

مثال ۷: مطلوب است تعیین تعداد جایگشت‌های حروف الفبای فارسی؛ به طوری‌که در هیچ کدام از آن‌ها الگوهای «گراف» یا «دور» و یا «جهت» روی ندهد (تکرار حروف مجاز نیست)؟

حل: فرض کنیم S مجموعهٔ تمام جایگشت‌های ۳۲ حرف الفبای فارسی باشد؛ در این صورت:

$|S| = 32!$

همانند مثال‌های قبل، چون محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های S با شرط مذکور به طور مستقیم مقدور نیست، ابتدا تعداد حالاتی را که حداقل یکی از این سه الگو در جایگشت‌های حروف به وجود می‌آیند، با استفاده از قوانین ترکیبات می‌یابیم. به این منظور، مجموعه‌های A_1 و A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_1 =$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی از S که شامل الگوی «گراف» باشند.

$A_2 =$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی از S که شامل الگوی «دور» باشند.

$A_3 =$ مجموعهٔ جایگشت‌هایی از S که شامل الگوی «جهت» باشند.

ابتدا به محاسبهٔ $|A_i|$، $i = 1, 2, 3$ می‌پردازیم. به عنوان مثال، برای محاسبهٔ $|A_1|$، تعداد جایگشت‌ها عبارتند از:

$\Rightarrow$

گ ر ا ف	ب پ ت ...
۱ شیء واحد	۲۸ حرف دیگر

$|A_1| =$ تعداد جایگشت‌های ۲۹ شیء متمایز $= 29!$

و به طور مشابه: $|A_2| = |A_3| = 30!$

حال به محاسبهٔ $|A_i \cap A_j|$، $1 \le i \ne j \le 3$، می‌پردازیم. به عنوان مثال، برای محاسبهٔ $|A_1 \cap A_3|$ تعداد جایگشت‌ها عبارتند از:

گ ر ا ف	ج هـ ت	ب پ ت ...
۱ شیء واحد	۱ شیء واحد	۲۵ حرف دیگر

$|A_1 \cap A_3| =$ تعداد جایگشت‌های ۲۷ شیء متمایز $= 27!$

و به طور مشابه: $|A_2 \cap A_3| = 28!$ و $|A_1 \cap A_2| = 0$؛ زیرا بین حروف «گراف» و «دور»، حرف مشترک وجود دارد و این حالت در جایگشت‌های حروف روی نمی‌دهد.

به همین علت: $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ است. لذا بنابر رابطه‌های (۳) و (۶) داریم:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 29!+30!+30!-28!-27! = 49503 \times 27! \Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 32!-27! \times 49503 = 27! \times 24115617$$

این تعداد حالاتی است که هیچ کدام از این سه الگو در جایگشت‌های حروف فارسی روی نمی‌دهند.

اصل شمول و عدم شمول را می‌توان برای $K \ge 2$ مجموعه A_1، A_2، ... و A_K بیان نمود.

گزارهٔ ۴: صورت کلی اصل شمول و عدم شمول

فرض کنیم A_1، A_2، ... و A_K زیر مجموعه‌هایی متناهی از مجموعهٔ N عضوی مفروض S باشند؛ در این صورت تعداد اعضای اجتماع این k مجموعه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K| = \sum_{i=1}^{K}|A_i| - \sum_{1\le i\le j\le K}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i\le j<l\le K}|A_i \cap A_j \cap A_l| - \dots + (-1)^{K-1}.|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_K| \qquad (۷)$$

برهان: به منظور اثبات رابطهٔ (۷)، ثابت می‌کنیم هر عضو دلخواه $x \in S$ به تعداد مساوی در دو طرف این رابطه شمرده می‌شود. اگر x به هیچکدام از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق نداشته باشد آن‌گاه x در دو طرف رابطهٔ (۷) صفر بار شمرده می‌شود. حال فرض کنیم x به t مجموعه از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق داشته باشد $(1 \le t \le K)$. در این حالت x یک بار در طرف چپ رابطهٔ (۷) شمرده می‌شود. در طرف راست این رابطه؛ x به صورت زیر شمرده می‌شود:

$\binom{t}{1}$ بار در جملهٔ $\sum_{i=1}^{K}|A_i|$ ، (x یک بار در هریک از t مجموعه شمرده می‌شود.)

$\binom{t}{2}$ بار در جملهٔ $\sum_{1\le i\le j\le K}|A_i \cap A_j|$ (x، یک بار در هر دو مجموعه‌ای که از بین این t مجموعه انتخاب می‌کنیم شمرده می‌شود).

$\binom{t}{3}$ بار در جملهٔ $\sum_{1\le i\le j<l\le t}|A_i \cap A_j \cap A_l|$ (x، یک بار در هر سه مجموعه‌ای که از بین این t مجموعه انتخاب می‌کنیم شمرده می‌شود).

با ادامه این استدلال معلوم می‌شود که سهم x در طرف راست رابطهٔ (۷) برابر است با:

$$\binom{t}{1} - \binom{t}{2} + \binom{t}{3} - \dots + (-1)^{t-1}\binom{t}{t} = 1$$

یعنی x یک بار نیز در طرف راست رابطه شمرده می‌شود.

می‌دانیم $\binom{t}{0} - \binom{t}{1} + \binom{t}{2} - \dots + (-1)^{t}\binom{t}{t} = 0$ است. به این ترتیب در هر حالت سهم x در دو طرف رابطهٔ (۷) برابر است.

رابطهٔ (۷) تعداد آن دسته از اعضای S را که حداقل به یکی از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق دارند مشخص می‌کند. به این ترتیب، تعداد اعضایی از مجموعه N عضوی S که به هیچ‌کدام از مجموعه‌های A_1 تا A_K تعلق ندارند به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K}\right| = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_K| = N - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_K| \qquad (۸)$$

در حالت کلی، اعضای مجموعه‌های A_1 تا A_K ویژگی‌هایی دارند که بر اساس آن‌ها رابطهٔ (۷) تعداد اعضایی از S را که حداقل در یکی از این ویژگی‌ها صدق می‌کنند، را مشخص می‌کند و رابطهٔ (۸) تعداد اعضایی از S را که در هیچ‌کدام از این K ویژگی صدق نمی‌کنند، به دست می‌آورد.

اگر $k = 3$ باشد، رابطهٔ (۳) که صورت اصل شمول و عدم شمول برای سه مجموعهٔ A_1 و A_2 و A_3 است، حاصل می‌شود. اگر $K = 4$ باشد، رابطهٔ (۷) به صورت زیر بیان می‌شود که صورت اصل شمول و عدم شمول برای چهار مجموعهٔ A_1، A_2، A_3 و A_4 است.

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - \\ &(|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + \\ &|A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \\ &|A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) - \\ &|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \qquad (۹)\end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که در رابطهٔ (۹) تعداد جملات سمت راست برابرند با: ۱۵ = ۱ + ۴ + ۶ + ۴ و در حالت کلی، تعداد جملات سمت راست رابطهٔ (۷) برابرند با:

$$\binom{K}{1}+\binom{K}{2}+\binom{K}{3}+\dots+\binom{K}{K}=2^{K}-1\ ,\ K\ge 1$$

مثال ۸: به چند طریق می‌توان ۲۰ سیب را بین ۴ کودک طوری توزیع نمود که به هر کودک حداکثر ۷ سیب برسد؟

حل: مسأله منجر به یافتن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ با شرط‌های $x_i\le 7$ و $1\le i\le 4$ می‌شود.

فرض می‌کنیم S مجموعهٔ جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ باشد.

لذا، $|S|=\binom{20+4-1}{20}=\binom{23}{20}=1771$. حال مجموعه‌های A_i، $1\le i\le 4$، را به صورت اعضایی از S که در شرط $x_i>7$ (یا $x_i\ge 8$) صدق می‌کنند، تعریف می‌کنیم. لذا هدف یافتن $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\bar{A}_3\cap\bar{A}_4$ است.

به این منظور، ابتدا جملات سمت راست رابطهٔ (۹) را به دست می‌آوریم. برای یافتن $|A_1|$، تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ را با شرط $x_1\ge 8$ می‌یابیم. در این حالت کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1'+x_2+x_3+x_4=12$ را که در آن $x_1'=x_1-8\ge 0$ است، به دست آوریم. به این صورت:

$$\binom{12+4-1}{12}=\binom{15}{12}$$ و

چون $|A_1|=|A_2|=|A_3|=|A_4|$ ، لذا $\sum_{i=1}^{4}|A_i|=\binom{4}{1}\binom{15}{12}$. حال $|A_1\cap A_2|$ را می‌یابیم. به این منظور باید تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=20$ را با شرط $x_1\ge 8$ و $x_2\ge 8$ به دست آوریم. برای این کار کافی است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1'+x_2'+x_3+x_4=4$ را که در آن $x_1'=x_1-8\ge 0$ و $x_2'=x_2-8\ge 0$ است، بیابیم که برابر می‌شود با $\binom{4+4-1}{4}=\binom{7}{4}$. چون تعداد اعضای اشتراک‌های دوبه‌دوی مجموعه‌های A_i، $1\le i\le 4$، برابر هستند لذا داریم:

$$\sum_{1\le i\le j\le 4}|A_i\cap A_j|=\binom{4}{2}\binom{7}{4}$$

از طرفی $|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$ است، زیرا تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ فوق با شرایط $x_1\ge 8$ و $x_2\ge 8$ و $x_3\ge 8$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1'+x_2'+x_3'+x_4=-4$ ، $x_i'=x_i-8$ ، $i=1,2,3$ که برابر صفر است.

به همین ترتیب:

$$|A_2\cap A_3\cap A_4|=|A_1\cap A_2\cap A_4|=$$
$$|A_1\cap A_3\cap A_4|=|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0$$

در نتیجه بنابر رابطهٔ (۹)، خواهیم داشت:

$$|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=\binom{4}{1}\binom{15}{12}-\binom{4}{2}\binom{7}{4}+0-0=1610$$

لذا:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4|=1771-1610=161$$

در قسمت دوم مقاله به ادامهٔ کاربردهایی از اصل شمول و عدم شمول، از جمله به دست آوردن تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ m عضوی به یک مجموعهٔ n عضوی، $m\ge n$، می‌پردازیم.



منابع

۱. ریاضیات گسسته و ترکیباتی رالف گریمالدی

۲. ریاضیات گسسته مقدماتی. و. ک. بالاکریشنان

اتحاد و معادله

پرویز شهریاری

دانش‌آموزی می‌خواهد این معادلهٔ مثلثاتی را حل کند:

$$\tan(x+\frac{\pi}{4}) = 2\operatorname{Cot} x - 1 \qquad (1)$$

او راه حلّ عادی را برای حل انتخاب می‌کند و از رابطهٔ مربوط به مجموع تانژانت دو کمان یاری می‌گیرد:

$$\frac{\tan x+1}{1-\tan x} = \frac{2}{\tan x} - 1 \qquad (2)$$

دو سمت برابری را به یک مخرج تبدیل می‌کند و صورت‌ها را برابر قرار می‌دهد:

$$\tan x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \arctan\frac{1}{2} + k\pi$$

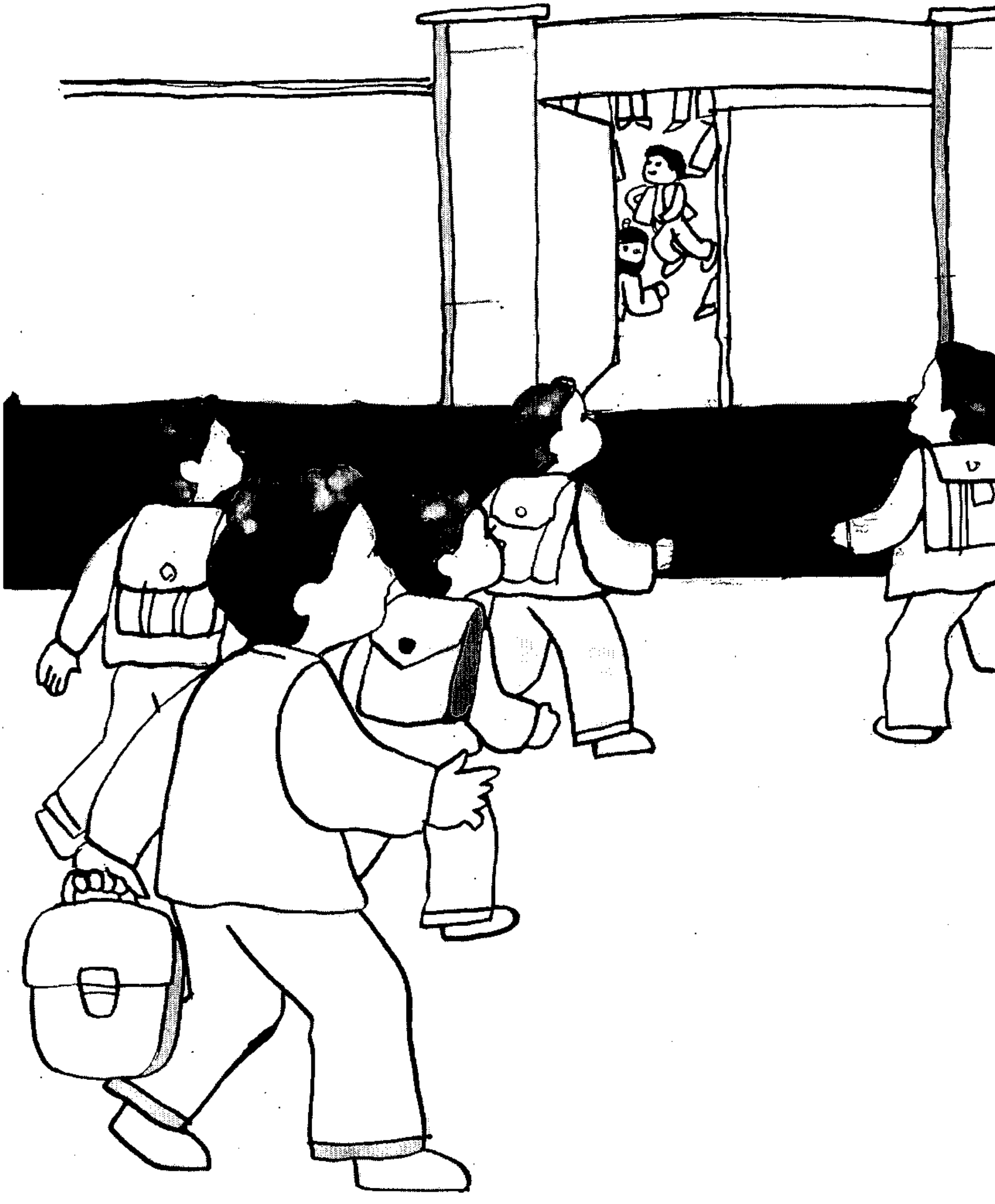
از آن‌جا که $\tan x$ برابر $\frac{1}{2}$ شده است، نه ۰ و نه ۱، در پاسخی که پیدا شده است، تردیدی وجود ندارد و ضمن آزمایش هم، درستی آن روشن می‌شود (درواقع، حتی آزمایش هم لازم نیست). به نظر می‌رسد که همه چیز مرتّب است. با وجود این، بهتر است در داوری شتاب نکنید.

در معادلهٔ اصلی، $x=\frac{\pi}{2}$ یا هر یک از عددهای $x=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ را قرار دهید. متوجه می‌شوید که در معادله صدق می‌کند؛ یعنی این‌ها هم ریشهٔ معادله هستند. این ریشه‌ها را، ضمن عبور از معادلهٔ (۱) به معادلهٔ (۲) از دست داده‌ایم؛ زیرا $x=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند، در معادلهٔ (۲) صادق نیست. مگر نه این است که $\tan x$ به ازای این مقدارها مفهوم خود را از دست می‌دهد؟ بنابراین همهٔ مطلب را باید در این تبدیل‌ها جست‌وجو کرد:



$$\tan(x+\frac{\pi}{4}) = \frac{1+\tan x}{1-\tan x}, \quad \operatorname{Cot} x = \frac{1}{\tan x}$$

سمت چپ برابری‌ها، به ازای $x=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ وجود دارند. در حالی که برای سمت راست، به دلیل وجود $\tan x$ استفاده از این مقدارهای x ممنوع است.



به طور طبیعی این پرسش پیش می‌آید: وقتی از رابطه‌هایی استفاده کرده‌ایم که نام اتحاد مثلثاتی را دارند، چگونه ممکن است چنین وضعی پیش آید؟ به ظاهر، باید به یاری اتحادها، تنها به تبدیل های اتحادی برسیم؛ یعنی تبدیل‌هایی که موجب به‌هم خوردن هم‌ارزی نشوند و اگر اعتماد ما در این زمینه متزلزل شود، در راه حل معادله‌ها، چه دشواری‌هایی که پدید نمی‌آید!

اما همه چیز را نمی‌شود از پیش و با تصور حل کرد. از تعریف اتحاد آغاز می‌کنیم. برخی از دانش‌آموزان، اتحاد را این طور تعریف می‌کنند: اتحاد، عبارت است از یک برابری که هر دو سمت آن به ازای هر مقدار دلخواه و قابل قبول حرف‌ها، به مقدارهای عددی برابر تبدیل شود.

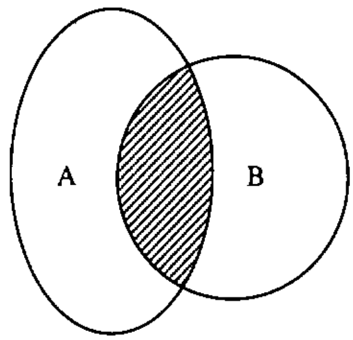
ولی این مقدارهای قابل قبول برای حرف‌ها کدامند؟ این‌ها، مقدارهایی از حرف‌ها هستند که به ازای آن‌ها هر دو سمت برابری، به طور هم‌زمان، دارای معنا باشند؛ یعنی به ازای آن‌ها، مقدارهای عدد مشخصی را بپذیرند.

به این ترتیب، اتحاد حالتی از برابری است. به‌عنوان مثال، $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ به‌ازای هر مقدار دلخواه x و $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$، برای هر مقدار دلخواه x و y برقرارند. اما آیا در این تعریف، همه چیز و برای همه‌جا درست است؟

اگر کسی بگوید برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ یک اتحاد است، به احتمال زیاد کسی با او موافقت نخواهد کرد؛ درحالی که این برابری با تعریفی که از اتحاد کردیم، سازگار است. خودتان داوری کنید: سمت چپ برابری برای $x \geq 0$ و سمت راست آن برای $x \leq 0$ وجود دارد. بنابراین، مقدارهای قابل قبول برای x، تنها شامل یک عدد است: $x = 0$ و چون به ازای $x = 0$، دو سمت برابری مساوی می‌شوند، می‌توان حکم کرد: این برابری به ازای همهٔ مقدارهای قابل قبول x برقرار است. به این ترتیب، برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ با تعریف اتحاد سازگار است.

اکنون ریاضیدانی را پیش خود مجسم کنید که بخواهد از این اتحاد برای حل معادله‌ای استفاده کند. اگر در جای دیگر، ضمن تبدیل‌ها، هم‌ارزی را به هم نزند، تنها می‌تواند یک ریشهٔ صفر را در نتیجهٔ عمل‌های خود به دست آورد (اگر چنین ریشه‌ای برای معادلهٔ مفروض وجود داشته باشد) و سایر ریشه‌های احتمالی معادلهٔ اوگم می‌شوند.

به این ترتیب، نخستین کمبود این تعریف، آن است که ما را از مقایسهٔ دو سمت اتحاد با یکدیگر، محروم می‌کند و امکان این داوری را نمی‌دهد. دو سمت اتحاد، از نظر اتحادی، با هم تفاوت دارند. با این تعریف، نباید A و B را، که در شکل می‌بینید، از نظر اتحادی متفاوت بدانیم؛ تنها به این دلیل که بخش مشترکی دارند. باید دو تابعی را که یکی از آن‌ها در مجموعهٔ A و دیگری در مجموعهٔ B وجود دارد، متحد بنامیم؛ تنها به این خاطر که مقدارهای این دو تابع، در بخش خط‌خورده، بر هم منطبقند.



بنابراین، باید به چنان برابری اتحاد گفت که:

۱. حوزه‌های تعریف سمت چپ و راست برابری بر یکدیگر منطبق باشند.

۲. به ازای همهٔ مقدارهای قابل قبول حرف‌ها برقرار باشند.

چنین تعریفی، دیگر دربارهٔ برابری $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$ صدق نمی‌کند. همچنین نمی‌توانیم برابری $\frac{a^2 - b^2}{a-b} = a + b$ را اتحاد بدانیم.

برای این که از اصطلاح‌های نامتعارف پرهیز کنیم، همهٔ اتحادها را به دو گروه «مطلق» و «غیرمطلق» تقسیم می‌کنیم. اتحاد مطلق به آن‌هایی می‌گوییم که استفاده از آن‌ها، هم‌ارزی را به هم نزند. بقیهٔ «اتحادها» را تنها می‌توان «اتحادهای مشروط» دانست که ما آن‌ها را «غیرمطلق» نامیده‌ایم. همهٔ ما عادت کرده‌ایم که از رابطه‌های زیر استفاده کنیم:

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}.\sqrt{y} \qquad (۳)$$

$$\text{Log}_a (x.y) = \text{Log}_a x + \text{Log}_a y \qquad (۴)$$

ولی این اتحادها به‌هیچ‌وجه بی‌آزار نیستند. اگر در معادله‌ای، از این اتحادها استفاده کنیم و به‌جای سمت چپ، سمت راست را قرار دهیم، به معنای آن است که حوزهٔ تعریف را تنگ‌تر کرده‌ایم و درنتیجه، ممکن است جواب‌هایی را از دست بدهیم. این وضع را می‌توان به‌خوبی در این معادله ملاحظه کرد:

$$\text{Log}[x(x+9)] + \text{Log}\frac{x+9}{x} = 0 \qquad (۵)$$

اگر این معادله را با توجه به رابطهٔ (۴) تبدیل کنیم، به

این صورت درمی‌آید:

$$\text{Log}x + \text{Log}(x+9) + \text{Log}(x+9) - \text{Log}x = 0$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\text{Log}(x+9) = 0 \Rightarrow x+9 = 1 \Rightarrow x = -8$$

ولی این جواب در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند. زیرا لگاریتم عددهای منفی معنا ندارد. از طرف دیگر، $x = -10$ در معادله صدق می‌کند و ما ضمن تبدیلی که انجام دادیم، آن را گُم کرده‌ایم. بنابراین، برای حل معادله‌ها، از اتحادهای (۳) و (۴)، تنها می‌توانیم از راست به چپ استفاده کنیم؛ یعنی به جای سمت راست، مقدار سمت چپ را قرار دهیم. با این تبدیل، ممکن است جواب‌های بیگانه وارد معادله شوند که البته می‌توان آن‌ها را با آزمایش پیدا کرد. ولی اگر ناچار باشیم برای حلّ معادله‌ای از رابطهٔ لگاریتمی استفاده کنیم، باید آن را به این صورت بنویسیم:

$$\text{Log}_a(x.y) = \text{Log}_a|x| + \text{Log}_a|y|$$

دربارهٔ ریشهٔ دوم هم باید به همین ترتیب بنویسیم؛ یعنی از قدر مطلق‌ها استفاده کنیم. معادلهٔ (۵) را باید به این صورت حل کرد:

$$\text{Log}|x| + \text{Log}|x+9| + \text{Log}|x+9| - \text{Log}|x| = 0$$

$$|x+9| = 1 \Rightarrow x_1 = -8,\ x_2 = -10$$

که بعد از آزمایش معلوم می‌شود: $x = -10$.

تشخیص اتحادهای مطلق از غیرمطلق در بین رابطه‌های مثلثاتی، اندکی دشوارتر است. ما به این رابطه‌ها عادت کرده‌ایم:

$$\tan x = \frac{\text{Sin}\,x}{\text{Cos}\,x},\ \text{Cot}\,x = \frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x},\ \text{Sec}\,x = \frac{1}{\text{Cos}\,x},$$

$$\text{Cosec}\,x = \frac{1}{\text{Sin}\,x}$$

اما آیا می‌توان تعریف $\text{Cot}\,x$ را هم به صورت $\frac{1}{\tan x}$ داد؟ گمان می‌کنم همه روی این مطلب توافق داشته باشند که تعریف باید بر یک اتحاد مطلق متکی باشد. مفهوم اتحاد این است که ما حق داریم برای مفهومی، نام تازه‌ای



انتخاب کنیم که به وسیلهٔ واژه انتخاب شده است و یا این که به جای «سمت چپ»، «سمت راست» را در نظر بگیریم. اگر برای تعریف کتانژانت از رابطهٔ $\text{Cot}\,x = \frac{1}{\tan x}$ استفاده کنیم، آن وقت قبول کرده‌ایم که $\text{Cot}\,x$ به ازای $x = k\pi$ (که مخرج را برابر صفر می‌کند) و به ازای $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ (که در آن‌جا، تانژانت معنای خود را از دست می‌دهد) وجود ندارد؛ درحالی که اگر کتانژانت را با رابطهٔ $\text{Cot}\,x = \frac{\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x}$ تعریف کنیم، تنها مقدارهای $x = k\pi$ حذف می‌شوند. بنابراین برابری $\text{Cot}\,x = \frac{1}{\tan x}$ یک اتحاد مطلق نیست و اگر در معادله‌ای به جای $\text{Cot}\,x$، مقدار سمت راست، یعنی $\frac{1}{\tan x}$ را قرار دهیم، ممکن است ریشه‌هایی از دست بروند (همان‌گونه که دربارهٔ معادلهٔ (۱) ملاحظه کردید). از این شگفت‌آورتر، دو رابطهٔ مربوط به تانژانت، نصف کمان است:

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{\text{Sin}\,x}{1+\text{Cos}\,x},\quad \tan\frac{x}{2} = \frac{1-\text{Cos}\,x}{\text{Sin}\,x} \qquad (6)$$

در نگاه اوّل، این دو رابطه ارزشی برابر دارند و به سختی می‌توان یکی را بر دیگری ترجیح داد. ولی اگر آن‌ها را به این صورت بنویسیم:

$$\frac{\text{Sin}\frac{x}{2}}{\text{Cos}\frac{x}{2}} = \frac{\text{Sin}\frac{x}{2}\,\text{Cos}\frac{x}{2}}{\text{Cos}^2\frac{x}{2}},\qquad \frac{\text{Sin}\frac{x}{2}}{\text{Cos}\frac{x}{2}} = \frac{\text{Sin}^2\frac{x}{2}}{\text{Sin}\frac{x}{2}\,\text{Cos}\frac{x}{2}}$$

به روشنی معلوم می‌شود که هر دو طرف رابطهٔ اول، به ازای $\operatorname{Cos}\frac{x}{۲}=۰$ ، معنای خود را از دست می‌دهند؛ درحالی که رابطهٔ دوم به جز آن، به‌ازای $\operatorname{Sin}\frac{x}{۲}=۰$ هم بی‌معنا می‌شود. بنابراین رابطهٔ اول، یک اتحاد مطلق و رابطهٔ دوم یک اتحاد غیرمطلق است. اگر معادلهٔ:

$$\tan\frac{x}{۲}+\tan x=۰ \qquad (۷)$$

را به کمک رابطهٔ دوم (۶) تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{۱-\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sin}x}+\frac{\operatorname{Sin}x}{\operatorname{Cos}x}=۰ \qquad (۸)$$

درنتیجه، معادلهٔ (۷) به معادلهٔ (۸) تبدیل می‌شود که هم‌ارز آن نیست؛ زیرا $x=۲k\pi$ که در معادلهٔ (۷) صدق می‌کند، جزو ریشه‌های معادلهٔ (۸) نیست. با وجود این، اگر معادلهٔ (۸) را به‌طور صوری حل کنیم، این ریشه‌ها هم به دست می‌آیند و چون باید ریشه‌ها را در معادله آزمایش کنیم، همهٔ ریشه‌ها پیدا می‌شوند:

$$۲\operatorname{Cos}^۲x-\operatorname{Cos}x-۱=۰\Rightarrow \operatorname{Cos}x=۱,\ -\frac{۱}{۲}$$

$$x_۱=۲k\pi,\ x_۲=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

با برخی محدودیت‌های اضافی، می‌توان ثابت کرد: هر تبدیلی از تانژانت و کتانژانت به سینوس و کسینوس، حتی بدون توجه به این نکته، آیا اتحاد مورد استفاده مطلق است یا نه؟ در آخر کار، به همه جواب‌های معادله دست می‌یابیم؛ زیرا عمل‌های بینابینی، خودبه‌خود جواب از دست رفته را جبران می‌کنند.

وقتی برای معادله‌ای، از اتحاد غیرمطلق استفاده می‌کنید که درنتیجهٔ آن حوزهٔ تعریف تنگ‌تر می‌شود، دست‌کم باید تحقیق کرد، آیا ریشه‌ای از دست رفته است؟ با وجودی که در بسیاری حالت‌ها، این آزمایش به نتیجه‌ای منفی می‌رسد، نباید از آن غفلت کرد؛ چرا که بدون آن، مسأله از لحاظ منطقی، به‌طور کامل حل نشده است.

نمونه‌ای می‌آوریم که می‌تواند نکتهٔ ظریفی از تعریف معادله را روشن کند. می‌خواهیم این دستگاه معادله‌ها را حل کنیم:

$$\begin{cases}۲\operatorname{Sin}x\ \operatorname{Cos}y=۲-\operatorname{Sin}^۲y\ \operatorname{Sin}z & (۹)\\ (\operatorname{Sin}z)^{\operatorname{Cos}z}=\dfrac{۱}{\operatorname{Sin}^۲z} & (۱۰)\end{cases}$$

برای حل، راحت‌تر است از معادلهٔ دوم آغاز کنیم. می‌دانیم اگر دو توان برابر دارای پایه‌های برابر باشند؛ به شرطی که این پایه مخالف ۰ و ۱± باشد، می‌توان نماها را برابر قرار داد، بنابراین با شرط:

$$\operatorname{Sin}z\neq ۰,+۱,-۱$$

از معادلهٔ دوم نتیجه می‌شود $\operatorname{Cos}z=-۲$ و این جواب ممکن نیست. اکنون باید حالت‌هایی را که استثنا کردیم، آزمایش کنیم.

$\operatorname{Sin}z=۰$ در معادلهٔ دوم دستگاه صدق نمی‌کند. فرض می‌کنیم $\operatorname{Sin}z=۱$ معادلهٔ اول دستگاه چنین می‌شود:

$$۲\operatorname{Sin}x\ \operatorname{Cos}y=۱+\operatorname{Cos}^۲y \qquad (۱۱)$$

به موقعیت نامناسبی می‌رسیم که ما را در همان جای نخست قرار داده است: تعداد معادله‌ها کم‌تر از تعداد مجهول‌هاست؛ ولی گاهی یک معادلهٔ دومجهولی، طوری تنظیم شده است که درون خود دو معادله دارد. نمونهٔ ساده‌ای از این نوع، معادلهٔ $x^۲+y^۲=۰$ است که با دستگاه $x=y=۰$ ، هم‌ارز است؛ زیرا مجموع دو عبارت غیرمنفی، تنها وقتی برابر صفر می‌شود که هرکدام از جمله‌های آن برابر صفر باشد. در این جا هم، همین وضع وجود دارد. برای این که مطلب روشن شود، کافی است معادلهٔ (۱۱) را به این صورت بنویسیم:

$$(\operatorname{Cos}y-\operatorname{Sin}x)^۲+\operatorname{Cos}^۲x=۰$$

که از آن‌جا به این دستگاه می‌رسیم:

$$\operatorname{Cos}y=\operatorname{Sin}x,\ \operatorname{Cos}x=۰$$

و درنتیجه، جواب پیدا می‌شود:

$$x_۱=۲k\pi+\frac{\pi}{۲},\quad y_۱=۲m\pi,\quad z_۱=۲n\pi+\frac{\pi}{۲};$$

$$x_۲=۲k\pi-\frac{\pi}{۲},\quad y_۲=(۲m+۱)\pi,\quad z_۲=۲n\pi+\frac{\pi}{۲}$$

حالت $\sin z = -1$ را هم می‌توان به همین ترتیب بررسی کرد و به این جوابها رسید:

$$x_3 = 2k\pi + \frac{\pi}{2},\quad y_3 = 2m\pi,\quad z_3 = 2n\pi - \frac{\pi}{2};$$

$$x_4 = 2k\pi - \frac{\pi}{2},\quad y_4 = (2m+1)\pi,\quad z_4 = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

به یک نکتهٔ جدّی توجه کنیم. معادله به طور معمول به صورت برابری دو تابع تعریف می‌شود؛ در این صورت، حوزهٔ تعریف معادله را می‌توان از روی تعریف تابع‌ها معین کرد. این تعریف تنها دربارهٔ معادله‌هایی از نوع (۱۰)، نامناسب به نظر می‌رسد. دشواری به این‌جا مربوط می‌شود که x^y تنها به ازای $x > 0$ معین است؛ درحالی که عبارت‌هایی از گونهٔ $(-1)^a$، به ازای همهٔ مقدارهای درست a معنا دارند. اگر این تعریف معادله، به طور سطحی در نظر گرفته شود، ممکن است به این‌جا منجر شود که جواب $\sin z = -1$ را در دستگاه (۹ و ۱۰) کنار بگذاریم، که درست نیست. اما اگر دستگاه (۹ و ۱۰) را بازتابی از یک روند فیزیکی واقعی بدانیم، می‌توان امید داشت که این جواب دوم هم، مثل جواب اوّل، معنای فیزیکی داشته باشد.

در زمان ما، معادله را به‌عنوان برابری دو عبارت تعریف نمی‌کنند؛ معادله را گزاره‌ای می‌دانند که به ازای بعضی از مقدارهای حرف‌ها به «گزاره‌ای درست» و به ازای بعضی مقدارها به «گزاره‌ای نادرست» تبدیل می‌شود. به این ترتیب، معادله صورتی «منطقی» به‌خود می‌گیرد. حلّ معادله، یعنی انتخاب مجهول‌ها، به‌نحوی که این صورت منطقی را به گزاره‌ای درست برساند. اگر معادله را به این صورت تعریف کنیم، دیگر تناقصی بین حوزهٔ تعریف تابع‌ها، با حوزهٔ تعریف معادله پیدا نمی‌شود.

در پایان، چند پرسش را به همراه پاسخ آن‌ها می‌آوریم:

۱ـ آیا می‌توان حکم کرد که در اتحاد مطلق، می‌توان جمله‌ها را از یک طرف، به طرف دیگر منتقل کرد؟

پاسخ: با انتقال جمله‌ها از یک طرف به طرف دیگر، ممکن است اتحاد مطلق بودن خود را از دست بدهد. برای نمونه، $\sqrt{x} = \sqrt{x}$ یک اتحاد مطلق است؛ در حالی که $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$ غیرمطلق می‌شود.

۲ـ حلّ معادله در این جا آورده شده است. این راه‌حل را ارزیابی کنید:

$$\sin 2x + 7\cos 2x + 7 = 0$$

$\sin 2x$ و $\cos 2x$ را بر حسب $\tan x$ می‌نویسیم:

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{7(1-\tan^2 x)}{1+\tan^2 x} + 7 = 0$$

به یک مخرج تبدیل می‌کنیم و مخرج را که همیشه مخالف صفر است، از بین می‌بریم:

$$\tan x = -7 \Rightarrow x = k\pi + \arctan(-7)$$

پاسخ: درست نیست؛ زیرا با استفاده از اتحادهای غیرمطلق، جواب $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ را از دست داده‌ایم.

۳ـ این معادله را حل کنید.

$$\sqrt{\tan x + \sin x} + \sqrt{\tan x - \sin x} = 2\sqrt{\tan x}\,.\cos x$$

پاسخ: داریم: $\tan x \pm \sin x = \tan x(1 \pm \cos x)$. دو عامل $\tan x, 1 \pm \cos x$ غیرمنفی‌اند؛ بنابراین می‌توان از اتحاد غیرمطلق $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ استفاده کرد و به برابری به این صورت می‌رسیم:

$$\sqrt{\tan x}\,(f(x)) = 0$$

جواب:

$$x_1 = 2k\pi + \frac{7\pi}{6},\quad x_2 = 2k\pi + \frac{\pi}{6},\quad x_3 = k\pi$$



اشاره

پارادوکس[1] یا شگفت‌نما، واژه‌ای یونانی است که از دو جزء «para» به معنای «فراتر» و «dox» به معنای «اعتقاد» تشکیل شده است. بنا به تعریفی عام، منظور از آن احکامی است که با عقل سلیم مغایرند و با اصول مقدماتی منطق تضاد دارند. در رشته مقاله های «پارادوکس های ریاضیات و علوم»، پارادوکس به مفهوم وسیعی گرفته شده است که در بر گیرنده هر نتیجه‌ای است که با عقل سلیم و شهود مغایرت دارد و بیدرنگ احساس شگفتی آدمی را برانگیزد.

پارادوکس های ریاضیات مانند پارادوکس های علوم، ممکن است فراتر از لطیفه باشند و به پیدایش بینش‌های ژرف منجر شوند. برای اندیشمندان متقدم یونانی، یک پارادوکس مزاحم آن بود که قطر مربعی به ضلع واحد را نمی‌توان حتی با خط کش دارای درجه‌های بسیار ظریف، به درستی اندازه گرفت. این حقیقت دردسر آفرین، موجب گشودن حوزه پهناور نظریه اعداد گنگ شد. در نظر ریاضیدانان سده نوزدهم، آنچه بسیار متناقض می‌نمود، این بود که همهٔ عضوهای یک مجموعهٔ نامتناهی، ممکن است با عضوهای یکی از زیرمجموعه‌های خود در تناظر یک به یک قرار گیرند و دو مجموعهٔ نامتناهی ممکن است وجود داشته باشند که عضوهای آن‌ها را نتوان در وضعیت تناظر یک به یک نهاد.

این پارادوکس ها به پیدایش نظریه جدید مجموعه‌ها منجر شد و این نظریه نیز تأثیر زیادی بر فلسفه علوم گذاشت. پارادوکس ها می‌توانند بسیار آموزنده باشند. آن‌ها مانند حقه‌های ماهرانه شعبده‌بازی، چنان شگفت‌آورند که آدمی بیدرنگ می‌خواهد به چگونگی پدید آمدن آن‌ها پی ببرد. شعبده‌بازان هرگز چگونگی انجام کارهای خود را آشکار نمی‌کنند، اما ریاضیدانان هیچ نیازی به پنهان نگهداشتن کارهای خود ندارند.

در این سلسله مطالب، سعی بر آن است که سبب متناقض بودن هر پارادوکس، تا آن‌جا که ممکن است به زبانی غیر فنی و در نهایت اختصار، شرح داده شود. ـ م.

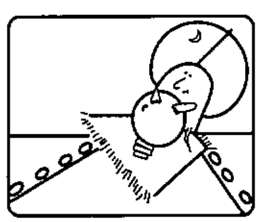
پارادوکس های ریاضیات و علوم

(سرگرمی برای اندیشه ورزی)

پیشگویی دانشمند برهمایی

آیا یک دانشمند برهمایی می‌تواند آینده را در گوی بلورین خود ببیند؟ پیشگویی‌های آینده ممکن است به نوعی پارادوکس منطقی جدید و عجیب منجر شوند.

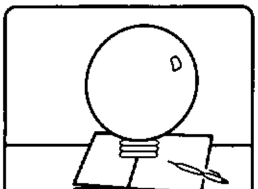
روزی این دانشمند برهمایی با دختر نوجوانش سو، بحث می‌کرد.



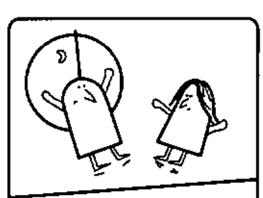
سو: شما کَلَک‌زَن بزرگی هستی پدر. واقعاً نمی‌توانی از آینده بگویی.

دانشمند برهمایی: یقیناً می‌توانم.

سو: نه شما نمی‌توانی. من می‌توانم این را ثابت کنم!



سو روی یک قطعهٔ کاغذ چیزی نوشت، آن را تا کرد و زیر گوی بلورین چسباند.



سو: من پیشامدی را که تا پیش از ساعت ۳ یا اتفاق می‌افتد یا اتفاق نمی‌افتد، شرح داده‌ام. اگر بتوانی پیشگویی کنی که این پیشامد کدام یک از این دو شق خواهد بود، دیگر ناچار نخواهی بود اتومبیلی را که قول داده بودی به مناسبت پایان تحصیلاتم به من هدیه کنی، بخری.

این یک کارت سفید است. اگر فکر می‌کنی که پیشامد رخ خواهد داد، روی این بنویس «بله». اگر فکر می‌کنی رخ نخواهد داد، بنویس «نه». اگر اشتباه کردی، موافقی اتومبیلی را که قرار بود بعد بخری، حالا بخری؟

دانشمند برهمایی: باشد، سو. این یک معامله است.

دانشمند برهمایی نظر خود را

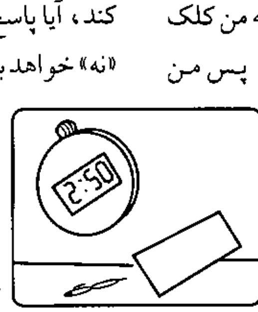


اثر دکتر مارتین گاردنر
ترجمهٔ حسن نصیرنیا

سال دوازدهم ○ ۱۳۸۱ ○ شماره مسلسل ۲۸

روی کارت نوشت. ساعت ۳، سو کاغذ را از زیر گوی بلورین برداشت و نوشته را با صدای بلند خواند: «پیش از ۳ بعدازظهر روی کارت خواهی نوشت نه.»

دانشمند برهمایی: تو به من کلک زدی. من نوشتم «بله»، پس من اشتباه کردم. اما اگر می‌نوشتم «نه»، باز هم اشتباه کرده بودم. هیچ راهی نیست که اگر آن را انتخاب می‌کردم، حق با من بشود.

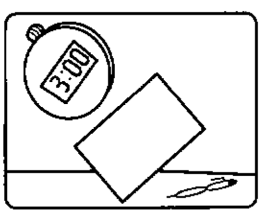


سو: من یک اتومبیل قرمز با صندلی‌های مخصوص می‌خواهم، پدر.

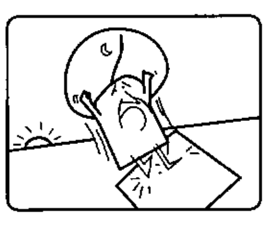
* * *

شکل اصلی این پارادوکس به رایانه‌ای مربوط می‌شود که فقط می‌تواند پاسخ «بله» یا «نه» بدهد. از رایانه می‌خواهند که پیش‌بینی کند، آیا پاسخ بعدی آن «نه» خواهد بود. آشکار است که از نظر منطقی ممکن نیست پیش‌بینی رایانه درست باشد.

این پارادوکس را می‌توان در نهایت به این صورت ساده کرد که از کسی پرسیده شود: «آیا کلمهٔ بعدی که بیان خواهی کرد، نه خواهد بود؟ لطفاً پاسخ بله یا نه بده.»



توجه داشته باشید، این سؤال که آیا کلمهٔ بعدی که بیان خواهی کرد، بله خواهد بود، به پارادوکس نمی‌انجامد. شخص می‌تواند یا پاسخ بله بدهد یا نه، بی‌آن‌که تناقضی به وجود آید. همین طور در مورد تمساح، اگر مادر بگوید: «تو کودک مرا پس خواهی داد»، تمساح می‌تواند کودک را یا بخورد یا پس بدهد، بی‌آن‌که تناقضی پیش بیاید.



زیرنویس

paradox



قسمت اول

تابع نمایی و تابع لگاریتمی

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ تجربی

احمد قندهاری

در ریاضی، تابع‌هایی وجود دارند که فرایند معمولی محاسبات جبری را بالا می‌برند. به عبارت دیگر، برای محاسبات ریاضی پهنهٔ وسیع‌تری را در اختیار ما می‌گذارند. برای مثال، محاسبهٔ عدد $۲^{۱۰۰۰}$ که عددی ۳۰۲ رقمی است، بدون استفاده از لگاریتم، کاری طاقت‌فرسا و فوق‌العاده وقت‌گیر است؛ در صورتی که به کمک لگاریتم به سادگی قابل محاسبه است. به همین علت این تابع‌ها در ماشین‌حساب‌ها و رایانه‌ها به صورت برنامه‌ریزی شده وجود دارند.

این گونه تابع‌ها به تابع‌های نمایی و معکوس آن‌ها به تابع‌های لگاریتمی معروفند که در این مقاله به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

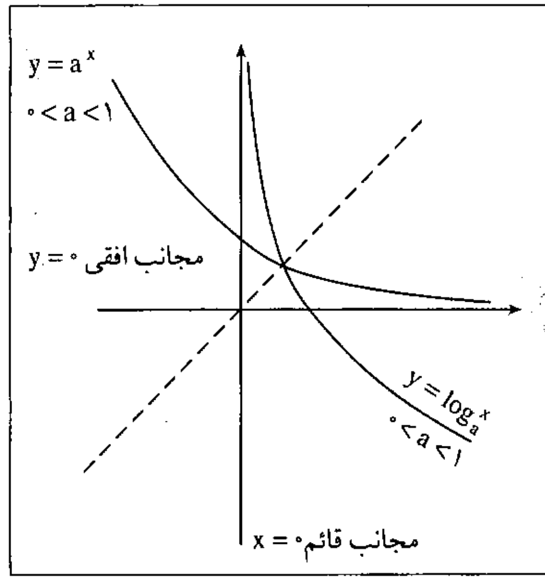
تابع لگاریتمی

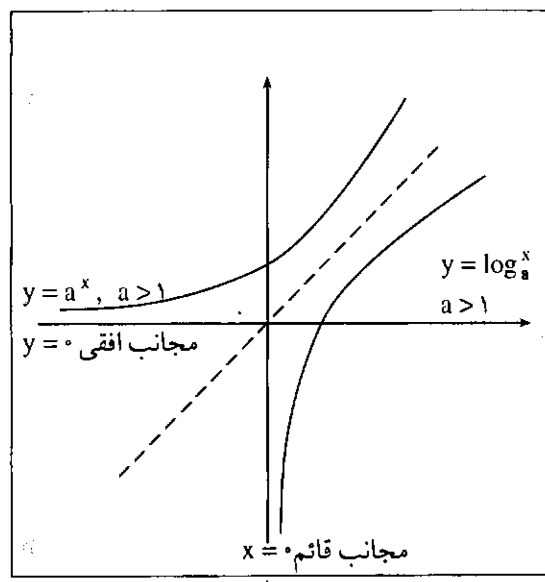
تابع به معادلهٔ $f(x) = a^x$ تابعی است از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}^+$ که یک به یک هم هست؛ پس وارون‌پذیر است. وارون آن را تابع لگاریتم می‌نامیم و آن را به صورت: $y = f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم که در آن: $a > ۰$ و $a \neq ۱$ است.



نمودار تابع لگاریتم

نمودار تابع $y = \log_a x$، قرینهٔ نمودار تابع به معادله $y = a^x$ نسبت به خط $y = x$ است.





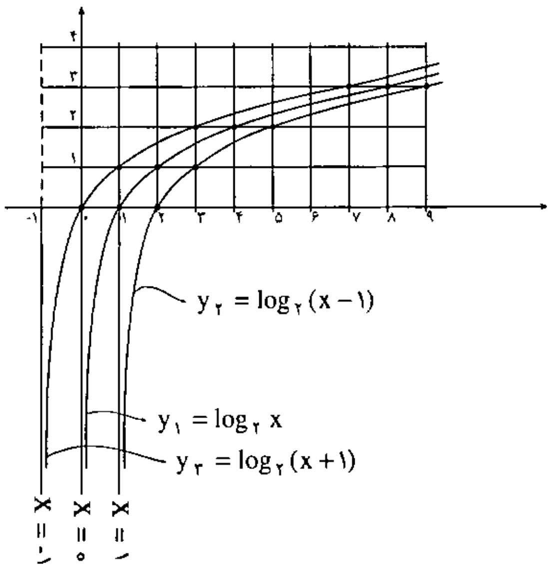
مثال ۱ : تابع‌های به معادله‌های $y_1 = \log_2 x$ و $y_2 = \log_2 (x-1)$ و $y_3 = \log_2 (x+1)$ را در یک شکل رسم کنید.

توجه : می‌توان تابع به معادلهٔ $y_1 = \log_2 x$ را رسم کرد، پس برای رسم تابع y_2 ، منحنی y_1 را یک واحد به سمت راست و برای رسم تابع y_3 ، منحنی y_1 را یک واحد به سمت چپ انتقال داد. ولی بهتر است هریک از سه تابع را به کمک جدول رسم کرد.

x	∘+		۱		۲		۴		۸		+∞
$\log_2 x$	−∞	↗	∘	↗	۱	↗	۲	↗	۳	↗	+∞

x	۱+		۲		۳		۵		۹		+∞
$\log_2 (x-1)$	−∞	↗	∘	↗	۱	↗	۲	↗	۳	↗	+∞

x	−۱+		∘		۱		۳		۷		+∞
$\log_2 (x+1)$	−∞	↗	∘	↗	۱	↗	۲	↗	۳	↗	+∞



مجانب‌های قائم سه نمودار

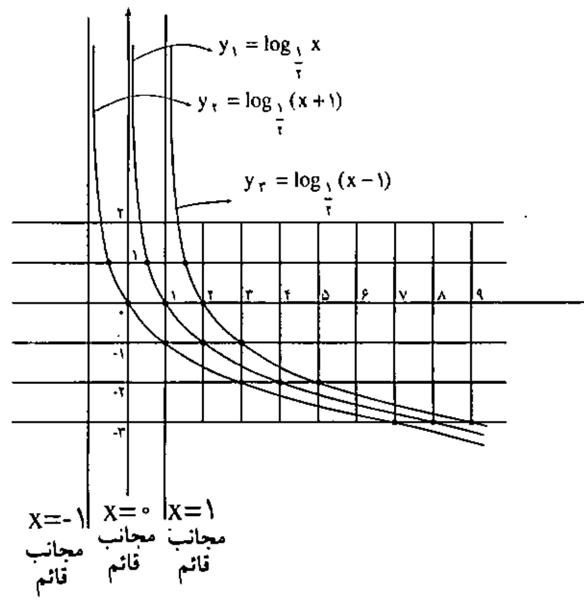
مثال ۲ : نمودار تابع‌های به معادله‌های $y_1 = \log_{\frac{1}{2}} x$ و $y_2 = \log_{\frac{1}{2}} (x+1)$ و $y_3 = \log_{\frac{1}{2}} (x-1)$ را در صفحه مختصات رسم کنید.

حل : مانند مثال قبل نمودارها را با نقطه‌یابی رسم می‌کنیم:

x	∘+		۱/۲		۱		۲		۴		۸		+∞
$\log_{\frac{1}{2}} x$	−∞	↘	۱	↘	∘	↘	−۱	↘	−۲	↘	−۳	↘	−∞

x	−۱+		−۱/۲		∘		۱		۳		۷		+∞
$\log_{\frac{1}{2}} (x+1)$	−∞	↘	۱	↘	∘	↘	−۱	↘	−۲	↘	−۳	↘	−∞

x	۱+		۳/۲		۲		۳		۵		۹		+∞
$\log_{\frac{1}{2}} (x-1)$	−∞	↘	۱	↘	∘	↘	−۱	↘	−۲	↘	−۳	↘	−∞



لگاریتم طبیعی

داشتیم: $\begin{cases} \mathrm{Lim}(1+\frac{1}{n})^n = e \\ n \to +\infty \end{cases}$

اگر مبنای لگاریتم عدد e باشد، این لگاریتم را لگاریتم طبیعی گویند و آن را با نماد $\log_e$ یا Ln نشان می‌دهند.

$$x = e^y \Leftrightarrow \mathrm{Ln}x = y \text{ یا } y = \mathrm{Ln}x$$

توجه: تمام فرمول‌های $\log_a x$، $a > 0$ و $a \neq 1$ در مورد $\log_e x$ یا Lnx نیز صادق است.

مثال ۳: اگر $\mathrm{Ln}2 = 0/693$ باشد، آن‌گاه $\mathrm{Ln}4^{2\sqrt{2}}$ را بیابید.

حل:

$$\mathrm{Ln}4^{2\sqrt{2}} = \mathrm{Ln}(2^2)^{2\sqrt{2}} = \mathrm{Ln}(2)^{4\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\mathrm{Ln}2 = 4\sqrt{2}(0/693) = 3/908$$

مثال ۴: دامنهٔ تعریف تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{\log_2 (x^2 - 3)}$ را بیابید.

حل:

$$\log_2(x^2-3) \geq 0 \Rightarrow (x^2-3) \geq 2^0 \Rightarrow x^2 - 3 \geq 1$$

$$\Rightarrow x^2 \geq 4 \Rightarrow \text{یا} \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases} \Rightarrow D_f = (-\infty, -2] \cup [2 + \infty)$$

مثال۵: دامنهٔ تعریف تابع به معادلهٔ $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 3)}$ را بیابید.

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 3) \geq 0 \xrightarrow{\text{مبنا کوچک‌تر از (۱) است}} 0 < x^2 - 3 \leq (\tfrac{1}{2})^0 \Rightarrow$$

$$0 < x^2 - 3 \leq 1$$

$$\Rightarrow 3 < x^2 \leq 4 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3} < x \leq 2 \\ -2 \leq x < -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2]$$

مثال ۶: ثابت کنید تابع به معادلهٔ $f(x) = \log(\sqrt{1+4x^2} - 2x)$ تابعی فرد است.

حل:

$$f(-x) = \log(\sqrt{1+4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(\sqrt{1+4x^2} - 2x) + \log(\sqrt{1+4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(\sqrt{1+4x^2} - 2x)(\sqrt{1+4x^2} + 2x)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log(1 + 4x^2 - 4x^2)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = \log 1$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$$

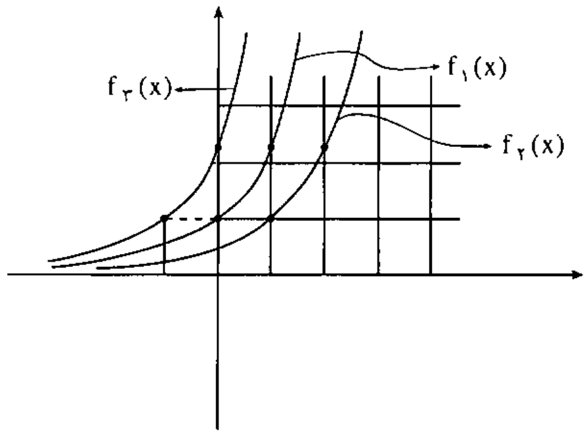
f تابعی فرد است.

مثال ۷: نمودار تابع‌های به معادله‌های $f_1(x) = e^x$ و $f_2(x) = e^{x-1}$ و $f_3(x) = e^{x+1}$ را در یک نمودار رسم کنید.

x	$-\infty$ ↗	0 ↗	1 ↗	$+\infty$
e^x	0^+	1	e	$+\infty$

x	$-\infty$ ↗	−1 ↗	0 ↗	$+\infty$
e^{x+1}	0^+	1	e	$+\infty$

x	$-\infty$ ↗	1 ↗	2 ↗	$+\infty$
e^{x-1}	0^+	1	e	$+\infty$

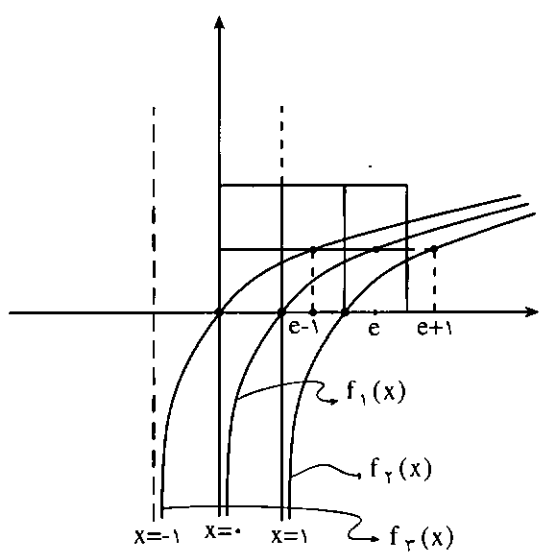


مثال ۸ : نمودار تابع‌های به معادله‌های
$f_۱(x) = Ln(x)$ ، $f_۲(x) = Ln(x-۱)$ و $f_۳(x) = Ln(x+۱)$
را در یک شکل رسم کنید.

x	۰^+ ↗	۱ ↗	e ↗	$+\infty$
$L_n x$	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$

x	۱^+ ↗	۲ ↗	e+۱ ↗	$+\infty$
$L_n(x-۱)$	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$

x	-۱^+ ↗	۰ ↗	e−۱ ↗	$+\infty$
$L_n(x+۱)$	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$



مثال ۹ : نامعادله $\log_{\frac{۱}{۸}}(x^۲ - ۵) \geq -\frac{۲}{۳}$ را حل کنید.

حل :

$$\log_{\frac{۱}{۸}}(x^۲ - ۵) \geq -\frac{۲}{۳} \Rightarrow \log_{۲^{-۳}}(x^۲ - ۵) \geq -\frac{۲}{۳} \Rightarrow$$

$$-\frac{۱}{۳}\log_۲(x^۲ - ۵) \geq -\frac{۲}{۳}$$

طرفین نامساوی را در (۳-) ضرب می‌کنیم، جهت نامساوی عوض می‌شود :

$$\Rightarrow \log_۲(x^۲ - ۵) \leq ۲ \Rightarrow ۰ < x^۲ - ۵ \leq ۲^۲ \Rightarrow ۰ < x^۲ - ۵ \leq ۴$$

$$\Rightarrow ۵ < x^۲ \leq ۹ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{۵} < x \leq ۳ \\ -۳ \leq x < -\sqrt{۵} \end{cases}$$

مثال ۱۰ : برد تابع به معادلهٔ $f(x) = \log(۳Sinx - ۲)$ را بیابید.

حل : $۳Sinx - ۲$ را مساوی P می‌گیریم. پس $P = ۳Sinx - ۲$

$$Sinx = ۱ \Rightarrow P = ۱$$

$$Sinx = \frac{۲^+}{۳} \Rightarrow P = ۰^+ \Rightarrow ۰^+ < P < ۱ \Rightarrow ۰^+ < ۳Sinx - ۲ < ۱$$

$$\Rightarrow \log ۰^+ \to -\infty, \ \log ۱ = ۰$$

چون تابع $f(x) = \log x$ اکیداً صعودی است، پس برد تابع : $(-\infty, ۰]$ است.

مشتق تابع لگاریتمی

$$y = \log_a x \Rightarrow y'_x = \frac{۱}{x}\log_a e$$

$$y = \log_a u \Rightarrow y'_x = \frac{u'}{u}\log_a e$$

مثال ۱۱ : مشتق تابع به معادلهٔ $y = f(x) = \log\sqrt[۳]{x^۲}$ را نسبت به x بیابید.

$$u = \sqrt[۳]{x^۲} \Rightarrow u'_x = \frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}$$

$$y'_x = f'(x) = \frac{u'}{u}\log e$$

$$\Rightarrow y'_x = \frac{\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x}}}{\sqrt[۳]{x^۲}}\log e = \frac{۲}{۳x}\log e$$

مثال ۱۲ : مشتق تابع به معادلهٔ $y = \log(\text{Sin}x + \tan x)$ را نسبت به x بیابید.

$$u = \text{Sin}x + \tan x \Rightarrow u'_x = \text{Cos}x + (۱ + \tan^۲ x)$$

$$y = \log u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}\log e$$

$$y'_x = \frac{u'}{u}\log e = \frac{\text{Cos}x + ۱ + \tan^۲ x}{\text{Sin}x + \tan x}\log e$$

$$y = L_n(x) \Rightarrow y'_x = \frac{۱}{x}$$

$$y = L_n(u) \Rightarrow y'_x = \frac{u'_x}{u}$$

مثال ۱۳ : اگر $y = L_n(\tan x + \cot x)$ باشد، y'_x را بیابید.

$$u = \tan x + \text{Cot}x$$
$$\Rightarrow u'_x = ۱ + \tan^۲ x - ۱ - \text{Cot}^۲ x$$
$$= \tan^۲ x - \text{Cot}^۲ x$$

$$y'_x = \frac{u'_x}{u} \Rightarrow y'_x = \frac{\tan^۲ x - \text{Cot}^۲ x}{\tan x + \text{Cot}x}$$



پاسخ تفریح اندیشه ۳

پاسخ ۳:

$$D = \{(۶ + \sqrt{۲۹},\ ۶ - \sqrt{۲۹}),\ (۴,۳)\}$$

حل : قرار می‌دهیم :

$$\begin{cases} x + y = w \\ xy = z \end{cases} \quad (۱)$$

در این صورت، دستگاه مفروض را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\begin{cases} w + z = ۱۹ \\ zw = ۸۴ \end{cases}$$

مجموع w و z ریشه‌های معادلهٔ $a^۲ - ۱۹a + ۸۴ = ۰$ هستند. ریشه‌های این معادله ۱۲ و ۷ هستند. در این صورت، $w = ۱۲$ و $z = ۷$ و $w = ۷$ و $z = ۱۲$.

بعد، این مقادیر را در (۱) قرار می‌دهیم و دستگاه‌های زیر را به دست می‌آوریم :

(ب) $\begin{cases} x + y = ۷ \\ xy = ۱۲ \end{cases}$ (الف) $\begin{cases} x + y = ۱۲ \\ xy = ۷ \end{cases}$

جواب دستگاه (الف) عبارت است از :

$x = ۶ + \sqrt{۲۹},\ y = ۶ - \sqrt{۲۹}$

جواب دستگاه (ب) عبارت است از :

$x = ۴,\ y = ۳$

❊ ❊ ❊

گراف‌ها و کاربردهای آن

قسمت دوم

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

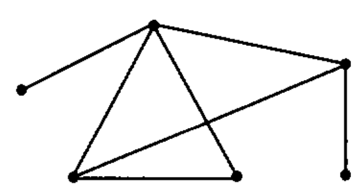
○ سهراب شریف‌زاده

دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف

در گراف G با p رأس که $\deg v_i = d_i$، دنبالهٔ ناصعودی (نزولی) «$d_1, d_2, d_3, \dots, d_p$» را دنبالهٔ درجات رئوس گراف G یا دنباله گرافی G می‌نامیم که:

$$p-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_p \geq 0$$

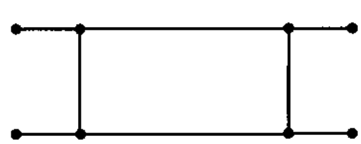
مثال: گراف G به صورت زیر است، دنبالهٔ گرافی G را بنویسید.



حل: چون دنبالهٔ گرافی، یک دنبالهٔ ناصعودی (نزولی) بر حسب درجات رأس‌هاست، پس دنباله گراف G به صورت زیر است: «۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۳ , ۴»

مثال: به دنبالهٔ درجات «۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳» یک گراف نسبت دهید.

حل:



نکتهٔ ۱: مجموع جملات دنباله، عددی زوج (دو برابر تعداد یال‌های گراف) است.

نکتهٔ ۲: تعداد درجات رأس‌های فرد (جملات فرد) در هر دنبالهٔ گرافی زوج است.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۵ , ۶ , ۶ , ۶ , ۶ , ۷» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، تعداد رأس‌های با درجهٔ فرد، عددی فرد است.

نکتهٔ ۳: در گراف p رأسی، حداقل دو رأس با درجهٔ یکسان وجود دارد ($p \geq 2$).

نکتهٔ ۴: دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف، همگی نمی‌توانند متمایز باشند.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر. زیرا دنبالهٔ درجات همگی متمایزند و حداقل دارای دو درجهٔ یکسان نیستند، پس نمی‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌ها باشد.

سؤال: اگر در گرافی $\Delta = 4$ و $\delta = 1$، آیا در این گراف دنبالهٔ درجات رأس‌ها می‌توانند متمایز باشند؟

پاسخ: خیر، زیرا از آن‌جایی که $\Delta = ۴$، یعنی حداقل ۵ رأس داریم، و درجهٔ هر رأس فقط یکی از اعداد ۱ , ۲ , ۳ , ۴ می‌تواند باشد و چون تعداد رأس‌ها از تعداد درجات بیش‌تر است، پس بنابر اصل «لانهٔ کبوتری» یقیناً چنین گرافی حداقل دو رأس از درجهٔ یکسان خواهد داشت.

آزمون۱۳: دنبالهٔ «$\alpha+۱, \alpha+۲, \alpha+۳, \alpha+۴, \alpha+۵$» به ازای چه مقداری از α دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف است؟

۱) صفر　　۲) هیچ مقدار

۳) ۲　　۴) هر مقدار طبیعی α

حل: گزینهٔ (۲). چون درجات رأس‌ها نمی‌توانند متمایز باشند، پس هیچ مقداری برای α وجود ندارد که دنبالهٔ مزبور، دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد.

نکتهٔ۵: گرافی که دو رأس از درجهٔ $(p-۱)$ دارد، رأس درجهٔ یک ندارد.

نکتهٔ ۶: گرافی که یک رأس از درجهٔ $(p-۱)$ دارد، رأس درجهٔ صفر ندارد.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۰ , ۲ , ۳ , ۳ , ۳ , ۵» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، اگر گراف از مرتبهٔ ۶ دارای رأس از درجهٔ ۵ باشد، رأس درجهٔ صفر نخواهد داشت؛ زیرا رأس درجهٔ ۵ با بقیهٔ رأس‌ها مجاور است.

نکتهٔ ۷: در گراف از مرتبه p، رأس درجهٔ p وجود ندارد.

آزمون ۱۴: دنبالهٔ درجه‌های رأس‌های یک گراف به صورت «a,a,a,a,a,a» است. a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۰　　۲) ۱

۳) ۵　　۴) ۶

حل: گزینهٔ (۴). زیرا گراف از مرتبهٔ ۶ دارای رأس از درجه ۶ نیست.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱ , ۲ , ۴ , ۴ , ۵» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، زیرا تعداد جملات دنباله برابر ۵ است و هر گراف از مرتبهٔ ۵ دارای رأس درجهٔ ۵ نیست.

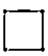
نکتهٔ۸: در گراف با p رأس، ماکزیمم درجه در صورت وجود برابر $p-۱$ است.

نکتهٔ ۹: در گراف با p رأس که k رأس درجهٔ $(p-۱)$ دارد، آن‌گاه $\delta \geq k$ $(k < p-۱)$

سؤال: آیا دنبالهٔ «۳ , ۳ , ۵ , ۵ , ۵ , ۵»، می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، چون دنبالهٔ مزبور ۴ رأس درجهٔ ۵ دارد. پس باید $\delta \geq ۴$، که داریم: $\delta = ۳$.

نکتهٔ ۱۰: تعداد رأس‌های زوج در هر گراف ممکن است عددی زوج یا عددی فرد باشد.

مثال: درگراف  تعداد رأس‌های زوج، عددی زوج و در گراف  تعداد رئوس زوج، عددی فرد است.

آزمون ۱۵: کدام دنباله، دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف ساده نیست؟

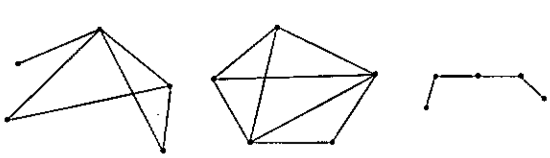
۱) «۱ , ۲ , ۲ , ۳ , ۴»

۲) «۰ , ۱ , ۲ , ۳ , ۴»

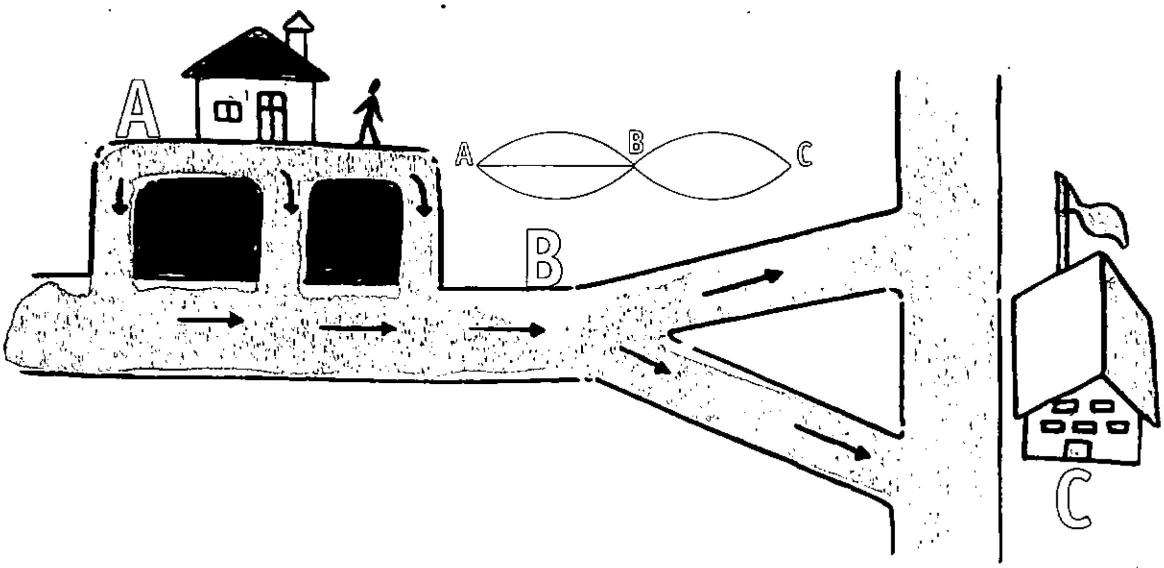
۳) «۲ , ۳ , ۳ , ۴ , ۴»

۴) «۱ , ۱ , ۲ , ۲ , ۲»

حل: گزینهٔ (۲). اگر گراف مرتبهٔ ۵ دارای رأس درجهٔ ۴ باشد، رأس درجهٔ صفر نباید داشته باشد. گراف‌های بقیهٔ دنباله‌ها به صورت زیر هستند.



(۱)　　(۳)　　(۴)



آزمون ۱۶ : کدامیک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف فرد است.

۲) تعداد رأس‌های فرد در هر گراف زوج است.

۳) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف زوج است.

۴) تعداد رأس‌های فرد در هر گراف فرد است.

حل : گزینهٔ (۲)

آزمون ۱۷ : گراف G دارای ۳۰ یال است. این گراف سه رأس از درجهٔ ۲ و سه رأس از درجهٔ ۶ دارد و بقیهٔ رئوس از درجهٔ ۳ هستند. تعداد رأس‌های G کدام است؟

۱) ۱۳   ۲) ۱۵

۳) ۱۶   ۴) ۱۸

حل : گزینهٔ (۴). فرض کنیم G دارای x رأس درجهٔ ۳ است، پس:

$$\sum \deg v_i = ۲q \to (۳\times۲)+(۳\times۶)+(x\times۳)=۲\times۳۰\to$$
$$۶+۱۸+۳x=۶۰\to ۳x=۳۶\Rightarrow x=۱۲$$

پس: $P=۳+۳+x=۱۸$

آزمون ۱۸ : اگر a و b و c رأس‌هایی از گراف ساده $G=(V,E)$ از مرتبهٔ ۷ باشند و $\deg a=\deg b=\deg c=۰$، آن‌گاه E حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۴   ۲) ۶

۳) ۸   ۴) ۵

حل : گزینهٔ (۲). چهار رأس باقی‌مانده، باعث به‌وجود آمدن یال می‌شوند. پس حداکثر تعداد یال‌های این گراف برابر است با: $\binom{۴}{۲}=۶$.

سؤال : آیا در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات می‌توانند تصاعد حسابی تشکیل دهند؟ چرا؟

پاسخ : خیر، چون در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات رأس‌ها نمی‌توانند متمایز باشند.

تذکر ۱ : دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف زمانی می‌توانند، تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند که تمام جملات دنباله با هم برابر باشند. پس قدر نسبت این تصاعد برابر صفر است.

تذکر ۲ : در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات رأس‌ها نمی‌توانند تصاعد هندسی تشکیل دهند.

تذکر ۳ : دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف، زمانی می‌تواند تصاعد هندسی تشکیل دهند که جملات دنباله با هم برابر باشند. پس قدر نسبت این تصاعد برابر یک است.

مسأله : اگر در گراف G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q، میانگین درجات رأس‌ها بزرگ‌تر از ۲ باشد، ثابت کنید: $q>p$

حل : اگر $d_1, d_2, d_3, \dots, d_p$ درجه‌های رأس‌های گراف G باشند، آن‌گاه از فرض داریم:

$$\frac{d_1+d_2+\ ...+d_p}{p} > 2 \to \frac{2q}{p} > 2 \to 2q > 2p \to q > p$$

گراف منتظم

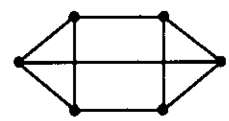
گرافی را که درجهٔ همهٔ رأس‌های آن یکسان باشد، گراف منتظم می‌نامند.

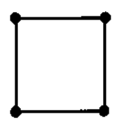
تعریف: گراف G از مرتبه p را r- منتظم می‌نامیم، هرگاه درجهٔ هر رأس G برابر با r باشد (توجه کنید، r عدد صحیح نامنفی است).

مثال ۱:

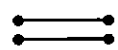
(۱ . منتظم مرتبهٔ ۲)

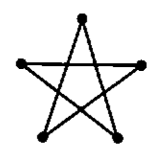
(۰ . منتظم مرتبهٔ ۱)

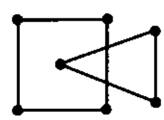

(۳ . منتظم مرتبهٔ ۶)


(۲ . منتظم مرتبهٔ ۴)


(۲ . منتظم مرتبهٔ ۳)

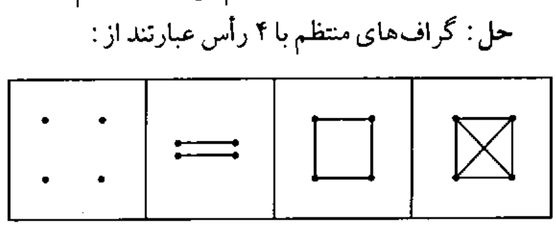

(۱ . منتظم مرتبهٔ ۴)


(۲ . منتظم مرتبهٔ ۵)


(۲ . منتظم مرتبهٔ ۷)

مثال ۲: همهٔ گراف‌های منتظم مرتبهٔ ۴ را رسم کنید.

حل: گراف‌های منتظم با ۴ رأس عبارتند از:



توجه کنید:

در هر گراف r- منتظم از مرتبه p و اندازهٔ q: $rp = 2q$

تذکر: طبق رابطهٔ $rp = 2q$ در گراف r- منتظم مرتبهٔ p، حداقل یکی از دو مقدار r یا p باید عددی زوج باشد.

نکتهٔ ۱: دنبالهٔ درجات رأس‌های گراف r- منتظم به صورت «$\underbrace{r,r,r,\dots,r}_{p}$ تا» است.

نکتهٔ ۲: در هر گراف r- منتظم: $\Delta = \delta = r$ (عکس مطلب برقرار است.)

نکته ۳: گراف فرد منتظم از مرتبهٔ فرد وجود ندارد.

مثال ۱: گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۷ وجود ندارد، زیرا برای $q = \frac{1}{2} \times 7 \times 3$، عدد صحیح نامنفی به دست نمی‌آید.

مثال ۲: تعداد یال‌های گراف ۷ منتظم مرتبهٔ ۱۲ را بیابید.

حل: $q = \frac{1}{2} rp = \frac{1}{2} \times 7 \times 12 = 42$

گراف آشنایی

سؤال: آیا ممکن است در یک گروه ۱۳ نفری، هر شخص به تنهایی ۳ دوست داشته باشد؟ دلیل بیاورید.

پاسخ: خیر. اگر هریک از ۱۳ نفر را با یک نقطه (رأس) نمایش دهیم، دو نقطه را توسط یک یال به هم وصل می‌کنیم، اگر و فقط اگر افرادی که نقطه‌ها را نمایش می‌دهند، دوست باشند، بنابراین درجهٔ هریک از ۱۳ رأس برابر ۳ می‌شود و مجموع درجات رأس‌های گراف ۳۹ خواهد شد. این موضوع با این قضیه که مجموع درجات رئوس هر گراف زوج است، تناقض دارد. بنابراین جواب منفی است.

پاسخ دیگر: گراف این آشنایی یک گراف فرد منتظم از مرتبهٔ فرد خواهد بود که امکان ندارد. (۳ـ منتظم مرتبهٔ ۱۳)

مسأله: فرض کنید G یک گراف ساده از مرتبه p و اندازه $q = 13$ باشد، اگر G یک گراف r- منتظم باشد و داشته باشیم: $2r - p = 2$، مقادیر p و r را بیابید؟ (امتحان هماهنگ کشوری ـ ۸۰)

حل:

$$\begin{cases} rp=2q \to rp=2\times 12 \to rp=24 \\ 2r-p=2 \xrightarrow[p\neq 0]{\text{ضرب طرفین در}} 2rp-p^2=2p \end{cases} \longrightarrow$$

$$2\times 24-p^2=2p \to p^2+2p-48=0$$

$$\to (p+8)(p-6)=0 \to \begin{cases} p=-8 \quad (\text{غ ق ق}) \\ p=6 \end{cases}$$

بنابراین: $6r=24 \to r=4$

آزمون ۱۹ : دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف ۳- منتظم به صورت «$\alpha-2, \alpha-2, \beta, \beta, \delta-1, \delta-1$» است. حاصل $\alpha+2\beta+\delta$ کدام است؟

۱) ۱۷   ۲) ۱۸

۳) ۱۶   ۴) ۱۵

حل: گزینهٔ (۴). چون گراف ۳- منتظم است، پس باید تمام جملات دنباله برابر ۳ باشند. بنابراین:

$$\begin{matrix} \alpha-2=3 & & \alpha=5 & \\ \beta=3 & \to & \beta=3 & \to \alpha+2\beta+\delta=5+6+4=15 \\ \delta-1=3 & & \delta=4 & \end{matrix}$$

آزمون ۲۰ : گراف G یک گراف ۵- منتظم مرتبهٔ p است و $q=4p-27$ ، تعداد یال‌های این گراف کدام است؟

۱) ۴۵   ۲) ۵۷

۳) ۴۹   ۴) ۴۱

حل: گزینهٔ (۱) $5p=2q$

$$q=4p-27 \to 2q=8p-54 \to 5p-8p=-54 \to 3p=54 \to p=18$$

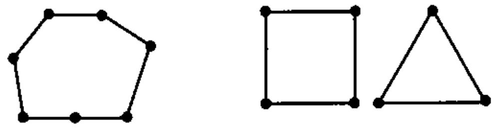
پس: $q=\frac{5\times 18}{2}=45$

آزمون ۲۱ : تعداد گراف‌های ۲- منتظم مرتبهٔ ۷ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) هیچ

حل: گزینهٔ (۲). گراف‌های ۲- منتظم از مرتبهٔ ۷ عبارتند از:



نکته: در هر گراف ۲- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q همواره داریم: $p=q$

آزمون ۲۲ : گراف G، ۲- منتظم است که با افزودن ۳ یال به آن به گراف ۳- منتظم تبدیل می‌شود. مرتبه G کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶

۳) ۷   ۴) ۸

حل: گزینه (۲)

$$\left.\begin{matrix} p=q & \text{: در گراف ۲- منتظم} \\ 3p=2(q+3) & \text{در گراف ۳ - منتظم} \end{matrix}\right\} \to p=6$$

نکته: در گراف r- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q:

$$p>r, p^2>2q$$

آزمون ۲۳ : کدام گراف وجود ندارد؟

۱) ۰ - منتظم از مرتبهٔ ۵

۲) ۴- منتظم از مرتبهٔ ۷

۳) ۷ - منتظم از مرتبهٔ ۸

۴) ۵ - منتظم از مرتبهٔ ۴

حل: گزینهٔ (۴). درگراف ۵ - منتظم مرتبهٔ ۴، درجهٔ هر رأس از تعداد رأس‌ها بیش‌تر است که امکان ندارد.

سؤال: آیا گراف منتظم با ۱۵ یال وجود دارد که درجهٔ تمام رأس‌های آن ۴ باشد؟

پاسخ: فرض می‌کنیم مرتبهٔ این گراف p باشد. بنابراین:

$$4p=2q \to p=\frac{2\times 15}{4}=\frac{30}{4}$$

p عدد طبیعی نیست، بنابراین چنین گرافی

وجود ندارد.

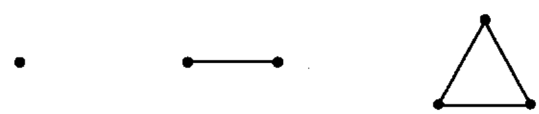
گراف کامل

گرافی را که تمام رأس‌های آن دو به دو با هم مجاور باشند، گراف کامل می‌نامند.

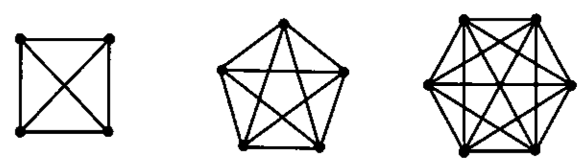
به عبارت دیگر: «گرافی که هر دو رأس متمایز آن با یک یال به هم وصل باشند، گراف کامل است.»

هر گراف کامل مرتبهٔ p را به k_p نمایش می‌دهند.

مثال:



$k_۱$ $\quad$ $k_۲$ $\quad$ $k_۳$



$k_۴$ $\quad$ $k_۵$ $\quad$ $k_۶$

تذکر ۱: گراف k_p، یک گراف $(p-۱)$ منتظم است.

تذکر ۲: هر گراف کامل منتظم است ولی عکس آن درست نیست.

مثال: گراف □ گراف منتظم است، ولی کامل نیست.

توجه کنید:

قضیه: در هر گراف کامل k_p با اندازهٔ q:

$$q = \frac{۱}{۲}p(p-۱)$$

اثبات: چون گراف کامل است، درجات کلیهٔ رأس‌های آن برابر $(p-۱)$ است. پس:

$$\underbrace{(p-۱)+(p-۱)+\cdots+(p-۱)}_{p} = ۲q \rightarrow p(p-۱) = ۲q \rightarrow$$

$$q = \frac{۱}{۲}p(p-۱)$$

آزمون ۲۴: گراف کامل k_p دارای ۲۸ یال است. p کدام است؟

۱) ۶	۲) ۷
۳) ۸	۴) ۹

حل: گزینهٔ (۳)

$$q = \frac{۱}{۲}p(p-۱) \Rightarrow p(p-۱) = ۲۸ \times ۲ = ۵۶ = ۸ \times ۷ \rightarrow p = ۸$$

آزمون ۲۵: (سراسری، ریاضی، ۷۵): در گراف سادهٔ $G=(V,E)$ ، $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E(G)$ پانزده عضو دارد. از هر عضو V حداقل چند یال می‌گذرد؟

۱) ۲	۲) ۳
۳) ۴	۴) ۵

حل: گزینهٔ (۴). با توجه به این که گراف کامل $k_۶$ دارای ۱۵ یال است، پس گراف G همان گراف $k_۶$ است که درجهٔ هر رأس آن $p-۱ = ۶-۱ = ۵$ است. بنابراین از هر عضو V حداقل ۵ ریال می‌گذرد.

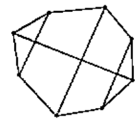
نکته: در هر گراف کامل با مرتبهٔ p و اندازهٔ q:

$$p+q = \frac{۱}{۲}p(p+۱) = \binom{p+۱}{۲}$$

آزمون ۲۶: اگر G یک گراف کامل باشد، کدام عدد می‌تواند برابر مجموع مرتبه و اندازهٔ G باشد؟

۱) ۲	۲) ۲۰
۳) ۱۸	۴) ۲۴

حل: گزینهٔ (۱). با توجه به نکتهٔ بالا، دو برابر مجموع مرتبه و اندازهٔ یک گراف کامل به صورت حاصل ضرب دو عدد متوالی است که این قاعده بین گزینه‌ها فقط در مورد عدد ۲۱ صادق است؛ زیرا $۶ \times ۷ = ۴۲ = ۲۱ \times ۲$

آزمون۲۷ : به گراف  چند یال اضافه کنیم تا کامل شود؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۴

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

حل : گزینهٔ (۳) . می‌دانیم که تعداد یال‌های گراف k_8 برابر $28 = 7 \times 8 \times \frac{1}{2}$ است و گراف فوق ۱۲ یال دارد . پس باید تعداد ۱۶ = ۱۲ − ۲۸ یال به گراف مزبور افزود تا کامل شود .

نکته : در هر گراف کامل با q یال ، مقدار $8q + 1$ عددی مربع کامل است .

نکته : در گراف کامل مرتبهٔ p مقدار $\Delta + \delta$ ماگزیمم است .

آزمون ۲۸ : اندازهٔ گراف ها داده شده‌اند . با کدام اندازه حاصل $\delta + \Delta$ ماگزیمم است؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۹

۳) ۲۰ ۴) ۲۱

حل : گزینهٔ (۴) . همگی اعداد می توانند برابر تعداد یال‌های یک گراف مرتبه ۷ باشند ، ولی چون گراف مرتبهٔ ۷ با ۲۱ یال یک گراف کامل است ، حاصل $\delta + \Delta$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد .

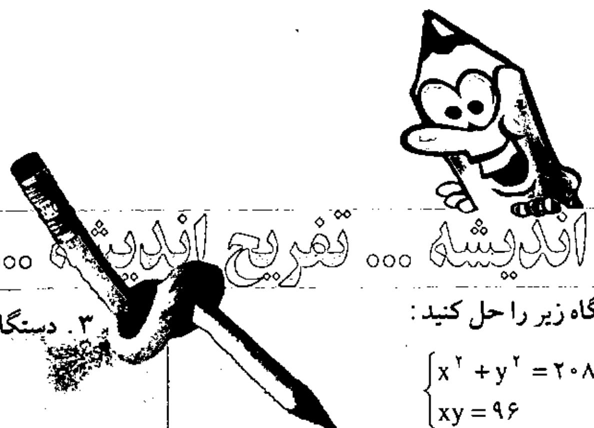
آزمون ۲۹ : در گرافی از مرتبهٔ ۹ و اندازهٔ ۳۵ ، چند رأس درجهٔ ۸ وجود دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶

۳) ۷ ۴) ۸

حل : گزینهٔ (۳) . می‌دانیم گراف کامل k_9 دارای ۳۶ یال است و گراف مزبور یک یال از گراف k_9 کم دارد . بنابراین گراف دارای ۲ رأس از درجهٔ ۷ و ۷ رأس از درجهٔ ۸ است .





تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

۱ . دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases}$$

۲ . مجموع پنج زاویه از زاویه های یک هشت ضلعی ، °۸۴۵ است . از سه زاویهٔ باقیمانده ، دو زاویه ، متمم یکدیگر و دو زاویه ، مکمل یکدیگرند . اندازهٔ این سه زاویه را بیابید .

۳ . دستگاه زیر را که در آن $x > y$ ، حل کنید :

$$\begin{cases} x + y + xy = 19 \\ xy(x + y) = 84 \end{cases}$$

۴ . مجموع دو عدد ۴۵ است . مجموع خارج قسمت های آن‌ها و معکوس آن ۲/۰۵ است . حاصل ضرب این دو عدد را بیابید .

پاسخ تفریح اندیشه در صفحه‌های ۱۳ ، ۵۴ و ۶۴ آمده است .

هنر تشکیل معادله

برای دانش آموزان سال اول

• علیرضا عین اللهی



درصورتی که دانش آموزان روش های حل یک معادله را فرابگیرند، مطمئناً اغلب آنان در حل سایر معادلات، مشکلی ندارند؛ بلکه تبدیل یا تشکیل یک معادله با استفاده از مفروضات مسأله است که برای بسیاری از دانش آموزان مشکل ساز است. در فعالیت های زیر، سعی کرده ایم هنر تشکیل یک معادله را بیاموزیم؛ یعنی نحوهٔ تبدیل زبان جبری یک مسأله را به زبان معمولی آموزش دهیم. دانش آموزان عزیز، فعالیت نمونه را به صورت انفرادی مطالعه کنید و سپس به صورت گروهی به حل مسأله های ۶ تا ۱۲ بپردازید.

فعالیت نمونه

I) یک کلاس درس، ۲۷ دانش آموز دارد. هر دو نفر از آن ها روی یک نیمکت می نشینند و سه نفر هم روی صندلی های تک نفره. چند نیمکت در این کلاس وجود دارد؟

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
تعداد نیمکت ها	x
هر دو نفر روی یک نیمکت می نشینند	$۲x$
سه نفر روی صندلی های تک نفره می نشینند	۳
تعداد دانش آموزان کلاس درس، ۲۷ نفر است	$۲x+۳=۲۷$

معادلهٔ $۲۷=۳+۲x$ زبان جبری مسأله است.

II) یک بازرگان در سال اول کارش، یک میلیون تومان خرج کرد، یک سوم باقیماندهٔ پولش، به آنچه که برایش مانده بود، اضافه شد. در سال بعد، دوباره یک میلیون تومان خرج کرد و یک سوم باقیماندهٔ پولش به آنچه داشت، اضافه شد و این عمل ادامه داشت تا این که بازرگان پس از سه سال، دید که دو برابر سرمایهٔ اولیه اش، پول دارد؟

به جدول زیر توجه کنید.

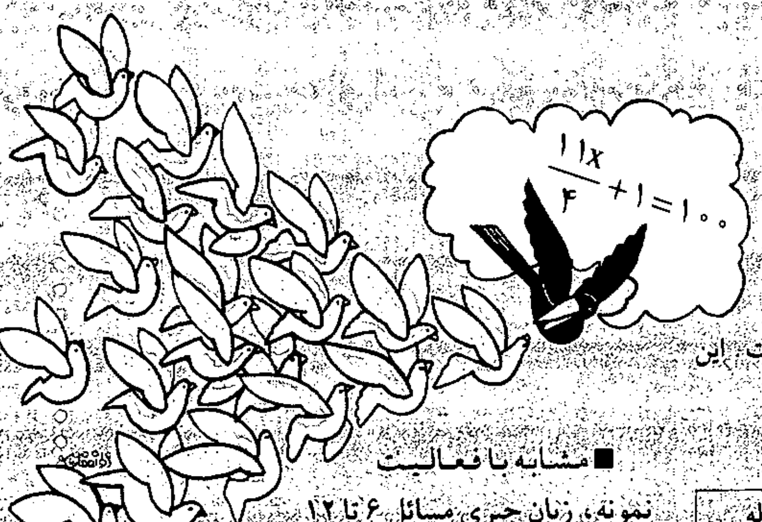
زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
سرمایهٔ اولیهٔ بازرگان	x (برحسب میلیون تومان)
در سال اول، یک میلیون تومان خرج کرد	$x-۱$
به آنچه برایش باقیمانده بود، یک سوم پولش اضافه شد	$(x-۱)+\frac{x-۱}{۳}=\frac{۴x-۴}{۳}$
در سال دوم، یک میلیون تومان خرج کرد	$\frac{۴x-۴}{۳}-۱=\frac{۴x-۷}{۳}$
و یک سوم باقیماندهٔ پولش به آنچه داشت، اضافه شد	$\frac{۴x-۷}{۳}+\frac{۱}{۳}(\frac{۴x-۷}{۳})=\frac{۱۶x-۲۸}{۹}$
در سال سوم، بازهم یک میلیون تومان خرج کرد	$\frac{۱۶x-۲۸}{۹}-۱=\frac{۱۶x-۳۷}{۹}$
و یک سوم موجودی اش را به پولی که داشت، اضافه کرد	$\frac{۱۶x-۳۷}{۹}+\frac{۱}{۳}(\frac{۱۶x-۳۷}{۹})=\frac{۶۴x-۱۴۸}{۲۷}$
پس از سه سال، پول بازرگانان دوبرابر شد.	$\frac{۶۴x-۱۴۸}{۲۷}=۲x$

معادلهٔ $۲x=\frac{۶۴x-۱۴۸}{۲۷}$ زبان جبری مسأله است.

III) کلاغی به دسته ای کبوتر که در حال پرواز بودند، رسید و از سر دستهٔ آنها پرسید: «شما چند تا هستید؟» کبوتر گفت: «ما و ما و نصف ما و نیمه ای از نصف ما، گر تو هم با ما شوی، ما جملگی ۱۰۰ می شویم».

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
تعداد کبوترها در دسته	x
ما و ما	$۲x$
به اضافه نصف ما	$۲x+\frac{x}{۲}=\frac{۵x}{۲}$
به اضافهٔ نیمه ای از نصف ما	$\frac{۵x}{۲}+\frac{۱}{۲}(\frac{x}{۲})=\frac{۱۱x}{۴}$
گر تو هم با ما شوی	$\frac{۱۱x}{۴}+۱$
جملگی ۱۰۰ می شویم	$\frac{۱۱x}{۴}+۱=۱۰۰$



معادلهٔ $\frac{11x}{4}+1=100$ زبان جبری مسأله است. کلیهٔ مراحل جدول بالا را می‌توان در تساوی زیر خلاصه کرد:

$$2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)+1=100$$

IV) حاصل ضرب دو عدد متوالی برابر ۶۳ است. این دو عدد را بیابید.

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
یک عدد صحیح نامشخص	n
دو عدد فرد متوالی داریم	$2n+1$ و $2n-1$
حاصلضرب دو عدد فرد متوالی	$(2n-1)(2n+1)=4n^2-1$
برابر ۶۳ است	$4n^2-1=63$

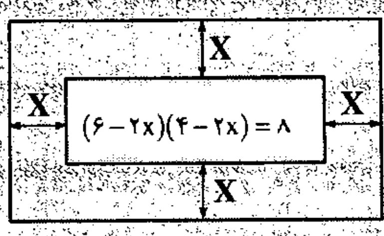
معادلهٔ $4n^2-1=63$ زبان جبری مسأله است. با به‌دست آوردن n و قرار دادن در $2n+1$ و $2n-1$، دو عدد فرد متوالی به دست می‌آیند.

V) یک قالی، در اتاقی به ابعاد ۶ و ۴ متر قرار دارد. فاصلهٔ هر طرف آن تا کنار دیوار اتاق یکسان است. اگر مساحت قالی ۸ مترمربع باشد، فاصلهٔ هر طرف قالی را تا دیوار حساب کنید:

به جدول زیر توجه کنید:

زبان معمولی مسأله	زبان جبری مسأله
فاصلهٔ قالی تا کنار دیوار اطاق	x
طول و عرض قالی	$6-2x$ ، $4-2x$
مساحت قالی	$(6-2x)(4-2x)=24-20x+4x^2$
مساحت قالی برابر ۸ است	$24-20x+4x^2=8$

شکل مقابل اطلاعات داخل جدول را به صورت هندسی بیان می‌کند:



■ مشابه با فعالیت

نمونه، زبان جبری مسائل ۶ تا ۱۲ را با رسم جدول بیابید.

۶. احمد برای خرید ۵ دفتر و یک خودکار ۳۰ تومانی، ۳۸۰ تومان پرداخت. قیمت هر دفتر چه‌قدر است؟

۷. هفت برابر عددی به اضافهٔ ۲، برابر ۵۸ است، آن عدد کدام است؟

۸. در یک مثلث متساوی‌الساقین که طول هر ساق آن برابر ۱۰ و طول قاعدهٔ آن برابر ۱۲ است، یک مربع محاط کنید (راهنمایی: باید ضلع مربع را محاسبه کرد.) این مسأله از خوارزمی است.

۹. تحقیق کنید، اگر عددی در تقسیم بر ۹ به باقیماندهٔ ۱ یا ۸ برسد، مجذور آن عدد در تقسیم بر ۹، باقیمانده‌ای برابر ۱ خواهد داشت. (از ابن سینا).

۱۰. می‌خواهیم عددی را پیدا کنیم که، اگر آن عدد را در خودش ضرب، سپس دو واحد به آن اضافه کنیم بعد بر ۵ تقسیم و بالاخره در ۱۰ ضرب کنیم، عدد ۵۰ به‌دست می‌آید. (از بهاءالدین عاملی).

۱۱. عددی پیدا کنید که اگر توان چهارم آن را بر نصف خودش تقسیم و سپس با ۱۴ جمع کنیم، عدد ۱۰۰ به‌دست می‌آید. (از اویلر)

۱۲. دو عدد صحیح زوج متوالی را چنان پیدا کنید که مجموع آن‌ها ۶۲ واحد از حاصل ضرب آن‌ها کم‌تر باشد.

معرفی منابع برای مطالعهٔ بیش‌تر

۱. چیستیاکوف، و. د. مساله‌های تاریخی ریاضیات. پ شهریاری. نشرنی.
۲. پرلمان، ی. ا. سرگرمی‌های جبر. نشر امیرکبیر.
۳. عین‌اللهی، ع. روش‌های استدلال در ریاضیات. نشر پیین.
۴. واردن، ب. ل. تاریخ جبر. م وحیدی اصل و ع جمالی. نشر مبتکران.



پاسخ تفریح اندیشه۴

پاسخ۴: ۵۰۰

حل: فرض می‌کنیم دو عدد مورد نظر x و y باشند:

$$x+y=۴۵ \qquad (۱)$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=۲/۰۵ \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{x^۲+y^۲}{xy}=۲/۰۵$$

بنابراین:

$$x^۲+y^۲=۲/۰۵xy$$

$$x^۲+y^۲+۲xy=۴/۰۵xy$$

$$(x+y)^۲=۴/۰۵xy$$

از (۱) به دست می‌آوریم:

$$(۴۵)^۲=۴/۰۵xy$$

$$xy=\frac{۲۰۲۵}{۴/۰۵}=۵۰۰$$

شرایط و فرم اشتراک رشد برهان متوسطه

شرایط اشتراک:

۱. واریز حداقل مبلغ ۱۵۰۰۰ ریال به عنوان علی‌الحساب به حساب شماره ۳۹۶۶۲۰۰۰ بانک تجارتِ شعبهٔ سه راه آزمایش(سرخه حصار)، کد ۳۹۵ در وجه شرکت افست و ارسال رسید بانکی به همراه فرم تکمیل شدهٔ اشتراک الزامی است.

۲. مبنای شروع اشتراک از زمان وصول فرم درخواست است.

---

* نام و نام خانوادگی: .... * تاریخ تولد: ....
* میزان تحصیلات: .... * تلفن: ....
* نشانی کامل پستی:

استان: .... شهرستان: .... خیابان: ....

کوچه: .... پلاک: .... کدپستی: ....

* مبلغ واریز شده: ....
* شماره و تاریخ رسید بانکی: .... * مجلهٔ درخواستی: ....

امضاء

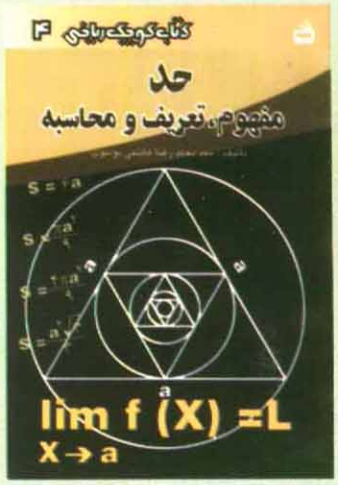
نشانی: تهران-صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱، امورمشترکین.

تلفن: ۸۸۳۹۱۸۶

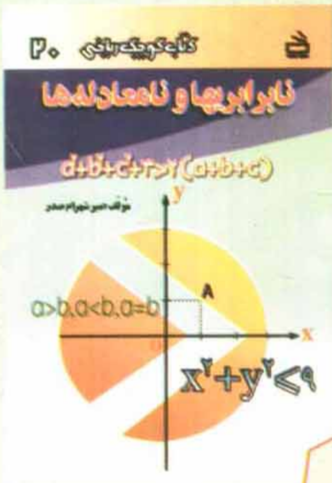
* مشخصات و نشانی خود را کامل و خوانا بنویسید. هزینه برگشتِ مجله در صورت کامل نبودن نشانی، به‌عهدهٔ مشترک است.
* ارسال اصل رسید بانکی ضروری است.

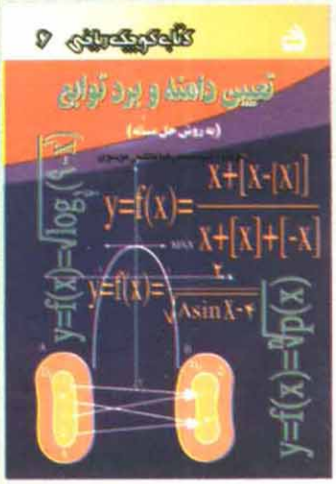
کتاب‌های کوچک ریاضی
مناسب برای دانش‌آموزان سال اول متوسطه

۱. توان و رادیکال/ سید محمدرضا هاشمی موسوی
۲. روش‌هایی از جبر/ حمیدرضا امیری
۳. قدر مطلق/ پرویز شهریاری
۴. معادله‌ها و عبارت‌های جبری/ علی حسن‌زاده ماکویی



انتشارات مدرسه
منتشر کرده است
تلفن تماس:
۹ـ ۸۸۰۰۳۲۵







کتاب‌های کوچک ریاضی
مناسب برای دانش‌آموزان پیش دانشگاهی

۱. آشنایی با روش‌های عددی در حل مسائل ریاضی/ دکتر محمد علی فریبرزی عراقی
۲. آنالیز ترکیبی و بسط دو جمله‌ای/ پرویز شهریاری
۳. انتگرال معین و کاربردهای آن/ محمد عابدی
۴. مبانی ریاضیات گسسته/ حمیدرضا امیری
یدالله ایلخانی پور
۵. پیوستگی و مشتق پذیری/ احمد قندهاری
۶. تابع/ احمد قندهاری - حمیدرضا امیری
۷. حد و مفهوم حد/ سید محمد رضا هاشمی موسوی
۸. دنباله‌ها و سری‌ها/ احمد قندهاری
۹. دیفرانسیل و انتگرال نامعین/ محمد عابدی
۱۰. مثلثات/ احمد فیروزنیا
۱۱. مجانب‌ها و رسم منحنی/ احمد قندهاری
۱۲. نابرابری‌ها و نامعادله‌ها/ میرشهرام صدر
۱۳. نظریه گراف/ حسین ابراهیم زاده قلزوم
۱۴. ورودی به نظریه احتمال/ دکتر عین الله پاشا
۱۵. ورودی به نظریه اعداد/ حمیدرضا امیری
۱۶. هندسه تحلیلی/ محمد هاشم رستمی

کتاب‌های کوچک ریاضی
مناسب برای دانش‌آموزان سال دوم متوسطه

۱. آنالیز ترکیبی و بسط دو جمله‌ای/ پرویز شهریاری
۲. بردارها/ سید محمدرضا هاشمی موسوی
۳. تابع/ احمد قندهاری / حمیدرضا امیری
۴. روش‌هایی از جبر/ حمیدرضا امیری
۵. قدر مطلق/ پرویز شهریاری
۶. مثلثات/ احمد فیروزنیا
۷. نابرابری‌ها و نامعادله‌ها/ میرشهرام صدر
۸. ورودی به آمار/ دکتر عین الله پاشا


آیا
با دیگر نشریات
دفتر انتشارات کمک آموزشی
آشنایی دارید؟
دفتر انتشارات کمک آموزشی،
این مجلّات را نیز منتشر می کند:
رشد کودک
(ویژه ی پیش دبستان و دانش آموزان کلاس اوّل دبستان)
رشد نوآموز
(برای دانش آموزان دوّم و سوّم دبستان)
رشد دانش آموز
(برای دانش آموزان چهارم و پنجم دبستان)
رشد نوجوان
(برای دانش آموزان دوره ی راهنمایی)
رشد جوان
(برای دانش آموزان دوره ی متوسّطه)
و مجلّات:
معلّم، تکنولوژی آموزشی، آموزش ابتدایی، آموزش قرآن، آموزش فیزیک، آموزش شیمی، آموزش زبان، آموزش راهنمایی تحصیلی، آموزش ریاضی، آموزش زیست شناسی، آموزش جغرافیا، آموزش زبان وادب فارسی، آموزش معارف اسلامی، آموزش تاریخ، آموزش هنر، و برهان راهنمایی
معلم
آموزش قرآن
آموزش زبان و ادب فارسی
جوان
آموزش زیست شناسی
تکنولوژی آموزشی
آموزش شیمی

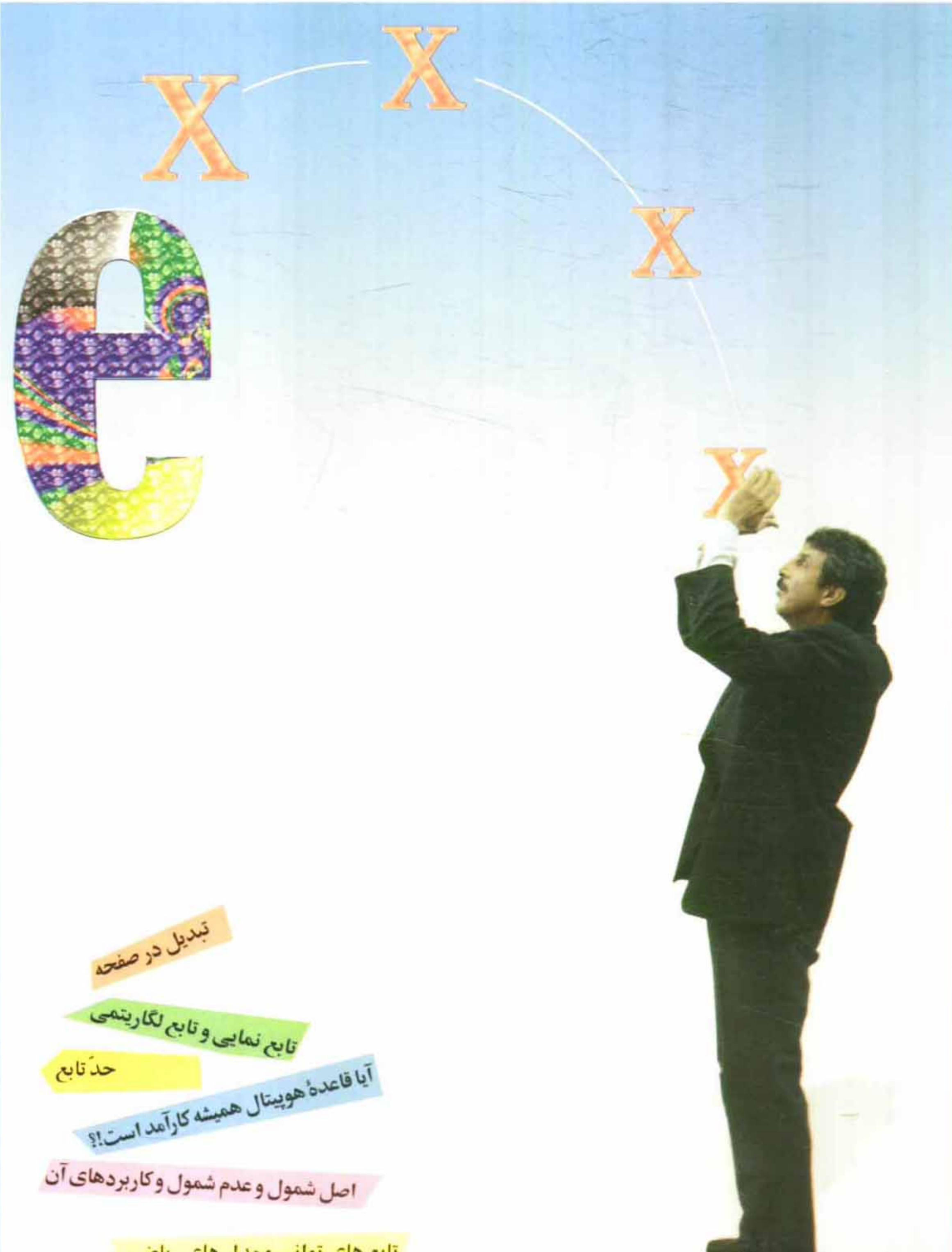
رشد برهان ۳۹

www.roshdmag.org

سال سیزدهم، شمارهٔ اول ◊ ۱۳۸۲، بها: ۲۰۰۰ ریال

◊ برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

دفتر انتشارات کمک آموزشی



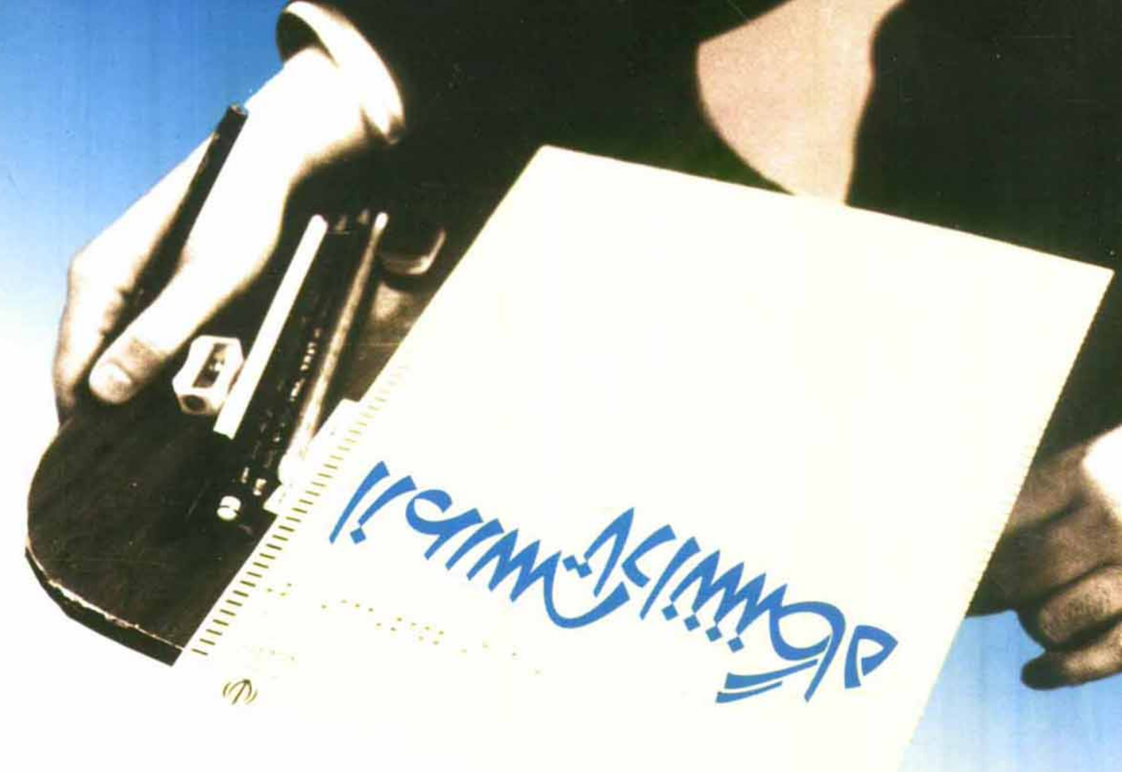
تبدیل در صفحه

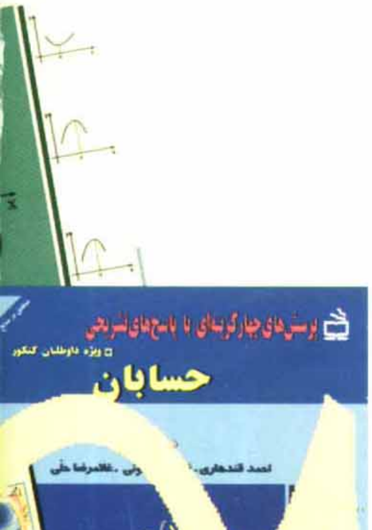
تابع نمایی و تابع لگاریتمی

حدّ تابع

آیا قاعدهٔ هوپیتال همیشه کارآمد است!؟

اصل شمول و عدم شمول و کاربردهای آن





گروه ریاضی انتشارات مدرسهٔ برهان پس از تألیف کتاب‌های از مدرسه تا دانشگاه، اکنون برای پاسخگویی به نیاز دانش‌آموزان، به تألیف مجموعهٔ جدید کتاب‌های از مدرسه تا دانشگاه با عنوان «مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای» اقدام کرده است.

در این مجموعهٔ جدید برای هریک از کتاب‌های درسی ریاضی که به‌عنوان منبع طرح پرسش در آزمون‌های سراسری معرفی شده است، یک عنوان کتاب تألیف و انتشار می‌یابد. هدف از تولید این مجموعه، تکمیل کتاب‌های از مدرسه تا دانشگاه است که دانش‌آموز با حل تمرین‌های متنوع و متعدد این مجموعه، برای کسب موفقیت در آزمون‌های سراسری به مهارتی نسبی دست می‌یابد.

در این کتاب‌ها، مطابق با سرفصل‌ها و عنوان‌های هر کتاب درسی، تعداد قابل توجهی پرسش‌های چهارگزینه‌ای وجود دارد. پاسخ‌های تشریحی مناسب و کافی ویژگی دیگر این مجموعه است که در آن‌ها، علاوه بر بررسی مفاهیم درسی، نکته‌های لازم نیز ارائه شده‌اند و در بعضی از موارد، گزینه‌های نادرست نیز برای تفهیم بیش‌تر مطالب درسی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در این مجموعه، بیش‌تر پرسش‌های آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی (سراسری و آزاد) برای آشنایی دانش‌آموزان و در پایان هر فصل، تعدادی پرسش چهارگزینه‌ای به‌عنوان آزمون با حل کلیدی آمده است.

انتشارات مدرسهٔ برهان امیدوار است که این مجموعهٔ جدید بتواند در کنار کتاب درسی، شما دانش‌آموزان عزیز را در کسب مهارت و ایجاد تسلط بر محتوای آموزشی یاری کند.

مجموعهٔ پرسش‌های چهارگزینه‌ای
از مدرسه تا دانشگاه

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ریاضی متوسطه ۲

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

❖ سال سیزدهم ،شمارهٔ اول ❖ ۱۳۸۲
❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: ۱۲۰۰۰ نسخه
❖ برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

۲ یادداشت سردبیر
۳ از تاریخ بیاموزیم/ پرویز شهریاری
۱۰ اصل شمول و عدم شمول و کاربردهای آن/ دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی
۱۴ تبدیل در صفحه/ حمیدرضا امیری
۲۰ ریاضیات تفریحی از منظر تکامل / غلامرضا یاسی پور
۲۴ تابع های متناوب و روش های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن ها / هوشنگ شرقی
۳۰ آیا قاعدهٔ هوپیتال همیشه کارآمد است!؟ (قسمت اول) / مجتبی معارف وند
۳۵ تفریح اندیشه (مساله گره ای)
۳۶ حد تابع/ احمد قندهاری
۴۰ تابع نمایی و تابع لگاریتمی / احمد قندهاری
۴۶ پارادوکس های ریاضیات و علوم/ اثر دکتر مارتین گاردنر / ترجمهٔ حسن نصیرنیا
۴۷ یک مسالهٔ جالب/ احمد فیروزنیا
۴۷ جواب تفریح اندیشه(مسالهٔ گرهی)
۴۸ گراف وکاربردهای آن/ سهراب شریف زاده
۵۵ حل معادله های مثلثاتی/ محمدهاشم رستمی
۴۷ تابع های توانی و مدل های ریاضی / میرشهرام صدر



❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
❖ سردبیر: حمیدرضا امیری
❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر
❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
❖ اعضای هیأت تحریریه:
حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور
❖ و با تشکر از همکاری ارزندهٔ
آقای پرویز شهریاری
◆ چاپ:
شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان،تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

✍ نگارش مقاله های کمک درسی(شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه) ✍ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها(برای دانش آموزان)
✍ طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها(برای دانش آموزان) ✍ طرح معماهای ریاضی ✍ نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان،هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

✍ مجله در حک و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است. ✍ مقاله های وارده ، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
✍ مقاله های رسیده مسترد نمی شود. ✍ استفاده از مطالب مجله در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجله: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

یادداشت سردبیر

دوستِ دانش‌آموز سلام! آغاز سال تحصیلی جدید را به شما تبریک می‌گوییم و آرزو می‌کنیم به یاری خداوند متعال و با تکیه بر سعی و تلاش، سال موفقیت‌آمیزی را در پیش رو داشته باشید. شاید شما اولین بار است که این مجله را از دبیرستان خود تهیه می‌کنید و با آن آشنا می‌شوید، از این آشنایی خوشبختیم و امیدواریم تا پایان دوره پیش‌دانشگاهی در کنار شما باشیم.

در هر شماره از این مجله می‌توانید مطالب متنوع درسی و غیر درسی که به شیوه‌ی غیرمستقیم به دروس ریاضی شما مربوط می‌شوند را مطالعه کنید. حتی اگر مقاله‌ای را مربوط به کلاس سوّم در مجله می‌بینید و شما کلاس دوم هستید، این مقاله حتماً سال بعد مورد استفاده‌ی شما خواهد بود، پس باید در حفظ و نگهداری هر شماره‌ی مجلّه کوشا باشید.

نظریات دبیران محترم خود را راجع به مطالب مجلّه جویا شده و حتی به کمک آنها مقاله، مسأله، تحقیق و یا پیشنهاد و انتقادهای خود را تنظیم و برای ما ارسال کنید.

آیا در درس ریاضی موفق هستی؟ یا دوست داری موفق باشی؟ اصلاً به ریاضیات علاقه داری؟ ریاضیات مادر علوم است و در تمام علوم دیگر کاربرد دارد. پس بهتر است علاقه داشته باشی! اگر می‌خواهی درس ریاضی را خوب بفهمی و در آن پیشرفت کنی باید **مفاهیم ریاضی** را درک کرده و با تمرین بسیار، به عمق آنها پی ببری. البته این فهم و درک لذّت‌بخش است و لازمه‌ی آن برنامه‌ریزی، مطالعه‌ی منابعی غیر از کتاب درسی و تلاش و پشتکار شماست.

یک پیشنهاد دیگر نیز داریم که امیدواریم آن را نیز جدی بگیرید و آن، این است که محور اصلیِ فعالیت‌های شما و آغاز برنامه‌ریزی‌ها باید کلاس درس باشد و شما باید غیرت و تعصّب درسی داشته باشید. به این معنی که مفاهیم و مطالب درسی را که دبیران محترم زحمت می‌کشند و به شما می‌آموزند و شما با گذران وقت و سرمایه آن را فرا می‌گیرید ـ در این چرخه عوامل بسیاری از جمله خانواده نقش دارند ـ نباید به راحتی از دست بدهید و برای حفظ و نگهداری آن باید تمرین و پشتکار داشته باشید. به امید دریافت نامه‌های شما و استفاده از خاطرات کلاس‌های درس ریاضی، مقاله‌ها، مسائل (با حل)، انتقادها و پیشنهادهای شما تلاشگران عرصه‌ی علم و دانش.



○ پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

پاپیروس های مسکو و رایند

در شمارهٔ قبل دربارهٔ ریاضیات کاربردی به عنوان نخستین روش تاریخی در سازمان دادن آگاهی های ریاضی صحبت کردیم، اکنون در ادامه مطلب داریم:

دانش ریاضی به معنای ریاضیات نظری، در کارهای کاتبان همراه با عنصرهایی از دانش های دیگر، یک جا و به صورت یک واحد کامل تنظیم می شد و سمت گیری آن، کاربرد در نیازهای عملی بود. نخستین متن هایی که در آن ها عنصرهایی از دانش ریاضی وجود دارد، سندهای حقوقی و اقتصادی هستند. از این گونه سندها، هم از میان دورود[1] و هم از مصر[2]، به تعداد زیادی وجود دارد.

جایگاه ریاضیات کاربردی را باید در چندگونگی فعالیت های عملی و جدایی تدریجی آن ها به گروه های متعدد، دستاوردهایی دانست که خصلت اندازه ای و مقایسه ای داشتند. در مرحلهٔ اول (پیدایش گروه اجتماعی کاتبان)، هنوز ریاضیات عملی به عنوان یک واحد کامل شکل نگرفته بود؛ گرچه گروه اجتماعی کاتبان وجود داشت. آگاهی های ریاضی، در مجموعهٔ کلی تر و وسیع تری جا داده شده بود که می توان آن را «مجموعهٔ نوشته های مربوط به دستاوردهای فعالیت های اقتصادی» نامید.

در مرحلهٔ بعدی، دوباره این مجموعه تقسیم شد و ریاضیات کاربردی به عنوان آگاهی هایی از ریاضیات که برای ارضای نیازهای عملی کار می کند، شکل گرفت. به این ترتیب، متن های ریاضی خاصی پدید آمد که در آن ها، تنها مسأله های ریاضی جمع آوری شده بودند؛ مسأله هایی که از موضع دستاوردهای عمومی اقتصادی، و به مفهوم مجموعه های قبلی، مورد نیاز بودند. متن های اقتصادی، متن هایی مثل اندازه گیری سطح مفید مزرعه، محاسبهٔ درصد پرداخت وام، میزان درست مخلوط کردن گندم با شیرهٔ جو برای پختن نان، محاسبهٔ سهم ارث و غیره را در برمی گرفتند. گوناگونی و جدایی فعالیت ها، موجب گوناگونی و جدایی دستاوردها می شود، ولی تنها «مجموعه های نخستین ثبت دستاوردهای اقتصادی» را به همراه دارد و هنوز موجبی برای پیدایش نوشته های مربوط به دانش ریاضی کاربردی نیست؛ دانش ریاضی کاربردی نمی تواند نتیجهٔ مستقیم این مرحله از فعالیت آدمی باشد.

پیدایش متن های خاص ریاضی، به عنوان ابزار ثبت دستاوردهای ریاضی کاربردی برای فعالیت های «پیش ریاضی» ضرورتی نداشت. با وجود این، چنین متن هایی نتیجه های فرعی تقسیم کار هستند که نقش آن ها، یعنی تکرار یک نوع عمل، اهمیتی جدی داشت. تقسیم کار، در شرایط چند جانبه، به معنای پدید آمدن رگه های اجتماعی پایداری است که به نوبهٔ خود، موجب تحکیم این حوزه های فعالیت می شوند. برای تولید و باز تولید گونه های خاص فعالیت، نیاز مبرم به تکمیل و تکامل رگه های اجتماعی، یعنی آموزش به وجود می آید. همین که دستاوردها گروه بندی شوند، آموزش، موجبی برای

شکل‌گیری روش عملی تنظیم دانش ریاضی می‌شود.

آموزش به طور غیر مستقیم، موجب بالا رفتن سطح آگاهی، توانایی بیش‌تر در کارهای عملی و غیره می‌شود. آموزش وسیله‌ای برای تحکیم کار ریاضی مربوط به دستاوردهاست و متن‌های ریاضی، به نوبهٔ خود، امکان دقیق این وسیله (یعنی آموزش) را فراهم می‌کنند. در تدریس و آموزش، تخصص پدید می‌آید و همهٔ آگاهی‌های مربوط به یک رشته از فعالیت، در یک جا جمع‌آوری می‌شود. در شهرهای بزرگ و در کنار نیایشگاه‌ها و دربارها، مرکزهای ریاضی برای تنظیم توانایی‌های مختلف ایجاد شد که کاهنان و مغان، اخترشناسی و اخترشماری، ریاضیات، هندسه، پزشکی و تخصص‌های دیگر را می‌آموختند.

دانش ریاضی هم، مثل سایر شاخه‌ها، تخصص پیدا کرد. آموزش ریاضی، از دیگر انواع آموزش جدا شد و به صورت یک رشتهٔ مستقل درآمد و نخستین یادداشت‌های مربوط به حوزهٔ فعالیت ریاضیات عملی پدید آمد که شامل متن‌هایی مربوط به مسأله‌های ریاضی بود. قدیمی‌ترین متن‌های ریاضی شناخته شده عبارتند از: «پاپیروس مسکو»، «پاپیروس رایند» از مصر دورهٔ سلسلهٔ میانه (حدود ۲۰۰۰ تا ۱۷۸۵ سال پیش از میلاد)، جدول‌های بابلی سفالی زمان سلسلهٔ «اوا» (حدود ۲۱۱۲ تا ۱۹۹۷ پیش از میلاد). به اعتقاد نیگه‌بادر، از زمان پیدایش خط تا پدید آمدن نخستین متن‌های ریاضی، نزدیک به ۱۵۰۰ سال طول کشید.

به این ترتیب، اگر خود فعالیت عملی در به‌وجود آمدن مجموعهٔ دستاوردهای عملی، نقش درجه اول را به عهده داشت، پدید آمدن گروه‌های اجتماعی، که خود موجب تحکیم بخش‌های فعالیت شد، انگیزه‌ای برای تقسیم فرعی مجموعهٔ دستاوردها بود. این تقسیم فرعی، نتیجهٔ روند آموزش بود. به‌ویژه همین آموزش، ریاضیات را به عنوان شکل معینی از فعالیت مشخص می‌کند؛ فعالیتی که به‌وسیلهٔ یک رگهٔ اجتماعی انجام می‌شود و با ثبت در متن‌های ریاضی تثبیت و تحکیم می‌یابد و از این به بعد، تأثیر خود را بر حوزهٔ دستاوردهای ریاضی که در جهت کاربردی سمت‌گیری دارد، به طور غیر مستقیم و از طریق آموزش ادامه می‌دهد.

ریاضیات کاربردی، به عنوان گونه‌ای از فعالیت که در جهت تحقق کارهای عملی معینی جهت‌گیری کرده است، به وجود می‌آید. برای این که روشن کنیم با این فعالیتی که آغاز شده بود، چگونه مواد ریاضی در یک جا جمع شد، به چه طریقی مسأله‌های ریاضی طبقه‌بندی شد و چگونه این طبقه‌بندی در جریان آموزش تغییر کرد، می‌توانیم پاپیروس و برخی جدول‌های ریاضی میان‌دو رود را تجزیه و تحلیل کنیم.

در متن‌های ریاضی مصری و بابلی، تقسیم به شاخه‌های مختلف، آن‌طور که ما از ریاضیات می‌شناسیم، یعنی تقسیم به بخش‌های هندسه و حساب (جبر)، وجود نداشت. از جمله، نیگه‌بادر یادآوری می‌کند: «اگر ما امروز ضمن طرح ریاضیات مصری، دربارهٔ حساب و هندسه و غیر آن صحبت می‌کنیم، در واقع یک طبقه‌بندی مصنوعی است و پاسخگوی تنظیم‌کنندگان این مسأله‌ها نیست... از دیدگاه ما محاسبهٔ حجم‌ها را باید مربوط به هندسه دانست. ولی در پاپیروس، بلافاصله در کنار مسأله‌های مربوط به حجم انبارها، مسأله‌هایی قرار دارند که در آن‌ها باید نوعی اندازه و مقیاس را به نوعی دیگر تبدیل کرد؛ یعنی مسأله‌هایی با خصلت خالص حسابی. روشن است که از دیدگاه تنظیم‌کنندگان مصری، نزدیکی مسأله‌ها به یکدیگر، نه از جهت مضمون ریاضی آن‌ها، بلکه تنها از نظر ارزش عملی آن‌ها، مورد توجه قرار می‌گرفت. در مثالی که آوردیم، مسأله‌هایی هم در یک جا جمع شده‌اند که برای نگهداری غله مورد نیازند. و این مطلب در درجهٔ دوم اهمیت قرار می‌گیرد که آیا برای این مسأله، به قاعده و قانونی از هندسه نیاز داریم یا نه!» [**سخنرانی‌هایی دربارهٔ تاریخ ریاضیات باستان، جلد اول، ریاضیات قبل از یونان**]. با این که در ریاضیات میان دورود، مسأله‌هایی وجود دارند که سمت‌گیری حسابی ـ جبری دارند و در برخی حالت‌ها، در سطحی بالا قرار گرفته‌اند، باز هم همان عدم تقسیم‌بندی ریاضیات به چشم می‌خورد.

در آن زمان هنوز، برای ریاضیات کاربردی،

تقسیم‌بندی نظری ریاضیات لزومی نداشت و مسأله‌ها زیر فشار مستقیم نیازهای عملی، تنظیم و با هم متحد می‌شدند. از جمله گونه‌های اصلی مسأله‌ها در پاپیروس رایند، چنین است:

۱) مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ گنجایش انبارهای گندم؛

۲) مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ مزرعه؛

۳) مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ هرم؛

۴) مسأله‌های مربوط به اندازه‌گیری نان و آبگون‌ها؛ تقسیم نان بین تعدادی از افراد؛

۵) مسأله‌های مربوط به غذای چهارپایان و پرندگان.

شبیه همین موقعیت در آگاهی‌های ریاضی «میان دورود» هم دیده می‌شود.

به گروهی از مسأله‌های پاپیروس رایند می‌پردازیم که به محاسبهٔ هرم مربوط می‌شوند (نمودارهای شمارهٔ ۵۶ تا ۶۰) و همچنین مسأله‌های مربوط به کارهای زمینی در جدول‌های میخی. هر دو نوع مسأله‌ها از لحاظ کار عملی اهمیت داشتند؛ هر دو نوع کار عملی، به محاسبه‌هایی نیاز داشتند که پایهٔ اصلی این مسأله‌ها را تشکیل می‌دهند. روی نمونهٔ این مسأله‌ها می‌توان دقیق‌تر روشن کرد که در ریاضیات کاربردی چه نظامی حاکم بوده است و چگونه این نظام، به جریان آموزش تحول یافته است.

مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ هرم جدول، VIII پاپیروس ریند به این قرارند که چهار مسألهٔ اول (از پنج مسأله)، به آموزش هرم‌هایی اختصاص دارد که زاویه‌های رأس آن‌ها، از ۶۰ تا ۷۰ درجه است. در ضمن، در قاعدهٔ این هرم‌ها باید یک مربع قرار داشته باشد؛ این گونه هرم‌ها را "Semer" می‌نامیدند. پنجمین و آخرین مسأله به بررسی هرمی اختصاص دارد که زاویهٔ مسطحهٔ رأس آن، کم‌تر از ۶۰ درجه است. این هرم را «آن» (سنگ روی آرامگاه) می‌نامیدند. باید توجه کرد که بین ساختمان هرم‌ها و سنگ‌های آرامگاه، از نظر کارهای عملی، وجه اشتراکی وجود دارد، ولی نمی‌توان آن‌ها را یکسان دانست.

مسألهٔ شمارهٔ ۵۶ را می‌آوریم: «اگر هرمی ۲۵۰ اَرَش ارتفاع داشته باشد و ضلع قاعده‌اش برابر ۳۶۰ ارش باشد، نسبت آن‌ها چه‌قدر است؟» [منظور، نسبت نصف ضلع آن به ارتفاع است که آن را "Seked" می‌گفتند].

$\frac{1}{2}$ را از ۳۶۰ انتخاب کن، می‌شود ۱۸۰.

۲۵۰ را طوری ضرب کن که ۱۸۰ به دست آید.

این عبارت است از: $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{50}$ ارش.[3]

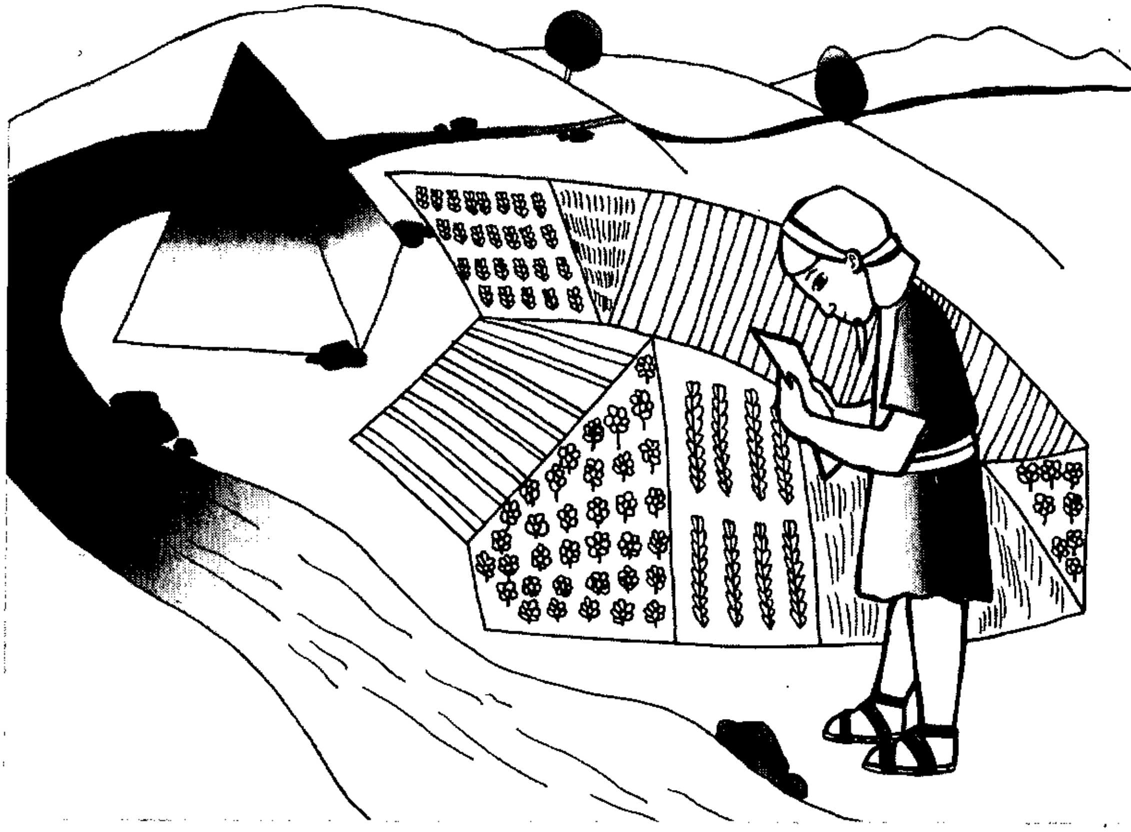
هر ارش برابر ۷ وجب است.

۷ را در $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{50}$ ضرب کن:

۷	۱
$3\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{15}$ $\frac{1}{3}$ ۱	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{25}$ $\frac{1}{10}$	$\frac{1}{50}$

نسبت برابر $5\frac{1}{25}$ وجب است:[4]

حل مسأله به صورتی جامد، نسخه‌وار و همراه با دستور داده شده است. اگر دستورها را دنبال کنیم، می‌توان نتیجه را به دست آورد و آن را با پاسخی که داده است، مقایسه کرد. طبیعی است که در چنین حالتی بدون هیچ تردیدی، باید راه‌حل و پاسخی را که در پایان آمده است، باور کرد. در این‌جا آن‌چه مهم است، اعتبار تنظیم‌کنندهٔ مسأله است؛ امضای کسی که مسأله را تنظیم کرده و همچنین، آن که مسأله را بازبینی و نسخه‌برداری کرده، ضامن درستی راه‌حل و پاسخ مسأله است. در آغاز پاپیروس رایند یادآوری شده که بر اساس نمونه‌ای از نوشته‌های قدیمی زمان «نه ـ ماته ـ ره»، فرعون مصر علیا و سفلا و به وسیلهٔ آهمس کاتب تنظیم شده است. چون خود عمل‌ها و روش انجام آن‌ها را ضمن آموزش نمی‌آوردند، با بیانی جامد مخلوط می‌شد (به صورت فرمان و دستور)؛ بیانی که به یک شخصیت معتبر مربوط



می‌شود. سلسلهٔ مراتب اعتباری، وظیفهٔ هرکس را در برابر ردهٔ «بالای» خود معین می‌کرد. این سلسله مراتب از پایین، از کاهنان جوان و کم‌تجربه آغاز می‌شد و به کاهنان مسن‌تر و باتجربه‌تر و سرانجام به کاهنانی که در کنار نیروهای نظامی و در دربار فرعون کار می‌کردند، می‌رسید. این آخری‌ها که در رأس سلسله مراتب بودند، چنین اعتباری داشتند که نسخه و دستور آن‌ها، به خودی خود، درست تلقی می‌شدند. در زمینهٔ ریاضیات و اعتماد به درستی و دقت آن‌ها هم، همین سلسله مراتب برقرار بود. دقت بی‌چون و چرای نتیجه‌گیری‌ها و صلابت استدلال در درجهٔ اول، خاص فرعون بود.

موضوع ریاضیات کاربردی، عبارت است از آنچه که «اندازه‌پذیر» و «مقایسه‌پذیر» باشد، ولی در عین حال از فعالیت‌های مستقیم عملی جدا شده باشد. از همین جاست که علاوه بر تقسیم‌بندی‌های خاص مسأله‌ها به گونه‌های مختلف، شرح روش‌های حل مسأله‌ها هم پدید می‌آید.

و اگر توجه کنیم که هدف آموزش، تثبیت موقعیت قشرهایی بود که باید به یاری آموزش بازسازی می‌شد، این وضع قابل فهم خواهد شد. از آن‌جا که تقسیم کار موجب ناهمگونی در ترکیب جامعه می‌شود، آموزش هم به عنوان یک عامل پشتیبان، حفظ و تکمیل گوناگونی فعالیت‌های عملی را به عهدهٔ خود می‌گیرد. ولی راه‌های کهنه و قبلی چیزهای «اندازه‌پذیر» و «مقایسه‌پذیر» دیگر قابل اجرا نبودند. گرچه آموزش با این نتیجه‌گیری‌ها سروکار دارد و با آن‌ها، همچون یک داده برخورد می‌کند؛ ولی نتیجه‌هایی که از این راه به دست می‌آیند، سرآخر، با نتیجه‌های حاصل از فعالیت عملی متفاوت هستند: آموزش، اشتباه در اندازه‌گیری هرم را به حساب نمی‌آورد؛ به کارهای روی زمین‌های کشاورزی مراجعه نمی‌کند؛ روش مرزبندی زمین‌ها را نشان نمی‌دهد؛ و طغیان‌های نیل را به حساب نمی‌آورد. باید روش کار آن‌قدر تغییر داد و آموزش، به طریق ساده‌ای، این تغییر را انجام داد: شیوه‌های عملی، به بیان شفاهی آن‌ها تبدیل شدند و توضیح کلامی جای راه‌حل‌های عملی را گرفت؛ به نحوی که در واقع، منعکس کنندهٔ واقعیت عینی در ذهن، همراه با عنصر منطق شد.

طبیعی‌ترین شیوه در این‌جا (البته تا مدت زمانی)، عبارت است از توجه به عمل‌های ریاضی دربارهٔ کارهای عملی فرضی و تبدیل آن‌ها به «عمل‌های ریاضی رمزی».

در پاپیروس مسکو، پاپیروس ریند و جدول‌های روی صفحه‌های گل پخته، این عمل تحقق یافته است و در آن‌ها چنین می‌گویند: «این کار را بکن، این را به دست می‌آوری»؛ یعنی همچون «عمل‌های رمزی ریاضی» عرضه می‌شود. در پایان نیز همیشه این جمله دیده می‌شود: «باید این را به دست آوری»؛ «به جواب درست می‌رسی». درستی روش جدید و «دستوری» که تنها «نسخه» راه‌حل می‌دهد و تنها متکی بر «اعتبار» نویسندهٔ آن است، معرف کمال و تمامیت ریاضیات کاربردی است.

با وجود این در جریان آموزش، ریاضیات کاربردی زیر تأثیر نیروی درونی خود، دچار دگرگونی هایی شد: نوع مسأله‌ها به تدریج تغییر کرد و زمینه را برای تزلزل «اعتبار نسخه‌نویس» فراهم آورد. البته نوع مسأله‌ها بی‌تغییر ماند، ولی در هر نوع از آن‌ها، مسأله‌های تازه‌ای پدید آمد که نه ناشی از فعالیت عملی بود و نه با آموزش «مجاز» تطبیق می‌کرد. از این گونه می‌توان به مسأله‌های معکوس اشاره کرد. در مسأله شمارهٔ ۵۶ که پیش از این آوردیم و نخستین مسأله ازمسأله‌های مربوط به هرم در پاپیروس ریند است، شرط به طور مستقیم داده شده است: باید نسبت بین ضلع قاعدهٔ هرم به ارتفاع آن را پیدا کنیم. طرح چنین مسأله‌ای ناشی از نیازی است که ضمن ساختن هرم ظاهر می‌شود. در تهیهٔ یک بلوک سنگی، یک آرش در ارتفاع اندازه‌گیری می‌شود و نسبت حاصل را روی افق یادداشت می‌کنند. در بسیاری حالت‌ها، نشانهٔ مربوط را می‌توان روی بلوک‌های سنگ دید. مسألهٔ شمارهٔ ۵۷ عکس مسألهٔ شمارهٔ ۵۶ است. در این مسأله، نسبت نصف ضلع قاعده به ارتفاع و اندازهٔ ضلع قاعده داده شده، و خواسته شده است، ارتفاع هرم را پیدا کنند. این مسأله ناشی از نیاز کارهای عملی نیست و در درون ریاضیات کاربردی و به دلیل آموزش (و تمایل به تحقیق درستی نتیجه) به وجود آمده است. این شیوهٔ برخورد با کارهای عملی را می‌توان در مسألهٔ ۵۸ هم دید که در واقع، مراجعهٔ مستقیم به مسأله ۵۷ است. در این جا، نصف قاعدهٔ هرم و ارتفاع آن داده شده و نسبت آن‌ها خواسته شده است. سرانجام مسألهٔ ۵۹، شامل دو بخش است. بخش اول شبیه مسألهٔ ۵۸ است. بخش دوم از بخش اول و از درون ریاضیات کاربردی ساخته شده است و در آن، با در دست داشتن نسبت نصف قاعده به ارتفاع و اندازهٔ قاعده، باید ارتفاع هرم را پیدا کرد. در این جا، تغییر درونی مسأله، ناشی از حرکت دوری در مسأله‌های مستقیم و معکوس است.

وجود مسأله‌های معکوس، از ویژگی‌هایی است که در سایر گونه‌های مسأله‌های ریاضیات کاربردی هم دیده می‌شود. از جمله، ای. گ. باشماکوف، در کتاب «به وجود آمدن جبر»، دربارهٔ آگاهی‌های ریاضی در بابل باستان می‌نویسد: «معادله‌های درجهٔ دوم چگونه پدید آمد؟ ضمن اندازه‌گیری زمین‌ها، به طور طبیعی چنین مسأله‌هایی مطرح شد: با اندازه‌گیری طول و عرض زمین، باید مساحت آن را به دست آورد. ولی در عمل هرگز چنین مسأله‌ای پدید نمی‌آید که: با در دست داشتن مساحت و محیط قطعه زمین، طول ضلع‌های آن را پیدا کنید». ضمن حل مسأله‌هایی که در درون فعالیت‌های عملی پدید می‌آید، مسأله‌هایی طرح می‌شود که ناشی از حرکت درونی مسأله‌های کاربردی است، ولی از فعالیت‌های عملی جدا شده‌اند. ریاضیات کاربردی هدف خود را حفظ می‌کند، ولی حرکت درونی، مضمون و محتوای آن را تغییر می‌دهد.

ولی بازسازی درونی گونه‌های مختلف مسأله‌ها و دور شدن آن‌ها از عمل، تنها به دلیل پدید آمدن مسأله‌های معکوس نیست، بلکه باید طبقه‌بندی و تقسیم گونه‌های مختلف مسأله‌ها را هم، به حساب آورد. باری را که بر دوش مسأله‌های ناشی از کارهای عملی است، می‌توان تا آن جا سبک کرد که در درون یک مسأله، گونه‌های مختلف مسأله‌های کوچک‌تر به وجود آید. ولی سمت‌گیری اخیر، در ریاضیات کاربردی در برابر هجوم توفانی آموزشی که به دنبال روش کلی است، عقب‌نشینی می‌کند. از جمله، مجموعه‌هایی از مسأله‌های یکسان وجود دارد که «گاه بیش از ۲۰۰ مسأله را در یک جدول، که اندازهٔ آن از یک صفحهٔ چاپی تجاوز نمی‌کند، جا داده شده است. در چنین

مجموعه‌هایی، مسأله‌ها را با دقت و با آغاز از مسأله‌های ساده‌تر مرتب کرده‌اند. به عنوان مثال، مبحث معادله‌های درجهٔ دوم به صورت عادی آغاز شده است و به تدریج به ترکیب‌های بغرنج‌تر رسیده است. با وجود این، مسأله‌های پیچیده‌تر چنانند که سرانجام به همان مسألهٔ عادی منجر می‌شوند. یکی از این گونه مجموعه‌ها، شرط $xy = (10)0$ را ثابت نگه داشته و معادلهٔ دوم را به ترتیب تغییر داده است. چند جمله‌ای‌های تشکیل دهندهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم به ترتیب پیچیده‌تر می‌شوند و با عبارتی به این صورت، پایان می‌یابند:

$$(3x+2y)^2 + \frac{1}{13}\left\{4\left[\frac{1}{7}(2x+4y) - \left(\frac{1}{2}+1\right)(x-y)\right]^2 + (x+y)^2\right\} = 4(45)0$$

در همهٔ این معادله‌ها به یک جواب مشخص می‌رسیم: $x = 30$، $y = 20$. و این نشان می‌دهد که، برای معلم بی‌تفاوت بود که آیا شاگرد جواب را می‌داند یا نه[5]. روشن است که باید روش تبدیل این گونه عبارت‌های بغرنج، به عبارت‌های ساده‌تر یاد داده شود تا سرانجام پاسخ درست به دست آید» [آ. نیگه‌بادر در کتاب «دانش‌های دقیق در باستان»].

به تدریج این گونه دستاوردهای ریاضی که ضمن عمل به وجود آمده بودند، برای هدف‌های ریاضیات کاربردی، ناکافی به نظر می‌رسیدند. شاید بتوان گفت که ضمن پیشرفت آگاهی‌های ریاضی، نوعی اختلاف سطح معرفتی به وجود آمد که به روش نظری تنظیم مطالب منجر شد. ناهماهنگی مطالبی که با روش عملی عرضه می‌شد، با آموزشی که خارج از عمل و فعالیت شکل گرفته بود، مانعی در راه پیشرفت آگاهی‌ها بود و لازم می‌آمد که از سر راه برداشته شده و شیوه‌هایی به وجود آمد که به یاری آن‌ها می‌شد، نتیجه‌های مشخص را، بدون توجه به جنبهٔ عملی آن‌ها به دست آورد. مسأله‌های معکوس پدید آمد و نخستین تلاش‌ها برای تحقق درستی جواب انجام شد؛ به این ترتیب که جواب را به عنوان فرض و فرض مسألهٔ مستقیم را به عنوان مجهول در نظر بگیریم. در ضمن به طور طبیعی از اهمیت و ارزش «ایمان به صاحبان اعتبار» کاسته شد. گونه‌های مختلف مسأله‌ها، لایه‌بندی و از هم جدا شدند.

با وجود این، روش‌های خارج از کارها و فعالیت‌های جمعی، هنوز به صورت سنتی «نسخه» و «دستور» ادامه می‌یافتند. تجربهٔ درونی ریاضیات کاربردی، بیان بیرونی آن را زیر فشار گرفت: سنت‌ها دچار دگرگونی شدند. روش‌های کلی حل مسأله‌های یکسان (یعنی در واقع، روش‌های نظری)، ولی به صورت پنهانی و به صورت طرح راه‌حل‌های یکنواخت برای این گونه مسأله‌ها، پدیدار شدند. روش کلی حل در ریاضیات کاربردی، برای درک اهمیت آن، در درجهٔ دوم قرار دارد. این روش‌ها چیزی بیش از این نبودند که به کار آموزش کمک کنند تا گروه اجتماعی کاتبان بهتر تربیت شوند. ریاضیات کاربردی استخوان‌بندی بیرونی ـ فعالیت ساختاری ـ آن را تشکیل می‌داد و بنابراین، به عنوان چیزی جلوه می‌کرد که از نظر نمای بیرونی خود، از جهان مادی و فعالیت عملی جدا نشده است. آموزش داده‌ها، تفکر و برخورد ذهنی انسان‌ها، هنوز نتیجهٔ مستقیم برخورد مادی انسان‌ها بود.

مسألهٔ مربوط به ثبت و استواری ریاضیات کاربردی را می‌توان با پاسخ گفتن به این پرسش حل کرد که، آیا ممکن است تقسیم سنتی مسأله‌ها به گونه‌های مختلف و طرح سنتی «نسخه مانند راه‌حل» مسأله‌ها، با دگرگونی درونی گونه‌های مختلف مسأله‌ها با تلاش برای درستی راه‌حل‌ها و با نیازی که برای حل گروه کاملی از مسأله‌های مشابه به یاری روشی یکسان پدید آمده بود، سازگار باشند و آیا این آمیزش دوگانه، پایدار است؟ با همهٔ این‌ها، حتی در این شرایط که شکافی معرفتی در فعالیت‌های ریاضی پدید آمده است، آیا تبدیل ریاضیات به صورت نظری، ضرورت فوری پیدا نمی‌کند؟

این تبدیل در مصر و بابل باستان، با کندی بسیار وخیمی تحقق یافت. از زمان سلطنت میانه و پاپیروس‌های مسکو و رایند (در ضمن پاپیروس رایند از روی نسخه‌ای خیلی قدیمی‌تر برداشته شده است)، تا سندهای ریاضی دورهٔ

تیموریان، ریاضیات مصری، تغییر بسیار اندکی کرده است. همین وضع دربارهٔ ریاضیات کاربردی میان دورود هم صدق می‌کند، به نحوی که شیوهٔ طرح آن، کم و بیش بی‌تغییر باقی می‌ماند؛ اگرچه نوع «دستورنویسی» بغرنج‌تر هم می‌شود: حجم جسم‌های پیچیده‌تری مطرح می‌شود، حل معادله‌های درجهٔ دوم پیش می‌آید، دربارهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای بحث می‌شود که طول ضلع‌های آن‌ها غیر از ۳ و ۴ و ۵ است و غیره. «حتی دورهٔ هلنیستی، بخش عمده‌ای از تألیف‌های یونانی در زمینهٔ ریاضیات که در قلمرو مصر نوشته شده است، از نظر شکل طرح مطالب، به تقریب با متن‌های قدیمی مصری تفاوتی ندارد... نیروی ملت‌ها چه قدر باید بزرگ باشد که بر کارهای کسانی که روی آثار اقلیدس، ارشمیدس و آپولونیوس کار می‌کرده‌اند، اثر بگذارد» [م. یا. ویگودسکی در کتاب «حساب و جبر در دنیای باستان»].

ویگودسکی نتیجه می‌گیرد: «شکل دگماتیک طرح مطالب، به هیچ وجه با وجود دانش نظری منافات ندارد. برعکس اگر با چنان نتیجه هایی که به شکل دگماتیک مطرح شده‌اند، برخورد می‌کنیم... حق داریم دربارهٔ وجود چنین درک و معرفتی صحبت کنیم، نه این که فرضیهٔ خود را بر اساس **تصادف هایی** از کارهای تجربی که احتمال بسیار کمی دارد، بگذاریم».



در این میان، دو نوع استدلال به هم آمیخته است، وقتی که توجه و نتیجه‌گیری درست تاریخی، در مقابل ریاضیات نظری به حساب درهم‌جوشی و «تصادفی» بودن آگاهی‌های ناشی از تجربه گذاشته شده است.

روش‌های کلی در درون گونه‌های مسأله، به هیچ وجه با موقعیت نظری بیرونی آگاهی‌های ریاضی منطبق نیست؛ زیرا قبل از شکل‌گیری ریاضیات نظری، نه یک درهم‌جوشی ناهمگون، بلکه هدفی عملی وجود دارد که در آن، روش کار به پیوستگی و هماهنگی آگاهی‌ها کمک می‌کند. حالت نظری ریاضیات نمی‌تواند در چارچوب هدف‌های عملی نخستین پدیدار شود؛ زیرا چنین جنبه‌ای از ریاضیات، هنوز با هدف آن بیگانه است.

به این ترتیب، ریاضیات به عنوان معرفتی هدفمند و به عنوان حوزهٔ معینی از دستاوردهای ناشی از تجزیه و تقسیم فعالیت‌های عملی، هستی می‌یابد. این هدفمندی با ارتباط بخش‌های مختلف آن به یکدیگر، معین نمی‌شود. ریاضیات کاربردی، تابعی از فعالیت‌های عملی است که موجب هستی آن شده‌اند. با همهٔ این‌ها، ریاضیات کاربردی، دارای چنان امکانی است که می‌تواند آن را به سمت ریاضیات نظری هدایت کند. آمادگی این انتقال، به تدریج و از راه آموزش که در جهت بارآور کردن ریاضیات عملی کار می‌کند، فراهم می‌شود.

زیرنویس

۱. «نیازهای اقتصادی، دستگاه اندازه‌گیری و همچنین هندسه را به وجود آوردند. سندهای اقتصادی مربوط به آن‌ها، از حدود هزارهٔ سوم پیش از میلاد و بعد از آن، به تعداد زیادی به دست ما رسیده‌اند.» (ای. ان. وسه‌دسکی در کتاب «ریاضیات بابلی»].

۲. از دوران سلسلهٔ چهارم (نزدیک به هزار و پانصد سال پیش از میلاد)، تعداد زیادی یادگارهای خطی به ما رسیده است که سندهای حقوقی و نوشته‌هایی در زمینهٔ فعالیت‌های اقتصادی هستند و آن‌ها را باید از جملهٔ محاسبه‌های ریاضی دانست» [م. یا. ویگودسکی در کتاب «حساب و جبر در دنیای باستان].

۳. مصری‌ها از کسرهای با صورت برابر واحد استفاده می‌کردند. در این جا منظور آن است که اگر ۲۵۰ را در $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}$ ضرب کنیم، عدد ۱۸۰ به دست می‌آید.

۴. در واقع، نسبت نصف قاعده به ارتفاع برابر $\frac{18}{25}$ می‌شود که نویسندهٔ مسأله آن را بر حسب ارش در نظر می‌گیرد و ۷ برابر آن را محاسبه می‌کند تا به وجب تبدیل شود: $\frac{18}{25}\times 7 = 5\frac{1}{25}$.

۵. عددهای سمت راست این معادله‌ها، در عددنویسی بابلی، به معنای شصت در نظر گرفته شده است. در معادلهٔ اول ۰(۱۰)، به معنای $10\times 60+0$، یعنی ۶۰۰ و در معادلهٔ دوم ۰(۴۵)۲ به معنای $4\times 60^2+45\times 60+0$، یعنی ۱۷۱۰۰ است.

قسمت دوم

دکتر محمد علی فریبرزی عراقی
عضو هیأت علمی گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران

اصل شمول و عدم شمول و کاربردهای آن

در شماره قبل به بررسی صورت اصل شمول و عدم شمول و چند مثال از کاربردهای آن پرداختیم. در این قسمت، کاربردهای دیگری از این اصل تشریح می‌شوند.

مثال ۱

محاسبه تعداد توابع پوشا: فرض کنیم A و B مجموعه‌هایی به ترتیب m و n عضوی باشند؛ به طوری که $m \geq n$. در این صورت تعداد توابع پوشای $f: A \longrightarrow B$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{n-i}(n-i)^m \qquad (1)$$

اثبات: فرض کنیم $A=\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ و $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$. اگر S مجموعهٔ تمام توابع $f: A \longrightarrow B$ باشد، آن‌گاه، $|S|=n^m$. حال مجموعه‌های A_i، $1 \leq i \leq n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i=\{f\in S \mid b_i \notin R_f\}$$

به عبارت دیگر، A_i زیرمجموعه‌ای از S است که در آن عضو b_i در بُرد f قرار ندارد. هدف یافتن $|\overline{A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n}|$ است. در واقع $|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n|$، تعداد توابعی را که پوشا نیستند مشخص می‌کند. برای این منظور، از اصل شمول و عدم شمول به این صورت استفاده می‌کنیم:

$$|A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leq i<j<k\leq n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\dots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_n| \qquad (2)$$

ابتدا $|A_1|$ را می‌یابیم. مجموعهٔ A_1 به معنای زیر مجموعه‌ای از S است که در آن b_1 در بُرد f قرار ندارد. لذا کافی است تعداد توابعی را بیابیم که می‌توان از A در مجموعهٔ $\{b_2,b_3,\dots,b_n\}$ نوشت. این تعداد برابر است با: $(n-1)^m$. به این ترتیب:

$$|A_1|=|A_2|=\dots=|A_n|=(n-1)^m$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}|A_i|=\binom{n}{1}(n-1)^m$$

حال، $|A_1\cap A_2|$ را می‌یابیم. مجموعهٔ $A_1\cap A_2$ به معنای زیرمجموعه‌ای از S است که در آن b_1 و b_2 در بُرد f قرار ندارند. این به معنای یافتن تعداد توابعی است که می‌توان از A در مجموعهٔ $\{b_3,b_4,\dots,b_n\}$ نوشت و برابر است با: $(n-2)^m$. چون تعداد اعضای اشتراک‌های دوتایی مجموعه‌های A_1 تا A_n برابرند، لذا:

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = \cdots = |A_{n-1} \cap A_n| = (n-2)^m$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| = \binom{n}{2}(n-2)^m$$

به همین ترتیب:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = (n-3)^m$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{n}{3}(n-3)^m$$

با ادامهٔ این روند، می‌توان سایر مجموعه‌های رابطهٔ (۲) را به دست آورد. در نتیجه با جایگذاری نتایج در رابطهٔ (۲):

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \binom{n}{1}(n-1)^m - \binom{n}{2}(n-2)^m + \binom{n}{3}(n-3)^m - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^m$$

با توجه به این که: $|S| = n^m = \binom{n}{0}(n-0)^m$، لذا:

$$\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}(n-i)^m$$

چون $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$، لذا:

$$\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right| = |\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \cap \overline{A}_n| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i}(n-i)^m$$

به عنوان مثال، اگر $m = 4$ و $n = 3$، تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۳ عضوی برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{3} (-1)^i \binom{3}{3-i}(3-i)^4 = \binom{3}{3}3^4 - \binom{3}{2}2^4 + \binom{3}{1}1^4 - \binom{3}{0}0^4 = 36$$

لازم به توضیح است که رابطهٔ (۲)، حتی اگر $m < n$، قابل محاسبه است، ولی در این حالت، حاصل رابطه برابر صفر است. در واقع در صورتی که $m < n$، تابع پوشایی از A در B وجود ندارد.

مثال ۲

تابع فی اویلر: فرض کنیم $m \in \mathbb{N}$ و $m = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \cdots P_n^{\alpha_n}$، تجزیهٔ m به حاصل ضرب عوامل اول باشد که در آن $P_1, P_2, \cdots, P_n$ اعداد اول و متمایز هستند. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ طبیعی هستند، در این صورت، تعداد اعداد طبیعی بین ۱ تا m که نسبت به m اول هستند، برابر است با:

$$\phi(m) = m\left(1 - \frac{1}{P_1}\right)\left(1 - \frac{1}{P_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{P_n}\right) \qquad (3)$$

$\phi(m)$ را **تابع فی اویلر** می‌نامند. به منظور اثبات رابطهٔ (۳)، از اصل شمول و عدم شمول استفاده می‌کنیم. ابتدا مجموعه‌های A_i، $1 \le i \le n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_i = \{1 \le k \le m : P_i | k\}$$

به عبارت دیگر، برای هر $1 \le i \le n$، A_i برابر است با مجموعهٔ اعداد طبیعی نابیش‌تر از m که عدد اول P_i آن‌ها را عاد می‌کند. هدف یافتن $\left|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}\right|$ است. در واقع اعضایی از مجموعهٔ $S = \{K \in \mathbb{N} | K \le m\}$ را می‌خواهیم که به هیچ یک از Aiها متعلق نباشند به این منظور چون،

$$|A_i| = \frac{m}{P_i} \quad \text{و} \quad 1 \le i \le n$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{m}{P_i P_j} \quad \text{و} \quad 1 \le i < j \le n$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{m}{P_i P_j P_k}, 1 \le i < j < k \le n$$

و در نهایت، $\left|A_1\cap\ldots\cap A_n\right| = \dfrac{m}{P_1P_2\cdots P_n}$

لذا بنابر رابطهٔ (۲)،

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\frac{m}{P_i} - \sum_{1\le i<j\le n}\frac{m}{P_iP_j} + \sum_{1\le i<j<k\le n}\frac{m}{P_iP_jP_k} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{m}{P_1P_2\cdots P_n}$$

در نتیجه با توجه به این که $|S| = m$ خواهیم داشت:

$$\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}\right| = |S| - \left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right|$$

$$= m\left(1 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i} + \sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{P_iP_j} - \sum_{1\le i<j<k\le n}\frac{1}{P_iP_jP_k} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{P_1P_2\cdots P_n}\right)$$

$$= \frac{m}{P_1P_2\cdots P_n}[P_1P_2\cdots P_n - (P_2P_3\cdots P_n + P_1P_2\cdots P_n + \cdots + P_1P_2\cdots P_{n-1}) + (P_3P_4\cdots P_n + P_2P_4P_5\cdots P_n + \cdots + P_1P_2\cdots P_{n-2}) - \cdots + (-1)^{n-1}(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_1) + (-1)^n]$$

$$= \frac{m}{P_1P_2\cdots P_n}\left[(P_1-1)(P_2-1)\cdots(P_n-1)\right]$$

$$= m\left[\frac{(P_1-1)}{P_1}\times\frac{(P_2-1)}{P_2}\times\cdots\times\frac{(P_n-1)}{P_n}\right]$$

$$= m\left(1-\frac{1}{P_1}\right)\left(1-\frac{1}{P_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{P_n}\right)$$

مثال ۳

مسألهٔ منشی گیج: یک منشی n نامه و نشانی هریک از آن‌ها را روی n پاکت‌نامه تایپ کرده است و می‌خواهد هر نامه را در پاکت مربوطه قرار دهد. گیرنده‌های نامه‌ها و نشانی هریک از آن‌ها متفاوت هستند. به چند طریق ممکن است، این منشی هیچ نامه‌ای را در پاکت مربوط به خودش قرار ندهد؟

حل

فرض کنیم S مجموعهٔ مربوط به جای‌گشت‌های n شیء متمایز باشد. در این صورت، $|S| = n!$. به عبارت دیگر به $n!$ طریق می‌توان n نامهٔ متفاوت را در n پاکت نامه قرار داد. نامه‌ها و پاکت مربوط به هر کدام را از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. حال مجموعه‌های A_i، $1\le i\le n$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_i =$ {جای‌گشت‌هایی از S که نامه iام در پاکت iام قرار گیرد.}

هدف یافتن $\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}$ است. می‌دانیم:

$|A_i| = (n-1)!$ و $|A_i\cap A_j| = (n-2)!$ و $1\le i<j\le n$

$|A_i\cap A_j\cap A_n| = (n-3)!$ و $1\le i<j<k\le n$

و در نهایت $|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n| = 1$. در نتیجه بنابر رابطهٔ (۲)، داریم:

$$\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right| = \binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n-1}\times 1$$

بنابراین:

$$\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}\right| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \cdots + (-1)^n\times\binom{n}{n}\times 0! = n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right) \quad (۴)$$

به عنوان مثال، اگر بخواهیم بدانیم به چند طریق می‌توان ۵ نامهٔ متفاوت را در ۵ پاکت نامه طوری قرار داد که هیچ نامه‌ای در پاکت مربوط به خودش قرار نگیرد، کافی است رابطهٔ (۴) را به ازای $n = 5$ حساب کنیم. این مقدار برابر خواهد شد با:

$$120\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right) = 44$$

مثال ۴

یک معلم ریاضی ۱۰ پرسش برای درس خود طرح کرده و ۱۰۰ امتیاز برای کل آن‌ها در نظر گرفته است. وی به چند طریق می‌تواند این ۱۰۰ امتیاز را به پرسش‌ها اختصاص

دهد، در صورتی که هر پرسش حداقل ۵ و حداکثر ۱۵ امتیاز داشته باشد.

حل:

هدف یافتن تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_{10}=100$ با شرط‌های $5\le x_i\le 15$، $1\le i\le 10$، است. به این منظور کافی است، تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x'_1+x'_2+\cdots+x'_{10}=50$ را که $x'_i=x_i-5$، $1\le i\le 10$، با شرط‌های $0\le x'_i\le 10$ به دست آوریم. اگر S تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله باشد، آن‌گاه $|S|=\binom{59}{50}$. مجموعه‌های A_i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A_i=\{$جواب‌های معادلهٔ فوق با شرط $x'_i>10\}$، $1\le i\le 10$.

به این ترتیب، هدف به دست آوردن $\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{10}}\right|$ است. بنابر اصل شمول و عدم شمول:

$$\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{10}}\right|=|S|-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_{10}|$$
$$=\binom{59}{50}-\left[\binom{10}{1}\binom{48}{39}-\binom{10}{2}\binom{37}{28}+\binom{10}{3}\binom{26}{17}-\binom{10}{4}\binom{15}{6}+0\right]$$

مثال ۵

به چند طریق می‌توانیم ۱۰ نفر را که هر دوی آن‌ها از یک شهر آمده‌اند، دور یک میزگرد چنان بنشانیم که هیچ دو همشهری کنار یکدیگر قرار نگیرند؟

حل:

فرض کنیم S مجموعهٔ مربوط به جای‌گشت‌های ۱۰ شیء متمایز دور یک میزگرد باشد. در این صورت $|S|=9!$. مجموعه‌های A_i، $1\le i\le 5$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$A_i=\{$جای‌گشت‌هایی از S که در آن‌ها دو همشهری iام کنار یکدیگر قرار دارند.$\}$

بنابراین می‌خواهیم $\left|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_5}\right|=|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_5|$ را بیابیم.

$$|A_i|=2!\times 8!\quad ,1\le i\le 5\Rightarrow\sum_{i=1}^{5}|A_i|=\binom{5}{1}\times 2\times 8!$$

$$|A_i\cap A_j|=(2!)^2\times 7!,1\le i<j\le 5$$
$$\Rightarrow\sum_{1\le i<j\le 5}|A_i\cap A_j|=\binom{5}{2}\times 4\times 7!$$
$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=(2!)^3\times 6!,1\le i<j<k\le 5$$
$$\Rightarrow\sum_{1\le i<j<k\le 5}|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{5}{3}\times 8\times 6!$$

با ادامهٔ این روند: $|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_5|=(2!)^5\times 4!$.

در نتیجه بنا بر اصل شمول و عدم شمول:

$$|\bar{A}_1\cap\bar{A}_2\cap\ldots\cap\bar{A}_5|=|S|-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_5|$$
$$=9!-\left[\binom{5}{1}\times 2\times 8!-\binom{5}{2}\times 4\times 7!+\binom{5}{3}\times 8\times 6!-\binom{5}{4}\times 16\times 5!+\binom{5}{5}\times 32\times 4!\right]=112512$$

تمرین

۱. الف) تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_1+x_2+x_3+x_4=19$ را با شرط‌های $-5\le x_i\le 10$، $1\le i\le 4$ به دست آورید.

ب) تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ فوق را با شرط‌های $0\le x_1\le 5$، $0\le x_2\le 6$، $3\le x_3\le 7$ و $3\le x_4\le 8$ به دست آورید.

۲. به چند طریق می‌توان سه x و سه y و سه z را چنان مرتب کرد که هیچ‌یک از حروف سه بار متوالی ظاهر نشود؟

۳. تعداد اعداد صحیح و مثبت نابیش‌تر از ۱۰۰۰ را که مجذور کامل، مکعب کامل یا توان چهارم کامل نباشند، به دست آورید.

۴. به چند طریق می‌توان اعداد صحیح ۱ و ۲ و ... و ۸ را در یک خط چنان مرتب نمود که هیچ یک از الگوهای ۱۲ و ۲۳ و ۳۴ و ... و ۷۸ و ۸۱ مشاهده نشود؟

حمیدرضا امیری

تبدیل در صفحه ۲

ماتریس های تبدیل و کاربرد آن ها

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

در شمارهٔ قبل، دربارهٔ «تبدیل در صفحه» مطالبی ارائه کردیم و به بررسی دو ماتریس تبدیل پرداختیم. در این مقاله، بررسی ماتریس های تبدیل را ادامه می دهیم.

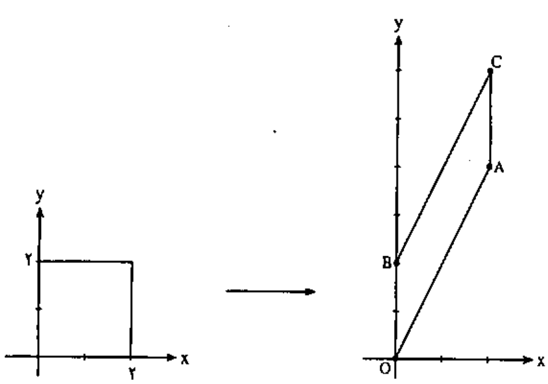
۳. ماتریس های بُرش

ماتریس های $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ به ترتیب ماتریس های بُرش در امتداد محور xها و yها هستند و چون همواره $|T_1| = |T_2| = 1$، پس مساحت شکل حاصل از تأثیر این دو ماتریس نسبت به شکل اولیه، تغییر نمی کند.

مثال: مربع به طول ضلع ۲ با ماتریس نقاط $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ تحت تأثیر ماتریس $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ به چه شکلی تبدیل می شود؟

مساحت آن را با مساحت مربع مقایسه کنید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$



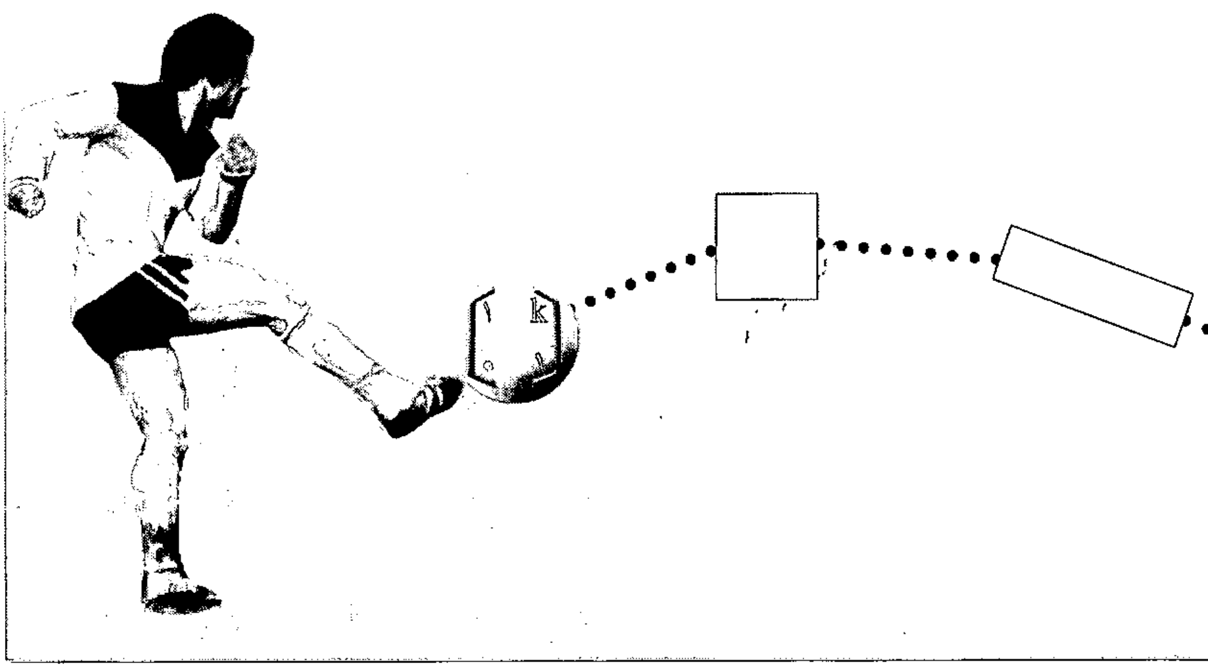
مساحت مربع قبل از تبدیل $S = 2^2 = 4$ بود و مساحت متوازی الاضلاع حاصل با توجه به نکته ای که در مقاله شماره قبل بیان کردیم و با استفاده از سه نقطهٔ O و A و B برابر است با:

$$S_{OABC} = \left\| \begin{matrix} 2-0 & 4-0 \\ 0-0 & 2-0 \end{matrix} \right\| \Rightarrow S = 2\times 2 - 4\times 0 = 4$$

واضح است، تبدیل های برشی نیز به این دلیل که شکل را تغییر می دهند، تبدیل های «غیر ایزومتری» هستند.

۴. ماتریس های تقارن

ماتریس های تقارن، ماتریس های تبدیلی هستند که هر نقطه ای در صفحه یا هر شکل هندسی را، روی قرینه اش



نسبت به یک خط یا یک نقطه، تصویر می‌کند و مهم‌ترین آن‌ها عبارتند از:

الف) ماتریس تقارن نسبت به محور xها: این ماتریس هر نقطه را نسبت به محور xها قرینه می‌کند. یعنی نقطهٔ $A=(x,y)$ را به نقطهٔ $A'=(x,-y)$ تبدیل می‌کند. در این حالت، عرض نقطه قرینه می‌شود. این ماتریس به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \Rightarrow T=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

ب) ماتریس تقارن نسبت به محور yها: این ماتریس هر نقطه را نسبت به محور yها قرینه می‌کند. در این حالت x است که قرینه می‌شود:

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \Rightarrow T=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

ج) ماتریس تقارن، نسبت به مبدأ مختصات: این ماتریس هر نقطه را نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کند. در این حالت طول و عرض هر دو قرینه می‌شوند:

$$A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-x\\-y\end{matrix}\right.$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.,\quad B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right. \Rightarrow T=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

د) ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ناحیهٔ اول و سوم (خط y=x): اگر نقطه‌ای نسبت به خط y=x قرینه شود، جای طول و عرض آن عوض می‌شود:

$$A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}y\\x\end{matrix}\right.$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to B'\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \Rightarrow T=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

هـ) ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم (خط y=-x): اگر نقطه‌ای نسبت به خط y=-x قرینه‌شود، طول

و عرض آن هم قرینه می شوند و هم جایشان عوض می شود:

$$A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-y\\-x\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.\\ A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.\end{matrix}\right\} \Rightarrow T=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

و) ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ α: اگر نقطه‌ای تحت تأثیر این ماتریس قرار بگیرد، حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ α دوران می کند. اگر دایرهٔ مثلثاتی (دایرهٔ به شعاع واحد و مرکز مبدأ مختصات) را در نظر بگیریم مطابق شکل، نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$ به نقطه $A'\left|\begin{matrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{matrix}\right.$ تبدیل می شود و نقطهٔ

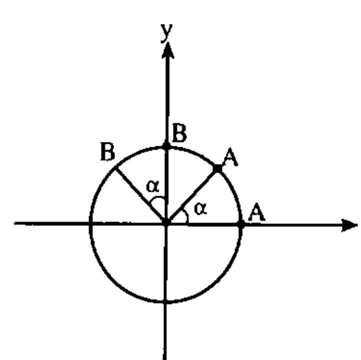
$B\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$ به نقطهٔ $B'\left|\begin{matrix}\cos\alpha(\frac{\pi}{2}+\alpha)\\ \sin\alpha(\frac{\pi}{2}+\alpha)\end{matrix}\right.$ یا $B'\left|\begin{matrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{matrix}\right.$:

$$\Rightarrow T=R_\alpha=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

$$A\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{matrix}\right.$$

$$A\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right. \to A'\left|\begin{matrix}-\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{matrix}\right.$$

(محور xها را محور کسینوس‌ها و محور yها را محور سینوس‌ها در نظر می گیریم.)



مثال: دوران یافتهٔ نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}\sqrt{2}\\-2\sqrt{2}\end{matrix}\right.$ را حول مبدأ، به اندازهٔ زاویهٔ 45° بیابید.

$$R\frac{\pi}{4}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

نکتهٔ مهم: ماتریس‌های دوران حول مبدأ همواره طول و زاویه را ثابت نگه می دارند؛ یعنی شکل حاصل از دوران بر شکل اولیه قابل انطباق است.

توجه دارید که اگر R_α ماتریس دوران و دلخواهی باشد، همواره $|R_\alpha|=1$ است و اگر هر ستون R_α را یک بردار فرض کنیم، همواره، طول هر بردار (بردار ستونی) در R_α نیز برابر ۱ است و دو بردار ستونی بر هم عمودند (ضرب داخلی آن‌ها صفر می شود.)

آزمون: دوران یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=6$ حول مبدأ، به اندازهٔ زاویهٔ 90° کدام است؟

الف) $(x-2)^2+(y+1)^2=6$

ب) $(x+2)^2+(y+1)^2=6$

ج) $(x-2)^2+(y-1)^2=6$

د) $(x+2)^2+(y-1)^2=6$

حل: گزینهٔ ج صحیح است؛ زیرا منحنی مفروض دایره‌ای است به مرکز $w\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ و به شعاع $\sqrt{6}$ که با توجه به نکتهٔ قبل، شکل حاصل پس از دوران نیز دایره است و شعاع آن همان شعاع دایرهٔ قبلی است، پس برای نوشتن معادلهٔ آن کافی است مرکز دایرهٔ تبدیل یافته را با دوران دادن مرکز دایرهٔ مفروض به دست آوریم:

$$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=w'$$

معادلهٔ دایره $(x-2)^2+(y-1)^2=6$

تذکر: هرگاه بخواهیم تأثیر ماتریس تبدیل T را روی یک خط یا یک منحنی به دست آوریم، کافی است T را روی نقطهٔ دلخواهی چون $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ اثر بدهیم و حاصل را به صورت $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ بنویسیم، سپس x و y را بر حسب x' و y' بیابیم و در معادلهٔ داده شده قرار دهیم تا معادلهٔ تبدیل یافته به دست آید.

مثال: منحنی به معادلهٔ $2y-3x^2=2$ مفروض است. این منحنی را حول مبدأ به اندازهٔ $\frac{\pi}{6}$ دوران می‌دهیم. معادلهٔ منحنی حاصل را به دست آورید.

$$\alpha=\frac{\pi}{6}\Rightarrow\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=x' \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=y' \end{cases}$$

طرفین معادلهٔ (۱) را در $\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sqrt{3}x' \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=y' \end{cases}\Rightarrow 2x=\sqrt{3}x'+y'$$

$$\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2}$$

طرفین معادلهٔ (۲) را در $-\sqrt{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=x' \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{3}{2}y=-\sqrt{3}y' \end{cases}\Rightarrow -2y=x'-\sqrt{3}y'$$

$$\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}y'+x'}{2}$$

$$2y-3x^2=2\Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}y'-x'}{2}\right)-3\left(\frac{\sqrt{3}x'-y'}{2}\right)=2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y'-x'-3\left(\frac{3x'^2+y'^2+2\sqrt{3}x'y'}{4}\right)=2$$

$$\Rightarrow -9x'^2-3y'^1-6\sqrt{3}x'y'+4\sqrt{3}y'-4x'=8$$

معادلهٔ جدید منحنی

رابطه‌ای مهم در ماتریس‌های دوران

اگر R_α ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ α باشد، در این صورت داریم:

$$(R_\alpha)^n=R_{n\alpha}$$

اثبات به روش استقرا:

$$n=1\Rightarrow (R_\alpha)^1=R_{1\times\alpha}\Rightarrow R_\alpha=R_\alpha$$

(حکم به ازای $n=1$ برقرار است)

فرض استقرا $\quad n=k\Rightarrow (R_\alpha)^k=R_{k\alpha}$

حکم استقرا $\quad n=k+1\Rightarrow (R_\alpha)^{k+1}=R_{(k+1)\alpha}$

$$(R_\alpha)^{k+1}=(R_\alpha)^k\times R_\alpha \xrightarrow[\text{فرض}]{\text{طبق}} R_{k\alpha}\times R_\alpha$$

$$R_{k\alpha}\times R_\alpha=\begin{bmatrix} \cos k\alpha & -\sin k\alpha \\ \sin k\alpha & \cos k\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha & -(\cos k\alpha\sin\alpha+\sin k\alpha\cos\alpha) \\ \sin k\alpha\cos\alpha+\cos k\alpha\sin\alpha & \cos k\alpha\cos\alpha-\sin k\alpha\sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(k\alpha+\alpha) & -\sin(k\alpha+\alpha) \\ \sin(k\alpha+\alpha) & \cos(k\alpha+\alpha) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(k+1)\alpha & -\sin(k+1)\alpha \\ \sin(k+1)\alpha & \cos(k+1)+\alpha \end{bmatrix}=R_{(k+1)\alpha}$$

تذکر مهم: با توجه به این که $R_{2\pi}=\begin{bmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{bmatrix}=I$، به راحتی می‌توان توان‌های بزرگ یک ماتریس دوران را به دست آورد و آن را محاسبه کرد، به این مثال توجه کنید:

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ باشد، A^{1382} را حساب کنید.

$$A=R_{\frac{\pi}{3}}\Rightarrow A^{1382}=(R_{\frac{\pi}{3}})^{1382}=R_{1382\times\frac{\pi}{3}}$$

از طرفی:

$$A^6=(R_{\frac{\pi}{3}})^6=R_{6\times\frac{\pi}{3}}=R_{2\pi}=I, 1382=230\times 6+2$$

پس:

$$A^{1382}=(A^6)^{230}\times A^2=(I)^{230}\times R_{2\frac{\pi}{3}}=I\times R_{\frac{2\pi}{3}}=R_{\frac{2\pi}{3}}$$

$$,R_{\frac{2\pi}{3}}=\begin{bmatrix}\cos(\pi-\frac{\pi}{3}) & -\sin(\pi-\frac{\pi}{3})\\ \sin(\pi-\frac{\pi}{3}) & \cos(\pi-\frac{\pi}{3})\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow A^{1382}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

آزمون: حاصل ضرب ماتریسی زیر کدام است؟

$$\begin{bmatrix}\cos 35^\circ & -\sin 35^\circ\\ \sin 35^\circ & \cos 35^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 20^\circ & \sin 20^\circ\\ -\sin 20^\circ & \cos 20^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 75^\circ & -\sin 75^\circ\\ \sin 75^\circ & \cos 75^\circ\end{bmatrix}$$

الف)

ب) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

د) $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ ج صحیح است؛ زیرا با توجه به ماتریس تبدیل کل (تبدیل‌های متوالی)، حاصل ضرب ماتریسی مفروض را به صورت $R_{75^\circ}\times R_{-20^\circ}\times R_{35^\circ}$ می‌توان نوشت که در آن مجموع زاویه‌ها 90° است. در واقع ابتدا 75° دوران صورت گرفته است، سپس -20° درجه و سرانجام 35° درجه که در مجموع می‌شود، ۹۰ دوران. پس حاصل $R_{\frac{\pi}{2}}$ است.

آزمون: معادلهٔ منحنی $y^2-x^2=1$، پس از تبدیل توسط ماتریس $T=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ کدام است؟

الف) $x^2+y^2=1$

ب) $x^2-y^2=1$

ج) $x^2-y^2=-1$

د) $x^2+y^2=-1$

حل: روش اول:

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=x'\\ -x=y'\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y'\\ y=x'\end{cases}$$

$$y^2-x^2=1\Rightarrow(x')^2-(-y')^2=1\Rightarrow x'^2-y'^2=1$$

پس گزینهٔ ب صحیح است.

روش دوم: منحنی مفروض یعنی $y^2-x^2=1$ یک بیضی قائم است و ماتریس T، ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ $-\frac{\pi}{2}$ است پس بیضی قائم با دوران -90° به یک بیضی افقی تبدیل می‌شود که بر بیضی قبل قابل انطباق است؛ یعنی بیضی به معادلهٔ $x^2-y^2=1$.

هـ) ماتریس تقارن نسبت به خط $y=mx$ یا $y=xtg\alpha$: می‌خواهیم با تبدیل‌های متوالی، ماتریس تبدیل کل را برای تقارن نسبت به خط $y=xtg\alpha$ بیابیم:

خط $y=xtg\alpha$ با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α می‌سازد. حال اگر، ابتدا نقاط صفحه را به اندازهٔ $(-\alpha)$ دوران دهیم، خط مذکور بر محور xها منطبق می‌شود،

سپس قرینهٔ نقطه یا نقاط داده شده را نسبت به محور xها به دست می‌آوریم و سرانجام کل نقاط صفحه را به اندازهٔ α دوران می‌دهیم تا انحراف پدید آمدن جبران شود. ماتریس تبدیل کل از ضرب این سه ماتریس، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \text{ماتریس تقارن نسبت به خط}$$

$y = mx$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{bmatrix}$$

مثال: نقطهٔ $A\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ را نسبت به خط $y = 2x$ قرینه کنید و مختصات نقطهٔ حاصل را بیابید.

$$tg\alpha = 2 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5}$$

$$, \sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

تذکر مهم: اگر T ماتریس تقارن نسبت به خط y=mx باشد و روی نقطه‌ای چون A اثر کند، نقطهٔ A به دست می‌آید که قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط y = mx است. حال اگر ماتریس T این بار روی ′A اثر کند، چون آن را نسبت به همان خط y = mx قرینه می‌کند، نقطهٔ A به دست می‌آید. در حالت کلی اگر تعداد تأثیرهای ماتریس T روی نقطهٔ A زوج باشد، قرینهٔ A بر خودش منطبق می‌شود و اگر این تأثیرها فرد باشند، بر ′A منطبق می‌شود. پس می‌توان نوشت:

$$T^{2k} = I \text{ و } T^{2k+1} = T$$

(ماتریس I یا تبدیل همانی، هر نقطه را بر خودش منطبق می‌کند، اما ماتریس T، A را بر ′A منطبق می‌کند)

مثال: ماتریس‌های A و B و C به صورت زیر معرفی می‌شوند. حاصل $A^{102} + B^{48} + 2C^{1381}$ را بیابید:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{5} \\ \frac{\sqrt{3}}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: A و B و C ماتریس‌های تقارن هستند. پس داریم:

$$A^{102} = I, \quad B^{48} = I, \quad C^{1381} = C, \quad C = -I$$

$$\Rightarrow A^{102} + B^{48} + 2C^{1381} = I + I - 2I = \overline{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

لازم به یادآوری است که ماتریس‌های انتقالی که بتوانند هر نقطه مانند $A\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ را به نقطهٔ $A'\begin{vmatrix} x+a \\ y+b \end{vmatrix}$ منتقل کنند، نمی‌توانند ۲×۲ باشند؛ زیرا برای مثال مبدأ مختصات یعنی $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ با هیچ ماتریس ۲×۲ قابل انتقال به $\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}'$ نیست $\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ و می‌باید این انتقال در صفحه‌ای به موازات صفحه xy در IR^3 و به ارتفاع واحد انجام پذیرد. یعنی ابتدا باید نقطهٔ مورد نظر مثلاً $A\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$، روی چنین صفحه‌ای تصویر شود و با یک ماتریس ۳×۳ که $T_{(a,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ نام دارد، به نقطهٔ $A'\begin{vmatrix} x+a \\ y+b \end{vmatrix}$ انتقال یابد و سپس روی صفحهٔ xy تصویر شود. این نوع تبدیل‌ها در صفحهٔ IR^2 صورت نمی‌گیرند و فعلاً از بحث ما خارجند. ان شاءالله در مقاله‌های بعدی، به آن‌ها خواهیم پرداخت.



قسمت دوم

غلامرضا یاسی پور

تابع شایستگی

تابع شایستگی از فشـار دادن دکمهٔ نظیر واقع بـر واحد کنترل به دست می‌آید. این تابع مقدار شایستگی هر موجود معلوم را در «صورتْ‌فضا» نمایش می‌دهد؛ درحالی که طبق نمونهٔ کلی، به کـمیتی یـک بعدی فشـرده شده، با ارتفاع به نمایش درمی‌آید. به این ترتیب، شایستگی به صورت نمودار این کمیت، در مقابل نقاطی از صورت• فضا ارائه می‌شود. این کار دارای تأثیر جابه‌جاکردن صورت‌فضا در سوی قائم، به اندازهٔ مقداری متناسب با تابع شـایستگی، اسـت: عمل مزبور، از لحـاظ ریاضـی، متـناظر بـا نمـایش نـمودار تابع شایستگی است. صفحهٔ غیابی مربوط به صورت‌فضا خمیده می‌شود، و در این حال، چشم‌انداز تنازع را نمایش می‌دهد. انواعی که برای باقی ماندن شایسته‌ترند، سطوح بـالاتر این چشم‌انداز را اشغال می‌کنند.

وسیلهٔ متمرکز شدن اختیاری

با پیچاندن عقربهٔ واقع بر پل تکهٔ روی بینیِ ماشین زمان می‌توان مقیـاس یـا انـدازهٔ محل‌ها یا موضع‌هـا را بـرای بـه رؤیت درآوردن صورت‌های میکروسکوپی تغییر داد.

حالا مشخص شد که چرا بعضی از پشته‌ها خالی بودند! روی چند عددی از آن‌ها متمرکز شدم و چند باکتری پـیدا کردم.

تازه متوجه شدم که مـاشـین تـکـامل "evolvoscope" چیست. این ماشین وسیـله‌ای بـود کـه عـوامـل ریـاضـی گوناگون تکامل داروین را قابل رؤیت می‌ساخت.

گرچه داروین نظریه‌های خود را به طور شفاهی بیـان کرد، ولی می‌توان آن‌ها را به «مفاهیم ریاضی»[1] ترجمه، و به این ترتیب، تحلیل نامبهم نتایج آن‌هـا را آسـان‌تـر کـرد. البته، هر «الگوی ریاضی»[2] از تکامل داروین، تنها تقریبی

از شیء حقیقی است؛ با این فرض که شیء حقیقی موجود باشد، که باز هم البته، به اندازهٔ فرض هر چیز دیگر در این موضوع بحث‌انگیز است. اما تدوین‌های دقیق ریاضی کمک می‌کند که بین تفسیرهای گوناگون تمیز قائل شویم.

تدوین‌های مزبور می‌توانند ناسازگاری‌های موجود در تحلیل منطقی را نیز نشان دهند و این کار را با اعمال مثال‌های نقض[3] در مورد انواع خاصی از استدلال شفاهی به انجام می‌رسانند.

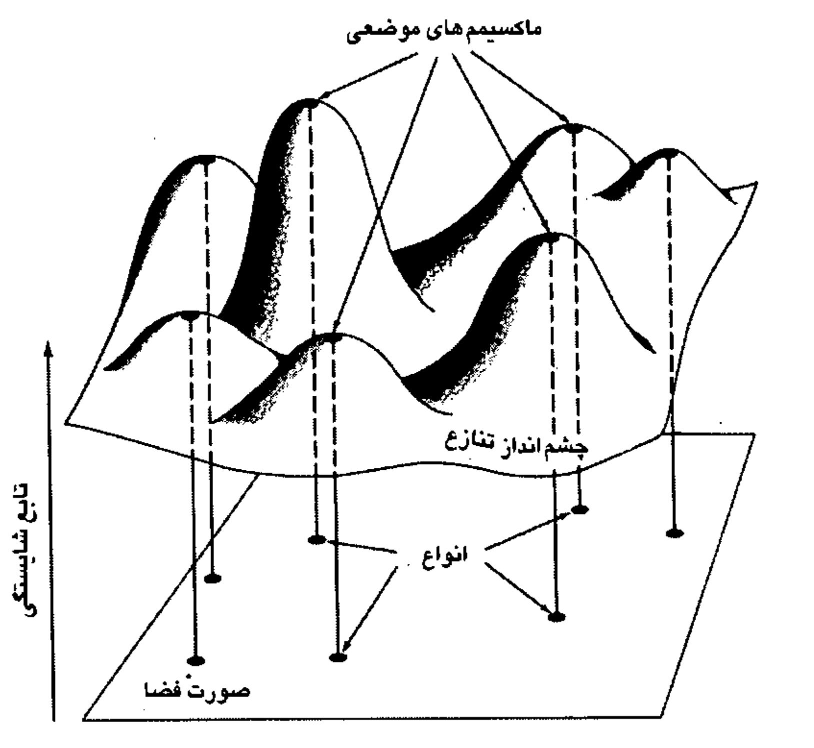
اشکال کلمات در این است که آن‌ها با پیشرفت استدلال منطقی معانی خود را زیرکانه تغییر می‌دهند، و به این ترتیب ممکن است نتایج به دست آمده نامعتبر شوند. ریاضیات، دقیق‌تر است و این امکان را فراهم می‌کند که همواره به مفروضات دقیقِ درنظر گرفته شده، توجه داشته باشیم.

در الگوی خاص تکاملی که در ماشین تکامل بنا شده بود، صورت‌های حیوان‌ها توسط نقطه‌ای در صورتْ‌فضا به نمایش در آمده بودند. این فضا نه تنها شامل تمام صورت‌های عملی و ماندنی، بلکه شامل جمیع صورت‌های تصوری[4] نیز بود. همچنین در آن، اندازهٔ شایستگی برای بقا، یعنی، تابع شایستگی، وجود داشت، و صورت‌هایی که می‌توانستند در تنازع بقا موفق باشند، آن‌هایی بودند که سطح شایستگی‌شان در حد امکان وسیع‌تر بود. انواع، متناظر با ماکسیمم‌های موضعیِ تابع شایستگی بودند؛ پشته‌های واقع در چشم‌انداز تنازع، یا تاقچه‌های محیط زیستی (شکل ۱)

این عمل به توضیح این مطلب کمک می‌کند که چرا انواع، با مفروض بودن بردی پیوسته از صورت‌های ممکن، به این موضوع تمایل دارند که به گونه‌ای واضح، جدا از یکدیگر باشند. به عنوان نمونه، تمام موش‌ها نسبتاً کوچکند؛ یعنی نمی‌توان برد عریض و پیوسته‌ای از اندازه‌های موجودات موش مانند به دست آورد.

صورتْ‌فضا پیوسته است، اما هر ماکسیمم موضعی توسط پشتهٔ خودش دربر گرفته شده، و پشته‌ها جدا از یکدیگرند؛ هم طاقچه‌ها هم نوع‌هایی که آن‌ها را اشغال کرده‌اند، گسسته‌اند.

پدیدهٔ دیگری که به خوبی جا می‌افتد، «تکامل همگرا»[5] است؛ یعنی، ظهور صورت‌هایی که مشابه‌اند، اما ژن‌هایی کاملاً متفاوت دارند. به عنوان مثال، مشابهت‌های تنگاتنگ حیرت‌انگیزی بین کیسه‌داران استرالیایی و پستانداران جفت جنینی قاره‌های دیگر وجود دارد.



شکل ۱. صورتْ‌فضا و چشم‌انداز تنازع پیوسته‌اند، اما انواع متناظر با ماکسیممِ هایِ موضعیِ چشم‌انداز، و از این رو گسسته‌اند

پستانداران جفت جنینی	کیسه داران
گرگ	گرگ تاسمانیایی
سنجاب پرنده	موش‌خرمای پرنده
موش	موش کیسه‌دار
موش کور	موش‌کور کیسه‌دار
مورچه‌خوار	مورچه‌خوار کیسه‌دار
موش‌خرمای کوهی	کیسه‌دار استرالیایی

مسألهٔ ۱

دو مثال دیگر از تکامل همگرا به دست دهید.

در این مرحله ور رفتن با ماشین تکامل را کنار گذاشتم ـ هیچ ایده‌ای در این مورد که چه خصیصه‌ها (یا مخلوقاتی) را می‌توان پرورش داد نداشتم، و هیچ دلم نمی‌خواست در سیاره‌مان تخم خیارهای خوراکی جهش‌یافته، یا مواردی از این قبیل بکارم. اما پیش از این که پیش‌تر بروم، از ابتدا تا انتهای دست‌نوشته را خواندم. سپس، درحالی که از این مطلب راضی بودم که دستگاه مورد بحث صرفاً شبیه‌سازی می‌کند، و هیچ‌گونه تأثیری بر محیط دنیای خاکی‌مان نمی‌گذارد، شروع به آزمایش کردم. بخش بعدی دست‌نوشته دربارهٔ اصل استدلال داروین بود:

«برای نمایش دقیق وضعیت دقیق، دکمهٔ با علامت **جهش تصادفی** را بچرخانید. اخطار! اگر سطح **جهش تصادفی** را بیش از حد بالا ببرید، هرج و مرج ایجاد می‌شود. آزمایش را با چرخش **تدریجی** دکمه انجام دهید.»

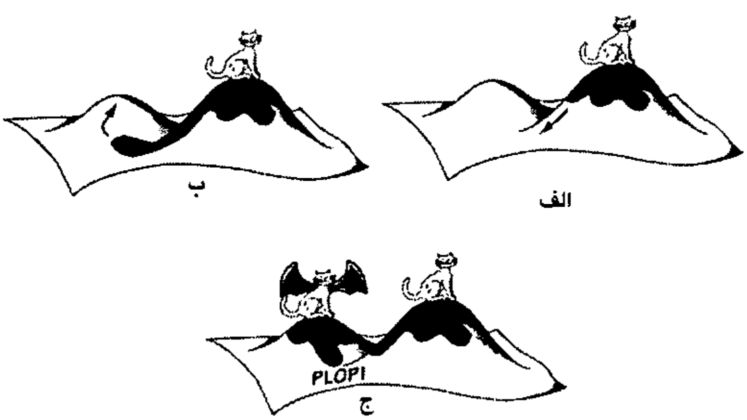
با احتیاط دکمه را چرخاندم؛ گربه‌ام حنایی رنگ شد. بعد خط‌دار، بعد سیاه، بعد دم‌کوتاه، دکمه را کمی بیش‌تر چرخاندم، و گربه پشمالو شد، و می‌لرزید.

برای واضح‌تر دیدن صحنه، دکمهٔ حرکت آهسته را فشار دادم. شکل گربه‌ام هر چند ثانیه کمی تغییر می‌یافت، و همین‌طور که تغییر می‌کرد، از چشم‌انداز تنازع بالاتر می‌رفت.

در پشتهٔ مربوطه، انواع گربه‌ها تجمع کرده بودند، و شکلشان را تغییر می‌دادند و با حرکاتی گیج‌کننده می‌گردیدند. گاه و بیگاه، تبدیلی بزرگ‌تر، گربه‌ام را بیش از حد متعارف تغییر می‌داد؛ اما معمولاً به طرف نوک پشته مربوط به خودش کشیده می‌شد. مثلاً، موقتاً گوش‌هایی مانند گوش فیل پیدا می‌کرد؛ اما توجه داشتم که در این صورت، کمی پائین‌تر از نوک پشته قرار می‌گرفت. احتمالاً «گوش فیلی» جهشی نامطلوب برای گربه بود، و موقعیت او را در تنازع تضعیف می‌کرد؛ زیرا تلاش برای همراه کشیدن گوش‌ها به این طرف و آن طرف، حرکتش را به مقدار قابل توجهی با کندی مواجه می‌کرد، و موش‌ها صدای به هم خوردن گوش‌ها را، زمانی که گربه با سروصدا به طرفشان هجوم می‌آورد، می‌شنیدند.

جهش‌هایی که گربه‌ها را به طرف پائین پشته می‌کشیدند، دیری نپاییدند. بار دیگر گربه‌ها، درحالی که انتخاب طبیعی شکل‌های ناپذیرفته‌تر را وجین می‌کرد و به صورت طبیعی‌تر گربه‌وار تغییر می‌داد، به طرف بالای پشته کشانده شدند.

دکهٔ **جهش** را بیش‌تر چرخاندم. پشته با جدیت در تلاطم بود، گربه‌های مرتعش مانند امواج دریایی توفانی در جوش و خروش بودند. ناگهان، حبابی پر از گربه، با صدای تالاپی



شکل ۲. تاثیر جهش تصادفی بر موجودات اشغال کننده یکی از تاقواره‌های محیط زیست.

الف) مجموعه‌ای از صورت‌های ممکن (حباب تاریک) محصور در تاقوارهٔ مربوطه.

ب) تغییرات تصادفی موجب می‌شود، مجموعهٔ مورد بحث به طرف یکی از تاقواره‌های اشغال نشدهٔ نزدیک، کشیده شود.

ج) قسمتی از مجموعه برای تشکیل نوع جدید شکسته می‌شود.

شنیدنی، به پائین پشته لغزید، در دره مکث کرد و از تپهٔ نزدیکی که تاکنون خالی مانده بود، بالا رفت (شکل ۲).

بار دیگر صحنه را آهسته کردم و به بررسی تازه‌آمدگان پرداختم.

مسحورکننده.

اولین گربه‌های پرندهٔ دنیا.

مسالهٔ ۲

در اولین وهله، برای بقا، گربهٔ پرنده مناسب‌تر از گربهٔ بدون بال به نظر می‌رسد. توضیح دهید، چرا عدم وجود گربه‌های پرنده در دنیای واقعی، با تکامل داروین ناسازگار نیست.

متوجه آنچه که می‌دیدم شدم: **تکامل یک نوع جدید**.

جهش‌های تصادفی، با نرخ بسیار بالا و متراکم در چند جهش، شکل جدیدی از موجودی زنده به وجود آورده بودند؛ نوعی که ـ برخلاف اغلب جهش‌ها ـ برای بقا مناسب بود.

مجموعهٔ گربه ـ شکل‌های ممکن، در تاقوارهٔ محیط‌زیستی تازه‌ای، یعنی، پشتهٔ جدیدی در چشم‌انداز تنازع، ریخته و آن را اشغال کرده بودند. جهش‌های تصادفی که به صورت «پارازیت» عمل می‌کردند، بخشی از نوع گربه را با فشار به خارج از ماکسی‌موم موضعی و به منطقه‌ای دیگر وارد کرده بودند!

آیا این وضع تغییرات ناگهانی موجود در آثار فسیلی را توضیح می‌داد؟

درواقع نه. جهش‌هایی از نوعی که شاهدشان بودم، بسیار نامعمولند؛ و این درواقع یکی از اعتراضات متعارف به نظریه‌های داروین است. مجموعهٔ کامل تغییرات شکلی که برای ایجاد نوعی واقعاً جدید در یک نوبت ضروری باشد، بسیار نادر است. من یا خیلی خوش‌شانس بودم یا دکمهٔ نرخ جهش را خیلی پیچانده بودم.

از این گذشته، به نظر می‌رسد زمانی که در آثار فسیلی تغییر ناگهانی نوع ایجاد می‌شود ـ آنچه که اغلب اتفاق می‌افتد ـ چندین نوع جدید در یک مرحله پدید می‌آیند، و به جای دوشاخه شدن شاخه‌های درخت تکامل، چندشاخه شدن یک زمان آن را ملاحظه می‌کنیم.

داروین به این نکته توجه داشت: درواقع، تنها یک نمودار در مبدأ نوع وجود دارد، و همین نمودار این نکتهٔ دقیق را توضیح می‌دهد. اگر تکامل نوعی جدید با موجودات نماینده‌ای رخ دهد که به تصادف از یک تاقواره به دیگری ریخته شده‌اند، آن‌گاه باید در هر موقعیت تنها یک نوع جدید ایجاد کرده باشد.

سرانجام، نوع اصلی، با این مکانیسم، باقی می‌ماند: هیچ نوعی از بین نمی‌رود، چندان موجه نیست. البته، ممکن است کل حباب گربه‌ها در تاقوارهٔ گربه‌های بالدار ریخته شوند، اما احتمال این موضوع حتی کم‌تر از احتمال رخ دادن قسمتی از آن است؛ باز هم نه خیلی موجه.

آنچه که من مایل به یافتنش در مدل ریاضی موردنظر بودم، روشی نیرومندتر برای تکامل نوع جدید بود. به زودی با خواندن دست‌نوشته، در مسیری اطمینان‌بخش از تحقیق افتادم.

تغییر محیط‌زیست

در دنیای واقعی، سطح شایستگی یک موجود وابسته به محیط زیست است. برای مثال، موجودی که برای خوردن برگ‌های درختان بلند، گردنی دراز تکامل داده است، در صورتی که خشکسالی ارتفاع درختان را کاهش دهد، امتیاز تنازع خود را از دست می‌دهد و به این ترتیب، شایستگی‌اش نیز کم‌تر می‌شود. اهرم تغییر **محیط** به کاربر این امکان را می‌دهد که انواع متفاوت تغییرات را، چه زمانی چه فضایی، آزمایش کند.

پیشنهاد می‌شود در کوشش‌های اولیه برای تغییر محیط، نرخ جهش تصادفی، برابر صفر یا مقداری بسیار کوچک قرار داده شود.

زیرنویس

1. mathematical concepts
2. mathematical model
3. counterexamples
4. imaginable forms
5. convergent evolution

قسمت اول

هوشنگ شرقی



تابع های متناوب و روش های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن ها

برای دانش آموزان سال سوم متوسطه

مقدمه

توابع متناوب، کاربردهای بسیاری در سایر علوم نظیر فیزیک و مکانیک دارند و از این نظر، اهمیت زیادی دارند. بسیاری از فعالیت ها و یا پدیده ها، تکراری و یا به اصطلاح پریودیک هستند؛ مانند تعداد زنگ هایی که یک ساعت شماطه دار در زمان های متفاوت می زند. اگر زمان را از یک مبدأ دلخواه شروع کنیم، روشن است که اگر این مبدأ رأس ساعت ۱۲ یک روز باشد، یک ساعت بعد، این ساعت یک زنگ می زند، دو ساعت بعد دو زنگ و ۱۲ ساعت بعد، ۱۲ زنگ می زند. بدیهی است که ۱۳ ساعت بعد نیز یک زنگ می زند و چهارده ساعت بعد دو زنگ و تا آخر.

آیا می توانید تابعی معرفی کنید که تعداد زنگ های این ساعت را رأس ساعت T یعنی T ساعت بعد $(T \in N)$ نسبت به مبدأ مشخص کند؟ حتی اگر نتوانید ضابطه ای برای این تابع مشخص کنید، حداقل می توانید با اطمینان بگویید برای این تابع داریم: $f(T+12) = f(T)$؛ یعنی تکرارهای

این تابع هر ۱۲ ساعت یک بار است. برای مثال $\cdots = f(۲۷) = f(۱۵) = f(۳)$ ؛ یعنی این ساعت، ۳ ساعت بعد، ۱۵ ساعت بعد و ۲۷ ساعت بعد، یک تعداد (یعنی سه بار) زنگ می‌زند. این مثالی از یک تابع متناوب با دورهٔ تناوب ۱۲ است.

تعریف: تابع f را متناوب گوییم، هرگاه برای هر عضو دامنهٔ آن مانند $x \in D_f$ ، مقداری ثابت و حقیقی مانند $T > ۰$ یافت شود؛ به قسمی که اولاً $(x+T) \in D_f$ و ثانیاً $f(x+T) = f(x)$ باشد. T را یک دورهٔ تناوب تابع می‌گوییم. به سادگی می‌توان دریافت که دورهٔ تناوب یک تابع متناوب منحصربه فرد نیست. درواقع، هیچ‌گاه این چنین نیست و ما این را با قضیه‌ای که در سطرهای بعد می‌آید، ثابت می‌کنیم. برای مثال تابع با ضابطهٔ $f(x) = \operatorname{Sin}x$ که در $\mathbb{R}$ تعریف شده است، هم با دورهٔ تناوب ۲π متناوب است و هم با دورهٔ تناوب ۴π . زیرا:

$$\operatorname{Sin}(x+۲\pi) = \operatorname{Sin}(x+۴\pi) = \operatorname{Sin}x$$

قضیه: اگر تابع f با دورهٔ تناوب T متناوب باشد، آن‌گاه با دورهٔ تناوب nT نیز متناوب است. $(n \in N)$

برهان: به کمک قضیهٔ استقرای ریاضی، مطلب به سادگی قابل اثبات است. به عبارت دیگر، قضیهٔ شرطی زیر را بایداثبات کنیم:

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow f(x+nT) = f(x)$$

درستی قضیه برای $n = ۱$ واضح است. فرض می‌کنیم قضیه برای $n = k$ نیز درست باشد؛ یعنی: $f(x+kT) = f(x)$. ثابت می‌کنیم قضیه برای $n = k+۱$ نیز درست است:

$$f(x+(k+۱)T) = f(x+kT+T)$$

$x + kT$ را مساوی y فرض می‌کنیم:

$$f(x+kT+T) = f(y+T) = f(y) = f(x+kT)$$

و طبق فرض استقراء می‌توان نوشت:

$$f[x+(k+۱)T] = f(x+kT) = f(x)$$

و حکم ثابت است.

از این قضیه، روشن می‌شود که برای هر دورهٔ تناوب T ، همهٔ مضرب‌های طبیعی آن نیز دورهٔ تناوب تابع هستند. ولی ما کوچک‌ترین عدد مثبت T را که به ازای آن $f(x+T) = f(x)$ است، به عنوان دورهٔ تناوب اصلی می‌شناسیم و هدف یافتن آن است.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x) = \operatorname{Cos}ax$ با دورهٔ تناوب $T = \frac{۲\pi}{a}$ متناوب است $(a \neq ۰)$.

اثبات: مطابق تعریف تابع متناوب می‌نویسیم:

$$f(x+T) = \operatorname{Cos}a(x+T) = \operatorname{Cos}(ax+aT) = \operatorname{Cos}ax$$

به کمک دستور حل معادله‌های مثلثاتی می‌نویسیم:

$$ax + aT = ۲k\pi \pm ax$$

به ازای علامت مثبت خواهیم داشت:

$$ax + aT = ۲k\pi + ax \Rightarrow T = \frac{۲k\pi}{a}$$

به ازای علامت منفی برای T یک مقدار حقیقی ثابت به دست نمی‌آید (عبارتی برحسب x به دست می‌آید). از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که تمام مضرب‌های صحیح و مثبت $\frac{۲\pi}{a}$ ، دورهٔ تناوب این تابع هستند و کوچک‌ترین آن‌ها به ازای $k = ۱$ ، $T = \frac{۲\pi}{a}$ می‌شود که همان دورهٔ

تناوب اصلی است.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$ متناوب نیست.

فرض کنیم f با دورهٔ تناوب T متناوب باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$f(x+T) = [x+T] = [x]$$

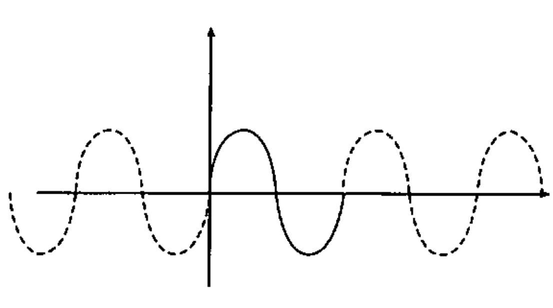
برابری فوق به ازای بعضی مقادیر x وبعضی مقادیر T برقرار است. برای مثال، اگر $x = ۱$ باشد، برابری فوق به صورت $[۱+T] = ۱$ درمی‌آید که به ازای هر T متعلق به بازهٔ $[۰,۱)$ درست است. از این جا نتیجه می‌گیریم که مقدار معینی برای T به دست نمی‌آید و مقدار آن وابسته به x است. بنابراین تابع فوق متناوب نیست.

تمرین: نشان دهید توابع با ضابطه‌های $f(x) = x^۲$ و $g(x) = e^x$، متناوب نیستند.

تمرین: ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x) = tg۲x$ متناوب است. کوچک‌ترین دورهٔ تناوب آن را به دست آورید.

خاصیت هندسی تابع متناوب

با توجه به تساوی $f(x+T) = f(x)$ و آشنایی که دانش‌آموزان با رسم نمودار تابع $f(x+T)$ از روی نمودار $f(x)$ (انتقال یافتهٔ آن در جهت منفی محور xها به اندازهٔ T) دارند، نتیجه می‌گیریم که نمودار تابع متناوب در صورت جابه‌جایی با یک بردار انتقال به اندازهٔ T در هر جهت تغییر نمی‌کند. به بیان ساده‌تر، نمودار تابع متناوب از انتقال بخشی از آن که در یک فاصله به طول T رسم شده است، به دست می‌آید. مثلاً برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = Sinx$ در $\mathbb{R}$، می‌توان نمودار آن را در یک فاصلهٔ دلخواه به طول ۲π مانند $[۰,۲\pi]$ یا $[-\pi,\pi]$ رسم کرد و سپس با انتقال متناوب این نمودار، به نمودار کامل رسید.



روش‌های به دست آوردن دورهٔ تناوب اصلی توابع متناوب

به دست آوردن دورهٔ تناوب اصلی توابع متناوب از روی تعریف، همیشه کار آسانی نیست. برای سرعت بخشیدن به کار از قضیه‌های کلی استفاده می‌کنیم که به ترتیب آمده‌اند و بعضی را اثبات نیز کرده‌ایم و بقیه را به عنوان تمرین، به خوانندگان واگذار می‌کنیم. مثال‌هایی از کاربرد قضیه‌ها و چند تمرین نیز آورده‌ایم.

۱. دورهٔ تناوب توابعی که به صورت توان‌های فرد Sinax و Cosax $(a > ۰)$ هستند، برابر است با $T = \frac{۲\pi}{a}$.

برهان: $f(x) = Sin^{۲k+۱}ax \Rightarrow f(x+T) = f(x)$

$$Sin^{۲k+۱}ax = Sin^{۲k+۱}a(x+T) \Rightarrow Sinax = Sin(ax+aT)$$

$$ax + aT = ۲k\pi + ax \Rightarrow T = \frac{۲k\pi}{a} \quad k = ۱ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{a}$$

$ax + aT = ۲k\pi + \pi - ax \Rightarrow$ مقدار ثابتی برای T به دست نمی‌آید

برای تابع با ضابطهٔ $f(x) = Cos^{۲k+۱}ax$ نیز به طریق مشابه استدلال می‌شود.

مثال: دورهٔ تناوب توابع با ضابطهٔ $f(x) = Sin^۵ ۲x$ و $g(x) = ۳Cos^۷ ۵x$ به ترتیب، مساوی با $T_۱ = \pi$ و $T_۲ = \frac{۲\pi}{۵}$ است.

۲. دورهٔ تناوب توان‌های زوج Sinax و Cosax، $a > ۰$ مساوی است با: $T = \frac{\pi}{a}$.

برهان: $f(x) = Sin^{۲k}ax \Rightarrow f(x+T) = f(x)$

$$Sin^{۲k}a(x+T) = Sin^{۲k}ax \Rightarrow Sin(ax+aT) = \pm Sin\,ax$$

$$Sin(ax+aT) = Sin\,ax \Rightarrow ax + aT = ۲k\pi + ax \Rightarrow T = \frac{۲k\pi}{a}$$

$$k = ۱ \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{a}$$

$ax + aT = ۲k\pi + \pi - ax \Rightarrow$ مقدار ثابتی برای T به دست نمی‌آید

$$\text{Sin}(ax + aT) = -\text{Sin}\,ax = \text{Sin}(-ax)$$

مقداری ثابت برای T به دست نمی‌آید $\Leftarrow$ $ax + aT = 2k\pi - ax$

$$ax + aT = 2k\pi + \pi + ax \Rightarrow T = \frac{(2k+1)\pi}{a} \quad k = 0 \Rightarrow T = \frac{\pi}{a}$$

بین دو مقدار $\frac{2\pi}{a}$ و $\frac{\pi}{a}$ مقدار کوچک‌تر یعنی $T = \frac{\pi}{a}$، دورهٔ تناوب اصلی است. برای تابع با ضابطهٔ $f(x) = \text{Cos}^{2k} ax$ نیز به همین شکل استدلال می‌کنیم.

مثال: دورهٔ تناوب توابع با ضابطه‌های $f(x) = \text{Sin}^4 3x$ و $g(x) = \text{Cos}^6 2x$ به ترتیب مساوی است با: $T_1 = \frac{\pi}{3}$ و $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

۳. دورهٔ تناوب توان‌های فرد یا زوج $\text{tg}\,ax$ و $\cot ax$ $(a > 0)$ برابر است با $T = \frac{\pi}{a}$.

برهان به عهدهٔ خواننده است.

مثال: دورهٔ تناوب توابع با ضابطه‌های $y = \text{tg}^3 5x$ و $y = \cot^4 2x$ به ترتیب مساوی است با: $T_1 = \frac{\pi}{5}$ و $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

توضیح: در هریک از قضیه‌های ۱ و ۲ و ۳، می‌توان به سادگی نشان داد که در حالت کلی (برای مقادیر مثبت یا منفی a)، $T = \frac{2\pi}{|a|}$ یا $T = \frac{\pi}{|a|}$. از سوی دیگر به جای کمان ax، ممکن است کمان ax + b به کار رفته باشد. برای مثال دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = \text{Sin}^5(-3x + 2)$، مساوی است با: $T = \frac{2\pi}{3}$.

۴. هرگاه دو تابع با ضابطه‌های $g(x)$ و $f(x)$ با دوره تناوب‌های T_1 و T_2 متناوب باشند، آن‌گاه تابع با ضابطهٔ $h(x) = af(x) + bg(x)$ با دورهٔ تناوب $[T_1, T_2]$ یعنی کوچک‌ترین مضرب مشترک T_1 و T_2، متناوب است.

برهان: فرض کنیم $T = [T_1, T_2]$ در این صورت روشن است که $T = k_1T_1 = k_2T_2$. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$h(x+T) = af(x+T) + bg(x+T) = af(x + k_1T_1) + bg(x + k_2T_2)$$

و چون f و g با دوره تناوب‌های T_1 و T_2 متناوبند، بنابراین:

$$h(x+T) = af(x) + bg(x)$$

اثبات این که T کوچک‌ترین دورهٔ تناوب است را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (فرض کنید h با دورهٔ تناوب T' متناوب باشد، ثابت کنید $T \le T'$).

از این قضیه، در تعیین دورهٔ تناوب مجموع و تفاضل توابع متناوب نیز استفاده می‌شود.

مثال: تعیین دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ

$$f(x) = 2\text{Sin}^3 5x - 4\text{Cos}^2 3x$$

حل: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $\text{Sin}^3 5x$ مطابق قضیهٔ ۱، مساوی $\frac{2\pi}{5}$ و دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $\text{Cos}^2 3x$ مطابق قضیهٔ ۲، مساوی $\frac{\pi}{3}$ است. برای تعیین کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو کسر، آن‌ها را هم‌مخرج می‌کنیم و کوچک‌ترین مضرب مشترک ضریب عددی صحیح صورت‌ها را برمی‌گزینیم:

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = \frac{2\pi}{5} = \frac{6\pi}{15} \\ T_2 = \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{15} \end{array}\right\} \Rightarrow T = \frac{30\pi}{15} \Rightarrow T = 2\pi$$

مثال: تعیین دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ

$$f(x) = 5\text{tg}^3 4x - 6\text{tg}^4 3x + \text{Cos}^4 \frac{x}{3}.$$

حل: به همان ترتیب مثال قبل می‌نویسیم:

$$T_1=\frac{\pi}{4},\quad T_2=\frac{\pi}{3},\quad T_3=\frac{\pi}{\frac{1}{3}}=3\pi \Rightarrow \begin{cases} T_1=\frac{3\pi}{12} \\ T_2=\frac{4\pi}{12} \\ T_3=\frac{36\pi}{12}\end{cases} \Rightarrow T=\frac{36\pi}{12}=3\pi$$

تمرین‌های قضیهٔ ۴

دورهٔ تناوب هریک از توابع معرفی شده در زیر را مشخص کنید:

الف) $f(x)=4\sin^3 5x-5\cos^4 2x+tg^2 x$

ب) $f(x)=4\cos^2 5x-\sin^2 3x+\cot g 7x$

ج) $f(x)=tg\frac{x}{2}-2\cot g^3\frac{x}{3}+\sin^2\frac{2x}{5}$

د) $f(x)=\sin^4\frac{\pi x}{2}+\cos^3\frac{\pi x}{3}-tg\pi x$

هـ) $f(x)=2\sin^5\frac{2\pi x}{3}-\cos^4\frac{\pi x}{2}+tg^2\frac{\pi x}{4}$

۵. هرگاه حاصل‌ضربی از توابع مثلثاتی داشته باشیم، برای تعیین دورهٔ تناوب تابع اصلی، ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی، عبارت را به جمع تبدیل می‌کنیم و دورهٔ تناوب آن را به دست می‌آوریم.

مثال: $f(x)=\sin 5x\ \cos\frac{x}{2}\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[\sin\left(5x+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(5x-\frac{x}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin\frac{11x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{9x}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1=\frac{2\pi}{\frac{11}{2}}=\frac{4\pi}{11}=\frac{36\pi}{99} \\ T_2=\frac{2\pi}{\frac{9}{2}}=\frac{4\pi}{9}=\frac{44\pi}{99}\end{array}\right\}\Rightarrow T=\frac{396}{99}=4\pi \quad T=4\pi$$

مثال:

$f(x)=\sin^2 5x\ \cos^3 4x$

حل: از اتحادهای $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ و $\cos^3\alpha=\frac{\cos 3\alpha+3\cos\alpha}{4}$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{1-\cos 10x}{2}\times\frac{\cos 12x+3\cos 4x}{4}=\frac{\cos 12x+3\cos 4x-\cos 10x\cos 12x-3\cos 10x\cos 4x}{8}$$

سپس حاصل ضرب‌های صورت کسر را به مجموع تبدیل می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\cos 12x+3\cos 4x-\frac{1}{2}[\cos 22x+\cos 2x]-\frac{3}{2}[\cos 14x+\cos 6x]}{8}\Rightarrow$$

$$f(x)=\frac{1}{8}\cos 12x+\frac{3}{8}\cos 4x-\frac{1}{16}\cos 22x-\frac{1}{16}\cos 2x-\frac{3}{16}\cos 14x-\frac{3}{16}\cos 6x$$

$$\left.\begin{array}{lll} T_1=\frac{\pi}{6} & T_3=\frac{\pi}{11} & T_5=\frac{\pi}{7} \\ T_2=\frac{\pi}{2} & T_4=\pi & T_6=\frac{\pi}{3}\end{array}\right\}\Rightarrow T=\pi$$

تمرین: دورهٔ تناوب هریک از توابع معرفی شده با ضابطه‌های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x)=\sin 4x\ \sin 3x$

ب) $f(x)=\sin\frac{5x}{2}\ \cos\frac{3x}{4}$

ج) $f(x)=\sin^3\frac{x}{2}\ \cos\frac{x}{3}$

د) $f(x)=tg^2\frac{x}{2}\ \cot g^2\frac{x}{3}$

هـ) $f(x)=\sin 3x\cos 2x\cos\frac{x}{2}$

۶. ترکیب توابع مثلثاتی و توابع غیرخطی $(ax+b)$، متناوب نیستند.

مثال: توابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin x^2$ و $f(x)=\cos\sqrt{x}$ و $g(x)=tg\frac{1}{x}$ متناوب نیستند.

۷. مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و تقسیم یک تابع

متناوب و یک تابع غیرمتناوب، تابعی غیرمتناوب است.

مثال: توابع با ضابطه‌های $f(x)=x^{2}+\mathrm{Sin}x$ و $g(x)=\mathrm{Sin}x+\mathrm{Sin}|x|$ متناوب نیستند.

۸. اگر g متناوب باشد، $fog(x)$ نیز متناوب است با همان دورهٔ تناوب تابع g.

برهان به عهدهٔ خواننده است.

مثال: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\mathrm{Sin}(\mathrm{Cos}x)$ متناوب است و دورهٔ تناوب آن $T=2\pi$ است. تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{\mathrm{Sin}3x+\mathrm{Sin}2x}$ نیز متناوب و دورهٔ تناوب آن $T=2\pi$ است.

۹. اگر f تابعی زوج باشد، توابع با ضابطه‌های $f(\mathrm{Sin}ax)$ و $f(\mathrm{Cos}ax)$ با دورهٔ تناوب $\frac{\pi}{a}$ متناوب هستند.

برهان به عهدهٔ خواننده است.

مثال: توابع با ضابطه‌های $f(x)=\left|\mathrm{Sin}^{3}x\right|$ و $g(x)=\mathrm{Cos}\left(\mathrm{Sin}^{2}x\right)$ و $h(x)=\mathrm{Cos}^{6}5x$ به ترتیب با دوره تناوب‌های $T_1=\frac{\pi}{3}$ و $T_2=\frac{\pi}{2}$ و $T_3=\frac{\pi}{5}$ متناوب هستند.

۱۰. اگر f تابعی زوج باشد، تابع با ضابطهٔ $f(\mathrm{Sin}ax)+f(\mathrm{Cos}ax)$ با دورهٔ تناوب $T=\frac{\pi}{2a}$ متناوب است.

برهان به عهدهٔ خواننده است.

مثال: تابع های با ضابطهٔ $f(x)=|\mathrm{Sin}2x|+|\mathrm{Cos}2x|$ و $g(x)=\mathrm{Sin}^{4}x+\mathrm{Cos}^{4}x$ به ترتیب با دوره تناوب‌های $T_1=\frac{\pi}{4}$ و $T_2=\frac{\pi}{2}$ متناوب هستند.

۱۱. دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\mathrm{tg}ax-\mathrm{cotg}ax$ و هر مضربی از آن مساوی $T=\frac{\pi}{2a}$ است.

برهان: به کمک اتحادهای مثلثاتی می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}ax}{\mathrm{Cos}ax}-\frac{\mathrm{Cos}ax}{\mathrm{Sin}ax}=\frac{\mathrm{Sin}^{2}ax-\mathrm{Cos}^{2}ax}{\mathrm{Sin}ax\mathrm{Cos}ax}=$$

$$\frac{-\mathrm{Cos}2ax}{\frac{1}{2}\mathrm{Sin}2ax}=-2\,\mathrm{cotg}2ax \Rightarrow T=\frac{\pi}{2a}$$

مثال: برای تابع با ضابطهٔ $f(x)=\mathrm{tg}3x-\mathrm{cotg}3x$ داریم: $T=\frac{\pi}{6}$

۱۲. در توابع کسری که صورت و مخرج آن‌ها شامل Sinax و Cosax هستند، در صورت امکان ساده شدن، قبل از محاسبهٔ دورهٔ تناوب، بهتر است صورت و مخرج کسر را بر Sinax یا Cosax (هرکدام مناسبترند)، تقسیم می‌کنیم و سپس دورهٔ تناوب آن را به دست می‌آوریم.

مثال: تعیین دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ

$$f(x)=\frac{\mathrm{Sin}x+2\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sin}x-\mathrm{Cos}x}$$

حل: از تقسیم صورت و مخرج کسر فوق بر Cosx یا Sinx (در این جا تفاوت نمی‌کند) خواهیم داشت:

$$f(x)=\frac{\mathrm{tg}x+2}{\mathrm{tg}x-1} \Rightarrow T=\pi$$

حال آن که اگر بدون این تبدیل، دوره تناوب را به دست می‌آوردیم، به مقدار $T=2\pi$ می‌رسیدیم که دورهٔ تناوب تابع f است، ولی کوچک‌ترین دورهٔ تناوب نیست. البته باید توجه داشت که تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\mathrm{tg}x+2}{\mathrm{tg}x-1}$، با تابع اولیه برابر نیست. زیرا دامنهٔ تعریف آن‌ها یکی نیست (چرا؟) ولی دورهٔ تناوب آن‌ها یکی است.

تمرین: دورهٔ تناوب هریک از توابع معرفی شده در زیر را بیابید:

۱) $f(x)=\frac{\mathrm{Cos}x}{\mathrm{Sin}x+\mathrm{Cos}x}$

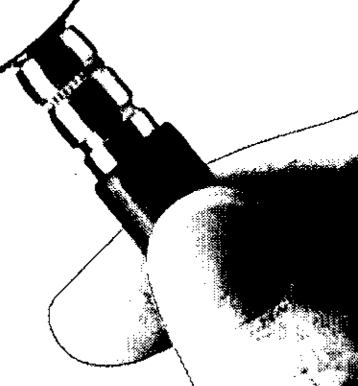
۲) $f(x)=\frac{\mathrm{Sin}2x}{2\mathrm{Sin}2x-3\mathrm{Cos}2x}$

۳) $f(x)=\frac{\mathrm{Sin}^{3}3x+3\mathrm{Cos}^{3}3x}{2\mathrm{Sin}^{3}3x-5\mathrm{Cos}^{3}3x}$

آیا قاعده هوپیتال همیشه کارآمد است؟!

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L \quad !??$$

برای دانش آموزان سال سوم و دورهٔ پیش دانشگاهی



قسمت اول

مجتبی معارف‌وند
دبیر ریاضی اسلامشهر

یوهان برنولی (۱۷۴۸ـ۱۶۶۷)، از جمله کسانی بود که حساب دیفرانسیل و انتگرال لایبنیتز را به‌طور کامل درک کرد و به قدرت اعجاب‌انگیز حسابان، پی‌برد. او یکی از موفق‌ترین معلمان زمان خود بود و حساب دیفرانسیل و انتگرال را به **هوپیتال**، شاگرد خود، آموخت. هوپیتال در سال (۱۶۹۶) درس‌های استاد خود را در کتابی به‌نام «تحلیل بی‌نهایت کوچک‌ها» که اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌شمار می‌رود، منتشر ساخت. در این کتاب، قاعده‌ای برای یافتن مقدار حدی یک کسر که صورت و مخرج آن به سمت صفر میل می‌کند، دیده می‌شود که در اصل متعلق به یوهان برنولی است، اما در متون درسی بعدی، حسابان به غلط به **«قاعدهٔ هوپیتال»** شهرت یافت.

مقدمه

یکی از هدف‌های آموزش ریاضی در دورهٔ متوسطه، تقویت قوهٔ خلاقیت و ابتکار دانش‌آموزان است. در بخشی از ریاضیات که به محاسبهٔ حدود و رفع ابهام در برخورد با صورت‌های مبهم می‌پردازد، دانش‌آموزان دست‌به عمل می‌زنند، می‌اندیشند، می‌نویسند و جلو می‌روند، شکست می‌خورند و دوباره، با اندیشه‌ای نو، به ستیز با مسأله

می‌پردازند. اما با کمال تأسف، عده‌ای از همکاران با معرفی قاعدهٔ هوپیتال در سال سوم متوسطه و همچنین، توصیه به استفادهٔ بیش از حد از آن در دوره پیش دانشگاهی، خصوصاً جهت پاسخگویی به سؤالات چند گزینه‌ای، دانش‌آموزان عزیز را به سمت سستی و کلیشه‌ای شدن راهنمایی می‌کنند. متأسفانه در این شرایط، هرگاه برای حل یک مسألهٔ مربوط به محاسبهٔ حد، قاعدهٔ هوپیتال کارساز نباشد یا شرایط استفاده از آن وجود نداشته باشد، بچه‌ها قدرت، توانایی و مهارت لازم برای حل آن را به کمک روش‌های دیگر ندارند. البته دانش‌آموزان نیز این قاعده را به‌راحتی پذیرفته، به آن دل بسته‌اند و بسیار از آن استفاده می‌کنند؛ زیرا کار کردن با مشتق‌گیری به جهت قواعد کلیشه‌ای آن، بسیار ساده‌تر و بی‌دردسرتر از بقیهٔ روش‌ها به نظر می‌رسد.

در این مقاله، سعی داریم، ضمن اشاره‌ای تاریخی به قاعدهٔ هوپیتال و بیان آن، بی‌دقتی‌های موجود در استفاده از آن را متذکر شویم و ناکارآمدی قاعدهٔ هوپیتال و زیبایی روش‌های دیگر را در پاره‌ای از مسائل نشان دهیم.

اشاره‌ای تاریخی

یکی از سرشناس‌ترین خانواده‌ها در تاریخ ریاضیات و علوم، خانوادهٔ برنولی از سوئیس است که از اواخر قرن هفدهم به بعد، حدود هشت ریاضیدان برجسته و توانا را پرورش داده است. مشهورترین آن‌ها **یاکوب برنولی** (۱۶۵۴ـ۱۷۰۵) و برادرش **یوهان برنولی** (۱۶۶۷ـ۱۷۴۸) بودند که همهٔ توجهشان را به ریاضیات بی‌نهایت کوچک‌ها معطوف کردند و نخستین کسانی بودند که حساب دیفرانسیل و انتگرال **لایبنیتز** را به‌طور کامل درک کردند و به قدرت اعجاب‌انگیز حسابان پی بردند.

از جملهٔ کارهای یاکوب برنولی، می‌توان به مسألهٔ «هم‌محیط‌ها» (در بین شکل‌های مسطح بسته‌ای که طول محیط آن‌ها ثابت است، کدامیک بیش‌ترین مساحت را دارد.)، مسألهٔ «همزمان» (منحنی‌ای که جسمی در امتداد آن با سرعت عمودی یکنواختی سقوط می‌کند.)، توزیع برنولی و قضیهٔ برنولی در آمار و احتمال، معادلهٔ برنولی در معادلات دیفرانسیل، اعداد برنولی و چندجمله‌ای‌های برنولی در نظریهٔ اعداد، لمنیسکات برنولی در حسابان و... اشاره کرد.

یوهان برنولی در ریاضیات سهمی پربارتر از برادرش یاکوب داشت. از جمله کارهای یوهان می‌توان به پدیدهٔ نورشناختی مربوط به انعکاس و انکسار، تعیین مسیرهای متعامد خانوادهٔ منحنی‌ها، محاسبهٔ طول قوس منحنی‌ها، تعیین مساحت منحنی‌ها به کمک سری‌ها، مثلثات تحلیلی، حسابان توابع مجهول‌القوا و قضیهٔ طلایی «کوتاه‌ترین زمان» (تعیین منحنی ذرهٔ وزینی که در یک میدان جاذبه، بین دو نقطه مفروض حرکت می‌کند و طی آن سریع‌ترین نزول را دارد) و... اشاره کرد.

یوهان با لایبنیتز و **اویلر** دوست بود. ولی **نیوتن**، رقیب لایبنیتز را، چندان دوست نمی‌داشت. لایبنیتز، حساب انتگرال را «حساب مجموعات» نامیده بود و در سال ۱۶۹۶ لایبنیتز و یوهان برنولی موافقت کردند که آن را «حساب انتگرال» بنامند. اگرچه یوهان مردی حسود و بداخلاق بود، اما یکی از موفق‌ترین معلمان زمان خود بود. او به حسابان غنای زیادی بخشید و در شناساندن قدرت حسابان در برّ اروپا تأثیر زیادی داشت.

دو لوپیتال گیوم فرانسوا آنتوان (Giyom fransua antuan da lopital) (۱۶۶۱ـ۱۷۰۴)، اشراف‌زادهٔ فرانسوی، یکی از دانشجویان یوهان برنولی بود. یوهان حساب دیفرانسیل و انتگرال را به او آموخت و لوپیتال که در فارسی به اشتباه، هوپیتال نوشته شده و همین تلفظ رایج شده است (در این مقاله ما نیز عرف را رعایت می‌کنیم.)، در سال (۱۶۹۶)، براساس یک توافق‌نامهٔ مالی عجیب و غیرعادی، درس‌های استاد خود را در کتابی با نام «تحلیل بی‌نهایت کوچک‌ها» (Analyse de infiniment petits) که اولین کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌شمار می‌رود،

منتشر ساخت.

در این کتاب، قاعده‌ای برای یافتن مقدار حدی یک کسر که صورت و مخرج آن به سمت صفر میل می‌کنند، ($\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = ?$ درحالیکه $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$) دیده می‌شود که در اصل متعلق به یوهان برنولی است. اما در متون درسی بعدی، حسابان به غلط به «قاعده هوپیتال» شهرت سافت.

پیش نیازها

تعریف صورت‌های مبهم و رفع ابهام: فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی نقطهٔ a (عددی حقیقی)، احتمالاً نه در نقطهٔ a، پیوسته باشند و $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$،

در این صورت وجود یا عدم وجود مقدار $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ روشن نیست و اصطلاحاً این حالت را صورت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌نامند.

دیگر صورت‌های مبهم عبارتند از: $\infty - \infty$ ، $0\times\infty$ ، 0^0 ، ∞^0 ، 1^∞ .

یافتن مقدار واقعی صورت مبهم را «رفع ابهام» می‌نامند.

قضیهٔ (قاعدهٔ) هوپیتال: فرض کنیم توابع f و g در یک همسایگی نقطهٔ a (عددی حقیقی زیرا ∞ همسایگی ندارد)، احتمالاً نه در نقطهٔ a، مشتق‌پذیر و g و g' در این همسایگی محذوف، مخالف صفر باشند و $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. در این صورت اگر $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود و برابر l، $(l \in R)$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ نیز موجود و برابر l است.

مثال ۱. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

حل: فرض کنیم $f(x) = 1-\cos x$ و $g(x) = \sin^2 x$. مشاهده می‌شود که توابع f و g در همسایگی محذوف نقطهٔ صفر مشتق‌پذیر و g و g' در این همسایگی مخالف صفر هستند و $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$. بنابراین، شرایط قاعدهٔ هوپیتال برقرار است و از آن‌جا که:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos x} = \frac{1}{2}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2}$$

نکتهٔ ۱: اگر در قاعدهٔ هوپیتال $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$ (حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$) و $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود و برابر $l \in R$ باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ نیز موجود و برابر l می‌باشد.

مثال ۲. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

حل: شرایط قاعدهٔ هوپیتال برقرار است $\lim_{x\to +\infty} \ln x = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

نکتهٔ ۲: اگر در قاعدهٔ هوپیتال $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ باشد، بازهم می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$$

مثال ۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و شرایط قاعدهٔ هوپیتال را دارد؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{2x}=+\infty$$

نکتهٔ ۳: در استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، گاه ممکن است $f'(a)=g'(a)=0$ یا $\pm\infty$ باشد در این حالت، در صورتی که f' و g' در یک همسایگی نقطهٔ a دارای مشتق باشند، مجدداً می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کرد و خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}=l$$

به عبارت دیگر در صورت برقراری شرایط قاعده، بیش از یک‌بار هم می‌توان از قاعدهٔ هوپیتال استفاده کرد.

مثال ۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ است و شرایط قاعدهٔ هوپیتال را دارد؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}$$

از آن‌جا که حد حاصل، هنوز حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد و شرایط قاعدهٔ هوپیتال نیز برای آن برقرار است، بنابراین قاعدهٔ هوپیتال را دوباره به‌کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x(1+\tan^2 x)}{\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 x)}{\cos x}=2$$

و درنتیجه: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}=2$.

تمرین ۱. با استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال، حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^4}{x}$ ب) $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{e^x}$

در استفاده از قاعدهٔ هوپیتال دقت کنید.

بسیار اتفاق می‌افتد که دانش‌آموزان و دانشجویان عزیز، در استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به شرایط آن توجه نمی‌کنند و مرتکب اشتباهات بارزی در حل بعضی مسائل ساده می‌شوند. به نمونه‌هایی از این اشتباهات اشاره می‌کنیم.

مثال ۵. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+x}$.

حل دانش‌آموز:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{1}=1$$

درحالی‌که $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+x}$ مبهم نیست و کسر $\frac{\tan x}{1+x}$ در همسایگی صفر پیوسته است و $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+\cos x}=0$.

> **هشدار!**
> در استفاده از قاعدهٔ هوپیتال از مبهم بودن حد، اطمینان حاصل کنید. یعنی درستی شرط ∞ یا $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ را تحقیق کنید.

مثال ۶. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2-3x-2}.$$

حل دانش‌آموز:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-x^2-x-2}{x^3-3x^2-3x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6x-2}{6x-6}=\lim_{x\to 2}\frac{6}{6}=1$$

درحالی‌که اعمال قاعدهٔ هوپیتال برای بارهای دوم و سوم مجاز نیست، زیرا $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-2x-1}{3x^2-6x+3}$ مبهم نبوده و برابر $\frac{7}{3}$ است.

مثال ۷. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}$.

حل دانش‌آموز :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

درحالی که اعمال قاعدهٔ هوپیتال برای دومین بار مجاز نیست و $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}$ مبهم نبوده و برابر صفر است.

> **هشدار!**
>
> در استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال، در هر مرحله، از مبهم بودن حد اطمینان حاصل کنید.

> **هشدار!**
>
> در اعمال قاعدهٔ هوپیتال، به دام مشتق‌گیری از $\frac{f}{g}$ نیافتید؛ کسری که باید به‌کار رود $\frac{f'}{g'}$ است نه $(\frac{f}{g})'$.

مثال ۸ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$.

حل دانش‌آموز : حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد و

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1}$$

$=1+\lim_{x\to\infty}\cos x \to$ موجود نیست

پس بنابر قاعدهٔ هوپیتال $\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$ نیز موجود نیست.

درحالی که حد مورد نظر موجود بوده و برابر ۱ می‌باشد زیرا :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{\sin x}{x})=1+0=1$$

بنابر قضیه فشردگی :

$$-1\le\sin x\le 1\xrightarrow{x>0}\frac{-1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

مثال ۹ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

حل دانش‌آموز :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

$$=\frac{0-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}}{1}$$

$=-\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}\to$ موجود نیست

پس بنابر قاعدهٔ هوپیتال $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ نیز وجود ندارد.

درحالی که حد مورد نظر موجود و برابر صفر است زیرا :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0\times 1=0$$

بنابر قضیهٔ فشردگی داریم :

$$-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1\Rightarrow -x\le x\sin\frac{1}{x}\le x\Rightarrow\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$$

درنتیجه :

مثال ۱۰ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}x\tan\frac{1}{x}$.

حل دانش‌آموز : حد فوق، حالت مبهم $\infty\times 0$ را دارد.

با تبدیل به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ و استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم :

$$\lim_{x\to 0}x\tan\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{x^2}(1+\tan^2(\frac{1}{x}))}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}(1+\tan^2(\frac{1}{x})) \to$$ موجود نیست

بنابراین $\lim_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x}$ نیز موجود نیست.

درست است که $\lim_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x}$ واقعاً وجود ندارد، اما این نتیجه‌گیری با استناد به قاعدهٔ هوپیتال درست نیست. برهان صحیح زیر را ببینید.

برهان خلف: فرض می‌کنیم حد فوق موجود و برابر l باشد یعنی $\lim_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x} = L$ درنتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\tan\frac{1}{x}} = \frac{0}{L} = 0 \qquad (*)$$

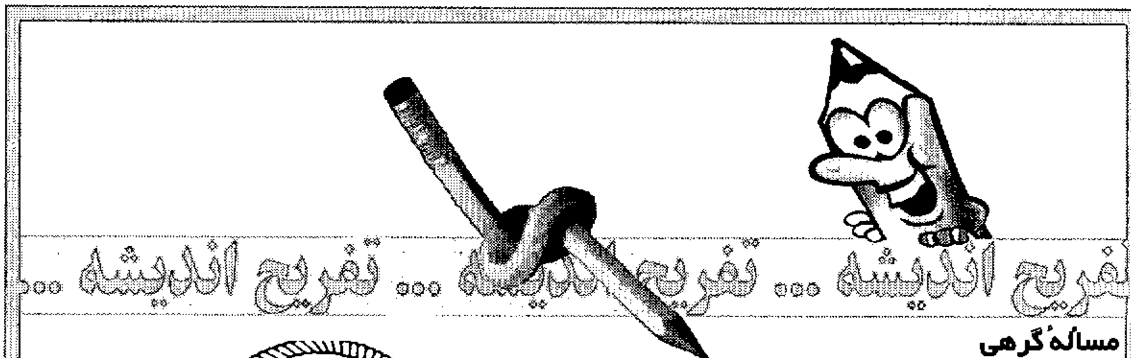
درحالی‌که:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\tan\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\tan\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\cot\frac{1}{x} = +\infty$$

که با (*) متناقض است. بنابراین فرض خلف باطل بوده و $\lim_{x\to 0} x\tan\frac{1}{x}$ موجود نیست.

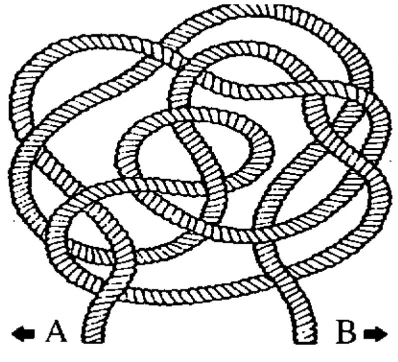
منابع

۱. تلگینی، محمود و خردپژوه، فروزان و رجالی، علی وقیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). چاپ پنجم. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۷۸.
۲. هاورد و. ایوز. آشنایی با تاریخ ریاضیات. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. جلد دوم. چاپ اول. مرکز نشر دانشگاهی تهران. ۱۳۶۸.
۳. تمپل بل، اریک. ریاضی‌دانان نامی. ترجمهٔ حسن صفاری. چاپ سوم. امیرکبیر. ۱۳۷۱.
۴. (زیر نظر) بیرشک، احمد. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. چاپ اول. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی بنیاد. دانشنامه فارسی. ۱۳۷۴.
۵. آیرس، فرانک. نظریه و مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و غلامرضا زباندان. چاپ اول. فارابی. ۱۳۷۲.
۶. جهانشاهی، محمد. اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی. چاپ اول. مدرسه. ۱۳۷۷.
۷. آپوستل، تام. م. حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ علیرضا ذکایی و همکاران. جلد اول. چاپ چهارم. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۹.
۸. نیکولسکی، اس. ام. دوره‌ای بر آنالیز ریاضی. ترجمهٔ بهمن هنری و همکاران. چاپ اول. دانشگاه امام رضا(ع). ۱۳۷۶.
۹. استورات، جیمز. حسابگان دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ محمدحسین علامت‌ساز و همکاران. جلد اول. چاپ دوم. دانشگاه اصفهان. ۱۳۷۸.
۱۰. آذرپناه، فریبرز. روش‌های تحدید حد و تعویض متغیر در محاسبهٔ حد. رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۴۹، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. پائیز ۱۳۷۶.
۱۱. پارزینسکی، ویلیام ر. وزیپس، فیلیپ. آشنایی با آنالیز ریاضی. ترجمهٔ سید محمود طالبیان. چاپ دوم. آستان قدس رضوی. ۱۳۷۵.
۱۲. توماس، جرج. بی و فینی، راس. ال. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمردی. جلد اول. چاپ چهارم. پژوهش. ۱۳۷۲.
۱۳. بارتل، رابرت. جی، دانلدر، شربرت. آشنایی با آنالیز حقیقی. ترجمهٔ دکتر طاهر قاسمی هنری و دکتر حکیمه ماهیار. چاپ اول. مبتکران. ۱۳۷۸.



مسالهٔ گرهی

قطعه طنابی به شکلی که در روبرو می‌بینید، درهم پیچیده شده است. بدون استفاده از هیچ وسیله‌ای و تنها به کمک حافظه و ذهن خود، طناب را از دو انتهای A و B بگیرید و آن را به حدی بکشید که ساده‌ترین گره ممکن، به‌وجود آید. شکل گرهی را که ایجاد کرده‌اید، روی کاغذ رسم کنید و با جواب معما مقایسه کنید:

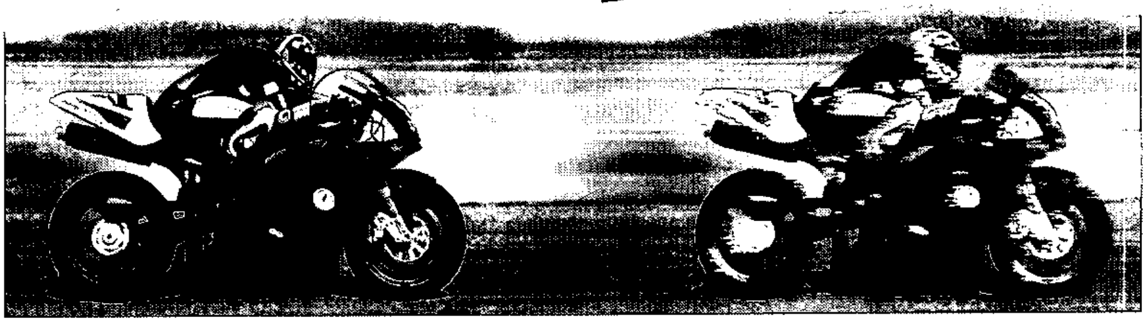




احمد قندهاری

حدّ تابع





وقتی دربارهٔ حد تابع بحث می‌کنیم، هدف ما بررسی رفتار تابع است، یعنی وقتی که متغیر آن به عدد مشخصی بسیار بسیار نزدیک شود، ولی هیچ‌گاه به آن نرسد. این مقاله بر سه مورد اساسی در مسائل حد تأکید می‌کند:

۱. مسائلی که با استفاده از تعریف حد، حل می‌شوند و بررسی این که چرا باید برگشت‌پذیری مسأله مورد توجه باشد و چرا در مباحث دیگر این عمل را انجام نمی‌دهیم.

۲. تعیین شعاع همسایگی مناسب در مسائل، به‌خصوص در مسائل کسری و رادیکالی.

۳. تعیین کران بالا و کران پائین یک عبارت در مسائل نسبتاً پیچیده.

حدود تغییرات $|x|$ در بازهٔ (a,b)

فرض می‌کنیم $a,b\in\mathbb{R}$ و $0\le a<b$

الف) $a<x<b \Rightarrow a<|x|<b$

ب) $-b<x<-a \Rightarrow a<|x|<b$

ج) $-a<x<b \Rightarrow 0\le|x|<b$

د) $-b<x<a \Rightarrow 0\le|x|<b$

مثال:

$-4<x<7 \Rightarrow 0\le|x|<7$

همسایگی

بنا بر تعریف، عضوی از مجموعهٔ اعداد حقیقی مانند x که در نامساوی $0<|x-a|<r$ یا در نامساوی $x\neq a$ و $a-r<x<a+r$ صدق کند، یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز a و شعاع r است.

قرارداد: اعداد مثبت کوچک را با ε یا δ و اعداد مثبت بزرگ را با M و N نشان می‌دهیم.

تعریف حد تابع

فرض می‌کنیم، تابع f در یک همسایگی a تعریف شده باشد (ممکن است تابع f در خود a تعریف نشده باشد). می‌گوییم: حد $f(x)$ وقتی $x\to a$، برابر عدد حقیقی L است و می‌نویسیم:

$\lim_{x\to a} f(x)=L$. اگر برای هر $\varepsilon>0$، هرچه قدر کوچک، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد که: $0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

یا می‌نویسیم:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

برای اثبات رابطهٔ بالا که آن را یک «استلزام منطقی» می‌نامیم (گزارهٔ شرطی همیشه درست)، به این صورت

عمل می‌کنیم که از نامساوی $|f(x)-L|<\varepsilon$ شروع می‌کنیم و به جای $f(x)$، مقدار آن را قرار می‌دهیم. پس از ساده کردن، به نامساوی $0<|x-a|<\delta$ می‌رسیم.

درواقع در این قسمت باید δ را بر حسب ε به‌دست آورد. پس از یافتن δ برحسب ε باید بتوان از نابرابری $0<|x-a|<\delta$، به نامساوی $|f(x)-L|<\varepsilon$ رسید.

این قسمت از حل را «برگشت‌پذیری» گویند.

مسألهٔ ۱. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-7x+7)=-3$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni 0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|(x^2-7x+7)+3\right|<\varepsilon$$

رابطهٔ (۱)

$$\left|x^2-7x+10\right|<\varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x-5)|<\varepsilon \Rightarrow |x-2|.|x-5|<\varepsilon$$

چون $x\to 2$، فرض می‌کنیم: $0<|x-2|<1$؛ یعنی شعاع همسایگی را عدد ۱ فرض می‌کنیم:

$$0<|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1,\ x\neq 2 \Rightarrow 1<x<3,\ x\neq 2$$

درحالی‌که $1<x<3$ و $x\neq 2$، اکنون کران بالای $|x-5|$ را می‌سازیم.

$$1<x<3 \Rightarrow -4<x-5<-2 \Rightarrow 2<|x-5|<4$$

حال به رابطهٔ (۱) برمی‌گردیم. عبارت $|x-2|\times 4$ از عبارت $|x-2|.|x-5|$ بزرگ‌تر است، پس:

$$|x-2|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-2|.|x-5|<\varepsilon \qquad \text{(2)}$$

رابطهٔ (۲)

$$|x-2|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{4}$$

$$\begin{cases}0<|x-2|<\dfrac{\varepsilon}{4}\\ 0<|x-2|<1\end{cases} \qquad \delta\le \text{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

حال به بررسی برگشت‌پذیری مسأله می‌پردازیم:

فرض می‌کنیم: $\text{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}=1$، پس خواهیم داشت:

$$0<|x-2|<1<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x-2|<\frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |x-2|\times 4<\varepsilon$$

بنابر رابطهٔ (۲) می‌توان نوشت:

$$|x-2|\times 4<\varepsilon \Rightarrow |x-2|.|x-5|<\varepsilon \Rightarrow |(x-2)(x-5)|<4 \Rightarrow$$

$$\left|x^2-7x+10\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|(x^2-7x+7)+3\right|<\varepsilon$$

چرا باید مسأله برگشت‌پذیر باشد

در حل مسائل تعریف حد از نابرابری $|f(x)-L|<\varepsilon$ به نابرابری $0<|x-a|<\delta$ می‌رسیم و δ را پیدا می‌کنیم، مقدار δ به عدد شعاع همسایگی و احیاناً به مقدار کران بالا و پائین عبارت‌ها بستگی دارد. یافتن δ ی مناسب، یک تحقیق یا یک جست‌وجو است. پس از یافتن این δ، باید نشان دهیم که برای δ ی به‌دست آمده می‌توان از نابرابری $0<|x-a|<\delta$ به نابرابری $|f(x)-L|<\varepsilon$ رسید. برای مثال اگر شخص دیگری این مسأله را با شعاع همسایگی $\frac{1}{2}$ حل کند، δ ی دیگری به‌دست می‌آید.

و چنانچه شخص سومی شعاع همسایگی را $\frac{1}{10}$ بگیرد، δ سومی به‌دست می‌آید. به همین علت است که باید برای δ به‌دست آمده مسأله برگشت‌پذیر باشد.

نکته: اگر در حل همین مسأله دقت کنیم، می‌بینیم مشکل مسأله پس از یافتن رابطهٔ $|x-2|.|x-5|<\varepsilon$ شروع شده است. وقتی کران بالای $|x-5|$ را در شرایط $1<x<3$ و $x\neq 2$ یافتیم، رابطهٔ (۲) را نوشتیم که رابطهٔ کلیدی برگشت‌پذیری است. یعنی می‌توان به جای عمل برگشت‌پذیری چنین نوشت:

اگر $\delta\le \text{Min}\left\{1,\frac{\varepsilon}{4}\right\}$ باشد، آن‌گاه از نابرابری $0<|x-2|<\delta$ با توجه به رابطهٔ (۲)، می‌توان نابرابری $\left|(x^2-7x+7)+3\right|<\varepsilon$ را نتیجه گرفت.

مسأله ۲. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2}{5x-8}=3$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon<0 \quad \exists\delta>0 \quad \ni 0<|x-2|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^2+2}{5x-8}-3\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{x^2+2}{5x-8}-3\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{x^2-15x+26}{5x-8}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-2)(x-13)}{5x-8}\right|<\varepsilon$$

رابطهٔ (۱) $\Rightarrow |x-2|\times\frac{|x-13|}{|5x-8|}<\varepsilon$

حال باید یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز ۲ و شعاع r در نظر بگیریم و کران بالای $|x-13|$ و کران پائین $|5x-8|$ را پیدا کنیم. ممکن است کران پائین $|5x-8|$، صفر شود که در این صورت نمی‌توان حل را ادامه داد. نمی‌توانیم به‌طور تصادفی r مناسب را انتخاب کنیم که در این صورت ممکن است، از ما سؤال شود، از کجا فهمیدید شعاع همسایگی مناسب فلان عدد است. به همین علت، شعاع همسایگی را r فرض می‌کنیم و کران پائین مخرج را می‌سازیم و کران پائین را بزرگ‌تر از صفر قرار می‌دهیم تا شعاع همسایگی مناسب به‌دست آید. پس:

$$0<|x-2|<r \Rightarrow -r<x-2<r,\ x\neq 2 \Rightarrow$$
$$2-r<x<2+r,\ x\neq 2$$

حال عبارت $5x-8$ را می‌سازیم.

$$10-5r<5x<10+5r \Rightarrow 2-5r<5x-8<2+5r$$

اگر $2-5r>0$، آن‌گاه $r<\frac{2}{5}$، در این شرایط کران پائین مخرج، صفر نخواهد شد. پس برای ادامهٔ حل باید $r<\frac{2}{5}$ باشد. با این ملاک به‌دست آمده، مجازیم $r=\frac{1}{5}$ یا هر عدد کوچک‌تر از $\frac{2}{5}$ را r بنامیم. پس:

$$0<|x-2|<\frac{1}{5} \Rightarrow 1<\underset{x\neq 2}{5x-8}<3 \Rightarrow 1<|5x-8|<3$$

کران پائین مخرج با این شعاع همسایگی، عدد ۱ است. حال کران بالای صورت را می‌یابیم:

$$0<|x-2|<\frac{1}{5} \Rightarrow 2-\frac{1}{5}<x<2+\frac{1}{5}\quad x\neq 2$$

$$\Rightarrow -11-\frac{1}{5}<x-13<-11+\frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{56}{5}<x-13<-\frac{54}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{54}{5}<|x-13|<\frac{56}{5}$$

پس در این شرایط، کران بالای عبارت صورت $\frac{56}{5}$ است.

عبارت $\frac{\frac{56}{5}}{1}\times|x-2|$، از عبارت $|x-2|\times\frac{|x-13|}{|5x-8|}$ بزرگ‌تر است، پس:

رابطهٔ (۲) $|x-2|\times\frac{56}{5}<\varepsilon \Rightarrow |x-2|\times\frac{|x-13|}{5x-8}<\varepsilon$

این رابطه را که کلید برگشت‌پذیری است، رابطهٔ برگشت‌پذیری می‌نامیم.

$$|x-2|\times\frac{56}{5}<\varepsilon \Rightarrow |x-2|<\frac{5\varepsilon}{56} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0<|x-2|<\frac{5\varepsilon}{56} \\ 0<|x-2|<\frac{1}{5} \end{cases},\quad \delta\le \mathrm{Min}\left\{\frac{1}{5},\ \frac{5\varepsilon}{56}\right\}$$

اگر $\delta\le \mathrm{Min}\left\{\frac{1}{5},\ \frac{5\varepsilon}{56}\right\}$ باشد، آن‌گاه از نابرابری $0<|x-2|<\delta$ با توجه به رابطهٔ (۲) که رابطهٔ برگشت‌پذیری است، به نابرابری $\left|\frac{x^2+2}{5x-8}-3\right|<\varepsilon$ خواهیم رسید.

مسأله ۳. با استفاده از تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x^2-3x+3}=1$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \text{و}\ 0<|x-1|<\delta \Rightarrow \left|\sqrt{x^2-3x+3}-1\right|<\varepsilon$$

$$\left|(\sqrt{x^2-3x+3}-1)\times\frac{\sqrt{x^2-3x+3}+1}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}\right|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|\frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x-2)}{\underbrace{\sqrt{x^2-3x+3}+1}_{\text{مثبت است}}}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x-1|\times\frac{|x-2|}{\sqrt{x^2-3x+3}+1}<\varepsilon$$

اگر $y = x^۲ - ۳x + ۱$ فرض شود، از $y'_x = ۲x - ۳ = ۰$ به‌دست می‌آید $x = \frac{۳}{۲}$.

بهتر است شعاع همسایگی را عددی انتخاب کنیم که $\frac{۳}{۲}$ در بازهٔ همسایگی قرار گیرد، چون $x = \frac{۳}{۲}$ طول می‌نیمم مطلق تابع، با ضابطهٔ $y = x^۲ - ۳x + ۳$ است.

اگر $r = ۱$ انتخاب شود نظر ما تأمین خواهد شد.

$$۰<|x-۱|<۱ \Rightarrow -۱<x-۱<۱,\ x\neq ۱ \Rightarrow ۰<x<۲,\ x\neq ۱$$

حال می‌گوئیم وقتی $۰<x<۲$ و $x\neq ۲$ ، می‌نیمم مطلق عبارت مخرج به ازای $x = \frac{۳}{۲}$ حاصل می‌شود که برابر $(\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱)$ است.

$$x=\frac{۳}{۲} \Rightarrow y=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

پس مشکل مخرج به‌خوبی حل شد. برای تعیین کران بالای صورت حل را ادامه می‌دهیم.

$$۰<x<۲,\ x\neq ۱ \Rightarrow -۲<x-۲<۰ \Rightarrow ۰<|x-۲|<۲$$

در این شرایط کران بالای صورت عدد ۲ است.

عبارت $|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱}$ از عبارت $|x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}$ بزرگ‌تر است، پس:

$$|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}+۲}{۲}}<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|\times\frac{|x-۲|}{\sqrt{x^۲-۳x+۳}+۱}<\varepsilon$$

رابطهٔ برگشت‌پذیری

$$|x-۱|\times\frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}+۲}{۲}}<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|<\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}\varepsilon$$

$$\begin{cases} ۰<|x-۱|<\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}\varepsilon \\ ۰<|x-۱|<۱ \end{cases} ;\quad \delta\le \mathrm{Min}\left\{\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}\varepsilon,۱\right\}$$

اگر $\delta\le \mathrm{Min}\left\{\frac{\sqrt{۳}+۲}{۴}\varepsilon,۱\right\}$ باشد، آن‌گاه از رابطهٔ $۰<|x-۱|<\delta$ با توجه به رابطهٔ برگشت‌پذیری، به نابرابری $\left|\sqrt{x^۲-۳x+۲}-۱\right|<\varepsilon$ خواهیم رسید.

مسأله ۴. به کمک تعریف حد تابع ثابت کنید:

$$\lim_{x\to۱} x^۴ = ۱$$

حل: باید ثابت کنیم:

$$\forall\varepsilon>۰ \quad \exists\delta>۰ \quad \ni ۰<|x-۱|<\delta \Rightarrow |x^۴-۱|<\varepsilon$$

$$|x^۴-۱|<\varepsilon \Rightarrow |(x-۱)(x^۳+x^۲+x+۱)|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$|x-۱|\times|x^۳+x^۲+x+۱|<\varepsilon$$

$$۰<|x-۱|<۱ \Rightarrow -۱<x-۱<۱,\ x\neq ۱,\ ۰<x<۲,\ x\neq ۱$$

باید کران بالای $|x^۳+x^۲+x+۱|$ را وقتی $۰<x<۲$ و $x\neq ۱$ پیدا کرد.

$$y=x^۳+x^۲+x+۱ \Rightarrow y'_x=۳x^۲+۲x+۱>۰ \quad \Delta<۰,\ a>۰$$

پس تابع y صعودی اکید است. وقتی $۰<x<۲$ ، کران بالای آن در $x=۲$ به‌دست می‌آید:

$$x=۲ \Rightarrow y=۸+۴+۲+۱=۱۵$$

عبارت $|x-۱|\times۱۵$ ، از عبارت $|x-۱|\times|x^۳+x^۲+x+۱|$ بزرگ‌تر است، پس:

رابطهٔ برگشت‌پذیری

$$|x-۱|\times۱۵<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|\times|x^۳+x^۲+x+۱|<\varepsilon$$

$$|x-۱|\times۱۵<\varepsilon \Rightarrow |x-۱|<\frac{\varepsilon}{۱۵}$$

$$\begin{cases} ۰<|x-۱|<\frac{\varepsilon}{۱۵}; \\ ۰<|x-۱|<۱ \end{cases} \qquad \delta\le \mathrm{Min}\left\{۱,\frac{\varepsilon}{۱۵}\right\}$$

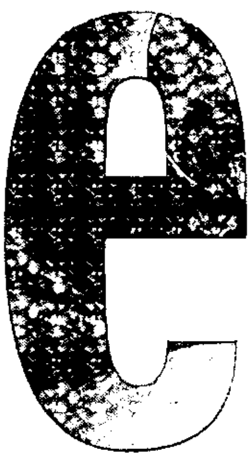
اگر $\delta\le \mathrm{Min}\left\{۱,\frac{\varepsilon}{۱۵}\right\}$ باشد، آن‌گاه از نابرابری $۰<|x-۱|<\delta$ با توجه به رابطهٔ برگشت‌پذیری به نابرابری

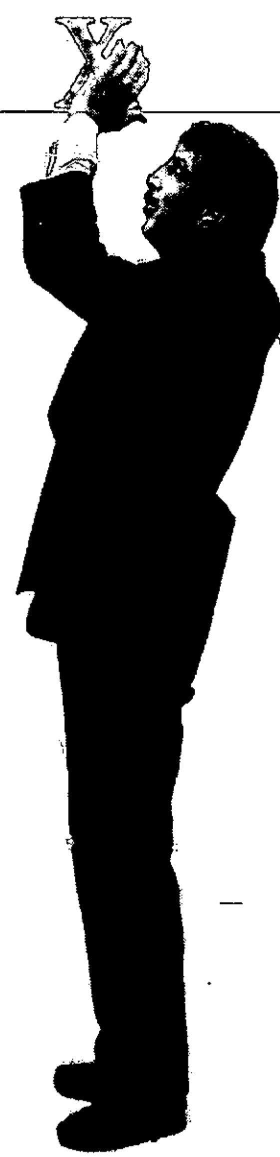
قسمت دوم

احمد قندهاری

تابع نمایی و تابع لگاریتمی

برای دانش آموزان
دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی





در شمارهٔ قبل، مطالبی راجع به تابع نمایی و لگاریتمی بیان کردیم. در این مقاله، مشتق تابع نمایی را با مثال‌های متعدد و متنوعی می‌آوریم، سپس جدول تغییرات و نمودار تابع‌های لگاریتمی را رسم می‌کنیم.

مشتق تابع نمایی

۱. $y = e^{x} \Rightarrow y'_{x} = e^{x}$

۲. $y = e^{u} \Rightarrow y'_{x} = u'e^{u}$

۳. $y = a^{x} \Rightarrow y'_{x} = a^{x}\mathrm{Ln}(a)$

۴. $y = a^{u} \Rightarrow y'_{x} = u'a^{u}\mathrm{Ln}(a)$

مثال. y'_{x} را در توابع به معادله‌های زیر بیابید.

۱. $y = e^{\mathrm{Sin}۲x}$ $\qquad u = \mathrm{Sin}۲x \Rightarrow u'_{x} = ۲\mathrm{Cos}۲x$

$y = e^{u} \Rightarrow y'_{x} = u'e^{u} = ۲\mathrm{Cos}۲x\, e^{\mathrm{Sin}۲x}$

۲. $y = a^{\tan x}$ $\qquad u = \tan x \Rightarrow u'_{x} = (۱+\tan^{۲} x)$

$y = a^{u} \Rightarrow y'_{x} = u'a^{u}\mathrm{Ln}(a) = (۱+\tan^{۲} x)a^{\tan x}\mathrm{Ln}(a)$

۳. $y = x^{x}$: از طرفین تساوی، لگاریتم طبیعی می‌گیریم:

$$Ln(y) = Ln(x)^x \Rightarrow Ln(y) = x\,Ln(x)$$

از طرفین تساوی، نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$\frac{y'_x}{y} = 1 \times Ln(x) + \frac{1}{x} \times x$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = 1 + Ln(x) \Rightarrow y'_x = y\left(1 + Ln(x)\right)$$

$$\Rightarrow y'_x = x^x\left(1 + Ln(x)\right)$$

۴. $y = x^{Sinx} \qquad \Rightarrow Ln\,y = Ln(x)^{Sinx}$

$$\Rightarrow Ln\,y = Sinx\,Ln(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = Cosx\;Ln(x) + \frac{1}{x}Sinx$$

$$\Rightarrow y'_x = y\left(Cosx\,Ln(x) + \frac{1}{x}Sinx\right)$$

$$\Rightarrow y'_x = x^{Sinx}\left(Cosx\;Ln(x) + \frac{1}{x}Sinx\right)$$

۵. $y = Sinx^{\tan x} \Rightarrow Ln\,y = Ln(Sinx)^{\tan x}$

$$\Rightarrow Ln\,y = \tan x\;Ln(Sinx)$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = \left(1 + \tan^2 x\right)(Ln\,Sinx) + \frac{Cosx}{Sinx}.\tan x\;,\;\; x \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = \frac{Ln\,Sinx}{Cos^2 x} + 1 \;\Rightarrow y'_x = y\left(\frac{Ln\,Sinx}{Cos^2 x} + 1\right)$$

$$\Rightarrow y'_x = Sinx^{\tan x}\left(\frac{Ln\,Sinx}{Cos^2 x} + 1\right)$$

۶. $y = (Sinx)^x \qquad \Rightarrow Ln\,y = Ln(Sinx)^x$

$$\Rightarrow Ln\,y = x\,Ln(Sinx) \;\; \Rightarrow \frac{y'_x}{y} = Ln\,Sinx + \frac{Cosx}{Sinx}.x$$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = Ln\,Sinx + x\cot x \;\; \Rightarrow y'_x = y(Ln\,Sinx + x\cot x)$$

$$\Rightarrow y'_x = Sinx^x\left(Ln\,Sinx + x\cot x\right)$$

۷. $y = e^{x^2} \quad \Rightarrow Ln\,y = Ln\,e^{x^2} \;\Rightarrow Ln\,y = x^2 Ln\,e$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = 2x\,Ln\,e \Rightarrow y'_x = y(2x\underbrace{Ln\,e}_{1}) \Rightarrow y'_x = e^{x^2}(2x)$$

راه دیگر، استفاده از فرمول $y = e^u$ است که $y' = u'e^u$

$$\Rightarrow y = e^{x^2} \quad \Rightarrow y'_x = 2x\,e^{x^2}$$

۸. $y = x^{Lnx} \Rightarrow Ln\,y = Ln\,x^{Lnx} = (Lnx)^2$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = 2\left(\frac{1}{x}\right)Lnx \Rightarrow y'_x = y\left(\frac{2}{x}Lnx\right)$$

$$\Rightarrow y'_x = x^{Lnx}\left(\frac{2}{x}Lnx\right)$$

۹. $y = Sinx^{\log x} \Rightarrow Ln\,y = \log x\;Ln\,Sinx$

$$\Rightarrow \frac{y'_x}{y} = \frac{1}{x}\log e(Ln\,Sinx) + \frac{Cosx}{Sinx}\log x$$

$$y'_x = y\left(\frac{1}{x}\log e.\,Ln(Sinx) + \cot x\,\log x\right)$$

$$y'_x = Sinx^{\log x}\left(\frac{1}{x}\log e\;Ln\,Sinx + \cot x\,\log x\right)$$

۱۰. $y = e^x\,Sinx + 2^x\,Cosx$

$$y'_x = e^x\,Sinx + Cosx\,e^x + 2^x\,Ln2(Cosx) - Sinx\left(2^x\right)$$

$$y'_x = e^x\,(Sinx + Cosx) + 2^x\,(Cosx\,Ln2 - Sinx)$$

۱۱. $y = e^x.a^x\,Lnx$

$$y'_x = e^x\left(a^x\,Lnx\right) + a^x\,Lna\left(e^x.Lnx\right) + \frac{1}{x}\left(e^x.a^x\right)$$

۱۲. $y = Sinx^{\left(e^x\right)} \Rightarrow Lny = e^x\,Ln\,Sinx$

$$\frac{y'_x}{y} = e^x\,Ln\,Sinx + \frac{Cosx}{Sinx}.e^x = e^x\,(Ln\,Sinx + \cot x)$$

$$y'_x = ye^x\,(Ln\,Sinx + \cot x)$$

$$y'_x = Sinx^{\left(e^x\right)}.e^x\,(Ln\,Sinx + \cot x)$$

مسأله:

جدول تغییرات و نمودار توابع به معادله‌های زیر را رسم کنید.

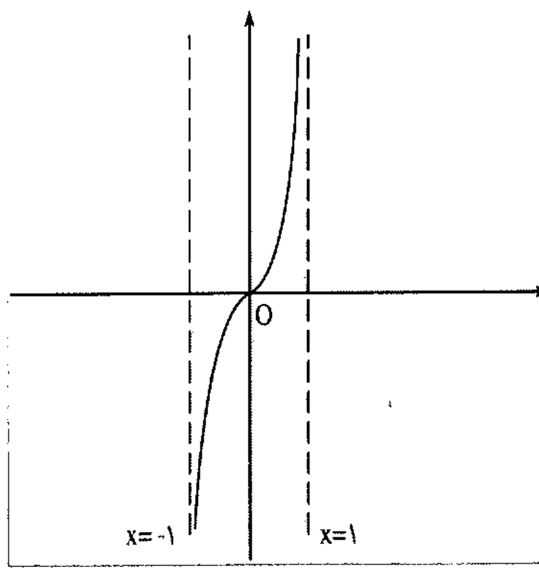
۱. $y = \log\frac{1+x}{1-x} \qquad \frac{1+x}{1-x} > 0 \Rightarrow D_f = (-1\;,\;1)$

$$y'_x=\frac{\frac{۲}{(۱-x)^۲}}{\frac{x+۱}{۱-x}}\log e=\frac{۲}{۱-x^۲}\log e>۰$$

$$x\longrightarrow -۱^+\Rightarrow y\longrightarrow -\infty$$

$$x\longrightarrow ۱^-\Rightarrow y\longrightarrow +\infty$$

x	−۱		۰		۱
y′		+		+	
y	−∞		۰		+∞



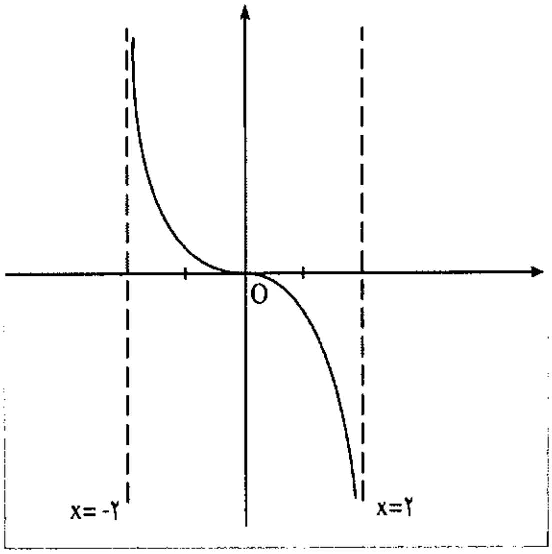
۲. $y=\text{Ln}\frac{۲-x}{۲+x}$ $\qquad \frac{۲-x}{۲+x}>۰\Rightarrow x=۲\ ,\ -۲\Rightarrow D_f=(-۲\ ,\ ۲)$

$$y'=\frac{\frac{-۴}{(x+۲)^۲}}{\frac{۲-x}{۲+x}}=\frac{-۴}{۴-x^۲}<۰$$

$$x\longrightarrow -۲^+\Rightarrow y\longrightarrow +\infty$$

$$x\longrightarrow ۲^-\Rightarrow y\longrightarrow -\infty$$

x	−۲	۰	۲
y′			
y	+∞	۰	−∞



۳. $y=\text{Ln}\frac{x-۱}{x+۱}$ $\qquad \frac{x-۱}{x+۱}>۰\Rightarrow x=۱,-۱\Rightarrow$

$$D_f=(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$$

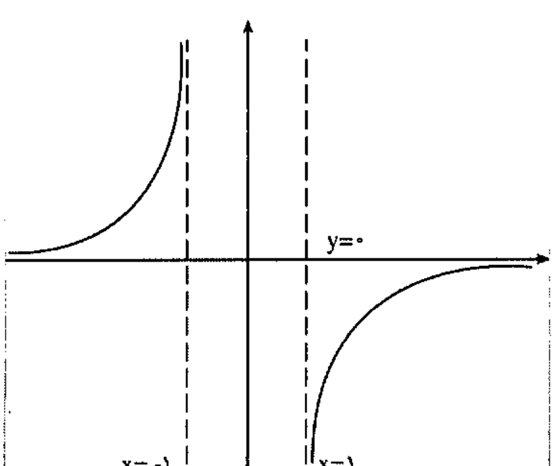
$$y'=\frac{\frac{۲}{(x+۱)^۲}}{\frac{x-۱}{x+۱}}=\frac{۲}{x^۲-۱}>۰$$

$$x\longrightarrow \pm\infty\Rightarrow y\longrightarrow ۰$$

$$x\longrightarrow -۱^-\Rightarrow y\longrightarrow +\infty$$

$$x\longrightarrow ۱^+\Rightarrow y\longrightarrow -\infty$$

x	−∞		−۱	۱		+∞
y′		+			+	
y	۰	+∞		−∞	۰	



مسأله: نامعادلهٔ $\log_۵ \frac{۵}{۱-x} > \log_۵ \frac{۱}{۲+x}$ را حل کنید.

$$\Rightarrow \frac{۵}{۱-x} > \frac{۱}{۲+x} \Rightarrow \frac{۵}{۱-x} - \frac{۱}{۲+x} > ۰ \Rightarrow$$

$$\frac{۹+۶x}{(۱-x)(۲+x)} > ۰ \begin{cases} x=-\frac{۳}{۲} \\ x=۱\,,-۲ \end{cases}$$ ریشه‌های صورت و مخرج کسر

x	$-\infty$	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	۱	$+\infty$
$\frac{۹+۶x}{(۱-x)(۲+x)}$	+	−	۰	+	−

$x<-۲ \qquad -\frac{۳}{۲}<x<۱$

مسأله: نامعادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$(۰/۲)^{-x^۲+۵x} < \frac{۱}{۶۲۵}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{۱}{۵}\right)^{-x^۲+۵x} < \frac{۱}{۵^۴} \Rightarrow ۵^{x^۲-۵x} < ۵^{-۴} \Rightarrow x^۲-۵x<-۴ \Rightarrow$$

$$x^۲-۵x+۴<۰ \Rightarrow x=۱,۴$$

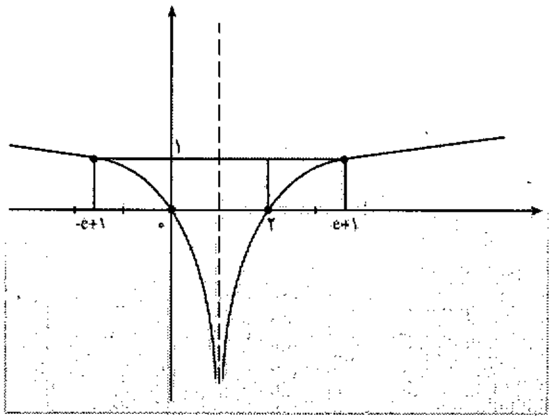
x	$-\infty$	۱	۴	$+\infty$
$x^۲-۵x+۴<۰$	+	۰ − ۰		+

جواب $۱<x<۴$

مسأله: تابع به معادلهٔ $y=\text{Ln}|x-۱|$ را رسم کنید.

دامنهٔ تعریف این تابع $\text{IR}-\{۱\}$ و برد آن IR است.

$$y=\text{Ln}(u) \Rightarrow y'_x = \frac{u'_x}{u}$$



$$\begin{cases} y=|u| \Rightarrow y'_x = \frac{v'.v}{|v|} \\ y=|x-۱| \Rightarrow y'_x = \frac{۱(x-۱)}{|x-۱|} \end{cases}$$

$$y=\text{Ln}|x-۱| \Rightarrow y' = \frac{\frac{x-۱}{|x-۱|}}{|x-۱|} = \frac{x-۱}{(x-۱)^۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{اگر } x>۱ \Rightarrow y'>۰ \Rightarrow \text{تابع اکیداً صعودی است} \\ \text{اگر } x<۱ \Rightarrow y'<۰ \Rightarrow \text{تابع اکیداً نزولی است} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-e+۱$	۰	۱^-	۱^+	۲	$e+۱$	$+\infty$
$\text{Ln}\|x-۱\|$	$+\infty$	۱	۰	$-\infty$	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$

مسأله: مطلوب است رسم تابع‌های به معادلهٔ زیر:

۱. $y=x\,\text{Ln}x$

دامنهٔ تابع $=(۰,+\infty)$

$$x\to ۰^+ \Rightarrow \lim y = \lim x\,\text{Ln}\,x = ۰\times\infty = \lim \frac{\text{Ln}x}{\frac{۱}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty}$$

$$\text{دستور} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\frac{۱}{x}}{-\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{-x^۲}{x} = \lim_{x\to ۰^+}(-x) = ۰$$

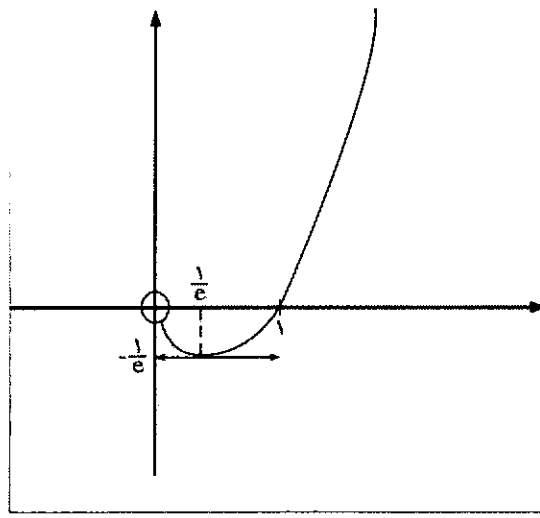
هوپیتال

$$x\to +\infty \Rightarrow y\to +\infty$$

$$y' = ۱.\text{Ln}x + \frac{۱}{x}.x = \text{Ln}x + ۱ = ۰$$

$\Rightarrow Lnx = -۱ \Rightarrow x = e^{-۱} = \frac{۱}{e}$

x	۰^+	$\frac{۱}{e}$	۱	$+\infty$
y′	−	۰ +		+
y	۰	$-\frac{۱}{e}$	۰	



۲. $y = \frac{۱}{x} Lnx$ دامنهٔ تابع $= (۰, +\infty)$

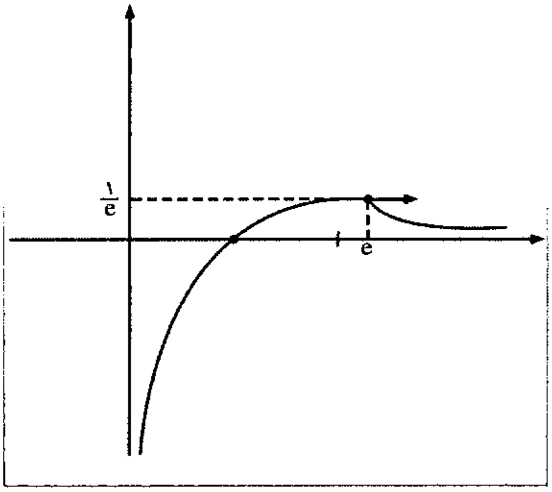
$x \to ۰^+ \Rightarrow y \to (+\infty)(-\infty) = -\infty$,

$x' \to +\infty \overset{\text{حد}}{\Rightarrow} y = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{Lnx}{x}$ دستور هوپیتال

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{۱}{x}}{۱} = \lim_{x \to +\infty} \frac{۱}{x} = ۰$

$y' = -\frac{۱}{x^۲} = Lnx + \frac{۱}{x} . \frac{۱}{x} = \frac{۱ = Lnx}{x^۲} = ۰ \Rightarrow Lnx = ۱ \Rightarrow x = e$

x	۰^+	۱	e	$+\infty$
y′	+	+	۰	−
y	$-\infty$	۰	$\frac{۱}{e}$	۰



۳. $y = x Lnx - x$ دامنه تابع $= (۰, +\infty)$

$x \to ۰^+ \Rightarrow \lim y = ۰ \times \infty = \lim \frac{Lnx}{\frac{۱}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$

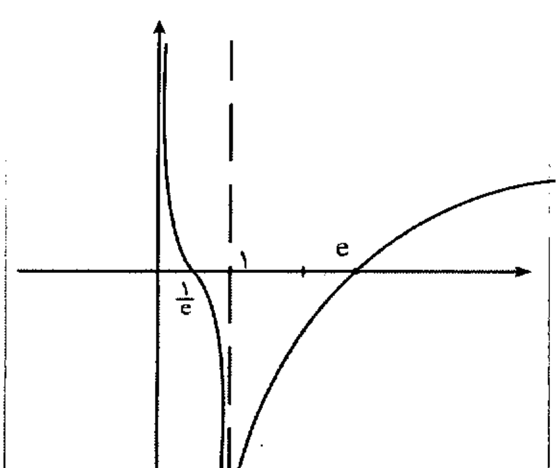
دستور: $\lim_{x \to ۰^+} \frac{\frac{۱}{x}}{-\frac{۱}{x^۲}} = \lim_{x \to ۰^+} \frac{-x^۲}{x} = \lim_{x \to ۰^+} (-x) = ۰$

هوپیتال

$x \to +\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$y' = ۱ . Lnx + \frac{۱}{x} . x - ۱ = Lnx = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x	۰^+	۱	e	$+\infty$
y′	−	۰ +		+
y	۰	−۱	۰	$+\infty$



۴. $y = \mathrm{Ln}|\mathrm{Ln}x|$ دامنهٔ تابع $= (0, +\infty)$

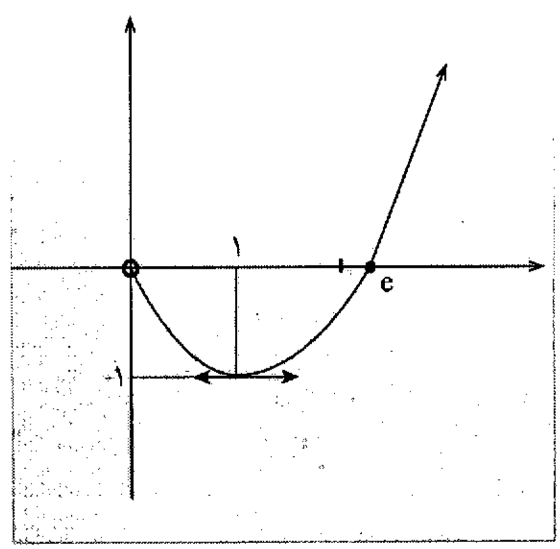
$$x \to 0^+ \Rightarrow \lim y = \mathrm{Ln}(+\infty) = +\infty$$

$$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \mathrm{Ln}(+\infty) = +\infty$$

$$y' = \frac{(\mathrm{Ln}x)'}{\mathrm{Ln}x} = \frac{\frac{1}{x}}{\mathrm{Ln}x} = \frac{1}{x\,\mathrm{Ln}x}$$

$$x \to 1 \Rightarrow \lim y = \mathrm{Ln}\left|0^+\right| \to -\infty$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1	+∞
y′		−		−		
y	+∞		0	−∞	−∞	+∞



۵. $y = \frac{1}{2}\ \mathrm{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \qquad D_f = R - \{\pm 1\}$

اولاً: ثابت می‌کنیم این تابع فرد است، زیرا

$$f(x) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

$$f(-x) = \frac{1}{2}\ \mathrm{Ln}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + \mathrm{Ln}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right)$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \times \left|\frac{1-x}{1+x}\right|\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}1 = 0$$

بنابراین تابع فرد است.

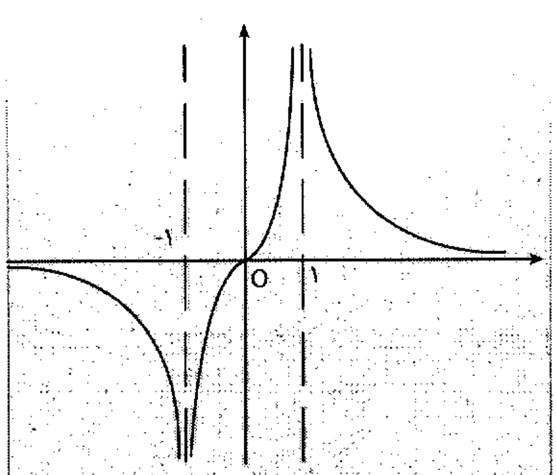
$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \Rightarrow$$

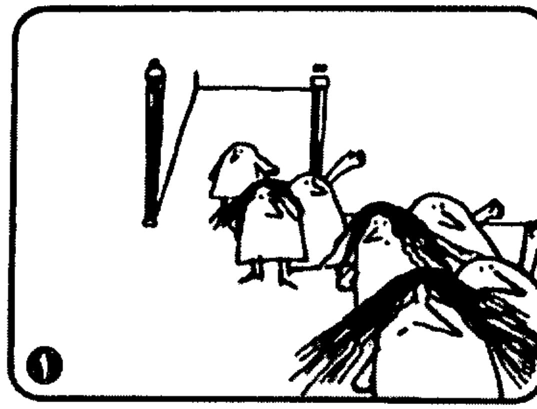
تابع را در نصف دامنهٔ آن، یعنی دربازه $[0, +\infty)$ و سپس قرینهٔ شکل را نسبت به مبداء مختصات رسم می‌کنیم.

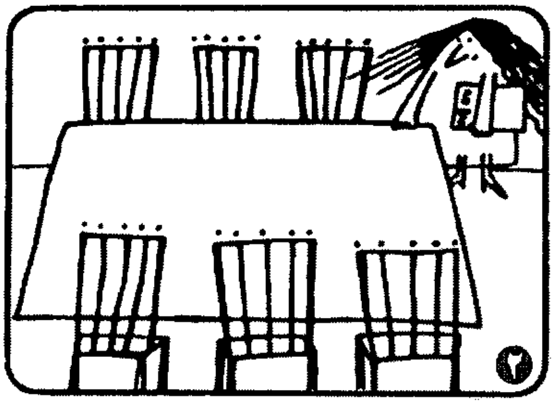
$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x^2} \begin{cases} x > 1 \Rightarrow y' < 0 \\ 0 < x < \Rightarrow y' > 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}1 = 0\ ,\ \ x \to +\infty \Rightarrow y \to \frac{1}{2}\mathrm{Ln}1 = 0$$

x	0		1		+∞
y′		+		−	
y	0	+∞		+∞	0







پارادوکس های ریاضیات و علوم

(سرگرمی برای اندیشه ورزی)

اثر دکتر مارتین گاردنر

ترجمهٔ حسن نصیرنیا

راز شش صندلی

❶ شش دانش‌آموز در رستورانی جا ذخیره کرده بودند. در دقیقهٔ آخر یک دانش‌آموز دیگر نیز به جمع شش نفری آن‌ها پیوست. سر پیشخدمت با خود می گوید:

❷ ـ «خدا را شکر که بچه‌ها بالاخره آمدند! من شش صندلی برای آن‌ها نگهداشته‌ام. آه، نه! هفت نفر می بینم!

❸ ـ باشد، مسأله‌ای نیست. دانش‌آموز اولی را روی صندلی می نشانم و به او اجازه می دهم برادر کوچک‌تر خود را که جزو شش دانش‌آموز دیگر است، چند دقیقه‌ای روی زانویش بنشاند.

❹ ـ حالا، سومین دانش‌آموز کنار دو نفر اول می نشیند و چهارمین دانش‌آموز کنار او قرار می گیرد. سپس پنجمین نفر در مقابل دانش‌آموزی که برادرش را روی زانویش گذاشته است، می نشیند و نفر ششمی کنار او جای می گیرد. به این ترتیب، شش دانش‌آموز می نشینند و هنوز یک صندلی خالی است!

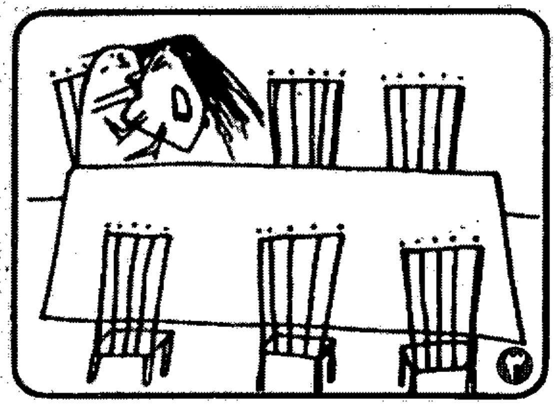
❺ ـ با این حساب، آخرین کاری که باید بکنم، این است که به هفتمین دانش‌آموز بگویم، از روی زانوی برادرش پائین بیاید، میز را دور بزند و روی صندلی خالی بنشیند!

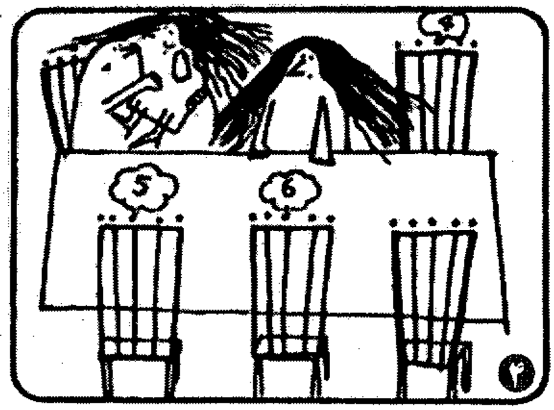
به نظر شما کجای این کار ایراد دارد؟ هفت نفر روی صندلی نشسته‌اند، یعنی برای هر نفر یک صندلی.

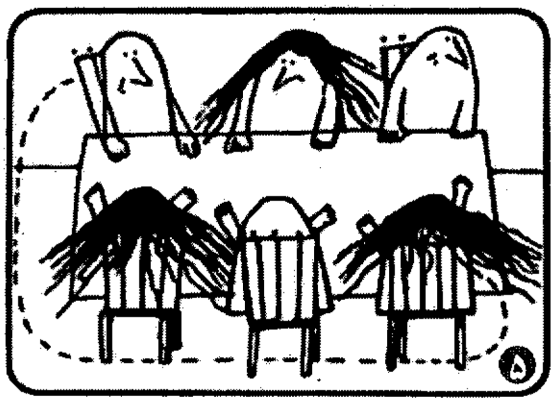
❊ ❊ ❊

شما نباید در تشخیص سفسطهٔ موجود در شکل قدیمی این پارادوکس، یعنی مهمانخانه‌داری که ۲۱ مهمان را در ۲۰ اتاق جا می دهد، هیچ مشکلی داشته باشید. حل این پارادوکس وقتی امکانپذیر می شود که متوجه شویم، شمارهٔ دانش‌آموزی که موقتاً روی زانوی برادرش نشسته، درواقع ۲ است و تا زمانی ششمین دانش‌آموز روی صندلی مستقر می شود، سرپیشخدمت شمارهٔ او را از یاد می برد و وی را شمارهٔ ۷ اعلام می کند. درواقع، هفتمین دانش‌آموز هرگز روی صندلی جای نمی گیرد. این شمارهٔ ۲ است که از روی زانوی برادرش پائین می آید، میز را دور می زند و روی ششمین صندلی می نشیند.

به نظر می رسد، این پارادوکس این قضیه را که یک







مجموعهٔ متناهی n عضوی فقط وقتی در تناظر یک‌به‌یک با سایر مجموعه‌ها قرار می‌گیرد که آن‌ها نیز n عضو داشته باشند، نقض می‌کند. در بخش پارادوکس «هتل بینهایت»، وقتی مجموعه‌های نامتناهی را مورد توجه قرار می‌دهیم، به این موضوع نیز خواهیم پرداخت. «راز شش صندلی» یک راه سرگرم‌کننده برای نشان دادن تفاوت میان مجموعه‌های متناهی و نامتناهی است.

یك مسألهٔ جالب

○ احمد فیروزنیا

۱. رابطه‌ای پیدا کنید که با کاربرد سه عدد ۲ و علامت‌های ریاضی* بتوان هر عدد دلخواه را به دست آورد.

حل: ابتدا مسأله را برای حالت‌های خاص حل می‌کنیم. عدد مفروض را ۳ می‌گیریم، در این صورت داریم:
$$۳ = -\log_۲ \log_۲ \sqrt{\sqrt{\sqrt{۲}}}$$

درستی این تساوی را به سادگی می‌توان بررسی کرد؛ زیرا:

$$-\log_۲(\log_۲ \sqrt[۸]{۲}) = -\log_۲(\log_۲ ۲^{\frac{۱}{۸}}) = -\log_۲(\frac{۱}{۸}\log_۲ ۲) =$$
$$-\log_۲(\frac{۱}{۸}) = -(-۳) = ۳$$

و برای عدد ۵:

$$۵ = -\log_۲ \log_۲ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{۲}}}}} = -\log_۲(\log_۲ ۲^{\frac{۱}{۳۲}})$$
$$= -\log_۲(\frac{۱}{۳۲}\log_۲ ۲) = -\log(\frac{۱}{۳۲}) = -(-۵) = ۵$$

و بنابراین برای حالت کلی عدد مفروض N می‌توان نوشت:

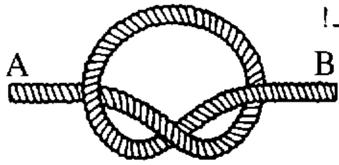
$$N = -\log_۲ \log_۲ \underbrace{\sqrt{\sqrt{\dots\sqrt{\sqrt{۲}}}}}_{\text{N رادیکال}}$$

به طوری که ملاحظه می‌شود، تعداد رادیکال‌ها برابر با عدد مفروض است.

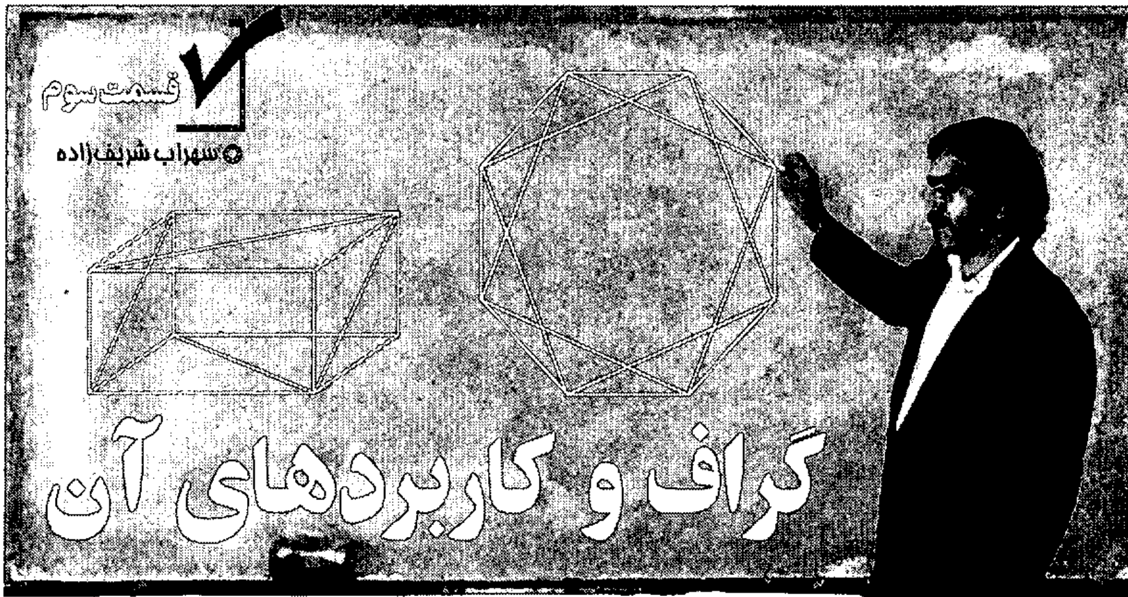
* شامل توان، ریشگی و لگاریتم هم می‌شود.

جواب مسألهٔ گرهی

اگر به جواب درست رسیده‌اید، امتیاز کامل را به خود بدهید!



اما اگر آنچه را که رسم کرده‌اید، تصویر آینه‌ای این شکل باشد، جوابتان اشتباه است.



برای دانش آموزان دوره پیش دانشگاهی رشته ریاضی

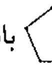
گراف مکمل

اگر G یک گراف ساده باشد، مکمل گراف G را با $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم و آن را به صورت زیر می‌سازیم:

۱. مجموعهٔ رئوس $\overline{G}$ همان مجموعهٔ رئوس G است.

۲. بین دو رأس متمایز $\overline{G}$ یالی وجود دارد؛ اگر و تنها اگر یالی در G بین آن دو رأس نباشد.

تذکر: براساس تعریف بالا، هرگاه رأس‌هایی را که در گراف سادهٔ G به هم وصل نشده‌اند، به هم وصل کنیم، گراف مکمل آن گراف به دست می‌آید.

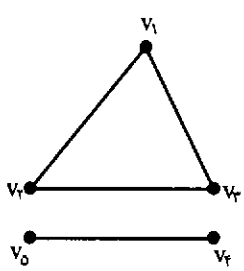
مثال: اگر گراف G به صورت  باشد، آن‌گاه $\overline{G}$ به صورت تعریف می‌شود.

نکتهٔ ۱: از ترکیب گراف ساده و مکمل آن، یک گراف کامل تشکیل می‌شود.

نکتهٔ ۲: اگر $\overline{G}$ گراف مکمل گراف G از مرتبهٔ P باشد، آن‌گاه:

$$q(\overline{G})=\binom{p}{۲}-q(G)$$

$$\Delta(G)+\delta(\overline{G})=p-۱ \quad \text{و} \quad \Delta(\overline{G})+\delta(G)=p-۱$$



مسأله: نمودار گراف $G=(V,E)$ به صورت مقابل رسم شده است:

الف) مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ را با اعضا مشخص کنید.

ب) مجموعهٔ $\overline{E}=\{uv|u\neq v, uv\notin E\}$ را مشخص کنید.

ج) گراف $H=\left(V,E\cup\overline{E}\right)$ را رسم و نام آن را

مشخص کنید. (امتحان هماهنگ کشوری ـ تیرماه ۷۴)

حل: الف)

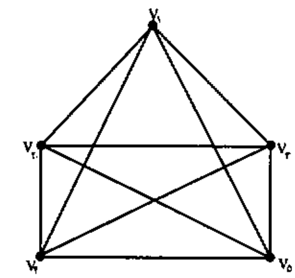
و $E(G)=\{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_4v_5\}$

$V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

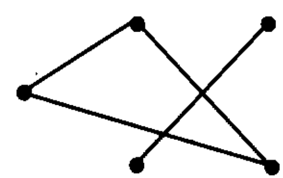
ب)

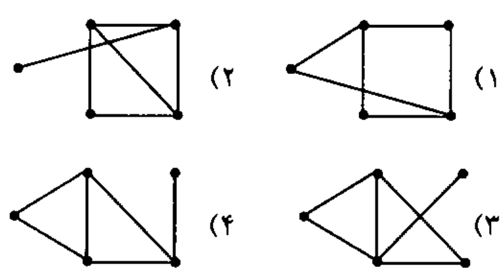
$\overline{E}=\{v_1v_4, v_1v_5, v_2v_5, v_3v_4, v_2v_4, v_3v_4\}$

ج) گراف H همان k_5 است.



آزمون ۳۰) مکمل گراف زیر کدام است؟





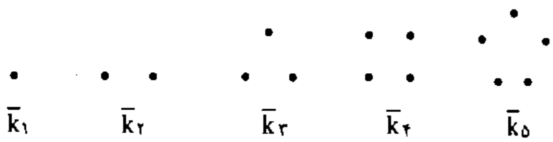
حل: گزینهٔ (۱). مکمل این گراف باید ۲ رأس درجهٔ ۳ و سه رأس درجهٔ ۲ داشته باشد که فقط گراف داده شده در گزینهٔ (۱) دارای این رأس‌هاست.

گراف تهی

گرافی را که دارای هیچ یالی نباشد، گراف تهی می‌نامند. هر گراف تهی مرتبهٔ p را به $\overline{k}_p$ نمایش می‌دهند.

تذکر ۱: گراف «۰ـ منتظم از مرتبهٔ p» را گراف تهی مرتبهٔ p می‌نامند.

مثال: گراف $\overline{k}_p$ به ازای $1 \le p \le 5$:



تذکر ۲: گراف k_p و $\overline{k}_p$ مکمل یکدیگرند.

آزمون ۳۱) در گراف $G=(V,E)$ داریم، $\sum_{i=1}^{p}\deg v_i = 56$، p کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۶

حل: گزینهٔ (۲): $2q = 56 \to q = 28$

تعداد یال‌های گراف G برابر تعداد یال‌های گراف k_8 است که در آن: $p = 8$

آزمون ۳۲) کدام یک از گراف‌های زیر وجود ندارد؟

۱) غیرکامل و منتظم ۲) کامل و غیرمنتظم

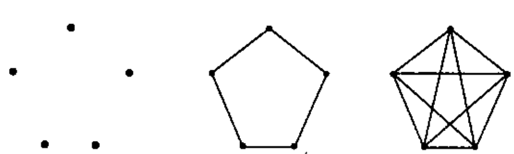
۳) کامل و منتظم ۴) غیرکامل و غیرمنتظم

حل: گزینهٔ (۲). با توجه به این که همهٔ گراف‌های کامل منتظمند، گراف کاملی وجود ندارد که منتظم نباشد.

سؤال: چند نوع گراف منتظم از مرتبهٔ ۵ وجود دارد؟ آن‌ها را رسم کنید.

پاسخ: $5r = 2q \to r = 0$ یا ۲ یا ۴

چون 2q زوج است، r می‌تواند اعداد ۰ یا ۲ یا ۴ را اختیار کند:



(۴ـ منتظم مرتبهٔ ۵) (۲ـ منتظم مرتبهٔ ۵) (۰ـ منتظم مرتبهٔ ۵)

سؤال: چند گراف منتظم با اندازهٔ ۱۲ وجود دارد؟

پاسخ:

$$\begin{cases} rp = 2q = 2\times 12 = 24 = 3\times 8 = 4\times 6 = 1\times 24 \\ r < p \end{cases}$$

گراف‌های منتظم با اندازهٔ ۱۲ عبارتند از:
«۲- منتظم مرتبهٔ ۱۲» و «۳- منتظم مرتبهٔ ۸» و «۴- منتظم مرتبهٔ ۶» و «۱- منتظم مرتبهٔ ۲۴»

آزمون ۳۳) تعداد گراف‌های ۱۷ منتظم مرتبهٔ ۱۸ چند تاست؟

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

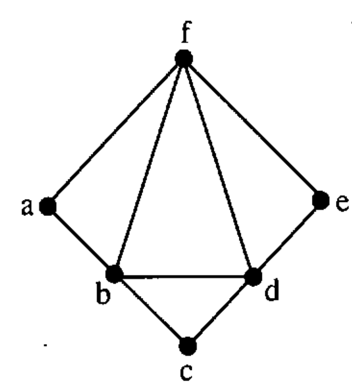
حل: گزینهٔ (۲). گراف مزبور، گراف کامل k_{18} است و فقط یک گراف کامل مرتبهٔ ۱۸ وجود دارد.

مسیر و دور در گراف

تعریف: در گراف سادهٔ $G=(V,E)$ یک مسیر از a به b، دنباله‌ای از رأس‌های متمایز G به صورت $(v_1 = a)v_2v_3\cdots(v_{n+1} = b)$ است؛ به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله، توسط یک یال به هم وصل شده باشند (مجاور باشند). تعداد یال‌های مسیر را طول مسیر می‌نامند که در این جا طول مسیر برابر n است.

تعریف: اگر در گراف $G=(V,E)$، دو سر یک مسیر فقط یک رأس باشد، آن را دور می‌نامند و طول دور هم برابر تعداد یال‌های تشکیل دهندهٔ آن دور است.

تذکر: دنبالهٔ شامل فقط یک رأس، مسیری به طول صفر است.



مثال: تعداد مسیرهای از a به b را مشخص کنید و آن‌ها را بنویسید.

حل: از رأس a به b تعداد ۸ مسیر وجود دارد که عبارتند از:

(adb), (afb) : مسیرهای به طول دو

(adcb), (adfb), (afdb), (afeb) : مسیرهای به طول سه

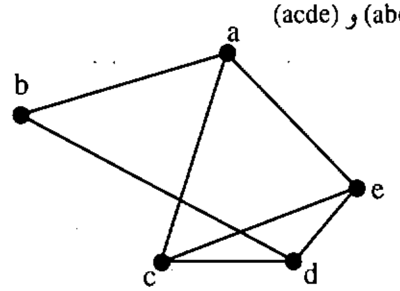
(afdcb), (adfeb) : مسیرهای به طول چهار

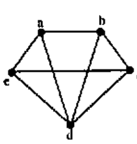
تذکر: در هر گراف مسیری به طول مرتبه وجود ندارد.

آزمون ۳۴) در گراف شکل زیر، چند مسیر به طول ۳ از a به e وجود دارد؟ (سراسری - ریاضی - ۷۵)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲

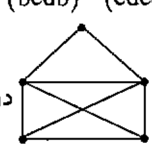
حل: گزینهٔ (۴). مسیرهای بین a و e به طول ۳ عبارتند از: (abde) و (acde)

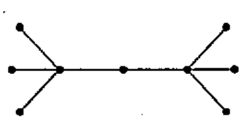


مثال ۱: در گراف  همهٔ دورهای به طول ۳ را مشخص کنید.

حل: دورهای به طول ۳ عبارتند از:

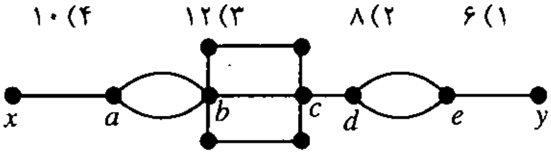
(aeda) - (abda) - (bcdb) - (edce)

مثال ۲: در گراف  دورهایی به طول ۳، ۴ و ۵ وجود دارد.

مثال ۳: در گراف  دوری وجود ندارد.

آزمون ۳۵) تعداد مسیرهای بین دو رأس x و y در گراف زیر کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۰



حل: گزینهٔ (۳). بین دو رأس x و a یک مسیر، بین a و b دو مسیر، بین b و c سه مسیر، بین c و d یک مسیر و بین d و e دو مسیر و بین e و y یک مسیر وجود دارد، پس بنابر اصل ضرب:

$$\text{تعداد مسیرهای بین } x \text{ و } y = 1\times2\times3\times1\times2\times1 = 12$$

نکتهٔ ۱: هرگاه $\delta \geq k$، در این صورت گراف حداقل یک مسیر به طول k دارد.

نکتهٔ ۲: هرگاه $\delta \geq k$، در این صورت گراف حداقل یک دور به طول $k+1$ دارد.

نکتهٔ ۳: هرگاه $\delta \geq 2$، در این صورت گراف حداقل یک دور دارد.

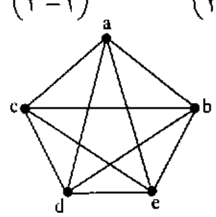
نکتهٔ ۴: تعداد مسیرهای به طول L بین دو رأس دلخواه و متمایز a و b در گراف کامل k_p برابر است با:

$$\binom{P-2}{L-1}(L-1)!$$

مثال ۱: چند مسیر به طول ۳ در گراف k_5 وجود دارد؟

حل: $P=5,\ L=3 \longrightarrow$ تعداد مسیرهای به طول ۳ =

$$\binom{5-2}{3-1}(3-1)! = \binom{3}{2}2! = 3\times2 = 6$$



مثلاً در گراف کامل (روبه‌رو) مسیرهای به طول ۳ بین دو رأس a و b عبارتند از:

(acdb) – (aceb) – (adeb) – (adcb)

(aedb) – (aecb)

همان‌طور که توجه دارید، بین دو رأس a و b تبدیلات دوتایی از حروف d و e و c نوشته شده‌اند که تعداد آن‌ها برابر است با: $\binom{3}{2}2! = 6$

مثال۲. تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه a و b در گراف k_4 را مشخص کنید.

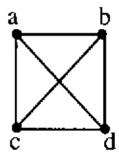
حل:

تعداد مسیرهای به طول یک از a به b: $\binom{2}{0}0! = 1$

تعداد مسیرهای به طول دو از a به b: $\binom{2}{1}1! = 2$

تعداد مسیرهای به طول سه از a به b: $\binom{2}{2}2! = 2$

پس تعداد کل مسیرهای به طول متفاوت از رأس a به رأس b برابر است با: $1+2+2=5$



مثلاً در گراف کامل (روبه‌رو)، مسیرهای متفاوت بین a و b عبارتند از:

adcb و acdb و adb و acb و ab

توجه کنید:

تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه و متمایز a و b در گراف کامل k_p برابر است با:

$$\binom{P-2}{0}0! + \binom{P-2}{1}1! + \cdots + \binom{P-2}{P-2}(P-2)! =$$

$$\sum_{L=0}^{P-2}\binom{P-2}{L}L! = \sum_{L=0}^{P-2}(P-2)_L$$

که: $(n)_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

آزمون ۳۶) تعداد مسیرهای متفاوت از رأس a به رأس b در گراف k_6 کدام است؟

۱) ۵۰ ۲) ۵۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۵

حل: گزینهٔ (۴). روش اول:

$P=6 \longrightarrow$ تعداد کل مسیرها در k_6 بین a و b $= \sum_{L=0}^{4}\binom{4}{L}L!$

$$= \binom{4}{0}0! + \binom{4}{1}1! + \binom{4}{2}2! + \binom{4}{3}3! + \binom{4}{4}4!$$

$$= 1+4+12+24+24 = 65$$

توجه کنید:

تعداد مسیرهای متفاوت بین دو رأس دلخواه و متمایز a و b در گراف k_p برابر است با: $[(P-2)!e]$ ([ ] علامت جزء صحیح، $P>2$ ، $e\simeq 2/72$)

روش دوم:

تعداد کل مسیرهای متفاوت در k_6 بین a و b $\longrightarrow P=6$

$=[4!\times e]=[24\times 2/72]=[65/28]=65$

نکته: تعداد دورهای به طول k در گراف کامل k_p برابر است با: $\frac{1}{2}\binom{p}{k}(k-1)! \quad (3\le k\le p)$

آزمون ۳۷) گراف کامل مرتبهٔ ۵ چند دور به طول ۵ دارد؟

۱) ۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۶ ۴) ۱۰

حل:

گزینهٔ (۲): $\frac{1}{2}\binom{5}{5}4!=\frac{1}{2}\times 1\times 24=12$

نکته: تعداد کل دورهای k_p برابر است با:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{p}\binom{P}{k}(k-1)!$$

آزمون ۳۸) تعداد دورهای متمایز گراف k_4 کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۹

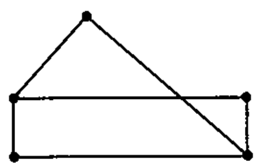
حل: گزینهٔ (۳):

$$\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{4}\binom{4}{k}(k-1)!=\frac{1}{2}\binom{4}{3}(2!)+\frac{1}{2}\binom{4}{4}3!=4+3=7$$

آزمون ۳۹): دنبالهٔ درجه‌های رأس‌های گراف G به صورت ۲ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳: G است. اگر دو رأس با ماگزیمم درجه مجاور نباشند، تعداد دورهای به طول ۳ یال کدام است؟ (سراسری ـ ریاضی ـ ۷۹)

۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

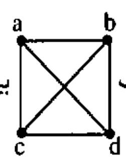
حل: گزینهٔ (۱). گراف G به صورت مقابل است که مشاهده می‌شود و هیچ دوری به طول ۳ ندارد.



توجه کنید:

در هر گراف k_p، تعداد 2^{P-2} مسیر بین هر دو رأس مشخص و متمایز وجود دارد.

مثال ۱: در گراف

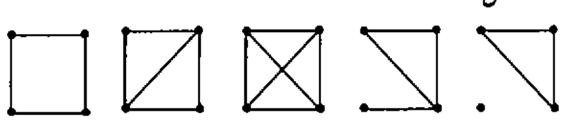


بین دو رأس a و b تعداد $4=2^2=2^{4-2}$ مسیر متمایز وجود دارد که عبارتند از:

(ab) – (acb) – (adb) – (acdb)

مثال ۲: گراف‌های مرتبهٔ ۴ را که دارای دور هستند، رسم کنید.

حل:



توجه کنید:

در گراف k_p، اگر p زوج باشد، تعداد دورهای زوج و تعداد دورهای فرد با طول‌های متفاوت برابر است با: $\frac{p-2}{2}$

اثبات: می‌دانیم طول‌های دورهای متفاوت در گراف k_p به صورت زیر است:

$3,4,5,6,\cdots,p$

چون p زوج است، لذا دورهای به طول زوج عبارتند از:

$$\underbrace{4,6,8,\cdots,p}_{n\ \text{تا}}$$

و این یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=2$ است، پس:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow p = 4 + (n-1)\times 2 \rightarrow$$
$$p = 4 + 2n - 2 \rightarrow 2n = p - 2$$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{p-2}{2}}$$

و همچنین، دورهای به طول فرد عبارتند از:

$$\underbrace{3,5,7,\cdots,p-1}_{n\ \text{تا}}$$

و این نیز یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=2$ است. پس:

$$t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow p-1 = 3 + (n-1)\times 2 \rightarrow$$
$$p-1 = 3 + 2n - 2$$

$$\rightarrow p-1 = 2n+1 \rightarrow \boxed{n = \frac{p-2}{2}}$$

توجه کنید:

در گراف کامل k_p اگر p فرد باشد، آن‌گاه:

الف) تعداد دورهای زوج با طول‌های متفاوت برابر است با: $\frac{p-3}{2}$

ب) تعداد دورهای فرد با طول‌های متفاوت برابر است با: $\frac{p-1}{2}$

اثبات: الف) $\underbrace{4,6,8,\cdots,p-1}_{n\ \text{تا}}$: تعداد دورهای به طول زوج (p فرد)

و این تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=2$ است. پس:

$$\begin{cases} d=2 \\ t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow p-1 = 4 + (n-1)\times 2 \rightarrow p-1 = 4+2n-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{p-3}{2}}$$

ب) $\underbrace{3,5,7,\cdots,p}_{n\ \text{تا}}$: تعداد دورهای به طول فرد p (فرد)

و این نیز یک تصاعد حسابی با قدرنسبت $d=2$ است. پس:

$$\begin{cases} d=2 \\ t_n = t_1 + (n-1)d \rightarrow p = 3 + (n-1)\times 2 \rightarrow p = 3+2n-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{n = \frac{p-1}{2}}$$

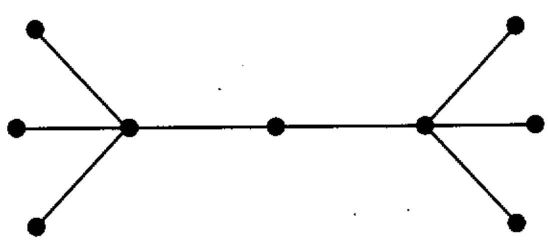
آزمون ۴۰) در گراف کامل مرتبهٔ ۱۹، تعداد دورهای زوج با طول‌های متفاوت، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۹ ۴) ۶

حل: گزینه (۱):

$$k_{19} \text{ تعداد دورهای زوج در } = \frac{p-3}{2} = \frac{19-3}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

مسأله: نمودار گراف G =(V,E) به صورت مقابل است،



الف) تمام دورهای گراف G را مشخص کنید.

ب) چه یالی از گراف G را حذف کنیم تا گراف حاصل ۲- منتظم از مرتبهٔ ۶ باشد.

(امتحان هماهنگ کشوری ـ ۷۷/۴/۳۱)

حل: الف) این گراف تنها دو دور دارد که عبارتند از:

$(v_5v_4v_6v_5)$ و $(v_1v_2v_3v_1)$

ب) با حذف یال v_3v_4 گراف ۲- منتظم مرتبهٔ ۶ می‌شود.

حلّ معادله‌های مثلثاتی

محمدهاشم رستمی

۱. حل معادله‌های سادهٔ مثلثاتی

الف) حل معادلهٔ $\sin X = a, (-1 \le a \le +1)$

فرض می‌کنیم: $(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$ ، $a = \sin\alpha$ باشد،

در این صورت داریم:

$$\sin X = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi + \alpha \\ X = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}, \ (k \in z)$$

حالت خاص $\sin X = 0 \Rightarrow X = k\pi, \ (k \in z)$

زیرا داریم:

$$\sin X = 0 = \sin 0 \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi = \text{مضرب زوج } \pi \\ X = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi = \text{مضرب فرد } \pi \end{cases}$$

$\Rightarrow X = k\pi =$ مضربی از π

این جواب‌ها را جواب‌های عمومی یا جواب‌های کلی معادلهٔ بالا می‌نامند. هرگاه بخواهیم جواب‌های موجود در یک بازهٔ معین را به دست آوریم، باید به جای k عددهای مناسب قرار دهیم. این جواب‌ها را جواب‌های اختصاصی یا خصوصی معادله می‌نامند.

نکتهٔ اول

منظور از حل یک معادلهٔ مثلثاتی، پیدا کردن جواب‌های کلی آن است. در صورتی که جواب‌های خصوصی معادله، خواسته شده باشد، باید بازهٔ مورد نظر داده شود:

مثال ۱. معادلهٔ $2\sin x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۲. جواب‌های کلی معادلهٔ $2\sin x + \sqrt{2} = 0$ و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$ را به‌دست آورید.

حل

داریم: $2\sin x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2\sin x = -\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

جواب‌های کلی معادله

$$\begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{4}) \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

برای تعیین جواب های خصوصی بین ۰ و 2π به جای k، مقدارهای مناسب قرار می دهیم.

k	x
-1	$-\frac{9\pi}{4} < 0,\ -\frac{7\pi}{4} < 0$
0	$-\frac{\pi}{4} < 0,\ \frac{5\pi}{4}$ ج
1	$\frac{7\pi}{4}$ ج, $\frac{13\pi}{4} > 2\pi$
2	$\frac{15\pi}{4} > 2n,\ \frac{21\pi}{4} > 2\pi$

طوری که دیده می شود، جواب های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ هستند.

مثال ۳. معادلهٔ $2\text{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

حل

در این مسأله $X = 3x - \frac{\pi}{6}$ است، پس داریم:

$$2\text{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \text{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{Sin}\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 3x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{cases}$$ جواب های کلی معادله

مثال ۴. معادلهٔ $\text{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) - \text{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = 0$ را حل کنید و جواب های اختصاصی موجود در بازهٔ $[-\pi\ \ +\pi]$ را بیابید.

حل

معادلهٔ داده شده را به صورت $\text{Sin}X = \text{Sin}\alpha$ درمی آوریم و آن گاه از دستورهای مربوط به حل این معادله استفاده می کنیم. باید توجه داشت که در معادلهٔ $\text{Sin}X = \text{Sin}\alpha$، x و α هردو می توانند عبارت هایی برحسب x (مجهول مسأله) باشند.

$$\text{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) - \text{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = \text{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = \text{Sin}(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$\text{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = \text{Sin}(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + (\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - (\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ \frac{x}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12k\pi}{5} + \frac{7\pi}{10} \\ x = 12k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

k	x
-1	$-\frac{17\pi}{10} < -\pi,\ -\frac{23\pi}{2} < -\pi$
0	$\frac{7\pi}{10}$ ج, $\frac{\pi}{2}$ ج
1	$\frac{31\pi}{10} > \pi,\ \frac{25\pi}{2} > \pi$

مثال ۵. معادلهٔ $\text{Sin}(2x - \frac{\pi}{5}) = 0$ را حل کنید.

حل

با فرض $X = 2x - \frac{\pi}{4}$ ، معادله به صورت $\sin X = 0$ درمی‌آید که جواب آن $X = k\pi$ است. پس داریم:

$$\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$
$$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

مثال ۶. معادلهٔ $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 2m + 3$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های این معادله $x = \frac{\pi}{12}$ باشد.

ج) به‌ازای $m = -\frac{5}{4}$ ، معادله را حل کنید.

حل

الف) شرط وجود جواب آن است که داشته باشیم:

$$-1 \le 2m + 3 \le +1 \Rightarrow -4 \le 2m \le -2 \Rightarrow -2 \le m \le -1$$

ب) به شرط آن‌که $x = \frac{\pi}{12}$ یک ریشهٔ این معادله باشد، آن است که در این معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$\sin(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}) = 2m + 3 \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2} = 2m + 3 \Rightarrow$$
$$1 = 2m + 3 \Rightarrow 2m = -2 \Rightarrow m = -1$$

ج) در ازای $m = -\frac{5}{4}$ داریم:

$$\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 2(-\frac{5}{4}) + 3 \Rightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = k\pi - \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال ۷. معادلهٔ $(\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin\pi(\frac{3x}{2} - 2) - 1 = 0$ را حل کنید و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, 3]$ را به‌دست آورید.

حل

داریم:

$$(\sqrt{6} - \sqrt{2})\sin\pi(\frac{3x}{2} - 2) = 1 \Rightarrow \sin\pi(\frac{3x}{2} - 2) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\pi(\frac{3x}{2} - 2) = \sin\frac{5\pi}{12} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \pi(\frac{3x}{2} - 2) = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ \pi(\frac{3x}{2} - 2) = 2k\pi + \pi - \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} - 2 = 2k + \frac{5}{12} \\ \frac{3x}{2} - 2 = 2k + 1 - \frac{5}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3x}{2} = 2k + \frac{29}{12} \\ \frac{3x}{2} = 2k + \frac{31}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4k}{3} + \frac{29}{18} \\ x = \frac{4k}{3} + \frac{31}{18} \end{cases}$$ جواب‌های کلی معادله

k	x
-2	$\frac{-19}{18} < 0, \quad \frac{-17}{18} < 0$
-1	$0 < \frac{5}{18} < 3, \quad 0 < \frac{7}{18} < 3$
0	$0 < \frac{29}{18} < 3, \quad 0 < \frac{31}{18} < 3$
1	$0 < \frac{53}{18} < 3, \quad \frac{55}{18} > 3$
2	$\frac{77}{18} > 3, \quad \frac{79}{18} > 3$

به‌طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, 3]$ عبارتند از:

$\frac{5}{18}$ ، $\frac{7}{18}$ ، $\frac{29}{18}$ ، $\frac{31}{18}$ و $\frac{53}{18}$

نکتهٔ دوم

معادلهٔ $\sin x = 1$ دارای ریشهٔ مضاعف $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

و معادلهٔ $\text{Sin}x = -1$ دارای ریشهٔ مضاعف $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (یا $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$) است. زیرا داریم:

$$\text{Sin}x = 1 = \text{Sin}\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Sin}x = -1 = \text{Sin}(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{2}) \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

اما انتهای کمان‌های $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{3\pi}{2}$ برهم منطبق هستند. بنابراین داریم:

$$\boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

مثال ۱. معادلهٔ $\text{Sin}(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}) = 1$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$\text{Sin}(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = 1 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{4\pi}{9}$$

مثال ۲. معادله $\text{Sin}(2x + \frac{\pi}{12}) = -1$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$\text{Sin}(2x + \frac{\pi}{12}) = -1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{12} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{7\pi}{12} \Rightarrow x = k\pi - \frac{7\pi}{24}$$

مثال ۳. معادلهٔ $\text{Sin}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = m - 1$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) مقدار m را چنان بیابید که $x = \frac{\pi}{2}$ ریشهٔ این معادله باشد.

ج) مقدار m را چنان بیابید که $x = -\frac{\pi}{2}$ ریشهٔ این معادله باشد.

د) به ازای $m = 2$ معادله را حل کنید.

حل

الف) شرط آن‌که معادلهٔ داده شده دارای جواب باشد، آن است که:

$$-1 \le m - 1 \le +1 \Rightarrow 0 \le m \le 2$$

ب) $x = \frac{\pi}{2}$ باید در معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$\text{Sin}(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = m - 1 \Rightarrow \text{Sin}\frac{\pi}{3} = m - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = m - 1 \Rightarrow m = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ج) باید $x = -\frac{\pi}{2}$ در معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$\text{Sin}(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = m - 1 \Rightarrow \text{Sin} = m - 1 \Rightarrow 0 = m - 1 \Rightarrow m = 1$$

د) در ازای $m = 2$ داریم:

$$\text{Sin}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = 2 - 1 = 1 = \text{Sin}\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} =$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 6k\pi + \pi$$



مدل سازی مقدماتی ریاضی

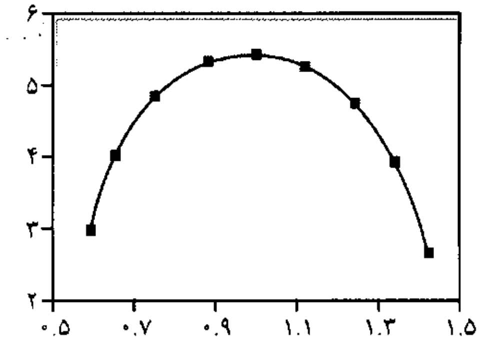
تابع های توانی
و مدل های ریاضی

ترجمه و تألیف: میرشهرام صدر

وقتی توپی را در امتداد قائم به هوا پرتاب می کنید، چه اتفاقی می افتد؟ آیا توپ با سرعت ثابتی به طرف بالا می رود و بعد رو به پائین حرکت می کند؟ آیا توپ برای رسیدن به بالاترین نقطه (نقطه اوج)، زمان بیش تری را صرف می کند یا در برگشت و رسیدن به نقطهٔ اولیهٔ پرتاب؟

توپی را روی یک دستگاه حرکت سنج[1] به هوا پرتاب کرده ایم. شکل ۱، نمودار داده های به دست آمده در این آزمایش را نشان می دهد. حرکت سنج به دستگاهی وصل است که ارتفاع توپ (ارتفاع توپ تابعی از زمان است) را ثبت می کند. این نمودار چه اطلاعاتی دربارهٔ حرکت توپ به ما می دهد؟ ابتدا ملاحظه می کنیم که توپ از ارتفاع تقریباً ۳ فوتی رو به بالا پرتاب می شود و در ارتفاع کمی پائین تر از نقطهٔ پرتاب (قبل از برخورد با حرکت سنج) گرفته می شود. ثانیاً آهنگ سرعت توپ ثابت نیست، زیرا فاصلهٔ طی شده از ۰/۶ تا ۰/۷ ثانیه، بیش تر از فاصلهٔ طی شده از ۰/۹ تا ۱ ثانیه است و بالاخره ملاحظه می کنید که مدت زمانی که برای بالا رفتن توپ سپری شده است با مدت زمان پائین آمدن توپ یکسان است.

اگر بخواهیم مدل ریاضی رابطهٔ بین زمان و ارتفاع توپ را بنویسیم، به طور قطع مدل خطی (تابع درجهٔ اول) را انتخاب نمی کنیم، زیرا توپ در فاصلهٔ زمان های برابر، مسافت های مختلفی را طی کرده است. با استفاده از شکل ۱ ملاحظه می کنیم



شکل ۱. حرکت‌سنج ارتفاع توپ را در هر ۰/۱ ثانیه اندازه‌گیری می‌کند.

که منحنی به صورت یک سهمی[۲] است که نمودارش شبیه به وارونه نمودار تابع درجهٔ دوم[۳] $f(x) = x^2$ است. درواقع وضعیت توپ در حالت بالا رفتن یا پائین آمدن، با یک مدل ریاضی تابع درجهٔ دوم مشخص می‌شود.

در این مقاله، ابتدا توابع درجهٔ دوم و تابع‌های توانی را بررسی می‌کنیم. سپس رابطه‌هایی را مطالعه می‌کنیم که برای هرکدام از آن‌ها، مدل‌های مناسبی را ارائه خواهیم کرد.

ابتدا به طور خلاصه بعضی از توابع غیرخطی ساده‌ای را بررسی می‌کنیم که اطلاعاتی از دنیای پیرامون به ما می‌دهند. ضمناً توابع را به صورت مصور و با نمودار مطالعه می‌کنیم. درحقیقت هدف این است که شما دانش‌آموزان به تفاوت‌های اساسی که بین نمونه‌های مختلف توابع وجود دارند، پی ببرید.

توابع درجهٔ دوم و سهمی‌ها

فرض کنید که یک قطعه سنگ از بالای برجی به پائین افتاده باشد، جدول۱، فاصلهٔ (d برحسب فوت) قطعه سنگ را پس از پائین آمدن و بعد از t ثانیه نشان می‌دهد.

t (ثانیه)	d (فوت)
۰	۰
۱	۱۶
۲	۶۴
۳	۱۴۴
۴	۲۵۶
۵	۴۰۰

جدول ۱

توجه کنید که در ستون سمت چپ جدول، تفاوت بین دو زمان متوالی برابر با ۱ ثانیه است. اما در ستون سمت راست، تفاوت بین هر دو عدد متوالی یکسان نیست. از این رو نتیجه می‌گیریم که d تابعی درجهٔ اول و خطی برحسب t نیست. شما دانش‌آموزان می‌توانید تحقیق کنید که d تابعی از t است و از رابطهٔ $d = 16t^2$ به دست می‌آید. توجه داشته باشید که در این تابع متغیرِ زمان، توان‌دار است.

تابع درجهٔ دوم

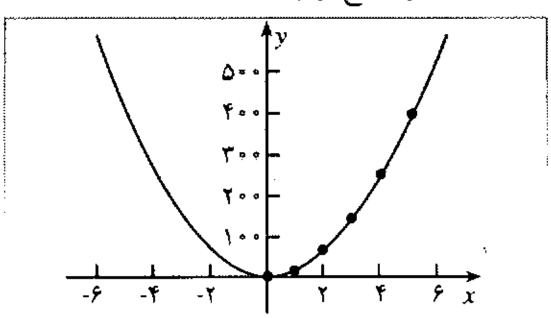
تعریف: تابع درجهٔ دوم به صورت کلی:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

است که در آن: $a \neq 0$. بنابراین این تابع شامل یک جملهٔ درجهٔ دوم، یک جملهٔ درجهٔ اول و یک جملهٔ ثابت است.

نمودار تابع درجهٔ‌دوم، سهمی است. در مثال زیر یک سهمی را در حالت خاص داریم.

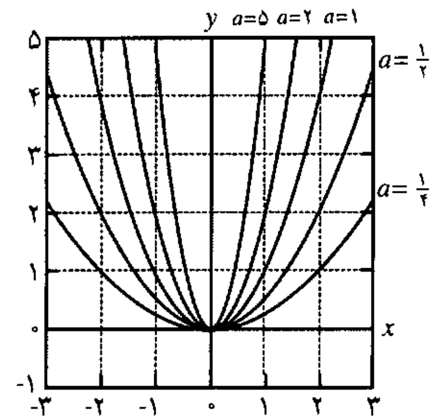
مثال۱. شکل ۲، نمودار تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $y = 16x^2$ (که در آن، با توجه به رابطهٔ ۱ داریم: $a = 16$ و $b = c = 0$) را نشان می‌دهد. با فرض این که t و d در صفحهٔ مختصات همان x و y باشند، نیمهٔ راست این سهمی متناظر با نمودار تابع مسافتِ پائین آمدن قطعه سنگ (جدول ۱) است. نقاطی به مختصاتِ (x, y) که روی نمودار این تابع مشخص شده‌اند، متناظر با زوج مرتب (t, d) طبق جدول ۱ هستند.



شکل ۲. نمودار. یک سهمی به معادله $y=16x^2$ است که نقاط (۰،۰) و (۱۶، ۱) و (۶۴، ۲) و (۱۴۴، ۳) و (۲۵۶، ۴) و (۴۰۰، ۵) روی آن مشخص شده است.

نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -16x^2$، تقریباً شبیه نمودار شکل۲ است؛ با این تفاوت که دهانهٔ سهمی رو به بالا باز نمی‌شود، بلکه دهانهٔ آن رو به پائین باز می‌شود. به طور کلی، نمودار تابع به معادلهٔ: $y = ax^2$ (۲) که در آن $a \neq 0$، یک سهمی است که رأس[۴] آن (نقطه‌ای که جهت سهمی در آن

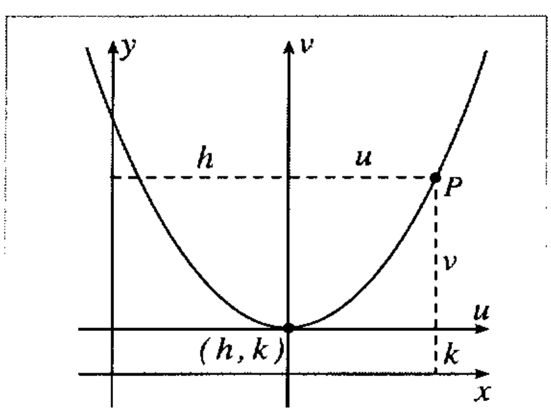
عوض می‌شود) مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ (۰،۰) است. در معادلهٔ ۲، اگر $a > ۰$، آن‌گاه دهانهٔ سهمی رو به بالا و اگر $a < ۰$، آن‌گاه دهانهٔ سهمی رو به پائین است. در معادلهٔ۲، اندازهٔ ضریب a، عرض سهمی را مشخص می‌کند. به بیان دقیق‌تر، برای $a > ۰$ هرچه مقدار a افزایش پیدا کند، شیب منحنی تندتر و عرض سهمی کم‌تر می‌شود. شکل ۳ را ملاحظه کنید.



شکل ۳. سهمی‌ها با عرض‌های متفاوت

در شکل ۴، یک سهمی را ملاحظه می‌کنید که رأس آن به جای مبدأ مختصات، نقطهٔ (h,k) است. معادلهٔ این سهمی در دستگاه مختصات uv به صورت $v = au^2$، و مانند معادلهٔ ۲ است؛ با این تفاوت که به جای x و y، متغیرهای u و v آمده است.

با توجه به شکل، واضح است که در دستگاه‌های



شکل ۴. سهمی انتقال داده شده

مختصات xy و uv داریم: $v = y - k$ و $u = x - h$

با جایگذاری این رابطه‌ها در معادلهٔ $v = au^2$، معادلهٔ انتقال‌یافتهٔ سهمی با رأس (h,k) را در دستگاه مختصات xy به دست می‌آوریم:

$$y - k = a(x - h)^2 \qquad (۳)$$

اگر معادلهٔ ۳ را ساده کنیم و آن را بر حسب x مرتب کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که معادله، شامل یک جملهٔ درجهٔ دوم، یک جملهٔ درجهٔ اول و یک مقدار ثابت است.

در حالت کلی، نمودار تابع با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ که در آن $a \neq ۰$، یک سهمی انتقال یافته است. در صورتی که این معادله را برحسب x مربع کامل کنیم، آن‌گاه معادله‌ای مانند معادلهٔ ۳ به دست می‌آوریم.

مثال۲. نمودار تابع با ضابطهٔ $y = ۲x^2 - ۴x - ۱$ را رسم کنید.

حل: ابتدا این معادله را برحسب x مربع کامل می‌کنیم:

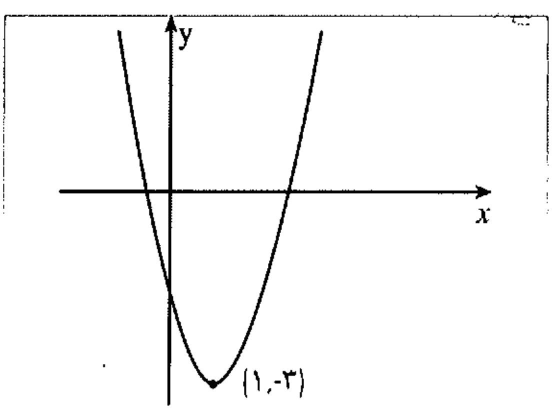
$$y = ۲(x^2 - ۲x) - ۱$$

$$= ۲(x^2 - ۲x + ۱) - ۲ - ۱ = ۲(x - ۱)^2 - ۳$$

در نتیجه داریم:

$$y + ۳ = ۲(x - ۱)^2$$

با مقایسهٔ معادلهٔ اخیر و معادلهٔ ۳ ملاحظه می‌کنیم که $a = ۲$، $h = ۱$ و $k = -۳$. در نتیجه شکل ۵ نمودار سهمی را نشان می‌دهد که دهانهٔ آن رو به بالا و رأس آن نقطهٔ (۱،-۳) است.



شکل۵

تابع‌های توانی

تابع خطی (درجه اول) با ضابطهٔ $f(x) = x$ و تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $g(x) = x^{۲}$ هر دو مثال‌هایی از تابع‌های توانی هستند.

تابع توانی[۵]

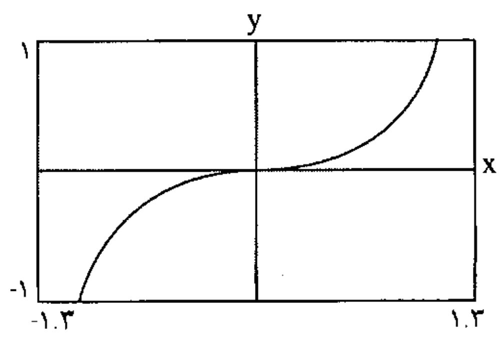
تعریف: ضابطهٔ تابع توانی در حالت کلی به‌صورت

$$f(x) = x^{k} \quad (۴)$$

که در آن، k عدد ثابتی است و می‌تواند مثبت یا منفی و صحیح یا گویا (حتی گنگ مانند $\sqrt{۲}$ یا π) باشد.

مثال ۳. در تابع توانی ۴، اگر $k = ۱$، آن‌گاه نمودار آن خطی با معادلهٔ $y = x$ (نیمساز ربع اول و سوم) است. درحالتی که $k = ۲$، نمودار آن سهمی با ضابطهٔ $y = x^{۲}$ است. اگر $k = ۰$، آن‌گاه (چون $x^{۰} = ۱$) تابع ثابت $f(x) = ۱$ به دست می‌آید و نمودار آن خط افقی با معادلهٔ $y = ۱$ است. اگر $k = ۳$ در این صورت، تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^{۳}$ را داریم که نمودار آن در شکل ۶ نشان داده شده است.

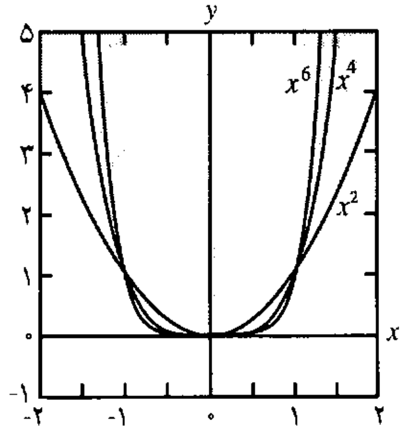
مطلب بسیار مهمی که باید به آن دقت کرد این است که نمودارهای سهمی با معادلهٔ $y = x^{۲}$ و تابع درجهٔ سوم[۶] با معادلهٔ $y = x^{۳}$، معیارهای خوبی برای رسم تابع توانی $f(x) = x^{k}$ با هر توان صحیح و مثبت k هستند. نمودارهای تابع‌های توانی با درجه‌های زوج[۷]، یعنی $x^{۲}$، $x^{۴}$ و $x^{۶}$ و



شکل ۶. نمودار تابع با ضابطه $y=x^{۳}$ که با نقطه‌یابی طبق جدول روبرو، رسم شده است:

x	-۱	۰	۱
y	-۱	۰	۱

به همین ترتیب از این به بعد، به صورت سهمی (کاسه با دهانهٔ رو به بالا) هستند که نمودارهای آن‌ها را در شکل ۷ ملاحظه می‌کنید (این نمودارها با نقطه‌یابی رسم شده‌اند).

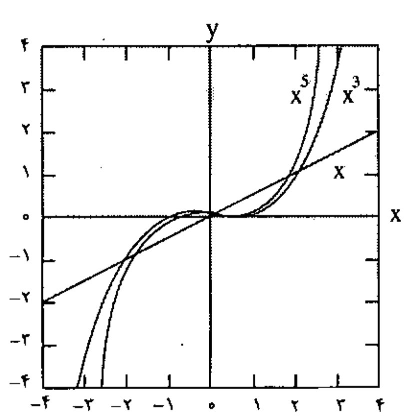


شکل ۷. نمودارهای تابع‌های توانی با درجه‌های زوج

با دقت در شکل ۷ ملاحظه می‌کنیم که هرچه توان‌های زوج بزرگ‌تر می‌شوند، نمودارهای تابع‌ها به سمت مبدأ نزدیک‌تر می‌شوند (دهانهٔ سهمی‌ها بسته‌تر می‌شوند و به طرف محور yها نزدیک‌تر می‌شوند).

نمودارهای تابع‌های توانی با درجه‌های فرد[۸]، یعنی x، $x^{۳}$ و $x^{۵}$ و به همین ترتیب از این به بعد، شبیه نمودار تابع درجهٔ سوم هستند؛ نمودار همگی آن‌ها از جنوب غربی (ناحیهٔ سوم) تا شمال شرقی (ناحیه اول) هستند که نمودارهای آن‌ها را در شکل ۸ ملاحظه می‌کنید (این نمودارها با نقطه‌یابی رسم شده‌اند).

با دقت در شکل ۸ ملاحظه می‌کنید که هرچه توان‌های



شکل ۸. نمودارهای تابع‌های توانی با درجه‌های فرد

فرد بزرگ‌تر می‌شوند، نمودار تابع‌ها به سمت مبدأ نزدیک‌تر می‌شوند (شاخه‌های منحنی به طرف محور عرض‌ها نزدیک‌تر می‌شوند).

اگر در تابع توانی $f(x)=x^k$ ، k عدد صحیح نباشد، آن‌گاه حالت جدیدی از این تابع به دست می‌آید. هرگاه $k=\frac{p}{q}$ که p و $q\neq ۰$ عددهای صحیحی هستند، در این صورت توان کسری x^k به صورت زیر تعریف می‌شود:

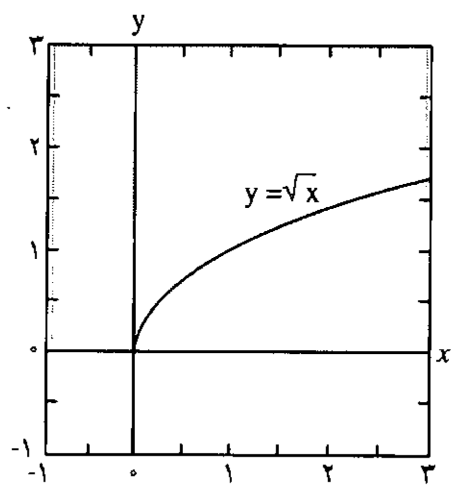
$$x^k = x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = \sqrt[q]{x^p} \quad (۵)$$

یکی از راه‌هایی که به کمک آن بتوانیم نقش p و q را به خاطر بسپاریم (یعنی کدام توان و کدام ریشه هستند)، این است که بگوییم «صورت کسر یعنی p توان است» بنابراین q باید ریشه باشد.

مثال ۴. هرگاه در رابطهٔ ۵، $p=۱$ و $q=۲$ قرار دهیم، تابع ریشهٔ دوم[9] به دست می‌آید:

$$f(x)=x^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{x}$$

نمودار تابع ریشهٔ دوم در شکل ۹ نشان داده شده است. چون عددهای حقیقی منفی، ریشه دوم ندارند، بنابراین تابع ریشهٔ دوم فقط برای $x\geq ۰$ تعریف می‌شود. به همین دلیل است که شکل ۹ نمودار تابع را فقط در نیمهٔ راست صفحهٔ مختصات نشان می‌دهد.

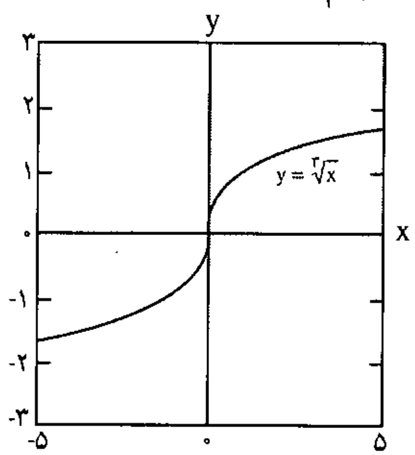


شکل ۹. نمودار تابع با ضابطه $y=x^{\frac{۱}{۲}}$

مثال ۵. هرگاه در رابطهٔ ۵، $p=۱$ و $q=۳$ قرار دهیم، تابع ریشهٔ سوم[10] به دست می‌آید:

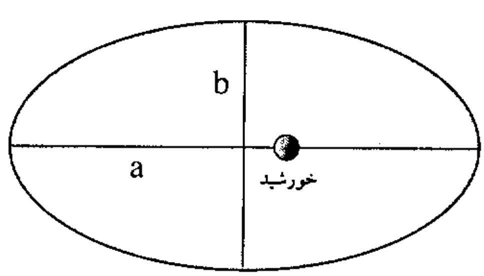
$$f(x)=x^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{x}$$

نمودار تابع ریشهٔ سوم در شکل ۱۰ نشان داده شده است. عددهای حقیقی مثبت، ریشهٔ سوم مثبت دارند؛ مانند: $\sqrt[۳]{۸}=۲$. همچنین عددهای حقیقی منفی، ریشهٔ سوم منفی دارند؛ مانند: $\sqrt[۳]{-۱}=-۱$ ، زیرا $(-۱)^۳=-۱$. به همین دلیل است که نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ در کل صفحهٔ مختصات (نیمهٔ راست و نیمهٔ چپ صفحه مختصات) رسم شده است.



شکل ۱۰. نمودار تابع با ضابطه $y=x^{\frac{۱}{۳}}$

مثال ۶. مدار حرکت یک سیاره به دور خورشید مانند یک بیضی[11] است که در شکل ۱۱ نشان داده شده است (همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، خورشید خارج از مرکز این بیضی قرار دارد).



شکل ۱۱. مدار حرکت یک سیاره به دور خورشید تقریباً شبیه به بیضی است.

یک بیضی می‌تواند به صورت «دایرهٔ فشرده» با شعاع بزرگ[12] a و شعاع کوچک[13] $b<a$ در نظر گرفته شود. در دایره، همهٔ شعاع‌ها با هم برابرند و این تفاوتی است که دایره با بیضی دارد. در سال ۱۶۱۹، ریاضیدان و ستاره‌شناس آلمانی، **جان کپلر**[14] شعاع‌های بزرگ مدارهای شش سیاره را که تا آن زمان شناخته شده بودند، محاسبه کرد و همچنین دورهٔ تناوب (T) از گردش هر کدام از آن سیاره‌ها را به دور خورشید، در قالب یک جدول معرفی کرد. جدول ۲ شعاع‌های بزرگ اندازه‌گیری شده را با واحدهای ستاره‌شناسی (AUs) نشان می‌دهد (یک AU عبارت است از شعاع بزرگ مدار حرکت زمین به دور خورشید). دورهٔ تناوب هریک از سیاره‌ها در مقایسه با دورهٔ تناوب زمین آورده شده است.

با توجه به جدول ۲ ملاحظه می‌کنیم که دورهٔ تناوب گردش عطارد به دور خورشید کم‌تر از ۳ ماه است؛ زیرا دورهٔ تناوب گردش زمین به دور خورشید یک سال است، بنابراین در هرماه، زمین $\frac{۱}{۱۲} = ۰/۰۸\overline{۳}$ سال روی مدار خود حرکت می‌کند. از طرف دیگر، دورهٔ تناوب عطارد نسبت به زمین ۰/۲۴۱ سال است. بنابراین عطارد به مدت $۳ > ۲/۹ = \frac{۰/۲۴۱}{۰/۰۸\overline{۳}}$ ماه روی مدار خود به دور خورشید نسبت به زمین حرکت می‌کند تا یک دور کامل، مدار خود را طی کند. همچنین، دورهٔ تناوب گردش مشتری به دور خورشید نزدیک ۱۲ سال است؛ زیرا:

$$۱۱/۸۶۲ < ۱۲ .$$

با در نظر گرفتن این که شعاع بزرگ، میانگین فاصلهٔ سیاره از خورشید است و با دقت در ستون دوم جدول ۲ ملاحظه می‌کنیم که زهره نسبت به زمین کم‌تر از $\frac{۳}{۴}$ (زیرا: $۰/۷۲۳ < \frac{۳}{۴}$) دورتر از خورشید قرار دارد، در حالی که مریخ نسبت به زمین کمی بیش از یک‌ونیم برابر (زیرا: $۱/۵۲۴ > ۱/۵$) دورتر از خورشید است. قانون سوم **کپلر** دربارهٔ حرکت سیاره‌ای می‌گوید که (با واحدهایی که در جدول به کار رفته است): **مجذور دورهٔ تناوب حرکت یک سیاره به دور خورشید** (T^2) **با مکعب شعاع بزرگ** (a^3) **مدار حرکت سیاره به دور خورشید برابر است.** یعنی:

$$T^2 = a^3$$

بنابراین (با استفاده از ریشهٔ سوم) ملاحظه می‌کنیم که شعاع بزرگ تابعی از دورهٔ تناوب است؛ به طوری که:

$$a = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[3]{T^2} = (T^2)^{\frac{1}{3}} = T^{\frac{2}{3}}$$

با استفاده از یک ماشین‌حساب، درستی رابطهٔ $a = T^{\frac{2}{3}}$ را برای هر کدام از سیاره‌های جدول ۲ تحقیق کنید.

اسحاق **نیوتن**[15] نشان داد که رابطهٔ $a = T^{\frac{2}{3}}$ برای همهٔ سیاره‌ها و ستاره‌های دنباله‌دار برقرار است. فرض کنید ستاره‌ای کشف شده است که نسبت به زمین ۴ برابر دورتر از خورشید است. چه‌قدر طول می‌کشد تا این ستاره گردش خود را به دور خورشید کامل کند؟

سیاره	شعاع بزرگ a (بر حسب AU)	دورهٔ تناوب T (بر حسب سال)
عطارد	۰/۳۸۷	۰/۲۴۱
زهره	۰/۷۲۳	۰/۶۱۵
زمین	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰
مریخ	۱/۵۲۴	۱/۸۸۱
مشتری	۵/۲۰۱	۱۱/۸۶۲
زحل	۹/۵۳۸	۲۹/۴۵۶

جدول ۲

توجه: با دقت در جدول ۲، اگر شما در سیارهٔ عطارد یا زحل زندگی می‌کردید،

حدس می‌زنید نسبت به زمین چند ساله بودید!؟

تمرین‌ها

یک سهمی را به معادلهٔ $y = ax^2$، در نظر بگیرید. مقدار a را چنان به‌دست آورید که سهمی از نقطهٔ P با مختصات داده شدهٔ زیر عبور کند:

۱. P(۱۸ و ۳)

۲. P(۲۴ و ۲-)

۳. P(۶۴- و ۴)

۴. P(۲۵۰- و ۵-)

تابع درجهٔ دوم با ضابطهٔ $f(x) = x^2 + bx + c$ را در نظر بگیرید، مقدارهای b و c را چنان بیابید که نمودار این تابع از نقطه‌های P و Q با مختصات داده شدهٔ زیر عبور کند.

۵. P(۲ و ۱-) و Q(۶ و ۱)

۶. P(۱- و ۳-) و Q(۲۳ و ۳)

۷. P(۳۵ و ۴-) و Q(۱۱ و ۴)

۸. P(۱۵۰ و ۵-) و Q(۵۰ و ۵)

راهنمایی: اگر مختصات نقاط P و Q را در معادله تابع قرار دهیم، در این صورت دو معادله با دو مجهول به دست می‌آید که با حل یک دستگاه دو معادله و دو مجهولی، مقدارهای b و c به دست می‌آیند.

در تمرین‌های ۹ تا ۱۴، تابع‌های درجهٔ دوم با نمودارهایشان داده شده است. مشخص کنید، هر نمودار مربوط به کدام تابع است.

راهنمایی: از مقدار f(۰) و این‌که دهانهٔ سهمی رو به بالا یا رو به پائین باز می‌شود، استفاده کنید.

۹. $f(x) = x^2 + 1$

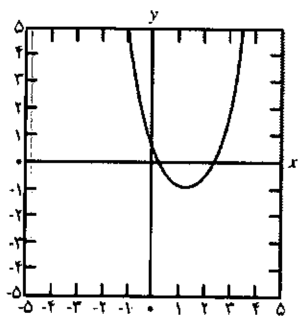
۱۰. $f(x) = 4 - x^2$

۱۱. $f(x) = -x^2 - 2x$

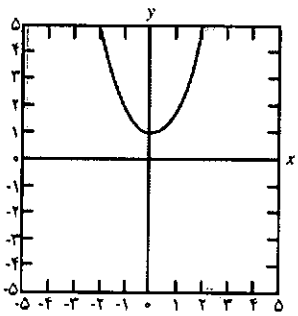
۱۲. $f(x) = x^2 - 2x$

۱۳. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

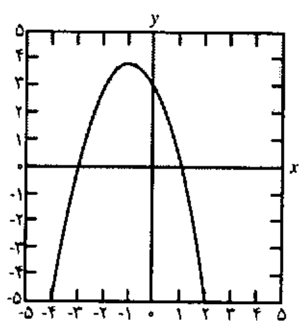
۱۴. $f(x) = 3 - 2x - x^2$



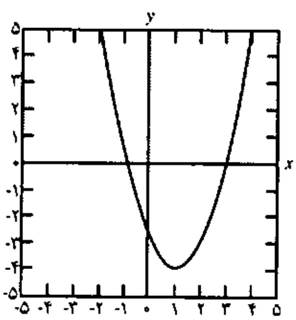
شکل ۱۱



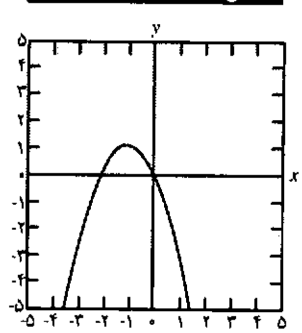
شکل ۱۴



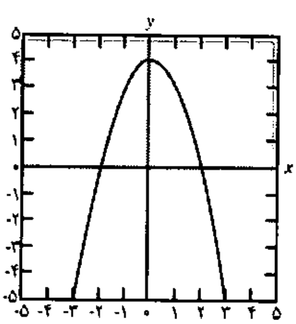
شکل ۱۲



شکل ۱۵



شکل ۱۳



شکل ۱۶

زیرنویس

1. motion detector
2. parabolic
3. quadratic function
4. vertex
5. power function
6. cubic function
7. even- degree
8. odd-degree
9. square root function
10. cube root function
11. ellipse
12. major radius
13. minor radius
14. johann kepler
15. Isaac Newton

منبع

Elementary Mathematics modeling/ Mary Ellen Davis (university of Georgia)
C. Henry Edwards (university of Georgia)
2001 by prentice- Hall (U.S.A)



کتاب‌های ریاضی «مجموعه پرسش‌های چهارگزینه‌ای از مدرسه تا دانشگاه» توسط مؤلفان و دبیران ارزشمندی تدوین و تألیف شده‌اند، عبارتند از:

۱. ریاضی سال دوم دبیرستان
۲. جبر و احتمال سال سوم ریاضی
۳. حسابان ۱ و ۲
۴. ریاضی سال سوم رشتهٔ تجربی
۵. ریاضی عمومی ۱ و ۲ پیش‌دانشگاهی
۶. حساب دیفرانسیل و انتگرال
۷. ریاضیات گسسته
۸. جبر خطی و هندسهٔ تحلیلی
۹. هندسهٔ ۱
۱۰. هندسهٔ ۲

رشد برهان ۴

برای دانش آموزان دوره متوسطه

سال سیزدهم ،شمارهٔ دوم
۱۳۸۲ ، بها: ۲۰۰۰ ریال
www.roshdmag.org
دفتر انتشارات کمک آموزشی
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی



- گفت وگو خودمانی با استاد شهریاری
- رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g
- دترمینان
- استقرای ریاضی
- جدول ریاضی
- سهم تو بزرگتر از سهم من است.



طراح واجرای شکل هندسی :
نوشین شرف الدین

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۴

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

❖ سال سیزدهم، شمارهٔ دوم ❖ ۱۳۸۲
❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ تیراژ: ۱۷۰۰۰ نسخه
❖ برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

۲ یادداشت سردبیر

۳ از تاریخ بیاموزیم/ پرویز شهریاری

۶ رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g / احمد قندهاری

۸ تعمیم قضیه فیثاغورس/مجتبی فرهادی

۹ اعداد فیبوناتچی /غلامرضا یاسی‌پور

۱۴ دترمینان/ حمیدرضا امیری

۲۳ حلّ معادله های مثلثاتی/ محمدهاشم رستمی

۳۰ گفت‌وگو خودمانی با استاد شهریاری / غلامرضا یاسی‌پور

۳۷ استقرای ریاضی/ میرشهرام صدر

۴۲ تابع‌های متناوب / هوشنگ شرقی

۴۶ جدول ریاضی/ کامران مرادی

۴۸ آیا قاعده هوپیتال همیشه کار آمد است!؟(۲)/ مجتبی معارف‌وند

۵۳ پیشامد نامنتظر در قضیه وارون/ پرویز شهریاری

۵۶ اثبات اتحادها به کمک هندسه (قسمت اول)/ احمد قندهاری

۶۰ مکان‌های هندسی دو نقطه ای/ دکتر احمد شرف‌الدین

۶۲ سهم تو بزرگ‌تر از سهم من است!/ مهدی گروسیان



❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده

❖ سردبیر: حمیدرضا امیری

❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر

❖ مدیرهنری: جواد ساروخانی

❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

❖ اعضای هیات تحریریه:

حمیدرضا امیری

محمد هاشم رستمی

احمد قندهاری

میرشهرام صدر

هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی

غلامرضا یاسی‌پور

❖ و با تشکر از همکاری ارزندهٔ آقای پرویز شهریاری

چاپ و صحافی:
شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش‌آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های وارده، باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی‌شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۸۳۰۵۸۶۲
تلفن امور مشترکین: ۸۸۳۹۱۸۶

یادداشت سردبیر

اول مهرماه سال ۱۳۵۷، وقتی وارد دبیرستان شدم، در گوشه‌ای از حیاط مدرسه تعدادی از همکلاسی های سال اول دبیرستان را دیدم که سال قبل هم با هم بودیم. به طرفشان رفتم. فرامرز از دور که مرا دید، به طرفم دوید و گفت: «حمید چه طوری؟ ۱۷ شهریور کجا بودی؟ دیدی این از خدا بی‌خبرها با مردم بی‌دفاع چه‌کردند؟ راستی آخرین اعلامیهٔ آقا را داری؟ من چندتا با خودم آورده‌ام. باید زودتر تکثیر کنیم و به بچه‌ها بدهیم. باید مواظب آنتن‌ها باشیم!»

تنها موضوعی که بچه‌ها راجع به آن صحبت نمی‌کردند، درس و کلاس بود. در عوض، اعلامیه‌های امام و اخبار تظاهرات و تعطیلی‌ها و اعتصاب‌ها بین بچه‌ها ردوبدل می‌شد. حتی سرکلاس‌ها، اگر معلمی انقلابی بود، راجع به همین مسائل صحبت بود و اگر انقلابی نبود، با برو بچه‌های انقلابی وارد بحث‌های سیاسی داغ می‌شد که گاهی به اخراج دانش‌آموز یا دانش‌آموزانی از کلاس می‌انجامید. به خاطر دارم، یک روز با معلمی که داشت به انقلابیون بدوبیراه می‌گفت، وارد جروبحث شدم و سرآخر مرا از کلاس اخراج کرد. اولین کسی که بعد از من از کلاس بیرون آمد، فرامرز بود و به دنبال او بقیهٔ بچه‌ها!

سال دوم دبیرستان در بین همهٔ سال‌های تحصیلی‌ام، سالی فراموش نشدنی و پر از تلخی و شیرینی بود. بیش‌تر اوقات، بچه‌ها مدرسه را تعطیل می‌کردند و به تظاهرات می‌رفتیم. چون دبیرستانمان دکتر هشترودی در محل با اهمیتی در تهران (میدان فلسطین فعلی) قرار داشت، همیشه با مأموران گارد و حکومت نظامی برخورد می‌کردیم. نزدیکی‌های پیروزی انقلاب (بهمن‌ماه) و تقریباً از زمان ورود امام که اصلاً مدرسه‌ای در کار نبود و بعد از پیروزی انقلاب اسلامی هم که با پیام مسؤولان دولت انقلابی و امام مدرسه‌ها دوباره بازگشایی شدند، نوبت به تبلیغات گروه‌ها و گروهک‌ها رسید. منافقین و فرصت‌طلب‌ها فعالیت‌های خود را شروع کردند و دبیرستان به میدان مبارزهٔ گروهک‌ها با یکدیگر و جرو بحث‌های داغ و گاهی خونین تبدیل شد. همان‌کسانی که تا دیروز اعلامیه‌های امام را تکثیر و ردوبدل می‌کردند و پشت‌سر فرامرز از کلاس بیرون می‌آمدند، حالا روبه‌روی امام و رهنمودهای ایشان قدعلم کرده بودند و سنگ خودشان را به سینه می‌زدند. همان معلمی که تا قبل از پیروزی انقلاب، با الهام از رهنمودهای امام **خمینی** برای بچه‌ها سخنرانی می‌کرد، امروز سر کلاس صحبت از ماده و مادیگرایی می‌کرد.

خلاصه عزیزان دانش‌آموز، غوغایی بود. فقط نگاه تیزبین امام و افکار مترقی و دستورهای به‌موقع ایشان بود که باعث شد، فتنه‌ها خاموش و دوباره جوّ علمی، آموزشی و پرورشی، در دبیرستان‌ها و همهٔ مراکز آموزشی کشور حاکم شود.

شما امروز به برکت خون‌های شهیدانی چون **فرامرز اختراعی**، با خیال راحت پشت میزهای درس نشسته‌اید. ان‌شاءالله قدر این کلاس‌ها، معلمان دلسوز و فضای علمی، آموزشی و پرورشی حاکم بر مدرسه‌ها را بدانید و پروردگار را شاکر باشید. با خوب درس خواندن به نیت خدمت به جامعهٔ اسلامی، هم پاسدار خون شهیدان انقلاب اسلامی باشید و هم مشت محکمی بر دهان دشمنان انقلاب و اسلام بکوبید که همواره در فکر تهاجم فرهنگی بوده و هستند و البته پیروزی به خواست خداوند، با ما بوده و خواهد بود.

14



از تاریخ بیاموزیم

تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری

پرویز شهریاری

در شماره قبل، از ریاضیات به‌عنوان ابزاری کاربردی یادشد و این که اولین کاربرد ریاضیات در حل مسائل روزمره مردم بود، در این مقاله از تکامل ریاضیات کاربردی و عنصر استدلال که باعث سنت ساختمان نظری ریاضیات شده است، صحبت می‌کنیم.

از زمانی که در یونان باستان، عنصر «استدلال» وارد ریاضیات شد، سنت ساختمان نظری ـ استدلالی دانش ریاضی به‌وجود آمد؛ سنتی که در تمام تاریخ بعدی ریاضیات دنبال شده است. البته از نظر تاریخی، عقب‌نشینی از «ایده‌آل‌های» ساختمان نظری دانش ریاضی هم دیده می‌شود. این برگشت از نظریه و جهت‌گیری کاربردی را می‌توان در ریاضیات سده‌های میانه (و به‌ویژه در ایران) دید که بیش از هزار سال دوام داشت و زمینه را برای دوران جدید ریاضیات نظری فراهم کرد. ولی بعد از شعله‌های درخشان نظری در ریاضیات باستان و دوران هلنیم، دیگر ممکن نبود روش خاص کاربردی نخستین، دوباره زنده شود. دانش ریاضی سده‌های میانه، برایندی از سنت نظری و سمت‌گیری کاربردی است. نتیجهٔ این «سنتز» مرحلهٔ بعدی ریاضیات کاربردی است که نسبت به ریاضیات مصر و میان‌دورود، در سطح بالاتری قرار دارد.

این تصور که زمانی گمان می‌کردند، «وزن مخصوص» ریاضیات نظری در طول تاریخ، به‌طور دائم رو به افزایش بوده است، مدت‌هاست که دیگر وجود ندارد. این تصور به این دلیل پیدا شده بود که به ریاضیات ایرانی کم بها می‌دادند. «... ریاضیات عربی به‌هیچ‌وجه به‌معنای ریاضیات عرب‌ها نیست، همان‌طور که نوشته‌های لاتینی فرمای فرانسوی، **توریچلی** ایتالیایی، نیوتُن انگلیسی، **لایب‌نیتس** آلمانی و اولر که در آکادمی روسیه کار می‌کرد را نمی‌توان دانش لاتینی نامید. درواقع، اصطلاح نادرست ریاضیات عربی، به‌معنای موقعیت‌های دانشمندان ملت‌های گوناگون است... که چه در زمینهٔ ریاضیات و چه در دانش‌های دیگر، در طول بیش از پانصد سال از سدهٔ نهم تا سدهٔ پانزدهم میلادی، پیشتاز بوده‌اند. آن‌ها بیش‌تر از آسیای میانه و نزدیک و به‌ویژه از ایران (قفقاز، خوارزم، خراسان و...) برخاسته‌اند. به‌اصطلاح، ریاضیات عربی را باید بیش‌تر متعلق به ملت‌های آسیای میانه و خراسان بزرگ دانست.»[1]

حقیقت نشان می‌دهد که برخلاف تصور قبلی عده‌ای از تاریخ‌نویسان، ریاضیات «عربی» تنها «حلقهٔ ارتباطی» نبوده که ریاضیات نظری یونانی را حفظ کرده است و بدون این‌که چیزی به آن اضافه کند، این ارثیه را به اروپاییان تحویل دهد. روشن شده است که ریاضیات اروپای سده‌های میانه، از نظر ساختاری شبیه ریاضیات کشورهای شرق بوده و مجموعهٔ آن‌ها، خیلی نیرومندتر از ریاضیات

یونانی به سمت ریاضیات کاربردی گرایش داشته است. به‌طور کلی می‌توان دربارهٔ مرحلهٔ تازه‌ای از تکامل ریاضیات صحبت کرد. در این دوران می‌توان مسأله‌ها، موضوع‌ها و دانش‌هایی از ریاضیات را دید که آن را از دوران قبل از خود مشخص می‌کند.

باید گفت که در بسیاری از نوشته‌های فلسفی مربوط به ریاضیات، به آن دورهٔ تکامل ریاضیات که بسیار اساسی است و بی‌اندازه اهمیت دارد، به‌اندازهٔ کافی بها داده نشده و نیرو و پتانسیل روش‌شناختی که خاص ریاضیات سده‌های میانه است، بازتاب مناسب خود را پیدا نکرده است. درضمن، مؤلفان به نقش عمدهٔ روش‌شناسی ریاضیات تکیه می‌کنند که در نوشتهٔ آندره **کولمر گمروف**، با عنوان «ریاضیات» (۱۹۵۴) دربارهٔ آن صحبت شده است. بنابر آن، ریاضیات نظری یونان‌باستان و کشورهای هلنیستی (که آراسته به ساختمان اصل موضوعی بود) در ریاضیات سده‌های میانه (تا سال ۳۰ سدهٔ هفدهم)، به دورهٔ ریاضیات مقدماتی مربوط می‌شوند. در ریاضیات مقدماتی، ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی که دانش ریاضی را به سمت منظم‌شدن هدایت می‌کند، در هم ادغام شده‌اند و به‌عنوان حالتی واحد و یگانه مورد تفسیر قرار می‌گیرند که در آن جنبهٔ نظری ریاضیات برتری دارد. به‌دنبال دورهٔ ریاضیات مقدماتی، دورهٔ ریاضیات با کمیت‌های متغیر می‌آید (تا میانهٔ سدهٔ نوزدهم) که دیگر به‌روشنی خصلت نظری دارد.

داده‌های تازه ما را وامی‌دارد به جریان تکامل ریاضیات، به گونهٔ دیگری بنگریم. به‌ویژه کارهای **ارشمیدس و آپولونیوس**، به‌روشنی از مرزهای ریاضیات مقدماتی فراتر رفته‌اند. درحالی‌که ریاضیات سده‌های میانه، بیش‌تر با ریاضیات کاربردی دوران قبل از یونان خویشاوند است. ولی در کتاب‌هایی که دربارهٔ فلسفه و روش‌شناسی ریاضیات نوشته شده‌اند، حقیقت‌های تازه مورد ارزیابی درست قرار نگرفته‌اند و بازتاب کافی نیافته‌اند. **اُ. ای. کدرُوسکی** در مقدمهٔ کتاب خود به نام «مسأله‌های روش‌شناختی تکامل ریاضیات» (۱۹۷۷)، یادآوری می‌کند که دوره‌های تاریخی تکامل ریاضیات را، براساس تقسیم‌بندی **کولموگوروف** در نظر گرفته است. کم‌بهادادن به اندیشهٔ متفکران ریاضی سده‌های میانه در «مقاله‌هایی دربارهٔ تاریخ ریاضیات»، اثر **نیکل بورباکی** هم منعکس شده است. در این «مقاله‌ها»، به ۲۹ دانشمند یونانی استناد شده است و از یادگارهای سده‌های میانه، تنها از ۱۲ نوشته نام آورده شده است که درضمن، هیچ‌کدام از آن‌ها «عربی» نیستند.

گرایش‌های امروزی در تکامل ریاضیات را تنها وقتی می‌توان فهمید که از تقسیم نادرست تکامل ریاضیات صرف‌نظر کنیم؛ تقسیمی که تنها جنبه‌هایی از آن را، با نفی دیگری در نظر می‌گیرد و دورنمایی دگرگون‌شده‌ای از دانش ریاضی به ما می‌دهد و چنین می‌نمایاند که پیشرفت ریاضیات روی خط پیوسته‌ای از یونان‌باستان تا زمان حاضر حرکت کرده است. توجه اغراق‌آمیز به مسیر نظری ریاضیات و کم‌توجهی به ریاضیات کاربردی، به تحریف تصور ما از دانش ریاضی منجر می‌شود و در تقسیم‌بندی مسائل فلسفی ـ روش‌شناختی، تکیه‌گاهی نادرست پدید می‌آورد. با آغاز از یونان‌باستان، ریاضیات تنها به‌عنوان یک دانش نظری در نظر گرفته می‌شود و متناظر با آن، بررسی‌های فلسفی ـ روش‌شناختی، بر مسائل مربوط به روش قیاسی، ساختمان‌های ترکیبی و پایه‌های اصل موضوعی دانش ریاضی، منجر می‌شود.

نقطهٔ اوج در کتاب‌های مربوط به مسأله‌های فلسفی ریاضیات، به‌طور معمول در بررسی موقعیت‌های شکل‌گیری نظری ریاضیات است: روش اصل موضوعی و تکامل آن، و از آن جمله پارادکس‌های ساختمان نظری ریاضیات بر پایهٔ مجموعه‌ها و عکس‌العمل فلسفی ـ روش‌شناختی در برابر این پارادکس‌ها، و بر این اساس، درواقع، نقش خاص عمل در تکامل ریاضیات، به فراموشی سپرده می‌شود. این موقعیت در بیان نامهٔ **بورباکی**، دربارهٔ شکل گرفتن دانش ریاضیات نظری بازتاب

یافته است: «این که بین پدیده‌های تجربی و ساختارهای ریاضی، بستگی نزدیکی وجود دارد و این که به صورتی نامنتظر، با کشف‌های فیزیک معاصر تأیید می‌شود، برای ما دلیل‌های واقعی این علت‌ها معلوم نیست و به احتمالی، هرگز هم معلوم نخواهد شد.»[2] و تا زمانی که علت‌های پنهانی را که در ریاضیات کاربردی وجود دارد و موجب نیروی تاریخی ساختارهای نظری دورهٔ بعد شده است، از نظر دور داشته باشیم، نمی‌توانیم این «تردید» را از خود دور کنیم.

ارزیابی مسأله‌های اصلی فلسفی و روش شناختی دانش ریاضی در سده‌های میانه را، به جای سمت گیری در جهت کارهای نظری این زمان، باید در جای دیگری به دست آورد که عبارت است از واکنش نسبت به تکامل و تصحیح میانهٔ ریاضیات این دوران ـ مسأله‌ای که در برابر ریاضیات امروزی هم قرار دارد. تأثیر فعالیت‌های عملی بر جهت گیری تکامل ریاضیات، به صورت‌های متفاوتی در دوره‌های گوناگون وجود آن، نمایان می‌شود.

سنتز سنت‌های نظری و سمت گیری کاربردی را در ریاضیات سده‌های میانه، می‌توان در دو زمینه بررسی کرد. اگر از جنبهٔ خاص به این موضوع بنگریم، به‌هم‌آمیختگی سنت نظری و جهت گیری کاربردی، به کمک تنظیم آگاهی‌های ریاضی با روش محاسبه‌ای و الگوریتمی تحقق می‌یابد. هستهٔ مرکزی این شکل گیری تازهٔ دانش و ریاضی، **الگوریتم محاسبه‌ای** است که نسبت نظری (نسبت تنظیم آگاهی‌ها به کمک استدلال) را تثبیت می‌کند و در عین حال، عمل‌های لازم را برای جهت گیری کاربردی ریاضیات، به بهترین صورت خود درمی‌آورد. بر اساس تصور یگانه‌ای که دربارهٔ ریاضیات به عنوان یک دانش کاربردی وجود دارد، آگاهی‌های ریاضی پیش می‌رود و تکامل می‌یابد. و این دلیل عینی کلیت روش شناختی است؛ کلیتی که با آن دورهٔ فعالیت آن گروه اجتماعی که ریاضیات را حفظ و از آن استفاده می‌کند، تحکیم می‌شود. در کارهای روش شناختی دربارهٔ موضوع روش‌های ریاضیات، در اساس خود، نتیجه‌ای است از



فعالیت‌های گروه‌های اجتماعی که در روند به وجود آوردن آگاهی‌ها دخالت دارند. سنتز سنت نظری «استدلال» و سمت گیری کاربردی دانش ریاضی، به صورت بازتابی از «طبقهٔ اجتماعی» درمی‌آید. برعکس، آن برخورد روش شناختی دربارهٔ ریاضیات، برخوردی که فعالیت گروه اجتماعی را به حساب می‌آورد و امکان یکی شدن اثبات و محاسبه را فراهم می‌آورد، به نوبهٔ خود بر ساز و کار تکامل دانش، تأثیر می‌گذارد و حلقه‌های متفاوت آن را بیش‌تر و محکم‌تر به هم نزدیک می‌کند. درنتیجه ریاضیات سده‌های میانه، همچون مجموعهٔ کاملی که سمت گیری کاربردی دارد، مصرف می‌شود. دانشی که به صورت خاصی تنظیم شده است، از نظر روش شناختی، به صورت واحد کاملی درک می‌شود و تصور همگون و یکپارچه‌ای دربارهٔ موضوع ریاضیات به ما می‌دهد.

زیرنویس

۱. آ. پ. یوسکدویچ، در کتاب «دربارهٔ ریاضیات ملت‌های آسیای میانه، در سده‌های نهم تا پانزدهم».

۲. بورباکی. «مقاله‌هایی دربارهٔ تاریخ ریاضیات».



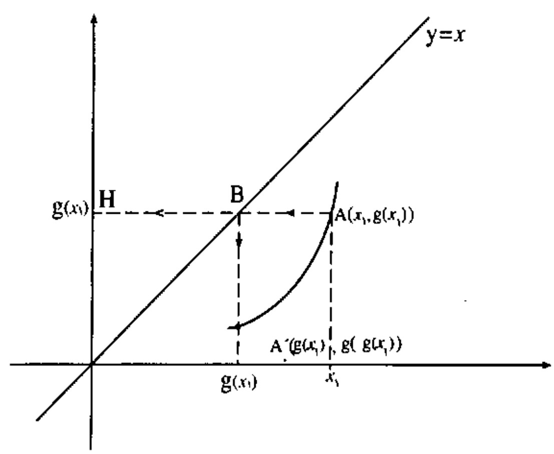
رسم نمودار fog از روی نمودارهای f و g

برای دانش‌آموزان سال سوم رشتهٔ ریاضی

احمد قندهاری

در این مقاله می‌خواهیم از روی نمودارهای f و g، نمودار $f(g(x))$ و از روی نمودار f، نمودار $f(f(x))$ را رسم کنیم.

۱. نمودار تابع g در شکل زیر مفروض است. می‌خواهیم نقطه‌ای روی نمودار g بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد؛ $x_1 \in Dg$.



برای این کار خط y=x را نیز در شکل رسم کرده‌ایم.

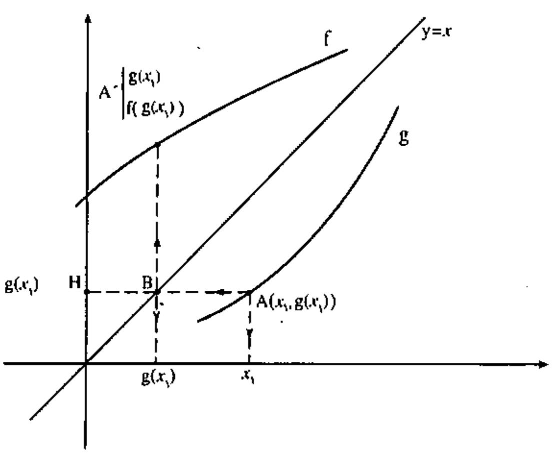
نقطه‌ای به طول x_1 روی محور xها انتخاب می‌کنیم و آن را به کمک رابط تا نمودار g امتداد می‌دهیم. نقطهٔ A به مختصات $(x_1, g(x_1))$ است.

اگر از نقطهٔ A رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا خط y=x را در نقطهٔ B و محور yها را در نقطهٔ H قطع کند، خواهیم داشت: $x_B = y_B = g(x_1)$ و $y_H = g(x_1)$.

از نقطهٔ B رابطی بر محور xها عمود می‌کنیم تا نمودار g را در نقطهٔ A′ قطع کند. نقطه A′ روی نمودار g است و طول آن $g(x_1)$ است. پس $A'(g(x_1), g(g(x_1)))$ است.

۲. نمودارهای دو تابع g و f در شکل رسم شده‌اند. می‌خواهیم نقطه‌ای روی نمودار f بیابیم که طول آن $g(x_1)$ باشد؛ $x_1 \in Dg$.

در این جا هم از خط y=x کمک می‌گیریم.



فرض می‌کنیم $A(x_1, g(x_1))$ روی نمودار g باشد.

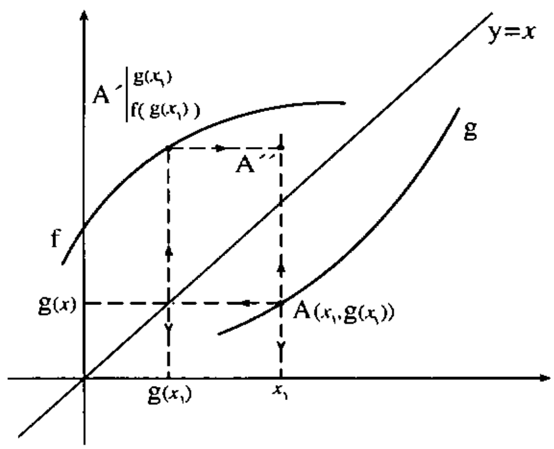
از A رابطی عمود بر محور yها رسم می‌کنیم تا خط y=x را در B و محور yها را در H قطع کند، خواهیم داشت: $x_B = y_B = g(x_1)$ و $y_H = g(x_1)$.

از نقطهٔ B رابطی عمود بر محور xها رسم می‌کنیم تا محور xها را در نقطه‌ای به طول $g(x_1)$ قطع کند و نمودار f

را در نقطهٔ A' قطع کند، پس $x_{A'} = g(x_1)$.
درنتیجه $A'(g(x_1), f(g(x_1)))$ است.

۳. می‌خواهیم نقطهٔ A'' را در صفحهٔ محورهای مختصاتی که نمودارهای دو تابع f و g رسم شده‌اند، طوری بیابیم که $A''(x_1, f(g(x_1)))$ باشد.

مانند دو قسمت قبل خط y=x را رسم می‌کنیم.

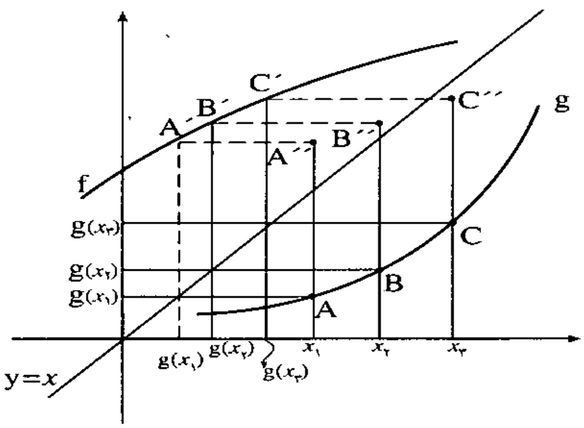


نقطهٔ $A(x_1,g(x_1))$ را روی نمودار g در نظر می‌گیریم. با توجه به توضیحات مورد ۲ به نقطهٔ $A'\left|\begin{matrix}g(x_1)\\f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ می‌رسیم.

حال اگر از نقطه A' روی نمودار f خطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط رسم شده از نقطهٔ A (موازی محور yها) را درنقطه A'' قطع کند، آن‌گاه $A''\left|\begin{matrix}x_1\\f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ خواهد شد. بنابراین A'' یک نقطه از تابع f(g(x)) است. با تکرار این عمل، نقاط متعدد A'' که روی تابع fog قرار دارند، مشخص می‌شوند.

در شکل زیر سه نقطه از تابع fog را با درست داشتن نمودارهای دو تابع f و g به‌دست می‌آوریم؛ $x_1, x_2, x_3 \in Dg$.

نقاط A'' ، B'' و C'' ، سه نقطه از تابع fog هستند.



$A''\left|\begin{matrix}x_1\\f(g(x_1))\end{matrix}\right.$ $B''\left|\begin{matrix}x_2\\f(g(x_2))\end{matrix}\right.$ $C''\left|\begin{matrix}x_3\\f(g(x_3))\end{matrix}\right.$

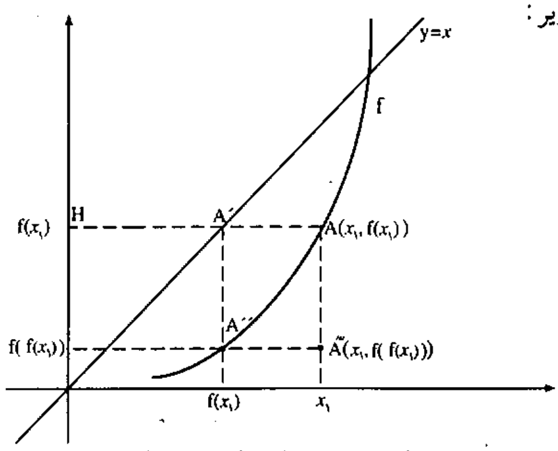
۴. می‌خواهیم از روی نمودار تابع f، نمودار تابع fof را رسم کنیم.

فرض می‌کنیم در صفحهٔ محورهای مختصات نمودار تابع f رسم شده است. خط y=x را هم در شکل رسم می‌کنیم. نقطه‌ای به طول x_1 روی نمودار تابع f در نظر می‌گیریم. مانند $A(x_1, f(x_1))$ ، از نقطهٔ A رابطی موازی

محور xها بر محور yها عمود می‌کنیم. این رابط، خط y=x را در نقطهٔ $A'(f(x_1),f(x_1))$ و محور yها را در H قطع می‌کند که $y_H=f(x_1)$.

از نقطهٔ A' به محور xها عمود می‌کنیم. طول پای عمود $f(x_1)$ است. این رابط نمودار تابع f را در نقطهٔ A'' قطع می‌کند که $A''(f(x_1),f(f(x_1)))$ است.

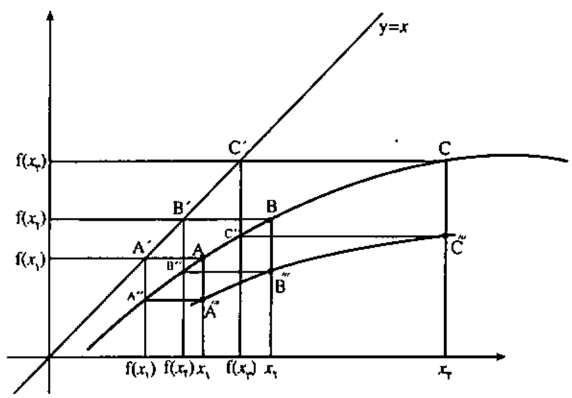
چنانچه از A'' رابطی موازی محور xها رسم کنیم تا رابط عمود بر محور xها به طول x_1 را در نقطهٔ A''' قطع کند، آن‌گاه $A'''(x_1,f(f(x_1)))$ خواهد شد؛ مانند شکل زیر:



$A(x_1,f(x_1))A'(f(x_1),f(x_1))$

$A''(f(x_1),f(f(x_1)))A'''(x_1,f(f(x_1)))$

برای تمرین، در شکل زیر ۳ نقطهٔ A'''، B''' و C''' را از تابع fof مشخص می‌کنیم.



$A'''(x_1,f(f(x_1)))$

$B'''(x_2,f(f(x_2)))$

$C'''(x_3,f(f(x_3)))$

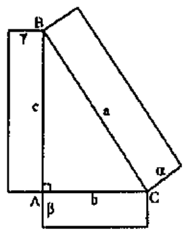
تعمیم قضیهٔ فیثاغورس

مجتبی فرهادی

دبیر ریاضی منطقه بوئین میاندشت استان اصفهان

طبق قضیهٔ فیثاغورس، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مساحت مربعی که روی وتر ساخته می‌شود، برابر است با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی اضلاع زاویهٔ قائمه ساخته می‌شود.

تعمیم اول: اگر روی اضلاع هر مثلث قائم‌الزاویه، سه شکل متشابه رسم کنیم، مساحت شکلی که روی وتر است، با مجموع مساحت‌های دو شکل دیگر برابر است.



برای مثال، روی اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ $A\hat{B}C$، سه مستطیل متشابه رسم می‌کنیم. چون مستطیل‌ها متشابهند، لذا نسبت طول به عرض، در هر مستطیل مقداری ثابت است که آن را k می‌نامیم. به عبارت دیگر:

$$\frac{a}{\alpha}=\frac{b}{\beta}=\frac{c}{\gamma}=k \Rightarrow \alpha=\frac{a}{k},\ \beta=\frac{b}{k},\ \gamma=\frac{c}{k}$$

= مساحت مستطیل روی ضلع AC + مساحت مستطیل روی ضلع AB

$$c\gamma+b\beta=c\left(\frac{c}{k}\right)+b\left(\frac{b}{k}\right)=\frac{c^2}{k}+\frac{b^2}{k}$$

$$=\frac{c^2+b^2}{k}=\frac{a^2}{k}=a\left(\frac{a}{k}\right)=a\alpha=$$ مساحت مستطیل روی وتر BC

ـ تعمیم فوق را برای شکل‌هایی همچون: دایره، لوزی، مثلث و... تحقیق کنید.

اعداد فیبوناچی[1]

Fibonacci Numbers
Nicolai N. Vorobiev

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

۱ . تاریخ اولیهٔ ریاضیات پر از شرح حال ریاضی‌دان‌های برجسته است . بسیاری از دستاوردهای ریاضیات باستان از دقت ذهن مؤلفان آن‌ها به‌دست آمده‌اند و امروزه نام‌های **اقلیدس**، **ارشمیدس** و **هرون**، برای هر فرد تحصیلکرده‌ای آشنایند .

اما زمانی که ریاضیات دورهٔ قرون وسطا را در نظر بگیرید ، این موضوع کاملاً تفاوت می‌کند . به استثنای **ویت**[2] که در قرن شانزدهم می‌زیست و غیر از ریاضیدان‌های بسیار نزدیک‌تر به دوران ما ، دوره‌های مکتب جاری ریاضیات شامل هیچ گونه نام مرتبط با قرون وسطا نیستند . در این عصر ریاضیات ، به آهستگی بسیار گسترش می‌یافت و تعداد بسیار اندکی ریاضیدان برجسته وجود داشت .

در این صورت ، باید بیش‌تر توجه خود را به اثر «Liber abaci» (کتابی دربارهٔ چرتکه) از ریاضیدان برجستهٔ ایتالیایی ، **لئوناردوی پیزایی**[3] معطوف کنیم که بیش‌تر به نام کنیه‌اش ، فیبوناتچی مشهور است که مختصرشدهٔ «پسر بوناتچی»[4] است .

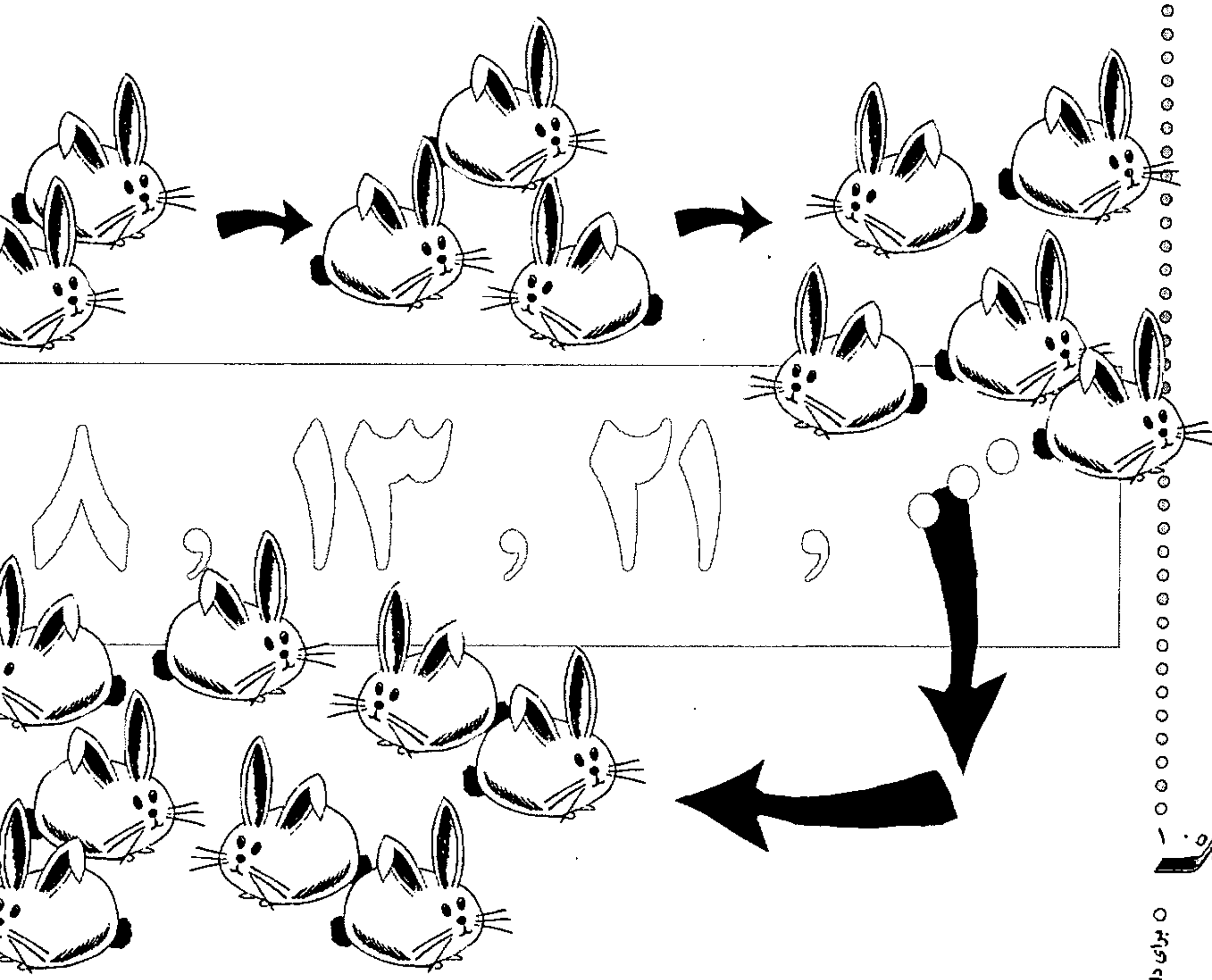
این کتاب معروف در سال ۱۲۰۲ منتشر شد و ویراستهٔ دوم آن به دست ما رسیده است ؛ ویراسته‌ای که متعلق به سال ۱۲۲۸ است . Liber abaci ، تألیف حجیمی است که تقریباً شامل جمیع معلومات حسابی و جبری آن دوره است و در توسعهٔ ریاضیات در اروپای غربی و در طول قرن‌های بعدی نقشی عظیم داشته است . به‌خصوص ، از طریق این کتاب است که اروپایی‌ها با «عددهای هندی ـ عربی»[5] آشنا شدند .

موضوعات گردآمده در کتاب توسط مسائل زیادی توضیح داده شده‌اند که قسمت اعظم این رساله را تشکیل می‌دهند . در این جا کارمان را به ارائهٔ یکی از مسأله‌های فیبوناتچی ، معروف به «مسألهٔ خرگوش»[6] محدود می‌کنیم . این مسأله را می‌توان در صفحه‌های ۱۲۳ و ۱۲۴ دست‌نوشتهٔ سال ۱۲۲۸م یافت .

«در طول یک سال ، از یک جفت خرگوش ، چند جفت خرگوش می‌توان پرورش داد؟»

شخصی یک جفت خرگوش را در محلی کاملاً محصور با دیوار ، قرار می‌دهد تا دریابد که در طول یک سال ، چند جفت خرگوش از این جفت حاصل می‌شود . طبیعت این خرگوش‌ها چنان است که در هر ماه یک جفت خرگوش ، جفتی دیگر به‌وجود می‌آورد و زایش خرگوش‌ها در ماه دوم بعد از تولدشان آغاز می‌شود .

از آن‌جا که جفت اول در ماه اول تولیدمثل می‌کنند ، دوبرابر می‌شوند و در یک‌ماه دو جفت خرگوش خواهیم‌داشت . از این جفت‌ها ، یکی (اولی) در ماه بعدی جفتی دیگر به‌وجود می‌آورد . به‌این‌ترتیب ، در ماه دوم ۳ جفت خرگوش حاصل می‌شود . از این سه‌جفت در یک ماه دو جفت آبستن می‌شوند . در این صورت در ماه سوم ، دو جفت دیگر تولد خواهند یافت و تعداد جفت‌ها به پنج می‌رسد . از این پنج جفت در یک ماه ، سه مورد بچه‌دار می‌شوند . بنابراین در ماه چهارم ۸ جفت خرگوش موجود

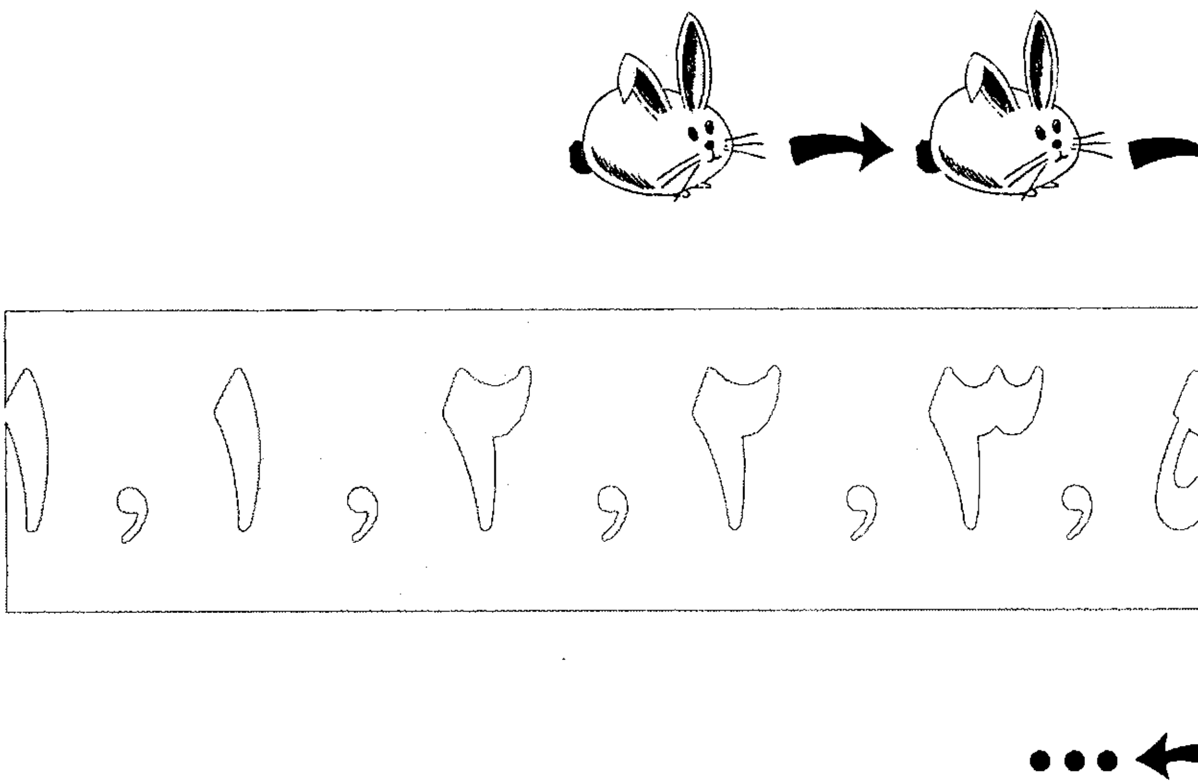


خواهند بود. از این هشت جفت، پنج مورد پنج جفت خرگوش دیگر تولید می‌کنند، که چون به هشت جفت قبلی افزوده شوند، در ماه پنجم ۱۳ جفت خرگوش خواهیم داشت.

از ۱۳ جفت مزبور، پنج مورد که در پنجمین ماه متولد شده‌اند، در این ماه آبستن نمی‌شوند، اما هشت جفت دیگر آبستن می‌شوند. به این ترتیب در ماه ششم، ۲۱ جفت خواهیم داشت. با افزودن این‌ها به ۱۳ جفتی که در ماه بعد تولد می‌یابند، ۳۴ جفت خرگوش در ماه هفتم به دست خواهیم آورد و با افزودن آن‌ها به ۲۱ جفت حاصل در ماه بعد، ۵۵ جفت در ماه هشتم خواهیم داشت.

افزودن آن‌ها به ۳۴ جفت حاصل در ماه بعد، ۸۹ جفت در ماه نهم به دست می‌دهد و افزودن این عدد به ۵۵ جفت تولد یافته در ماه بعد، ۱۴۴ جفت در ماه دهم حاصل می‌کند. آن‌گاه اضافه کردن این‌ها به ۸۹ مورد متولد شده در ماه بعد، ۲۳۳ مورد در ماه یازدهم به وجود می‌آورد. سرانجام، چون ۱۴۴ جفت متولد شده در ماه بعد را به این تعداد بیفزاییم، در ماه دوازدهم ۳۷۷ جفت خواهیم داشت. این عدد تعداد جفت‌های حاصل از جفت اول در محل مفروض در آخر یک سال است (البته با احتساب جفت اول).

در جدول صفحه ۱۱ می‌توان چگونگی انجام این محاسبات را ملاحظه کرد. با افزودن عدد اول به دوم، یعنی ۱ به ۲، دوم به سوم، سوم به چهارم، چهارم به پنجم و به همین ترتیب یکی بعد از دیگری، تا زمانی که عدد دهم به یازدهم اضافه شود، یعنی ۱۴۴ به ۲۳۳، تعداد کل جفت‌های خرگوش‌ها، یعنی ۳۷۷ به دست می‌آید. به این طریق می‌توان این کار را درباره ماه‌هایی با تعداد نامعین نیز انجام داد. (جدول صفحه بعد).



ماه	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم	یازدهم	دوازدهم
تعداد جفت‌ها	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳۴	۵۵	۸۹	۱۴۴	۲۳۳	۳۷۷

۲. اکنون خرگوش‌ها را رها می‌کنیم و به سراغ اعداد می‌رویم و دنبالهٔ عددی:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \qquad (1)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در آن، هر جمله برابر مجموع دو جملهٔ قبل از آن است. یعنی به‌ازای هر $n > 2$:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \qquad (2)$$

در ریاضیات، اغلب با دنباله‌هایی چنین که در آن‌ها هر جمله به‌صورت تابعی از جمله‌های پیشین تعریف شده است، مواجه می‌شویم؛ دنباله‌هایی که به «دنباله‌های برگشتی»[7] موسومند.

فرایند محاسبهٔ جمله‌های متوالی یک دنبالهٔ برگشتی، به «فرایند برگشتی»[8] موسوم است، و معادلهٔ ویژه‌ای که فرایند برگشتی را توصیف می‌کند، «رابطهٔ برگشتی»[9] نام دارد.[10]

اولین نکته‌ای که مایل به بیان آن هستیم، این است که رابطهٔ (۲)، به‌خودی‌خود نمی‌تواند جمله‌های دنبالهٔ (۱) را محاسبه کند؛ چرا که می‌توان بی‌نهایت دنبالهٔ عددی متفاوت و صادق در این شرط ساخت؛ مثل:

۲,۵,۷,۱۲,۱۹,۳۱,۵۰,...,
۱,۳,۴,۷,۱۱,۱۸,۲۹,...,
-۱,-۵,-۶,-۱۱,-۱۷,...,

و غیره.

بنابراین، هرگاه یکتایی دنبالهٔ (۱) مطلوب باشد، شرط (۲) به‌طور واضح ناکافی است و باید شرط‌های اضافی دیگری را مطرح کنیم. به‌عنوان مثال، می‌توان چند جملهٔ اول دنباله را به‌دست داد. درواقع باید چند جملهٔ اولیهٔ دنبالهٔ (۱) را به‌دست داد تا محاسبهٔ جمیع جمله‌های بعدی دنباله، تنها با به‌کار بردن شرط (۲) ممکن شود.

در پاسخ به این سؤال، ملاحظه می‌کنیم که هیچ جمله‌ای

از دنبالهٔ (۱) را نمی‌توان از رابطهٔ (۲) به‌دست آورد، مگر این‌که همهٔ جمله‌های (۱)، دو جملهٔ قبلی داشته باشند. به‌عنوان مثال، اولین جملهٔ دنبالهٔ مورد بحث، اصلاً دارای جمله‌های پیشین نیست و جملهٔ دوم تنها بعد از یک جمله قرار دارد.

نتیجه می‌گیریم که برای محاسبهٔ دنباله باید علاوه بر شرط(۲)، دو جملهٔ اولیهٔ آن را نیز بدانیم. دانستن این موضوع کفایت می‌کند تا همهٔ جمله‌های دیگر دنبالهٔ (۱) را به‌دست آوریم.

درواقع، u_3 را می‌توان به‌عنوان مجموع دو جملهٔ قبلاً مشخص‌شدهٔ u_1 و u_2 محاسبه کرد. سپس u_4 برابر مجموع u_2 و u_3 است که قبلاً محاسبه کرده‌ایم. u_5 نیز مجموع دو جملهٔ قبلاً حساب‌شدهٔ u_3 و u_4 است، و به‌همین‌ترتیب، «در حالت تعدادی نامشخص از جمله‌ها» است.

به این طریق، صرفاً با گذر از دو جملهٔ متوالی به جملهٔ بلافاصله بعدی آن‌ها، می‌توانیم به هر جمله با اندیس قبلاً مشخص‌شده برسیم و آن را محاسبه کنیم.

۳. اکنون توجه خود را به حالت خاص و مهم دنبالهٔ (۱) با شرط (۲) معطوف می‌کنیم که در آن داریم:

$u_1 = 1,\ \ u_2 = 1$

همان‌گونه که در بالا اشاره کردیم، شرط (۲) این امکان را می‌دهد که به‌طور متوالی جمیع جمله‌های دیگر این دنباله را محاسبه کنیم. به‌سادگی محقق می‌شود که در این حالت، چهارده جملهٔ اولیهٔ دنباله عبارتند از اعداد:

۱،۱،۲،۳،۵،۸،۱۳،۲۱،۳۴،۵۵،۸۹،۱۴۴،۲۳۳،۳۷۷

که پیش از این در مسألهٔ خرگوش به آن‌ها برخوردیم.

دنبالهٔ (۱) هنگامی که:

$u_1 = u_2 = 1$

و رابطهٔ برگشتی توسط معادلهٔ (۲) داده شده باشد، به افتخار طراح این مسأله، به «دنبالهٔ فیبوناتچی»[11] موسوم است و جمله‌های آن «عددهای فیبوناتچی»[12] نامیده می‌شوند.

عددهای فیبوناتچی از ویژگی‌های جالب و مهم بسیاری برخوردارند که این مقاله به تحقیق و بررسی آن‌ها می‌پردازد.

ساده‌ترین ویژگی‌های عددهای فیبوناتچی

۱. این فصل را با محاسبهٔ مجموع n عدد اولیهٔ فیبوناتچی آغاز می‌کنیم. به‌ویژه قصد داریم ثابت کنیم که:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - 1 \qquad (1-1)$$

درواقع داریم:

$$u_1 = u_3 - u_2$$
$$u_2 = u_4 - u_3$$
$$u_3 = u_5 - u_4$$
$$\dots$$
$$u_{n-1} = u_{n+1} - u_n$$
$$u_n = u_{n+2} - u_{n+1}$$

با جمع جمله به جملهٔ همهٔ این معادله‌ها داریم:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_{n+2} - u_2$$

کار باقی‌مانده به خاطر آوردن این نکتهٔ مهم است که:

$$u_2 = 1$$

۲. سپس نشان می‌دهیم که مجموع n عدد اولیهٔ فیبوناتچی با اندیس‌های فرد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{2n-1} = u_{2n} \qquad (2-1)$$

برای اثبات این فرمول، توجه می‌کنیم که:

$$u_1 = u_2$$
$$u_3 = u_4 - u_2$$
$$u_5 = u_6 - u_4$$
$$\dots$$
$$u_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n-2}$$

نتیجهٔ مطلوب با جمع جمله به جملهٔ همهٔ این معادله‌ها به‌دست می‌آید.

۳. مجموع n جملهٔ اولیهٔ عددهای فیبوناتچی با اندیس‌های زوج، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1 \qquad (3-1)$$

اثبات این رابطه چنین است: بنا به (۱ـ۱) می‌دانیم که:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1$$

از تفریق (۱ـ۲) از این معادله، نتیجهٔ

$$u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+2} - 1 - u_{2n} = u_{2n+1} - 1$$

را حاصل می‌کنیم.

گذشته از این، (۱ـ۳) را جمله به جمله از (۱ـ۲) تفریق می‌کنیم. درنتیجه به‌دست می‌آوریم:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} = -u_{2n-1} + 1 \quad (۴ـ۱)$$

اکنون با جمع

$$u_{2n+1} = u_{2n} + u_{2n-1}$$

با هر دو طرف (۱-۴)، به‌دست می‌آوریم:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots - u_{2n} + u_{2n+1} = u_{2n} + 1 \quad (۵-۱)$$

با ترکیب (۱ـ۴) و (۱ـ۵) در فرمولی جداگانه، نتیجه می‌گیریم که مجموع تناوبی[13] n عدد اولیهٔ فیبوناتچی را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n = (-1)^{n+1} u_{n-1} + 1 \quad (۶-۱)$$

۴. فرمول‌های (۱ـ۱) و (۱ـ۲) با جمع جمله به جملهٔ یک مجموعهٔ کامل از معادله‌های واضح، استخراج شده‌اند. در این‌جا کاربرد دیگری از این شیوه را با استفاده از اثبات دیگر فرمولی برای مجموع مربع‌های n عدد اولیهٔ فیبوناتچی به‌دست می‌دهیم. یعنی:

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n u_{n+1} \quad (۷-۱)$$

برای رسیدن به این مقصود، ملاحظه می‌کنیم که:

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1} u_k = u_k (u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2$$

با جمع جمله به جملهٔ معادله‌های حاصل، یعنی:

$$u_1^2 = u_1 u_2$$

$$u_2^2 = u_2 u_3 - u_1 u_2$$

$$u_3^2 = u_3 u_4 - u_2 u_3$$

$$\ldots$$

$$u_n^2 = u_n u_{n+1} - u_{n-1} u_n$$

به (۱ـ۷) خواهیم رسید.

زیرنویس

1. fibonacci
2. Viéte
3. Leonardo of Pisa
4. filius Bonacci
5. Hindu-Arabic numerals
6. Rabbit Problem
7. recurrent sequences
8. recurrence process
9. recurrence relation

۱۰. خواننده می‌تواند تفصیلات بیش‌تر مربوط به نظریهٔ عمومی دنباله‌های برگشتی را در کتاب مارکوشویچ (A. I. Marku shevich) بیابد.

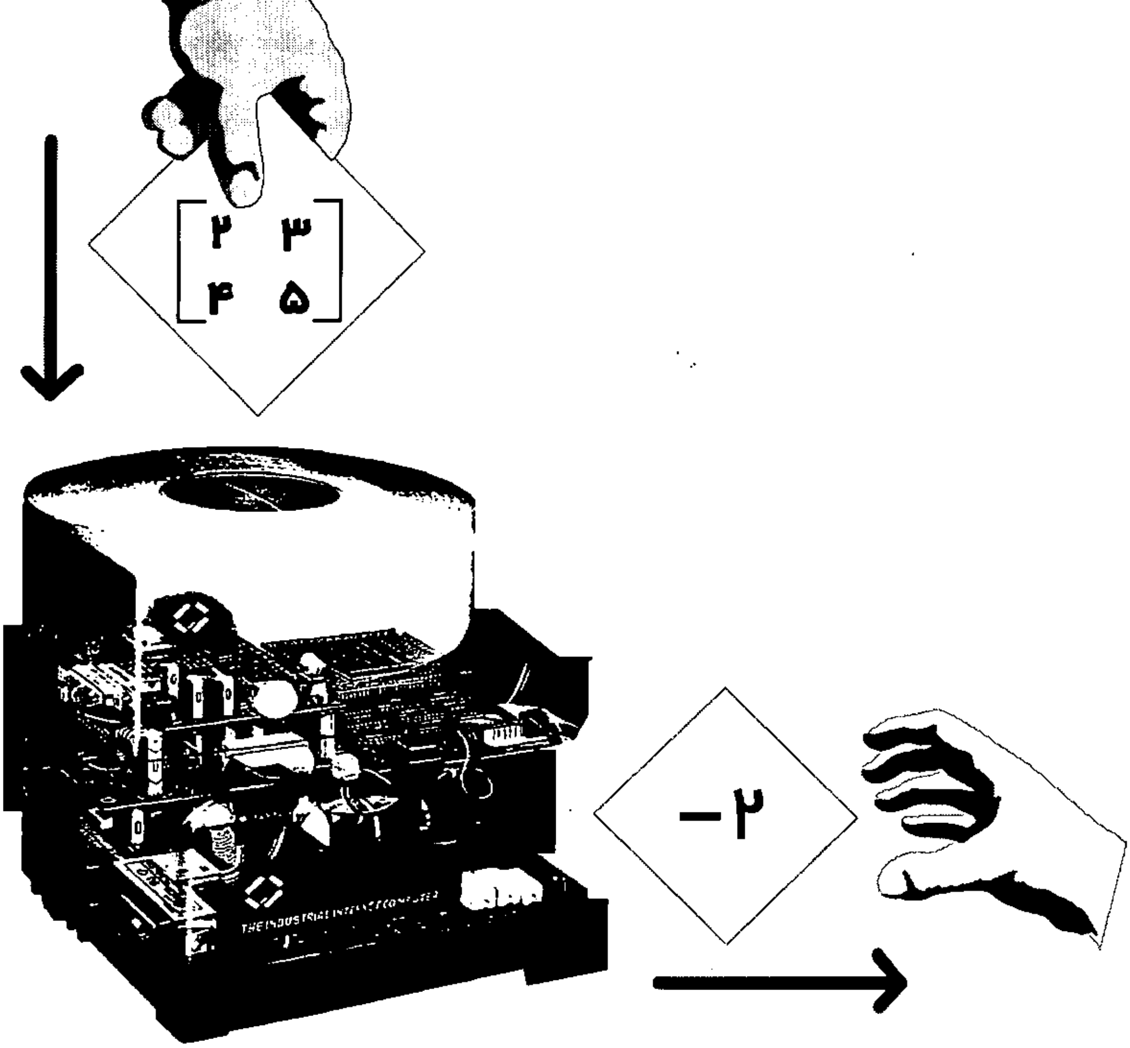
11. fibonacci sequence
12. fibonacci numbers
13. alternating sum

ادب ریاضی

یکی از هدف‌های عمدهٔ کتاب‌های کمک‌آموزشی، پرداختن به این مسألهٔ مهم است که ریاضیات به کجا می‌رود؟ برای دانش‌آموز و دانشجو مسألهٔ اول این است که ریاضیات چیست؟ به این مسأله معمولاً پاسخ‌هایی، گرچه ناقص، داده می‌شود و این پاسخ‌ها را می‌توان ضمن بیانات دبیر و استاد و طی مطالب کتاب درسی دریافت. اما معمولاً، به سؤال دوم یعنی: ریاضیات به کجا می‌رود؟ پاسخی در خور داده نمی‌شود و دانشجو و دانش‌آموز ریاضیات، باید پاسخ این پرسش را در کتاب‌های کمک‌آموزشی معتبر بیابد.

در تاریخ [illegible] کوشی چنین آمده است

گاووس بزرگ که همواره محزون و ترشروی بود، قسمتی از اکتشافات خود را از دیگران مخفی داشته بود و کوشی، کسی بود که توانست این اکتشافات را از نو به دست آورد و نظریهٔ ریاضی خیره کننده‌ای ارائه دهد، در آن دوران کودک چهارساله‌ای بیش نبود. پدر کوشی که در ادارهٔ پلیس رتبهٔ ستوانی داشت، مردی مقدس و جامع اطلاعات مذهبی و مادرش زنی به تمام معنی باتقوا بود و کوشی این صفت‌های فرشته‌گون را از پدر و مادر آموخت.



حمیدرضا امیری

دترمینان

قضایا، نتایج، نکته‌ها و مسأله‌ها

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

به هر ماتریس مربعی می‌توان عددی حقیقی نسبت داد که «دترمینان» آن ماتریس نام دارد. این عدد حقیقی در بسیاری موارد اطلاعات مفیدی دربارهٔ خود ماتریس و خواص آن در اختیار ما قرار می‌دهد. به عنوان مثال، وارون‌پذیری یک ماتریس با محاسبهٔ دترمینان آن ماتریس مشخص می‌شود و یا در بحث ماتریس‌های تبدیل در صفحه که 2×2 هستند، می‌توان مساحت شکل تبدیل‌یافته را با استفاده از دترمینان ماتریس تبدیل محاسبه کرد. همچنین در حل دستگاه‌ها و وجود یا عدم وجود جواب آن‌ها. حتی در مباحث غیر از ماتریس مانند هندسهٔ تحلیلی، در محاسبهٔ مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار و حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار، حتی تشکیل معادلهٔ صفحه و ضرب خارجی دو بردار، و... می‌توان از

دترمینان استفاده کرد.

برای تعریف دترمینان یک ماتریس، می‌توان تابعی به نام دترمینان از مجموعهٔ ماتریس‌های $n\times n$ به اعداد حقیقی به‌صورت $\det: M_{n\times n}\to R$ تعریف کرد که ضابطهٔ این تابع روی ماتریس‌های 1×1 و 2×2 و $n\times n$ $(n\geq 3)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{I)}\quad A=[s]\Rightarrow \det(A)=|A|=s$$

$$\text{II)}\quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow \det(A)=|A|=ad-bc$$

تذکر: برای تعریف $|A|$ برای ماتریس‌های 3×3 و به طور کلی $n\times n$ که $n\geq 3$ است، به تعریف دو نماد و اصطلاح نیاز داریم: یکی «کِهاد» و دیگری «همسازه».

تعریف کهاد

اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد، M_{ij} را ماتریس حاصل از حذف سطر iام و ستون jام ماتریس A درنظر گرفته و آن را **کهاد** متناظر با درایهٔ a_{ij} از ماتریس A می‌نامیم.

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$، در این صورت داریم:

$$M_{21}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$ (سطر دوم و ستون اول A حذف شده)

$$M_{32}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$ (سطر سوم و ستون دوم A حذف شده)

تعریف همسازه

اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد، **همسازهٔ** نظیر درایهٔ a_{ij} را با A_{ij} نمایش می‌دهیم و به صورت $A_{ij}=(-1)^{i+j}\times|M_{ij}|$ تعریف می‌کنیم. با توجه به ماتریس A در مثال قبل داریم:

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\times|M_{21}|=-1\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-1\times(-2)=2$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\times|M_{32}|=-1\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=-1\times(-6)=6$$

III) اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد که $n\geq 3$ است، دترمینان A برحسب هر سطر یا هر ستون با توجه به ضابطهٔ زیر بسط داده می‌شود که همواره عددی ثابت است.

فرض کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\ \cdots\ a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22}\ \cdots\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2}\ \cdots\ a_{nn} \end{bmatrix}$$

برای محاسبهٔ $|A|$ برحسب یک سطر (ستون) کافی است هر درایهٔ آن سطر (ستون) را در همسازهٔ نظیرش ضرب و همه را با هم جمع کنیم.

$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$ برحسب سطر اول

$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$ برحسب سطر iام

$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$ برحسب ستون jام

مثال: اگر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$، ماتریسی 3×3 و دلخواه باشد، داریم:

$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$ برحسب سطر اول

$$\Rightarrow |A|=a_{11}\times(-1)^2\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)^3\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+$$

$$a_{13}\times(-1)^4\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$|A|=a_{13}A_{13}+a_{23}A_{23}+a_{33}A_{33}$ برحسب ستون سوم

$$\Rightarrow |A| = a_{13} \times (-1)^4 \times \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{23} \times (-1)^5 \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} +$$

$$a_{33} \times (-1)^6 \times \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

تذکر : توجه دارید که اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون از ماتریسی مفروض باشند و همسازه‌های نظیر هریک از آن درایه‌ها نیز معلوم باشند، به راحتی می‌توان دترمینان آن ماتریس را به دست آورد.

مثال : اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ، در این صورت $|A|$ را برحسب سطر اول و سپس برحسب ستون اول بسط دهید و به‌دست آورید.

برحسب سطر اول:

$$|A| = 3 \times (-1)^2 \times (-4-6) + 2 \times (-1)^3 \times (0-0) +$$
$$1 \times (-1)^4 \times (0-0) = -30$$

برحسب ستون اول:

$$|A| = 3 \times (-1) \times (-4-6) + 0 \times A_{21} + 0 \times A_{31} = -30$$

تذکر : با توجه به تعریف دترمینان واضح است که اگر دترمینان یک ماتریس را برحسب سطر یا ستونی که تعداد صفرهای واقع در آن بیش از بقیهٔ سطر و ستون‌ها است بسط دهیم، ساده‌تر و سریع‌تر به جواب خواهیم رسید!

آزمون :

اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ ۳ و ستون سوم آن $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ باشد و داشته باشیم $A_{13} = -1$ و $A_{23} = 2$ و $A_{33} = 1$ ، در این صورت $|A|$ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) ۴

حل : گزینهٔ (۴). زیرا :

برحسب ستون سوم :

$$|A| = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} =$$
$$4 \times (-1) + 3 \times 2 + 2 \times 1 = 4$$

آزمون :

اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 3 \\ 1 & 4|A| \end{bmatrix}$ ، در این صورت حاصل $\left(|A|^2 + 1\right)$ کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۰ یا ۲

۳) $\frac{13}{4}$ یا ۲   ۴) ۱- یا ۲

حل : گزینهٔ (۳). زیرا : با توجه به تعریف دترمینان ۲×۲

$$|A| = 4|A|^2 - 3 \Rightarrow 4|A|^2 - |A| - 3 = 0$$

$$\Rightarrow |A| = 1 \text{ یا } |A| = \frac{-3}{4} \Rightarrow |A|^2 = 1 \text{ یا } |A|^2 = \frac{9}{4}$$

$$|A|^2 + 1 = 2 \text{ یا } \frac{13}{4}$$

آزمون :

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ و α و β به ترتیب همسازه‌های نظیر a_{21} و a_{32} از ماتریس A باشند، در این صورت $(\alpha + \beta)$ کدام است؟

۱) ۲۰   ۲) ۱۸

۳) ۱۷   ۴) ۱۱-

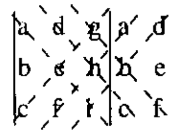
حل : گزینهٔ (۱). زیرا :

$$\alpha = A_{21} = (-1)^3 \times (-2-5) = 7 \ , \ \ \beta = (-1)^5 \times \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 20$$

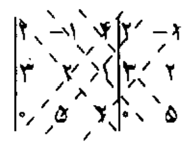
دستور ساروس برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های ۳×۳

در این روش که فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ قابل استفاده است، ابتدا دو ستونِ سمتِ چپ ماتریس را در کنارش می‌نویسیم. |A| برابر است با مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر اصلی و دو خط موازی آن، منهای مجموع حاصل ضرب‌های درایه‌های واقع بر قطر فرعی A و دو خط موازی با آن. به صورت زیر:



$$|A| = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + bdi)$$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & ۴ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۵ & ۲ \end{bmatrix}$، در این صورت |A| را از دستور ساروس حساب کنید.



$$|A| = [(۲\times۲\times۲) + (-۱\times۱\times۰) + (۴\times۳\times۵)] - [(۴\times۲\times۰) + (۲\times۱\times۵) + (-۱\times۳\times۲)]$$

$$\Rightarrow |A| = ۶۸ - ۴ = ۶۴$$

ویژگی‌های (قضیه‌های) مهم در دترمینان ماتریس‌ها

۱. دترمینان هر ماتریس با دترمینان ترانهادهٔ همان ماتریس برابر است. یعنی:

$$|A| = |A^t|$$

برای بررسی و اثبات قضیهٔ ۱ به نکتهٔ زیر نیاز داریم:

نکته: اگر A ماتریسی $n \times n$ و A^t ترانهادهٔ آن باشد و A_{ij} همسازهٔ نظیر a_{ij} از ماتریس A و A^t_{ij} همسازهٔ نظیر درایهٔ a^t_{ij} از ماتریس A^t باشد، همواره داریم:

$$A_{ij} = A^t_{ij}$$

حال اگر |A| را برحسب سطر iام بسط بدهیم، خواهیم داشت:

$$(۱)\ |A| = a_{i۱}A_{i۱} + a_{i۲}A_{i۲} + \dots + a_{in}A_{in}$$

از طرفی می‌دانیم، همواره $a_{ij} = a^t_{ji}$ است و با توجه به نکتهٔ قبل، رابطهٔ (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود که درواقع همان $|A^t|$ برحسب بسط ستونِ iام A^t است.

$$(۱) \Rightarrow |A| = a^t_{۱i}A^t_{۱i} + a^t_{۲i}A^t_{۲i} + \dots + a^t_{ni}A^t_{ni} = |A^t|$$

۲. دترمینان حاصل ضرب دو ماتریسِ مربعی و هم‌مرتبه برابر است با حاصل ضرب دترمینان‌های آن دو ماتریس. یعنی: $|AB| = |A|\ |B|$

(به علت طولانی بودنِ روش اثبات، از آن صرف‌نظر می‌کنیم و آن را بدون اثبات می‌پذیریم.)

نتیجهٔ ۱: اگر A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد، در این صورت داریم:

$$|AA^t| \geq ۰$$

اثبات:

$$|AA^t| \overset{\text{قضیهٔ ۲}}{=} |A|\ |A^t| \overset{\text{قضیهٔ ۱}}{=} |A|\ |A| = |A|^۲ \geq ۰$$

نتیجهٔ ۲: اگر A و B ماتریس‌های مربعی و هم‌مرتبه باشند، داریم:

$$|AB| = |BA|$$

اثبات: (توجه دارید که در حالت کلی تساوی $AB = BA$ برقرار نیست.)

$$|AB| = |A|\ |B| = |B|\ |A| = |BA|$$

آزمون:

اگر A ماتریسی ۲×۲ باشد، در این صورت کدام ماتریس می‌تواند AA^t باشد؟

۱) $\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ (۳). زیرا، ماتریس AA^t دو ویژگی مهم دارد. اول این که باید AA^t متقارن باشد و دوم این که باید $|AA^t| \geq ۰$ باشد. با کمی دقت مشاهده می‌کنید فقط ماتریس داده شده در گزینهٔ (۳) هر دو ویژگی را دارد.

آزمون:

اگر A و B ماتریس‌هایی ۲×۲ باشند و $AB = \begin{bmatrix} ۷ & ۱۹ \\ ۱۱ & ۲۲ \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت ماتریس BA کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۱ \\ ۵ & ۰ \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} ۲۰ & ۱۱ \\ ۳ & ۹ \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} ۲ & ۱۳ \\ ۵ & ۵ \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۱۱ & ۲۹ \end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ (۴). زیرا، اگر AB و BA را در حالت کلی با هم مقایسه کنیم، در دو خاصیت مشترکند. اول این که $|AB| = |BA|$ (که ثابت شد) و دوم این که «حاصل جمع درایه‌های روی قطر اصلیِ AB با حاصل جمع درایه‌های روی قطر اصلی BA برابر است». به عبارت دیگر، $trac(AB) = trac(BA)$ است و فقط گزینهٔ ۴ از هر دو خاصیت برخوردار است.

مسأله:

اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد، به قسمی که $AA^t = ۳I$، در این صورت مقدار $|A|$ را به دست آورید.

$$AA^t = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |AA^t| = \begin{vmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|^۲ = ۳^۳ \Rightarrow |A| = \pm ۳\sqrt{۳}$$

نتیجهٔ ۳: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد، داریم:

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ ، } |A^k| = |A|^k$$

اثبات به استقرا: برای $k = ۱$ تساوی بدیهی است. فرض کنیم تساوی به ازای m برقرار باشد، یعنی $|A^m| = |A|^m$. برای $m+۱$ تساوی را ثابت می‌کنیم:

$$|A^{m+۱}| = |A^m \times A| = |A^m|\,|A| \overset{\text{فرض}}{=} |A|^m \times |A| = |A|^{m+۱}$$

۳. دترمینان هر ماتریس بالا مثلثی یا پائین مثلثی برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی. یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a_{۳۳}\cdots & a_{۳n} \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{۱۱} \times a_{۲۲} \times a_{۳۳} \times \ldots \times a_{nn}$$

اثبات به استقراءِ روی مرتبهٔ ماتریس

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ ۰ & c \end{bmatrix}$ باشد که واضح است $|A| = ac$.

حال فرض کنیم، حکم برای هر ماتریس از مرتبهٔ k برقرار باشد، ثابت می‌کنیم برای ماتریسی از مرتبهٔ $(k+۱)$ نیز برقرار است: (فرض می‌کنیم $k+۱ = \alpha$)

$$\begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱\alpha} \\ ۰ & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲\alpha} \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} \xlongequal{\text{برحسب ستون اول}} a_{۱۱} \begin{vmatrix} a_{۲۲} & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲\alpha} \\ ۰ & a_{۳۳} & \cdots & a_{۳\alpha} \\ ۰ & & & \\ \vdots & & & \\ ۰ & ۰ & \cdots & a_{\alpha\alpha} \end{vmatrix}$$

$$= a_{۱۱} \times (a_{۲۲} \times a_{۳۳} \times \ldots \times a_{\alpha\alpha})$$

(دترمینان اخیر، دترمینان یک ماتریس $k \times k$ است که طبق فرض استقراء حاصل آن برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی.)

نتیجهٔ ۴: اگر A ماتریسی قطری باشد (هم بالا مثلثی و هم پائین مثلثی است)، در این صورت دترمینان A برابر است با حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلیِ آن. و خصوصاً اگر A ماتریسی اسکالر از مرتبهٔ n باشد و داشته

باشیم $a_{ii} = \lambda$ ، در این صورت $|A| = \lambda^n$ است و چون I (ماتریس همانی یا واحد) اسکالر و $a_{ii} = 1$ است، پس همواره $|I| = 1$ خواهد بود.

۴ . هرگاه یک سطر یا یک ستون ماتریسی در عدد حقیقی k ضرب شود، در این صورت دترمینان آن ماتریس در عدد k ضرب می‌شود، یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \dots & ka_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

اثبات: فرض کنیم، ماتریس A مربعی از مرتبهٔ n و عدد k در سطر iام A ضرب شود و ماتریس حاصل را B بنامیم، ثابت می‌کنیم $|B| = k|A|$

برحسب سطر iام:

$$|B| = k\,a_{i1}A_{i1} + ka_{i2}A_{i2} + \dots + ka_{in}A_{in}$$
$$= k(a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in}) = k|A|$$

تذکر: قضیهٔ فوق به‌راحتی این امکان را به ما می‌دهد که در یک دترمینان در هر سطر یا ستون از عددی فاکتور گرفت یا اگر یک عدد در یک دترمینان ضرب شده باشد، بتوان برحسب نیاز آن را به داخل دترمینان برد و فقط در یک سطر یا یک ستون ضرب کرد.

نتیجهٔ ۵: اگر k عددی حقیقی و A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت داریم:

$$|KA| = k^n|A|$$

اثبات: ماتریس KA ماتریسی است که از ضرب عدد k در تمام سطرهای A به دست می‌آید. حال برای محاسبهٔ $|KA|$ می‌توان از هر سطر KA عدد حقیقی k را فاکتور گرفت و چون n سطر دارد، پس عدد $k^n|A|$ حاصل می‌شود. به روش دیگری نیز می‌توان این قضیه را ثابت کرد:

((KI) ماتریسی اسکالر است)

$$KI = \begin{bmatrix} K & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & K \end{bmatrix} \Rightarrow |KI| = K^n$$

از طرف دیگر:

$$KA = (KI)A \Rightarrow |KA| = |(KI)A| = |KI||A| = k^n|A|$$

نتیجهٔ ۶: اگر A ماتریسی پادمتقارن از مرتبهٔ n و n فرد باشد، آن‌گاه $|A| = 0$.

اثبات:

$$\text{پادمتقارن } A \Rightarrow A^t = -A \Rightarrow |A^t| = |-A| = |(-1)A|$$
$$= (-1)^n|A| = -|A| \quad (\text{n فرد است})$$
$$\Rightarrow |A^t| = -|A| \overset{\text{قضیهٔ } 1}{\Rightarrow} |A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

نکته: دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبهٔ زوج، عددی مربع کامل است.

آزمون:

اگر A ماتریسی 3×3 و $|A| = a$ باشد، در این صورت حاصل $||A|A|A||$ کدام است؟

۱) a^{10} ۲) a^{13}
۳) a^{15} ۴) a^{11}

حل: گزینهٔ (۲). زیرا:

$$|||A|A|A| = ||aA|A| = |a^3|A|A|$$
$$= |a^3 \times aA| = |a^4A| = (a^4)^3;|A| = a^{12} \times a = a^{13}$$

آزمون:

معادلهٔ $\begin{vmatrix} 0 & x^2-1 & y^2+1 \\ 1 & 0 & 2z \\ -10 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 0$ مفروض است،

اگر x و y و z یک دسته جواب برای این معادله باشند، (x+y+z) کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۵-　　　۲) ۲

۳) ۰　　　۴) ۱-

حل: گزینه (۱). زیرا، می‌دانیم دترمینان هر ماتریس پادمتقارن از مرتبهٔ فرد، همواره صفر است. پس اگر $x^2 - 1 = -1$ و $y^2 + 1 = 10$ و $2z = 4$ باشد، ماتریس پادمتقارن شده و دترمینان آن صفر است. پس باید $x = 0$ و $y = \pm 3$ و $z = 2$ باشد که در این صورت داریم:

$(x+y+z) = -1$ یا $(x+y+z) = 5$

۵. اگر ماتریسی یک سطر یا یک ستون صفر داشته باشد، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

اثبات: فرض کنیم، سطر iام ماتریس A از مرتبهٔ n صفر باشد. در این صورت اگر |A| را برحسب سطر iام A بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$|A| = 0 \times A_{i1} + 0 \times A_{i2} + \ldots + 0 \times A_{in} = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0$$

نتیجهٔ ۷: دترمینان ماتریس مربعی صفر، صفر است.

۶. اگر در ماتریسی جای دو سطر را با هم و یا جای دو ستون را با هم عوض کنیم، آن‌گاه دترمینانِ ماتریس حاصل قرینهٔ ماتریس قبل خواهد بود.

راهنمایی اثبات: کافی است دو سطرِ iام و tام A را با هم جابه‌جا کنیم و ماتریس حاصل را B بنامیم. سپس |A| را برحسب سطر iام و |B| را برحسب سطر tام به دست آوریم (ابتدا دو سطر مجاور را با هم جابه‌جا و بعد در حالت کلی قضیه را اثبات کنید).

۷. اگر در یک ماتریس مربعی دو سطر یا دو ستون برابر وجود داشته باشد، آن‌گاه دترمینان آن ماتریس صفر است.

اثبات: فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ بوده و سطر iام آن با سطر jام آن برابر باشد. اگر جای این دو سطر را با هم عوض کنیم، ماتریس تغییر نمی‌کند و فقط دترمینان آن قرینه می‌شود. پس:

$$|A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$$

نتیجهٔ ۸: اگر در ماتریس مربعی A یک سطر مضربی از سطر دیگر یا یک ستون مضربی از ستونِ دیگر باشد، آن‌گاه $|A| = 0$.

اثبات: اگر در ماتریس A سطر kام، λ برابر سطر iام باشد، برای محاسبهٔ |A| از λ در سطر kام فاکتور می‌گیریم و λ را در دترمینان ماتریسی ضرب می‌کنیم که دو سطر برابر دارد و طبق قضیهٔ ۷، دترمینان این ماتریس صفر است و $\lambda \times 0 = 0$ خواهد شد.

مسأله:

ثابت کنید:

$$A = \begin{vmatrix} 3a & 4b & 5a \\ 3d & e & 5d \\ 3g & 2h & 5g \end{vmatrix} = 0$$

حل: در ستون اول از ۳ و در ستونِ سوم از ۵ فاکتور می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$|A| = 3 \times 5 \begin{vmatrix} a & 4b & a \\ d & e & d \\ g & 2h & g \end{vmatrix} = 15 \times 0 = 0$$

مسأله:

ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x^2 - 2 & x^2 & x + 1 \\ 2x^3 - 2 & x^3 & x^2 + x + 1 \\ 2x^4 - 2 & x^4 & x^3 + x^2 + x + 1 \end{vmatrix} = 0$$

حل: در ستون اول از $(x-1)$ فاکتور می‌گیریم که

حاصل مضربی (۲ برابر) از ستون سوم می‌شود:

$$|A|=(x-1)\begin{vmatrix}2(x+1) & x^2 & x+1\\ 2(x^2+x+1) & x^3 & x^2+x+1\\ 2(x^3+x^2+x+1) & x^4 & x^3+x^2+x+1\end{vmatrix}$$
$$=(x-1)\times 0=0$$

مسأله:

ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix}bc & a^2 & a^2\\ b^2 & ac & b^2\\ c^2 & c^2 & ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}bc & ab & ac\\ ab & ac & bc\\ ac & bc & ab\end{vmatrix}$$

حل: (برای حل چنین مسائلی از یک طرف به طرف دیگر می‌رسیم.) در دترمینان سمت راست، a در سطر اول و b در سطر دوم و c در سطر سوم ضرب می‌کنیم. سپس برای این که تغییری پدید نیامده باشد، کل دترمینان را بر abc تقسیم می‌کنیم. پس:

$$\text{سمت راست}\ \frac{1}{abc}\begin{vmatrix}abc & a^2b & a^2c\\ ab^2 & abc & b^2c\\ ac^2 & bc^2 & abc\end{vmatrix}$$

(حال به ترتیب از ستون‌های اول، دوم و سوم از a، b و c فاکتور می‌گیریم)

$$=\frac{abc}{abc}\begin{vmatrix}bc & a^2 & a^2\\ b^2 & ac & b^2\\ c^2 & c^2 & ab\end{vmatrix}\leftarrow \text{سمت چپ}$$

۸. اگر A و B و C سه ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند، به طوری که سطر (ستون) iام A مساوی با مجموع سطرهای (ستون‌های) iام ماتریس‌های B و C باشد و سایر سطرهای (ستون‌های) سه ماتریس برابر باشند، در این صورت داریم:

$$|A|=|B|+|C|$$

به عنوان مثال، اگر A و B و C سه ماتریس ۳×۳ باشند، می‌توان نوشت:

$$\begin{vmatrix}a+b & c+d & e+f\\ a' & b' & c'\\ d' & e' & f'\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & d & e\\ a' & b' & c'\\ d' & e' & f'\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b & c & f\\ a' & b' & c'\\ d' & e' & f'\end{vmatrix}$$

(اثبات برای ماتریس‌های ۳×۳ به راحتی از محاسبهٔ طرفین تساوی حاصل می‌شود).

اثبات: $|A|$ را برحسب سطر iام بسط می‌دهیم و محاسبه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+\ldots+a_{in}A_{in}=(b_{i1}+c_{i1})A_{i1}+\ldots+(b_{in}+c_{in})A_{in}$$
$$=(b_{i1}A_{i1}+\ldots+b_{in}A_{in})+(c_{i1}A_{i1}+\ldots+c_{in}A_{in})=|B|+|C|$$

مسأله:

بدون بسط ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 4 & 6 & 8 & 10\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0$$

حل: درایه‌های سطر اول را به صورت $[2+1 \quad 3+1 \quad 4+1 \quad 5+1]$ می‌نویسیم و از قضیهٔ ۸ استفاده می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 4 & 6 & 8 & 10\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 4 & 6 & 8 & 10\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}=0+0=0$$

(در دترمینان سمت چپ، سطر سوم دو برابر سطر اول است و در دترمینان سمت راست، سطر دوم دو برابر سطر اول است.)

آزمون :

حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$k=\begin{vmatrix}۲&۳&۴\\۵&۲&-۱\\۳&-۲&۱\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}۲&۴&۳\\۵&-۱&۲\\۳&۱&-۲\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}۶&۳&۵\\۴&۲&-۱\\۱&۱&۲\end{vmatrix}+$$

$$\begin{vmatrix}۶&۷&۵\\۴&-۴&-۱\\۱&۳&۲\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}۲&۰&-۱\\۳&۴&۰\\۲&۰&۰\end{vmatrix}$$

۱) -۸ ۲) ۸

۳) ۰ ۴) -۱

حل : گزینهٔ (۲). زیرا :

$$k=\underbrace{\begin{vmatrix}۲&۳&۴\\۵&۲&-۱\\۳&-۲&۱\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}۲&۳&۴\\۵&۲&-۱\\۳&-۲&۱\end{vmatrix}}+\underbrace{\begin{vmatrix}۶&۱۰&۵\\۴&-۲&-۱\\۱&۴&۲\end{vmatrix}}+(۸)$$

$$=۰+۰+(۸)=۸$$

(در دترمینان دوم جای دو ستون دوم و سوم عوض شده و دو دترمینان سوم و چهارم به صورت یک دترمینان نوشته شده است .)

۹ . هرگاه مضربی از یک سطر (ستون) A را به سطر (ستون) دیگری از A اضافه کنیم، دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان A برابر است . به عنوان مثال، در ماتریس‌های ۳×۳ داریم : (سطر را با R و ستون را با C نمایش می‌دهیم .)

$$\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}\xlongequal{kR_۲+R_۳}\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g+kd&h+ke&i+kf\end{vmatrix}$$

(k برابر سطر دوم را به سطر سوم اضافه کرده‌ایم و دترمینان تغییر نمی‌کند .)

اثبات : فرض کنیم A ماتریسی مربعی از مرتبهٔ n باشد . اگر k برابر سطر iام A را به سطر jام آن اضافه کنیم و ماتریس حاصل را B بنامیم، ثابت می‌کنیم : $|A|=|B|$.

$$|B|=\begin{vmatrix}a_{۱۱}&a_{۱۲}&\cdots&a_{۱n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i۱}&a_{i۲}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ka_{i۱}+a_{j۱}&\cdots&&ka_{in}+a_{jn}\\\vdots&&&\\a_{n۱}&a_{n۲}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\begin{matrix}\\\\\text{سطر iام}\\\\\text{سطر jام}\\\\\\\end{matrix}\xlongequal[\text{قضیه ۸}]{}\begin{vmatrix}a_{۱۱}&\cdots&a_{۱n}\\\vdots&&\vdots\\a_{i۱}&\cdots&a_{in}\\\vdots&&\vdots\\ka_{i۱}&\cdots&ka_{in}\\\vdots&&\\a_{n۱}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}a_{۱۱}&\cdots&a_{۱n}\\\vdots&&\vdots\\a_{i۱}&\cdots&a_{in}\\\vdots&&\vdots\\a_{j۱}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&&\\a_{n۱}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=۰+|A|=|A|$$

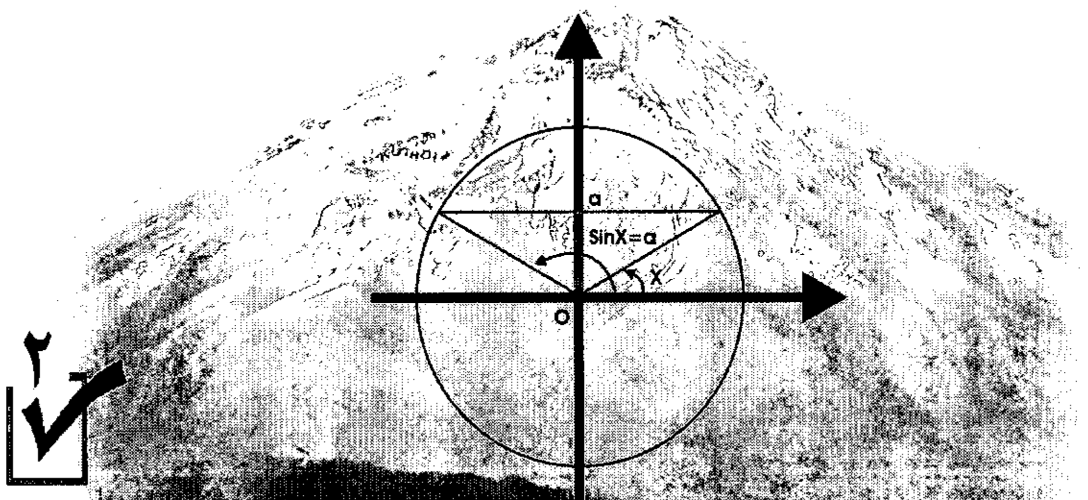
مسأله :

ثابت کنید :

$$|A|=\begin{vmatrix}۱۶&۱۵&۱۴&۱۳\\۱۲&۱۱&۱۰&۹\\۸&۷&۶&۵\\۴&۳&۲&۱\end{vmatrix}=۰$$

حل : اگر هر سطر یا هر ستون را به دو سطر (یا دو ستون) بعد یا قبل از خودش بیفزاییم، مضربی از سطر (یا ستون) بین آن‌ها به دست می‌آید :

$$|A|\xlongequal{R_۱+R_۳}\begin{vmatrix}۱۶&۱۵&۱۴&۱۳\\۱۲&۱۱&۱۰&۹\\۲۴&۲۲&۲۰&۱۸\\۴&۳&۲&۱\end{vmatrix}=۲\begin{vmatrix}۱۶&۱۵&۱۴&۱۳\\۱۲&۱۱&۱۰&۹\\۱۲&۱۱&۱۰&۹\\۴&۳&۲&۱\end{vmatrix}=۲\times۰=۰$$



محمد هاشم رستمی

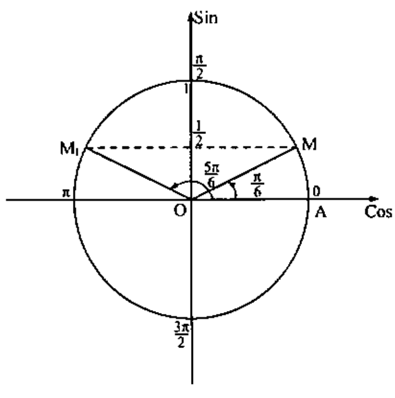
برای دانش‌آموزان سال دوم متوسطه

در شمارهٔ قبل حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $SinX = a(-1 \le a \le 1)$ را دیدیم. اینک چند مثال دیگر از حل این معادله و آزمون‌هایی از کنکورهای سراسری و دانشگاه آزاد که به این معادله مربوطند، ارائه می‌شوند. تست‌ها به صورت تشریحی حل شده و نکته‌های کلیدی مربوط به هر تست نیز بیان شده‌اند. در بخش آخر این قسمت، مسأله‌هایی برای حل ارائه شده‌اند تا دانش‌آموزان بتوانند میزان فراگیری خود را بسنجند. پاسخ این مسأله‌ها نیز آمده است.

حلّ معادله‌های مثلثاتی

مثال:

اگر $\frac{1}{2} < Sinx \le 1$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0,2\pi]$ تعیین کنید.



حل: تغییرات Sinx را وقتی x از صفر تا 2π تغییر می‌کند، بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که $Sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $Sin\frac{5\pi}{6} = Sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ هستند. با توجه به این‌که $Sinx \le 1$ است، $x = \frac{\pi}{2}$ در دامنهٔ تغییرات x قرار دارد. از طرفی $Sinx > \frac{1}{2}$ است. بنابراین $\frac{\pi}{6} < x$ یا $x < \frac{5\pi}{6}$ است. یعنی با فرض $\overline{AM} = \frac{\pi}{6}$ و $\overline{AM_1} = \frac{5\pi}{6}$، انتهای کمان x می‌تواند روی کمان MM_1 تغییر مکان دهد. باید توجه داشت که وقتی $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6} \le x \le 2\pi$ باشد،

$Sinx \le \frac{1}{2}$ است. بنابراین حدود x به یکی از صورت‌های زیر می‌تواند باشد:

$$\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \quad و \quad \frac{\pi}{2} \le x < \frac{5\pi}{6} \quad و \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

مثال:

اگر $1 \le Sin(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}) < \frac{1}{2}$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ تعیین کنید.

حل: با فرض $\alpha = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$، داریم $\frac{1}{2} < Sin\alpha \le 1$.

بنابراین بنا به مثال بالا، خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad و \quad \frac{\pi}{2} \le \alpha < \frac{5\pi}{6} \quad و \quad \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$$

اکنون به جای α مقدار $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$ را قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{3} < x < \pi$$

مثال:

به ازای چه مقادیری از a با شرط $\frac{\pi}{3} < x \le \frac{4\pi}{3}$، نامساوی مضاعف $a - 2 \le Sin2x \le 2a + 3$ برقرار است؟

حل: داریم:

$$\frac{\pi}{3} < x \le \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < 2x \le \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

چون انتهای کمان $\frac{8\pi}{3}$ و انتهای کمان $\frac{2\pi}{3}$ برهم منطبقند، پس تغییرات زاویهٔ 2x شامل یک دور کامل دایره است، بنابراین $-1 \le Sinx \le +1$ خواهد بود و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2a + 3 \ge 1 \\ a - 2 \le -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \ge -2 \\ a \le +2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge -1 \\ a \le 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \le a \le 1$$

آزمون ۱:

برای آن که $Sinx = 2a - 3$ گزاره‌ای درست باشد، حدود a کدام است؟

۱) $1 \le a < 2$ ۲) $1 < a \le -2$

۳) $1 \le a \le 2$ ۴) $1 < a < 2$

حل: گزینهٔ (۳) درست است، زیرا داریم:

$$-1 \le 2a - 3 \le +1 \Rightarrow -1 + 3 \le 2a - 3 + 3 \le +1 + 3$$
$$\Rightarrow 2 \le 2a \le 4 \Rightarrow 1 \le a \le 2$$

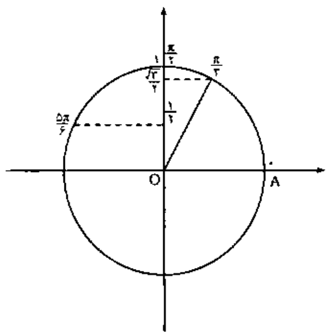
آزمون ۲:

با فرض $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$، $Sinx = \frac{3 - m^2}{3 + m^2}$، مقادیر m در کدام فاصله است؟

۱) $|m| < \sqrt{3}$ ۲) $|m| < \sqrt{2}$

۳) $|m| < 1$ ۴) $|m| < \frac{1}{2}$

حل: گزینهٔ (۳) درست است. وقتی x از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر می‌کند، Sinx از $Sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ شروع به زیاد شدن می‌کند و هنگامی که $x = \frac{\pi}{2}$ شود، $Sinx = 1$ خواهد بود. اکنون وقتی x از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر کند، Sinx از $Sin\frac{\pi}{2} = 1$ تا $Sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ تغییر خواهد کرد. اما چون $x < \frac{5\pi}{6}$ است، پس $Sinx > \frac{1}{2}$ خواهد بود. بنابراین $\frac{1}{2} < Sinx \le 1$.



درنتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} < \sin x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3-m^2}{3+m^2} \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-m^2}{3+m^2} > \frac{1}{2} \\ \frac{3-m^2}{3+m^2} \le 1 \end{cases}$$

نامعادلهٔ دوم این دستگاه همواره برقرار است، زیرا با توجه به مثبت بودن $3+m^2$، می‌توان نوشت:

که همواره درست است.

$$3-m^2 \le 3+m^2 \Rightarrow -m^2 \le m^2 \Rightarrow 2m^2 \ge 0$$

بنابراین جواب دستگاه، جواب نامعادلهٔ اول آن است.

برای حل این نامعادله با توجه به این‌که $3+m^2$ همواره مثبت است، داریم:

$$6-2m^2 > 3+m^2 \Rightarrow 3m^2 < 3 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow |m| < 1$$

آزمون ۳:

اگر $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ و $\sin x = m+1$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $0 \le m < \frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2} \le m \le 1$

۳) $\frac{-\sqrt{3}}{2} < m \le 1$ ۴) $\frac{-1}{2} \le m \le 0$

حل: گزینهٔ (۴) درست است، زیرا داریم:

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ و } \sin\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \sin x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le m+1 \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - 1 \le m \le 1-1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le m \le 0$$

آزمون ۴:

اگر $\frac{-\sqrt{2}}{2} < \sin 2x < 1$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$ ۲) $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}$

۳) $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ۴) $-\frac{\pi}{8} \le x < \frac{\pi}{4}$

حل: گزینهٔ (۲) درست است. برای گزینه‌های داده‌شده داریم:

۱) $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{2}$

۳) $0 \le 2x \le \frac{\pi}{2}$ ۴) $-\frac{\pi}{4} \le 2x \le \frac{\pi}{2}$

با توجه به نامساوی داده شده و این‌که $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ و $\sin(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، تنها گزینهٔ (۲) جواب است.

آزمون ۵:

اگر $\frac{1}{2} \le \sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}) < 1$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3} \le x < \frac{4\pi}{3}$ ۲) $0 < x < \pi$

۳) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۱) درست است. با استفاده از گزینه‌ها حدود $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$ و سپس حدود سینوس آن را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$1)\ \frac{\pi}{3} \le x < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} \le \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \operatorname{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) \le 1 =$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است. بدیهی است، جواب نبودن گزینه‌های دیگر را می‌توان بررسی کرد، اما لازم نیست.

نکته:

وقتی زاویهٔ $\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}$ از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر می‌کند، حداکثر مقدار سینوس آن $\operatorname{Sin}\frac{\pi}{2} = 1$ و حداقل مقدارش $\operatorname{Sin}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ است.

آزمون ۶:

جواب کلی معادلهٔ $\operatorname{Sin}(x - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{Sin}(x + \frac{2\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $k\pi + \frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi + \frac{2\pi}{3}$

۳) $2k\pi - \frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi + \frac{2\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۱) درست است. این معادله، یک معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی است و داریم:

$$\operatorname{Sin}(x - \frac{\pi}{3}) = \operatorname{Sin}(x + \frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{2\pi}{3} \\ x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - (x + \frac{2\pi}{3}) \end{cases}$$

ممتنع

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \times x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{cases}$$ جواب کلی معادله

آزمون ۷:

معادلهٔ $\operatorname{Sin}3x = \operatorname{Cos}x$ در فاصلهٔ $0 \le x \le \pi$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ۲) سه

۳) دو ۴) چهار

حل: گزینهٔ (۲) درست است. این معادله را به معادله‌ای ساده به صورت $\operatorname{Sin}x = \operatorname{Sin}\alpha$ تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه با حل آن، نخست جواب‌های عمومی و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, \pi]$ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\operatorname{Sin}3x = \operatorname{Cos}x \Rightarrow \operatorname{Sin}3x = \operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2} - x) \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2} - x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

k	x	
۰	$\frac{\pi}{8}$ ج،	$\frac{\pi}{4}$ ج
۱	$\frac{5\pi}{8}$ ج،	$\pi + \frac{\pi}{4} > \pi$
۲	$\pi + \frac{\pi}{8} > \pi$,	$2\pi + \frac{\pi}{4} > \pi$

به‌طوری که دیده می‌شود، معادلهٔ داده‌شده تنها سه جواب $x = \frac{\pi}{8}$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{8}$ را در بازهٔ $[0, \pi]$ داراست. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

آزمون ۸ :

یکی از جواب‌های معادلهٔ $\mathrm{Sin}(3x+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}2x$ کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{15}$ ۲) $\frac{\pi}{15}$

۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{15}$

حل : گزینهٔ (۴) درست است .

راه اول : راه کلی : شرط آن که مقداری از x جواب یک معادله (برحسب x) باشد، آن است که در آن معادله صدق کند . بنابراین جواب‌های داده‌شده را در معادله قرار می‌دهیم . هر کدام که در معادله صدق کند، جواب مورد نظر است . بدیهی است که اگر یکی از مقدارهای داده‌شده در گزینه‌ها، در معادله صدق کند، دیگر لازم نیست مقدارهای دیگر داده‌شده در گزینه‌ها را در معادله قرار دهیم .

$$x=\frac{4\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\mathrm{Sin}(\frac{12\pi}{15}+\frac{\pi}{3})\neq\mathrm{Sin}\frac{8\pi}{15}\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{17\pi}{15}\neq\mathrm{Sin}\frac{8\pi}{15}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{15}+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{15}\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{8\pi}{15}\neq\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{15}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادله}}\mathrm{Sin}(\pi+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{4\pi}{3}=\mathrm{Sin}\frac{2\pi}{3}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{8\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\mathrm{Sin}(\frac{8\pi}{5}+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}\frac{16\pi}{15}\Rightarrow\mathrm{Sin}\frac{29\pi}{15}=\mathrm{Sin}\frac{16\pi}{15}$$

$$\Rightarrow\mathrm{Sin}(2\pi-\frac{\pi}{15})=\mathrm{Sin}(\pi+\frac{\pi}{15})\Rightarrow\mathrm{Sin}(-\frac{\pi}{15})=-\mathrm{Sin}\frac{\pi}{15}$$

تساوی برقرار است

بنابراین جواب معادله $x=\frac{8\pi}{15}$ است .

نکته :

اگر ابتدا $x=\frac{8\pi}{15}$ را در معادله قرار می‌دادیم و جواب بودن آن مشخص می‌شد، دیگر نیازی به قراردادن مقدارهای دیگر داده‌شده در معادله، نبود .

راه دوم : معادله را حل و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ را مشخص می‌کنیم .

$$\mathrm{Sin}(3x+\frac{\pi}{3})=\mathrm{Sin}2x\Rightarrow\begin{cases}3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+2x\\3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-2x\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\\x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\end{cases}$$

k	x	
۰	$-\frac{\pi}{3}<0,$	$\frac{2\pi}{15}$
۱	$\frac{5\pi}{3},$	$\frac{8\pi}{15}$

طوری که دیده می‌شود، $x=\frac{8\pi}{15}$ جواب معادله است .

آزمون ۹ :

به‌ازای کدام مقدار a، $x=\frac{3\pi}{4}$ ، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $a\,\mathrm{Sin}(2x-\frac{\pi}{4})-1=0$ است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) 1

۳) $-\sqrt{2}$ ۴) -1

حل: گزینهٔ (۳) درست است. $x=\frac{3\pi}{4}$ باید در معادله صدق کند. داریم:

$$x=\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}} a\text{Sin}(2\times\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})-1=0\Rightarrow$$

$$a\text{Sin}(\frac{5\pi}{4})-1\Rightarrow a\times\frac{-\sqrt{2}}{2}=1\Rightarrow a=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

آزمون ۱۰:

مجموع جواب‌های بین ۰ و π ی معادلهٔ $2\text{Sin}2x-\sqrt{2+\sqrt{2}}=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{7\pi}{16}$

۳) $\frac{5\pi}{16}$ ۴) $\frac{7\pi}{8}$

حل: گزینهٔ (۱) درست است. جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ و سپس مجموع آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. داریم:

جواب:

k	x	
0	$\frac{3\pi}{16}$ ج,	$\frac{5\pi}{16}$ ج
1	$\pi+\frac{3\pi}{16}>\pi,$	$\pi+\frac{5\pi}{16}>\pi$

بنابراین معادلهٔ داده‌شده، در بازهٔ $[0,\pi]$ تنها دو جواب $\frac{3\pi}{16}$ و $\frac{5\pi}{16}$ دارد که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{16}=\frac{8\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$$

مسأله‌ها

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2\text{Sin}x-1=0$

ب) $2\text{Sin}3x+\sqrt{3}=0$

پ) $2\text{Sin}2\pi x-\sqrt{2}=0$

ت) $2\text{Sin}(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})+\sqrt{2}=0$

ث) $4\text{Sin}(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{4})-\sqrt{6}+\sqrt{2}=0$

ج) $\text{Sin}(2x-\frac{\pi}{6})-\text{Sin}(3x+\frac{\pi}{2})=0$

چ) $\text{Sin}(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4})+\text{Cos}(\frac{2\pi x}{3}-\frac{\pi}{3})=0$

۲. جواب‌های عمومی معادله‌های زیر را به‌دست آورید. سپس، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ داده شده برای هر معادله را بیابید.

الف) $2\text{Sin}4x-\sqrt{3}=0,\ [0,\pi]$

ب) $2\text{Sin}\frac{3x}{2}+1=0,\ [,\pi,\pi]$

پ) $2\text{Sin}5\pi x-1=0,\ [0,1]$

ت) $\text{Sin}(2x-\frac{\pi}{6})+\text{Sin}(\frac{\pi}{4}-x)=0,\ [-\pi,0]$

ث) $\text{Sin}(\frac{\pi x}{5}+\frac{\pi}{3})+\text{Cos}(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi x}{3})=0,\ [-1,5]$

۳. معادلهٔ $3\text{Sin}(2x+\frac{5\pi}{6})-2m+4=0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله جواب داشته باشد.

ب) حدود m را چنان بیابید که $-\frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ باشد.

پ) مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از جواب‌های معادله $x = \frac{2\pi}{3}$ باشد.

ت) مقدار m را چنان بیابید که $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد.

ث) مقدار m را چنان بیابید که $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -1$ باشد.

ج) به ازای $m = \frac{11}{4}$ جواب‌های کلی معادله را به‌دست آورید. سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ را تعیین کنید.

۴. معادلهٔ $2\sin(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{6}) - m - 2 = 0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله ریشه داشته باشد.

ب) حدود m را چنان بیابید که $1 < x < 2$ باشد.

پ) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله $x = 2$ باشد.

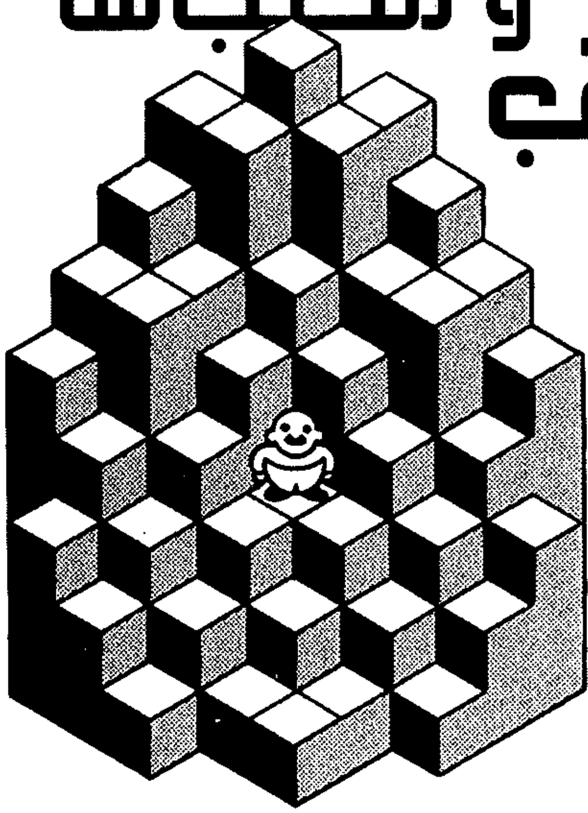
ت) مقدار m را چنان بیابید که $2\sin 2\pi x = 1$ باشد.

ث) به ازای $m = -3$ معادله را حل کنید.

۵. اگر $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(2x - \frac{\pi}{6}) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ بیابید.

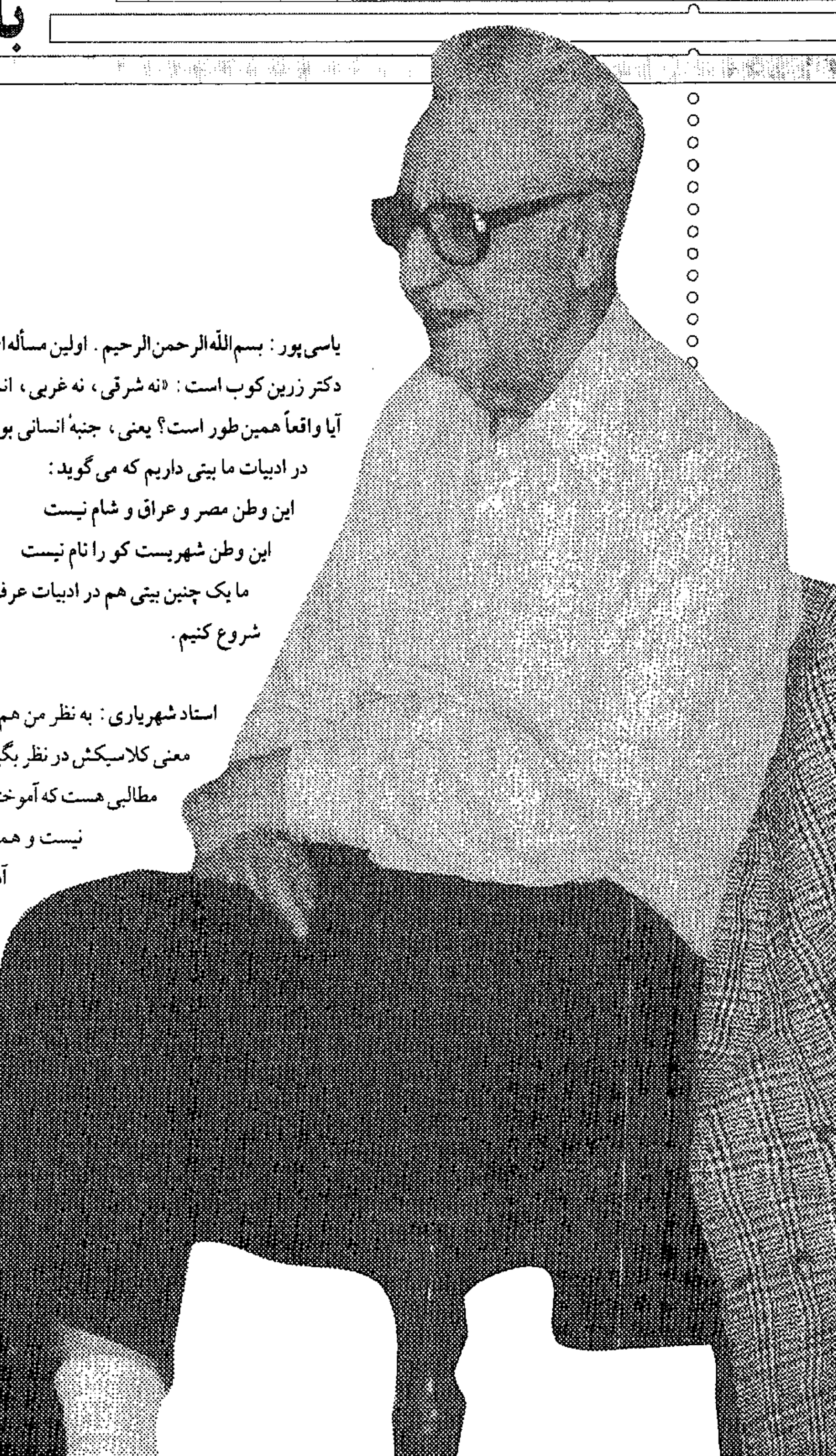
وروجک و مکعب‌ها





وروجک می‌خواهد از آن‌جایی که ایستاده است، روی حداکثر مکعب‌های ممکن برود؛ بی‌آن‌که ناگزیر شود، روی یک مکعب بیش از یک بار پا بگذارد. او هربار می‌تواند، به یک مکعب مجاور هم‌سطح، یک مکعب بالا یا پائین محل استقرار خود (مکعبی که با مکعب زیر پای او یک وجه مشترک دارد) برود. هیچ حرکتی در راستای قطر مجاز نیست. حال، با احتساب مکعبی که روی آن ایستاده است، او روی چند مکعب گام خواهد گذاشت؟

گفتگوی خودمانی با استاد شهریاری



یاسی پور : بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم . اولین مسأله‌ای که باید به آن اشاره کنم عنوان یکی از کتاب‌های دکتر زرین کوب است : «نه شرقی ، نه غربی ، انسانی» و ما می‌خواستیم از این جا شروع کنیم که آیا واقعاً همین طور است؟ یعنی ، جنبهٔ انسانی بودن مسلط به شرقی و غربی بودن است یا نه؟

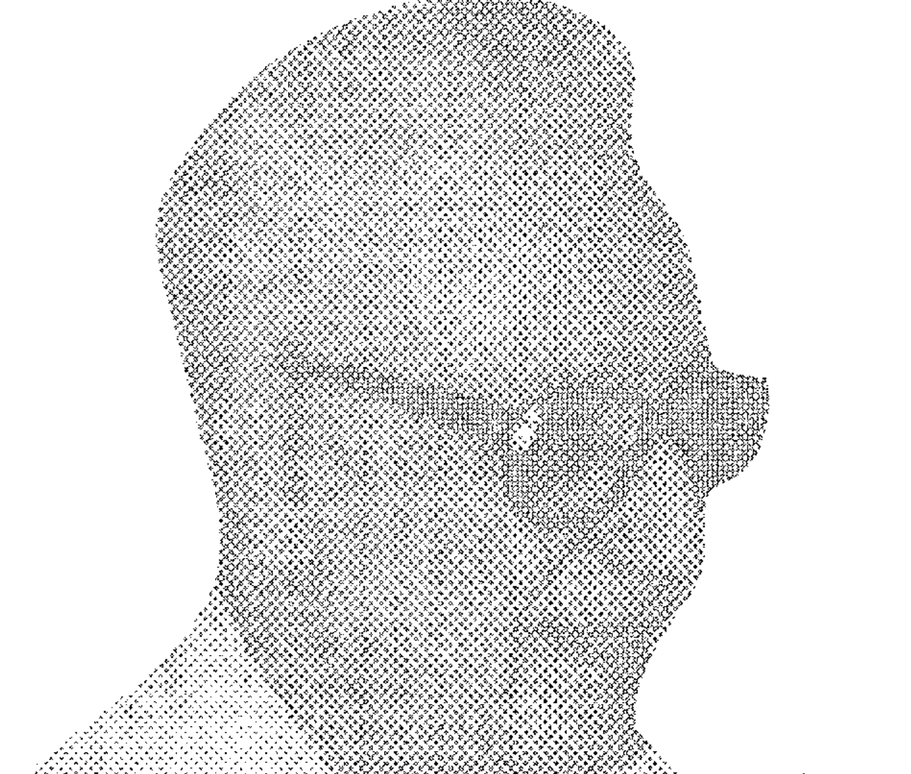
در ادبیات ما بیتی داریم که می گوید :

این وطن مصر و عراق و شام نیست

این وطن شهریست کو را نام نیست

ما یک چنین بیتی هم در ادبیات عرفانی خودمان داریم . اگر اجازه بفرمایید از این جا شروع کنیم .

استاد شهریاری : به نظر من هم در شرق و هم در غرب ، اگر شرق و غرب را به معنی کلاسیکش در نظر بگیریم ، مطالبی هست آموختنی و باید یاد بگیریم و مطالبی هست که آموختنی نیست . انسانیت هم فقط به مملکت ما مربوط نیست و همه‌جای دنیا می شود ، انسان بود . مثلاً در آمریکا آدم‌هایی هستند که تمام خصلت‌های انسانی را دارند . در شرق هم همین طور است ؛ آدم‌هایی هستند که اصلاً خصلت انسانی ندارند ؛ درست مثل رئیس جمهور فعلی امریکا و یا شارون . بنابراین به نظر من خود انسان بودن وانسانی فکر کردن کافی است . نه شرقی ، نه غربی ، مفهومی ندارد . این مطلب تا آن جایی درست است که ما جنبه‌های بد غربی یا شرقی را نگیریم ، و اِلاّ در هر دو جا جنبه‌های مثبت هست . فقط کافی است که بگوییم انسانیت داشته



باشیم و انسانی فکر کنیم.

یاسی‌پور: به عبارت دیگر، مسألهٔ وطن در انسانیت تبلور پیدا می‌کند. آن‌هم به‌جای خود قابل قبول است.

استاد شهریاری: من معتقدم که هر کسی فقط در وطن خودش می‌تواند رشد و نمو کند، نه در جای دیگر. شما اگر بیست یا سی سال هم آن‌جا باشید، بالاخره خارجی هستید. به شما به نظر خارجی نگاه می‌کنند و تا شما بخواهید خودتان را با فرهنگ آن‌جا تطبیق دهید، عملاً از دست رفته‌اید. در حالی که چنانچه در کشور خودتان اگر سختی‌هایی هم داشته باشد، تحمل بکنید، رشد و نمو خواهید داشت.

یاسی‌پور: به عبارت دیگر، همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردید، انسانیت نه در شرق و نه در غرب تبلور پیدا می‌کند، بلکه در وطن تبلور پیدا می‌کند.

استاد شهریاری: برای هرکس.

یاسی‌پور: خوب، سؤال بعدی که باز هم قدری شخصی است و جنبهٔ اجتماعی دارد، مربوط است به ظاهر استاد شهریاری. بنده حدود چهل سال است که با استاد آشنا هستم. و سال ۴۲ شاگرد ایشان بوده‌ام. در همان مدرسهٔ خوارزمی. طرز لباس پوشیدن استاد خیلی عادی بود. من هیچ وقت ندیدم که استاد شهریاری لباس فاخر بپوشند. لباس ایشان تمیز و مرتب بود، ولی فاخر نبود.

از نرم و خشن هر آنچه پوشی
باید که به پاکی‌اش بکوشی

یاد یک داستان افتادم از جلال آل احمد. آل احمد در یکی از نوشته‌هایش می‌گوید، رفته بودم مشهد. جلوی صحن کتم را روی دوشم انداخته بودم، داشتم می‌رفتم. یک نفر که از ده آمده بود و آن‌جا قدم می‌زد، به من گفت: عمو این کت را چند می‌فروشی؟ می‌گوید من به او گفتم: عمو این فروشی نیست.

بعد این صحبت را دکتر شریعتی مورد تحلیل قرار داده و می‌گوید، تازه بهتر آن بود که بگوید، این قدر می‌فروشم و بفروشد. یعنی تا این حد داخل اجتماع و جمعیت باشی. بنده در این مدت هر موقع استاد شهریاری را دیده‌ام، ظاهر ایشان عین همان ظاهری بود که چهل سال پیش دیده بودم که هیچ، بلکه همان طور که آل احمد می‌گوید، تیپ ایشان طوری بود که خیلی راحت می‌توانستند، با افراد معمولی جامعه نشست و برخاست کنند. چرا شما ظاهرتان را هیچ تغییری نداده‌اید؟ از گذشته هایتان همچنان ساده بودید.

می‌دانید که زمانی استاد معاونت وزارت را داشتند، در دبیرستان‌های معروف، مثل خوارزمی و مرجان، از نظر مقام اجتماعی، دارای بالاترین مقام‌ها بودند، ولی هیچ وقت این حالت نبود که لباسشان یا حتی وسیلهٔ نقلیه‌شان تغییر کند. من بارها دیده‌ام که با وجود این که ایشان از لحاظ وضعیت اجتماعی در بالاترین مقام بوده‌اند، ولی پیکان داشتند. این را ما دیده‌ایم. می‌خواهم بپرسم این چه انگیزه‌ای بود که باعث شد، شخصیت و ظاهر شما هیچ تغییر نکند.

استاد شهریاری: حقیقت این است که من هیچ تصمیمی در این مورد نگرفتم، بلکه این طور بار آمده‌ام و این طور عمل کرده‌ام. معتقد هستم، و همیشه معتقد بودم که آدم

نباید خودش را از مردم دور کند و باید با مردم باشد. وقتی که با مردم بودن هست، دیگر آدم خودش را نمی‌گیرد، دیگر آدم هوس ماشین درجهٔ یک، و خیلی چیزهای دیگر را نمی‌کند. به قول یکی از مدرسین سابق علوم پاریس که می‌گوید، ریاضی یک وظیفهٔ اساسی دارد، وظیفه‌ای که امروز خیلی کم به آن توجه می‌کنند، و خیلی کم به آن ارادت دارند، ساختن انسان است؛ انسانی که به درک و فهم مردم بیش از داشتن یک تلویزیون اهمیت می‌دهد.

من همیشه در تمام زندگی‌ام این طور بودم. نه این‌طور تصمیم گرفته باشم، ولی این‌طور بودم و در رابطه با کار هم هیچ‌وقت فکر نکردم که این کار مثلاً در شأن من هست، آن کار در شأن من نیست. هرکاری که درست تشخیص دادم، آن را انجام دادم. مثلاً برای ترجمه یا تألیف مقاله یا کتاب، بارها به من گفتند که در شأن تو نیست که در فلان مجله کار کنی یا فلان مقاله را بنویسی. من گفتم: چرا؟ مگر آن مقاله بد است؟ مقاله‌ای که نوشتم برای مردم نوشتم. اگر برای مردمی بوده که در سطح پائین‌تری بودند، سعی کرده‌ام به زبان ساده‌تر بنویسم. اگر مطلب ریاضی بوده، برای ریاضیدان‌ها نوشته‌ام. هیچ‌وقت هم فکر نکردم که این کار در شأن من هست یا نیست. و به همین ترتیب در مورد لباس پوشیدن بود. لباس هر چه که داشته‌ام، پوشیده‌ام.

یاسی‌پور: من یاد داستانی افتادم که از انیشتین تعریف می‌کنند. او با پادشاه بلژیک آشنا بود و گاهی اوقات پادشاه و ملکهٔ بلژیک از او دعوت می‌کردند. یک‌بار که انیشتین رفته بود پیش پادشاه، جوراب‌هایش را یادش رفته بود بپوشد. پای برهنه در کفش کرده بود و بعد وقتی برگشت به همسرش گفت: مهم‌ترین کشف من این بود که می‌شود بدون جوراب هم مسافرت کرد.

استاد شهریاری: یک داستان دیگر هم دربارهٔ انیشتین خوانده‌ام. وقتی که آلمان بود، همان پالتویی را می‌پوشید که از دورهٔ جوانی داشت. به او رسیدند گفتند: که تو دیگر مشهور شدی، تو دیگر آدم مهمی هستی. آخر لباست؟!

گفت: این جا همه من را می‌شناسند، نگران نباشید.

بعد از سال‌ها که رفت آمریکا، درخیابان همان آدم او را دید که همان پالتو را پوشیده است، گفت: حالا این جا دیگر آمریکاست که آمدی، این را دیگر چه می‌گویی؟ گفت: این جا هیچ‌کس من را نمی‌شناسد.

یاسی‌پور: مطلب بعد که بنده این جا نوشته‌ام، غیر از ریاضی که خیلی دربارهٔ آن صحبت شده، جنبهٔ ادبی است. یعنی، شما یک سری کارهای ادبی هم انجام داده‌اید، مثل «جنبش مزدک و مزدکیان» که ظاهراً خود شما در مصاحبه‌تان فرمودید هیچ نسخه‌ای از آن ندارید. یا کتاب‌هایی مثل «شرح حال پان کوب» که چاپ شده است.

راجع به این جنبه کم‌تر صحبت شده. همهٔ ما مشتاق هستیم در این باره نیز صحبت شود و اهمیت این جنبه هم در کنار ریاضی مطرح شود. یعنی به عنوان یک محقق و یک مؤلف و یک مترجم و یک استاد ریاضیات، شما با چه انگیزه‌هایی به ادبیات پرداخته‌اید؟

استاد شهریاری: حقیقت این است، من در عین حال که در دورهٔ دبیرستان ریاضی می‌خواندم، به ادبیات و به خصوص، به فلسفه عقیده و اعتقاد داشتم. اولاً برای ما یک کلاس مخصوص گذاشتند، چون من تا کلاس پنجم خوانده بودم و یک سال دیگر هم باید می‌خواندم.

آن‌جا در دانشکدهٔ علوم یک جایی درست کردند به اسم کلاس مخصوص. من اول رفتم رشتهٔ ادبی، به امید این که بعداً فلسفه را ادامه دهم. ولی از سیصدوپنجاه دانشجویی که از شهرستان‌های مختلف آمده بودیم، سیصدوچهل نفر آمده بودند رشتهٔ ادبی.

من تقریباً یک ماه سر کلاس رفتم. استادهای بسیار خوبی داشتیم. یکی از استادها دکتر معین بود، یکی دیگر استاد هوشیار بود، و من می‌دیدم که نمی‌توانم استفاده کنم. همیشه سعی می‌کردم که زود بروم سر کلاس که ردیف‌های جلو بنشینم و بتوانم گوش کنم، باز هم نمی‌شد. وقتی می‌رفتم، می‌دیدم یک عده‌ای زودتر آمده‌اند و باز می‌رفتم آخر کلاس.

بالاخره تصمیم گرفتم، در رشته‌ای درس بخوانم که از آن استفاده بکنم و آن‌وقت اگر ادبیات و یا فلسفه را دوست دارم، خودم مطالعه کنم. این تصمیم باعث شد که به سوی، به اصطلاح آن روز، طبیعی، یعنی تجربی هم نروم. البته آن‌ها هم عده‌شان کم بود. چهارده نفر در رشتهٔ تجربی، یا به اصطلاح آن روز، طبیعی بودند و شش نفر در رشتهٔ ریاضی که من رفتم رشتهٔ ریاضی و شدیم هفت‌نفر. یکی از ما هم وسط راه رفت و شش‌نفر تا آخر کار ماندیم.

اصولاً ریاضی، زمانی که ما تحصیل می‌کردیم، خیلی کم داوطلب داشت. مثلاً دانشکدهٔ علوم، تمام تابستان سال ۱۳۲۴ تبلیغ می‌کرد که ما ۶۰ دانشجوی ریاضی

می‌پذیریم. یک دانشگاه در تهران بود، دانشگاه تهران که یک دانشکدهٔ علوم داشت و دانشکدهٔ علوم هم یک رشتهٔ ریاضی داشت؛ یعنی، تنها رشتهٔ ریاضی در تمام ایران که ۶۰ نفر می‌پذیرفت. آخرکار که رفتیم سر کلاس، سیزده‌نفر اسم نوشته بودند که خوشبختانه از این سیزده‌نفر سه‌نفرشان دختر خانم بودند. برای اولین‌بار خانم‌ها به این رشته آمده بودند. یعنی، ریاضی خیلی کم‌اهمیت بود. اصولاً هیچ رشته‌ای از دانشگاه در آن زمان کنکور نداشت، جز دانشکدهٔ حقوق، چون آزاد بود و سر کلاس حاضر غایب نمی‌کردند. من رفتم رشتهٔ ریاضی، اما هیچ‌وقت علاقهٔ خودم را به ادبیات و فلسفه از دست ندادم.

دو کتابی که شما نام بردید، کمابیش مربوط به تاریخ است، یعنی جزو ادبیات است. اما علاوه‌بر این‌ها، من مثلاً شرح زندگی گالوا را ترجمه کرده‌ام که یک کتاب کاملاً ادبی است؛ اصلاً یک داستان است. یا «من ریاضیدانم» را ترجمه کرده‌ام که نوبرت وینر نوشته و شرح زندگی خودش است، و علاوه بر آن یک کتاب صرفاً ادبی است. «باد و باران» یا «یک روز زندگی پسرک قبطی». کتاب «یک روز زندگی پسرک قبطی» جنبه‌هایی از تاریخ واقعی و واقعیت‌ها را در سه‌هزار و سیصد سال پیش در مصر، ریاضی در چه حد بوده یا نجوم در چه حد بوده، و در این‌باره به تفصیل صحبت شده است. ولی کتاب «باد و باران» زاخاریا استانکو یک رمان سه جلدی است. دو جلد آن چاپ شده و یک جلدش همچنان باقی مانده و چاپ نشده است. من هنوز هم علاقهٔ خودم را نه به ادبیات و نه به فلسفه، هیچ‌کدام، از دست نداده‌ام، منتها ریاضی دم‌دست‌تر است و بنابراین بیش‌تر به ریاضی پرداخته‌ام. با این حال ادبیات و فلسفه را همیشه دوست داشته‌ام و هنوز هم دوست دارم.

یاسی‌پور: بله، دربارهٔ این جنبهٔ ادبی بنده یک بیت از حافظ به‌یادم آمد که می‌فرماید:

در مکتب حقایق پیش ادیب عشق
هان ای پسر بکوش که روزی پدر شوی

این شعر معروفی است. البته من دیدم که شما به عشقی که حافظ مطرح کرده، در بعضی از مقالاتتان اشاره کرده‌اید.

عشق می‌ورزم و امید که این فن شریف
چون هنرهای دگر موجب حرمان نشود

استاد شهریاری: این شعری بود که در اولین شمارهٔ آشتی با ریاضیات چاپ شد.

یاسی‌پور: بله، این «مکتب حقایق» و «ادیب عشق» با آن جنبهٔ ادبی کار شما ارتباطی دارد یا نه؟

استاد شهریاری شاید داشته باشد، شاید نداشته باشد. باید دیگران قضاوت بکنند، من نمی‌توانم در این‌باره قضاوت کنم. من فقط می‌توانم بگویم که ادبیات و فلسفه را دوست داشتم و دوست دارم؛ همین.

یاسی‌پور: بله. سؤال دیگر سخنی است از دکتر گویا که اشاره کردند به یکی از کتاب‌های شما به نام «خلاقیت ریاضی». خود شما گفتید، استقبال دانش‌آموزان از این کتاب خیلی زیاد بوده است. ایشان گفتند که اگر استاد شهریاری تنها فقط همین یک کتاب را نوشته بودند، کافی بود که مقام بسیار بالا و والایی در ریاضیات ایران داشته باشند؛ حالا غیر از آن دویست و چند جلد کتاب دیگری که باید پهلوی این کتاب بگذارند. این جا مولوی به این خلاقیت اشاره می‌کند و می‌گوید:

خلق ما بر صورت خود کرد حق

چون خداوند خلاق است، ما هم خلاق هستیم. اصلاً می‌گوید خلق ما بر صورت خداوند است.

وصف او بر وصف ما دارد سبق

یعنی ما توصیفات خودمان و صفت‌های خودمان را از او گرفته‌ایم. او جلوست و ما پشت سر او حرکت می‌کنیم. بنابراین دستور هم این است که ما متخلق به اخلاق خداوندی بشویم و اخلاق خداوندی خلاقیت است. این قاعده‌ای است که در عرفان ما آمده. آیا این نکته در خلاقیت ریاضی هم صادق است؟

استاد شهریاری: این‌که در خلاقیت ریاضی صادق است. منتها نسخهٔ روسی کتاب «خلاقیت ریاضی» دستم بود. کتاب از انگلیسی به روسی ترجمه شده بود. کتاب را خواندم تقریباً تا آخرش. یعنی خیلی بیش از نصفش، خوشم آمد. من هر کتابی را که ترجمه می‌کنم، اول باید بخوانم. اگر دیدم می‌پسندم و خوب است، آن‌وقت آن را ترجمه می‌کنم. یک جایی دارم، کتاب‌هایی را که خوانده‌ام و نپسندیده‌ام آن‌جا می‌گذارم. من این کتاب را ترجمه کردم و به پیشنهاد انتشارات فاطمی برای چاپ به آنها دادم، اما تاکنون خبری نشده است.

کتاب «خلاقیت ریاضی» هر چه قدر که فروشش خوب باشد، مگر چه قدر فروش می‌کند؟ اولاً این کتاب را ریاضیدان باید بخواند. کسی که به ریاضیات علاقه‌مند است. ثانیاً از بین علاقه‌مندان به ریاضی هم درصد کمی کتاب را می‌گیرند. فرق دارد با کتابی که انتشارات فاطمی چاپ می‌کند و

در سال، مثلاً سه هزار تا چهار هزار نسخه فروش می‌رود. احتمالاً به این دلیل است که چاپ نمی‌کند. ما هم کارش نداریم.

از نظر چاپ کتاب، من خیلی گرفتاری دارم. مثلاً بیش از چهل کتاب من در امیرکبیر مانده است. قبلاً جعفری هروقت که من می‌رفتم، کتاب را با دستش وزن می‌کرد، بعد به من می‌داد و می‌گفت: خودت ببر چاپخانه پیدا کن، بده چاپ کنند.

آدم خیلی شریفی بود. حدود چهل کتاب از کتاب‌های من را امیرکبیر چاپ کرده است. یک چیزی هم دستی می‌نوشت که این کتاب مال ما باشد. حالا افتاده دست ناشر دیگری. الان امیرکبیر کتاب‌های من را نه چاپ می‌کند، نه آزاد. بسیاری از کتاب‌های من پیش آن‌هاست؛ مثل «اندیشهٔ ریاضی»، «درپی فیثاغورس»، «دورهٔ اختصاصی جبر»، «دورهٔ اختصاصی مثلثات»، که مورد استفادهٔ بچه‌ها هستند و «سرگرمی‌های جبر». این کتاب‌ها را نه چاپ می‌کند، نه آزاد می‌کند که به دیگران بدهم، هرکس را هم که فرستاده‌ام و گفته‌ام و نوشته داده‌ام که برو این کتاب‌ها را به هر قیمت که می‌دهد، آزاد کن و تو چاپ کن، رفته آن‌جا به قدری آن‌جا او را سر دوانده‌اند و این طرف و آن طرف فرستاده‌اند که رها کرده است و آمده. آن کتاب‌هایی هم که به‌ندرت چاپ می‌کنند، اصلاً خبر نمی‌دهند. دوستان به من خبر می‌دهند: آقا فلان کتابت چاپ شده. من تلفن می‌کنم. در مورد یک کتاب شاید بیش از بیست‌بار زنگ زده‌ام که آقا مدت‌هاست چاپ کرده‌اید، چرا حق‌التألیفش را نمی‌فرستید؟ همیشه می‌گویند: چَشم. ولی تا حالا هیچ خبری نشده.

یاسی‌پور: مختصری هم راجع به این دو کتابی که نوشته پرلمان است و شما هم به یکی از آن‌ها اشاره کردید، یکی «سرگرمی‌های جبر» و یکی دیگر «سرگرمی‌های هندسه»...

استاد شهریاری: سه تا کتاب است. یکی دیگرش هم «سرگرمی‌های ریاضی» است.

یاسی‌پور: به‌خصوص این دو کتاب که درواقع جبر و هندسه عملی هستند، مطالب بسیار جالبی را در عمل مطرح می‌کنند که اصلاً دید افراد را نسبت به ریاضی تغییر می‌دهد. اگر ممکن است، راجع به این دو کتاب هم صحبت بفرمایید.

استاد شهریاری: «سرگرمی‌های جبر» اول چهار عمل اصلی را با زبان بسیار شیرین و مثال‌های جالب مطرح کرده است. لگاریتم را هم شرح داده تا به اصطلاح، عمل پنجم را هم توضیح داده است. خود کتاب به قدری جالب است که وقتی که من فقط ده ـ دوازده صفحه از اصل کتاب را خوانده بودم، دیدم اگر فقط همین ده‌دوازده صفحه از این کتاب هم چاپ شود، جالب است. اما «سرگرمی‌های هندسه» از آن هم جالب‌تر است. یعنی در «سرگرمی‌های هندسه» شما یک فرمول یا یک رابطه هم نمی‌بینید، ولی با زبانی شیرین همهٔ مسائل هندسه را مطرح کرده است. با زبانی شیرین. باید این را هم بگوییم که نویسندهٔ این کتاب‌ها هنری پرلمان در جنگ جهانی دوم در لنینگراد پشت اردوهای کار از گرسنگی افتاد و مرد. ولی کتاب‌هایش کتاب‌های بسیار جالبی هستند.

کتاب «سرگرمی‌های هندسه» دست امیرکبیر نیست، نزد انتشارات خوارزمی است و هر ششم ماه یک‌دفعه خودش زنگ می‌زند، من اصلاً رها کرده‌ام. زنگ می‌زند که آقای شهریاری دارم کتاب‌هایتان را چاپ می‌کنم. چهار پنج کتابتان در چاپخانه است؛ از جمله «سرگرمی‌های هندسه». می‌گویم: دستتان درد نکند. قطع می‌شود می‌رود تا شش ماه دیگر، یادش می‌رود که قبلاً تلفن کرده، دوباره تلفن می‌کند. این الان چند سال است ادامه دارد و هنوز «سرگرمی‌های هندسه» مانده است. من اهل این‌که بروم شکایت کنم، نیستم. برای این‌که راهی پیدا کنم برای نجات این کتاب‌ها، حاضرم وکالت بدهم، اما به شرطی که به من کاری نداشته باشند، و خودشان بروند دنبالش. چهل کتاب در امیرکبیر است. در حدود بیست کتاب هم در خوارزمی است. ترجیح می‌دهم که بنشینم کتاب جدیدی ترجمه کنم یا بنویسم، ولی سراغ آن‌ها نروم.

یاسی‌پور: دکتر بهزاد، در مجلس

بزرگداشت شما مطرح کرده‌اند که استاد شهریاری در عمومی کردن ریاضیات یکی از بزرگ‌ترین نقش‌ها را داشته است. در خارج معمولاً این کار را می‌کنند. مثلاً سرژ لانگ معروف که فردی جبری است، البته به معنی جبردان، نه جبری در مقابل اختیار، چند سخنرانی در عمومی کردن ریاضیات دارد. او در موزهٔ هنرهای پاریس، روزهای یکشنبه، برای آدم‌هایی که آمده‌اند تفریح و تماشا کنند، سخنرانی ریاضی می‌کرد. یعنی در خارج هم دنبال این هستند که صورتی از این ماجرا را داشته باشند. مثلاً، ژرژگاموف یکی از آن کسانی بود که در عمومی کردن ریاضیات در آمریکا خیلی نقش داشت. «۱، ۲، ۳، بینهایت» او بسیار معروف است.

استاد شهریاری: آقای بیرشک ترجمه کرده است.

یاسی‌پور: کتاب «پیدایش و مرگ خورشید» او نیز جنبهٔ فیزیکی دارد. به‌هرحال، استاد بهزاد بر این نکته تأکید داشت که نقش شما در عمومی کردن ریاضیات، نقش خیلی والایی است. شما این کار را تا چه حد لازم می‌دانید؟

استاد شهریاری: باز مثل موارد دیگر، من هیچ تصمیمی در این زمینه نداشتم. کتابی دستم آمد. بعد از این که آن را خواندم، دیدم جالب است، ترجمه کردم. شاید همین کتاب‌ها در دست افراد، عمومی‌کردن ریاضی را بیش‌تر ملموس کرده است. والاّ من کتاب‌هایی دارم که فقط به ریاضیات فرمولی و خشک پرداخته است. ولی این سخن درست است، بیش‌تر کتاب‌های من جنبهٔ عام و عمومی دارد و به درد همه می‌خورند.

یاسی‌پور: بله، شما در مجلهٔ «آشتی با ریاضیات» به این مسأله اشاره کرده‌اید. در آن شماره‌های اولیه فرموده‌اید که ما می‌خواستیم با این مجلهٔ «آشتی با ریاضیات»، پدرها و مادرها و افرادی را که از ریاضیات دور شده‌اند و به یک معنی با ریاضیات قهر کرده‌اند، دوباره آشتی بدهیم. بنابراین آن مجله را، بخصوص برای این کار، مطرح کرده بودید.

استاد شهریاری: تا حدی هم موفق شدم. هفتاد شمارهٔ «آشتی و آشنایی با ریاضیات» را منتشر کردم و سرانجام مسائل مالی، من را متوقف کرد و دیگر آن را منتشر نکردم. یک دوره از آن مجله را دارم. هنوز هروقت خودم به آن مراجعه می‌کنم، بعضی از مطالبش برای خود من هم جالب است که آن موقع گیر آورده‌ام و چاپ کرده‌ام. کمی دشوار است، دو ماه یک بار مجله‌ای را منتشر کردن و تا هفتاد شماره هم ادامه دادن که الحمدلله تمام شد.

یاسی‌پور: بله، این جا در همان بحث و گفت‌وگوها، دکتر رجبعلی‌پور، ظاهراً در دانشگاه کرمان در بزرگداشت شما، این مطلب را از قول گومان گفت که نخستین وظیفهٔ یک ریاضیدان، ساختن و تحویل‌دادن چیزی است که شاید امروز کم‌تر کسی طالب آن باشد؛ یعنی انسان. این حرف خیلی شبیه حرف عرفای ماست. مثلاً مولوی می‌گوید:

خویشتن نشناخت مسکین آدمی
از فزونی آمد و شد در کمی
خویشتن را آدمی ارزان فروخت
بود اطلس خویش را بر دلق بدوخت

یعنی انسان از آن مرحلهٔ انسانیت دور افتاد و افتاد این طرف مسیر. آیا این تنها وظیفهٔ ریاضیات است، یا یکی از مهم‌ترین وظایف آن؟

استاد شهریاری: به نظر من یکی از مهم‌ترین وظایفش است. ظاهراً وظیفهٔ یک معلم ریاضی که ریاضیات را یاد می‌دهد، همین است. منتها متأسفانه در مملکت ما اصلش به کلی از بین رفته. ریاضیات باید با کاربرد ریاضی و تاریخ ریاضیات و بخصوص، با فلسفهٔ ریاضی همراه باشد. با این تست و کنکوری که وجود دارد، این سه موضوع به کلی کنار رفته‌اند. در تست نمی‌شود تاریخ را مطرح کرد و من خاطرم می‌آید که یک‌بار المپیادی‌های ریاضی که به ایران برمی‌گشتند، یک دختر خانم بین آن‌ها بود که اتفاقاً مدال طلا گرفته بود. مصاحبه‌گر تلویزیون رفت جلو و از او پرسید: خانم شما جمشید کاشانی را می‌شناسید؟ او گفت: «نه». گفت: «کسی بوده که عدد پی را اختراع کرد».

هر دو طرف موضوع ناراحت‌کننده است. از یک طرف، این دخترخانم که در المپیاد ریاضیات مدال طلا گرفته، اصلاً جمشید کاشانی را نمی‌شناسد، و از طرف دیگر، این مصاحبه‌کننده جمشید کاشانی را از این جا می‌شناخت که «عدد پی را اختراع کرد». عدد پی قابل اختراع نیست. در طبیعت وجود دارد و در طبیعت به‌کار رفته است. حداکثر باید آن را کشف کرد.

حتی هزاران سال قبل از میلاد در تورات، عدد پی مطرح شده است. به‌این‌ترتیب که در غزل‌های سلیمان، دورهٔ یک ظرف را می‌دهد و می‌گوید ظرفی بساز که دوره‌اش این قدر باشد. قطرش را هم می‌دهد که وقتی بر هم تقسیم می‌کنید، عدد ۳ را حاصل می‌کنید. عدد پی را ۳ می‌شناختند. همان‌موقع در مصر آن را



۳/۱۶ می‌شناختند. کاشانی برای اولین بار عددپی را تا هفده رقم اعشار حساب کرد و کار بسیار عظیمی بود. از سه‌ضلعی شروع کرد، سه‌ضلعی داخلی و خارجی، بعد شش‌ضلعی، بعد دوازده‌ضلعی، بعد بیست‌وچهار ضلعی، تا موقعی که واسطه عددی بین این دو را به‌دست آورد. نمی‌دانم تا کجا جلو رفت.

یاسی‌پور: در خارج، مقاله‌ای نوشته بودند در این مورد که برای محاسبهٔ آن شانزده رقم ـ ظاهراً تا رقم شانزدهم درست است و یک رقم آخر آن ایراد دارد ـ باید آن n ضلعی محاطی و محیطی یک میلیون ضلعی باشد.

استاد شهریاری: هم داخلی، هم خارجی.

یاسی‌پور: تا آن شانزده رقم دربیاید. خیلی زیاد است!

استاد شهریاری: بله، کاشانی کارهایی کرده که هیچ کاری اصلاً قابل مقایسه با آن نیست. یکی از کارهایش حل معادلهٔ درجهٔ سوم است. یعنی سینوس یک درجه را می‌خواسته پیدا کند و تا سینوس سه درجه را می‌دانست. سینوس سه درجه برحسب سینوس یک درجه، یک عبارت درجهٔ سوم می‌شود. بنابراین او ناچار بوده، معادلهٔ $ax^3 + bx = ۳$ را حل کند تا بتواند سینوس یک درجه را به‌دست بیاورد. او این معادله را حل کرد. با هر دقتی که شما بخواهید، با روش کاشانی می‌شود، هر معادله‌ای را حل کرد؛ چون ما می‌دانیم هر معادلهٔ درجهٔ سوم را می‌شود درجهٔ دومش را حذف کرد و آن بقیه‌اش را هم کاشانی حل کرده است.

کاردان یک قرن بعد از کاشانی معادلهٔ درجهٔ سوم را حل کرده. معادلهٔ درجهٔ سوم را به نام کاردان می‌شناسیم. کاردان کارش درست بود، چون ثابت کرد که ریشه‌های هر معادلهٔ درجهٔ سوم به کمک رادیکال‌ها قابل بیان است و این کار درستی بود. البته اگر این روش مال کاردان باشد؛ چون بعضی‌ها معتقدند که مال تارتاگیلیا، همشهری کاردان است. به هر صورت، روش او این فایده را دارد که نشان می‌دهد، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم با رادیکال‌ها قابل بیان است. ولی راه‌حل کاشانی عملی است. می‌توانیم از آن استفاده کنیم. منتها نه در دبیرستان‌ها و نه در دانشگاه‌ها، اسمی از کاشانی نیست. یادمان باشد، کاشانی در دوره‌ای زندگی می‌کرد که بیش‌تر احتیاج به این داشتند ریاضیات عملی را استفاده کنند. در اساس او منجم و اخترشناس بود. از همان‌جا هم به سینوس یک درجه احتیاج پیدا کرد و آن را به‌دست آورد.

این مسألهٔ واقعاً جالب را که مربوط به کاشانی است، نه کسی می‌داند، نه کسی از او اسم می‌برد. هم در «رسالهٔ محیطه»ی او و هم در «مفتاح‌الحساب» هست، منتها کسی که می‌خواهد آن را بخواند، باید اهل‌نظر باشد.

من این‌جا یک نکتهٔ دیگر را بگویم: ما همیشه به دانش‌آموزانمان توصیه می‌کنیم که آقا دنبال تحقیق بروید. چرا تحقیق نمی‌کنید؟ چه‌طور تحقیق کنند، وقتی که مدارک در اختیارشان نیست. این رساله‌های کاشانی را من الان می‌توانم خدمتتان بیاورم. به روسی ترجمه شده، انگلیسی آن هست، فرانسه‌اش هست، آلمانی آن هست، این چهار زبان را من دیده‌ام و دارم. اصلش هم عربی است. هنوز به فارسی ترجمه نشده. درحالی‌که باید به فارسی، آن هم دو نوع، ترجمه شود: یکی دقیقاً از روی آن با همان اصطلاح‌ها تا هرکس که مطالعه می‌کند، بداند کاشانی چه کسی بوده است، و یکی هم به زبان امروزی که برای دانش‌آموزان قابل استفاده باشد. کتاب‌های ریاضی را هم که از عربی به فارسی ترجمه شده‌اند جز موردی که مصاحب ترجمه کرده، یعنی «جبر خیام»، کسانی ترجمه کرده‌اند که عربی می‌دانستند، ولی ریاضی نمی‌دانستند و درنتیجه کار غلط درآمده است.

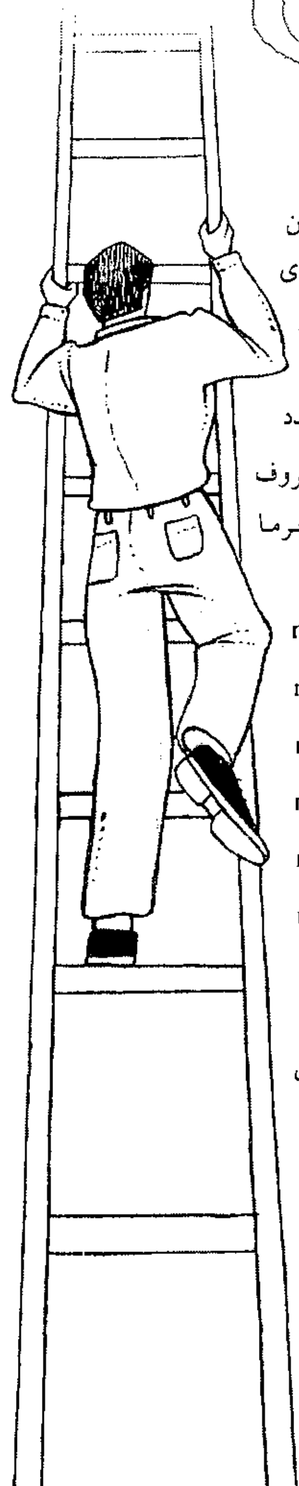
ادامه دارد

استقرای ریاضی

محدودیت های استدلال استقرایی و اصول استقرای ریاضی

میرشهرام صدر

برای دانش آموزان سال سوم ریاضی



برخی از ریاضیدانان بزرگ، وقتی به درستی قانونی تا حداکثر بیست حالت پشت سر هم پی می بردند، آن قانون را به صورت یک حکم کلی بیان می کردند. از این رو، تا میانه های قرن هفدم میلادی با استفاده از استدلال استقرایی، حکم های بسیاری در ریاضیات، به ویژه در شاخهٔ نظریهٔ اعداد روی هم انباشته شده بود که به ذکر دو مورد از آن ها می پردازیم.

پی یر فرما[1] (۱۶۵۱ ـ ۱۶۰۱ م)، ریاضیدان بزرگ فرانسوی تصور می کرد که عدد $F_n = 2^{2^n} + 1$ به ازای عددهای حسابی n، اول است. این عدد به «عدد فرما» معروف است. هرگاه به جای n، عددهای حسابی را قرار دهیم، ملاحظه می کنیم که عدد فرما برای n = ۵ یک عدد اول نیست؛ زیرا:

$$n = 0 \Rightarrow F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3$$

$$n = 1 \Rightarrow F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5$$

$$n = 2 \Rightarrow F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17$$

$$n = 3 \Rightarrow F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257$$

$$n = 4 \Rightarrow F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65537$$

$$n = 5 \Rightarrow F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4294967297$$

$$= 641 \times 6700417$$

ملاحظه می کنیم که F_5 عددی مرکب است.

مارَن مِرسن[2] (۱۶۴۸ ـ ۱۵۸۸م)، ریاضیدان فرانسوی و از دوستان صمیمی دکارت بود. او معتقد بود که عدد $M_n = 2^n - 1$ به ازای عددهای اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۳۱، ۶۷، ۱۲۷ و ۲۵۷ عددی اول، و به ازای بقیهٔ عددهای طبیعی کوچک تر از ۲۵۷، عددی مرکب است. این عدد به «عدد مرسن» معروف است. در صورتی که به جای n، عددهای اول یاد شده را قرار دهیم، عددهای مرسن به دست می آیند:

$n=۲ \Rightarrow M_۲ = ۲^۲ - ۱ = ۳$

$n=۳ \Rightarrow M_۳ = ۲^۳ - ۱ = ۷$

$n=۵ \Rightarrow M_۵ = ۲^۵ - ۱ = ۳۱$

$n=۷ \Rightarrow M_۷ = ۲^۷ - ۱ = ۱۲۷$

$n=۱۳ \Rightarrow M_{۱۳} = ۲^{۱۳} - ۱ = ۸۱۹۱$

$\vdots$

$n=۲۵۷ \Rightarrow M_{۲۵۷} = ۲^{۲۵۷} - ۱$

مرسن چند اشتباه صادقانه داشت. ابتدا این که او به خطا تصور کرد که $M_{۶۷} = ۲^{۶۷} - ۱$ و $M_{۲۵۷} = ۲^{۲۵۷} - ۱$ عددهایی اول هستند. دیگر این که $M_{۶۱} = ۲^{۶۱} - ۱$ و $M_{۸۹} = ۲^{۸۹} - ۱$ و $M_{۱۰۷} = ۲^{۱۰۷} - ۱$ را جزو اعداد اول به حساب نیاورده بود.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، بعضی از ریاضیدانان با بهره‌گیری از استدلال استقرایی (استقرای ناقص)، حکم‌هایی را صادر می‌کردند که در حالت کلی درست نبودند؛ زیرا آن‌ها با بررسی آزمایش‌های محدودی به یک نتیجهٔ کلی می‌رسیدند و می‌دانیم که چنین نتیجه‌هایی ممکن است با یک مثال نقض باطل شوند.

استدلال استقرایی

استدلال استقرایی، به طور معمول با مقایسهٔ مشاهده‌ها و نتیجه‌های ناشی از آزمایش‌های محدودی آغاز می‌شود. سپس نتیجهٔ این آزمایش‌ها را به همهٔ پدیده‌های مشابه تعمیم می‌دهند. استدلال استقرایی، اثبات دقیق ریاضی محسوب نمی‌شود؛ زیرا مجموعه مشاهدات ما همواره محدود است و نمی‌توانیم آزمایش را روی همهٔ پدیده‌ها انجام دهیم. فقط روش خوبی برای حدس زدن است و برای اثبات درستی این حدس، باید از اصول استقرای ریاضی استفاده کرد.

اصل استقرای ریاضی

فرض کنیم نردبانی با تعداد نامتناهی پله و از لحاظ فیزیکی در حالت تعادل موجود باشد. به نظر شما با چه ویژگی‌هایی می‌توان از این نردبان بالا رفت؟

در جواب ممکن است بگویید:

روی هر پله‌ای که هستیم باید بتوانیم از آن به روی پلهٔ بلافاصله بعد از آن برویم. یا فاصلهٔ بین پله‌ها باید طوری باشد که امکان دستیابی از هر پله به پلهٔ بعدی میسّر باشد.

این جواب‌ها کامل نیستند! ابتدا باید بگوییم که در مرحلهٔ اول باید پایمان روی پلهٔ اول برسد. سپس در مرحلهٔ بعدی بگوییم که اگر پایمان روی هر پله (برای مثال پله kام) رسید، آن‌گاه بتوانیم از روی آن به پلهٔ بلافاصلهٔ بعدی (یعنی پله k + ۱ ام) برویم. با این دو ویژگی می‌توان از نردبان تا بی‌نهایت بالا رفت.

این سؤال را برای این مطرح کردیم که اصل استقرای ریاضی را با یک مثال عملی به ذهن بسپارید تا آن را فراموش نکنید. اصل استقرای ریاضی به صورت زیر است:

اصل استقرای ریاضی

هر زیر مجموعهٔ S از N که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است:

۱. $۱ \in S$

۲. هرگاه $n \in S$، آن‌گاه $(n+۱) \in S$.

معادل اصل استقرای ریاضی

فرض کنید، p(n) حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. برای اثبات درستی این حکم به کمک معادل اصل استقرای ریاضی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: حکم باید به ازای $n=۱$ درست باشد.

مرحلهٔ دوم: *فرض استقرا*: فرض می‌کنیم که حکم به ازای $n=k; (k \in \mathbb{N})$ درست باشد.

مرحلهٔ سوم: حکم *استقرا*: ثابت می‌کنیم که حکم برای $n=k+۱$ درست است.

مرحلهٔ چهارم: در این صورت، حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.

مثال: با استفاده از اصل استقرای ریاضی برای عدد طبیعی n ثابت کنید:

الف) $1+2+3+...+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

ب) $2+4+6+...+2n=n(n+1)$

ج) $(1+a)^n \geq 1+na(a\geq -1)$

د) $\log x^n = n\log x (x>0)$

هـ) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(\frac{n(n+1)}{2})^2$

و) $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$

ز) $\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+...+\frac{1}{(5n-2)(5n+3)}=\frac{n}{3(5n+3)}$

حل : الف) برای این که نشان دهیم حکم برای $n=1$ درست است، کافی است از طرف چپ برابری حکم، جملهٔ اول را انتخاب کنیم و به جای n در طرف راست برابری حکم، عدد ۱ را قرار دهیم:

$n=1: 1=\frac{1}{2}\times 1\times(1+1)=1$ درست است

برای نوشتن فرض استقرا، کافی است به جای n در صورت مسأله، k را قرار دهیم:

فرض استقرا $n=k: 1+2+3+...+k=\frac{1}{2}k(k+1)$

برای نوشتن حکم استقرا باید به جای n در صورت مسأله، $(k+1)$ را قرار دهیم

حکم استقرا $n=k+1: 1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در طرف چپ برابری حکم استقرا، قبل از جملهٔ $(k+1)$ ام، جمله kام را می‌نویسیم. برای اثبات درستی حکم استقرا، با یک مقایسه با فرض استقرا، درمی‌یابیم که باید به دو طرف فرض، $(k+1)$ را اضافه کنیم. بنابراین داریم:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)+(k+1) \quad (1)$$

ملاحظه می‌کنیم که طرف چپ برابری حکم به دست آمده است. اکنون با انجام عملیاتی، طرف راست برابری (۱) را به صورت طرف راست برابری حکم می‌نویسیم:

$$1+2+3+...+k+(k+1)=(k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)=(k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

پس حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

ب) $n=1: 2=1(1+1)=2$ درست است

فرض استقرا $n=k: 2+4+6+...+2k=k(k+1)$

حکم استقرا $n=k+1: 2+4+6+...+2k+2(k+1)=(k+1)(k+2)$

به دو طرف فرض $2(k+1)$ را اضافه می‌کنیم:

$$2+4+6+...+2k+2(k+1)=k(k+1)+2(k+1)$$
$$=(k+1)(k+2)$$

پس حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

ج)

$n=1: (1+a)^1\geq 1+1\times a \Rightarrow 1+a\geq 1+a$

درست است

فرض استقرا $n=k: (1+a)^k\geq 1+ka$

حکم استقرا $n=k+1: (1+a)^{k+1}\geq 1+(k+1)a$

دو طرف فرض را در $(1+a)$ ضرب می‌کنیم:

$$(1+a)(1+a)^k\geq(1+a)(1+ka)$$
$$\Rightarrow (1+a)^{k+1}\geq 1+a+ka+ka^2$$

با مقایسهٔ نابرابری اخیر و حکم استقرا ملاحظه می‌کنیم که برای اثبات حکم باید، نابرابری زیر برقرار باشد:

$$1+a+ka+ka^2\geq 1+(k+1)a$$
$$\Rightarrow 1+a+ka+ka^2\geq 1+ka+a \Rightarrow ka^2\geq 0$$

نابرابری آخر، همواره درست است؛ پس حکم استقرا برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

د) $n=1: \log x^1=1\times\log x$ درست است

فرض استقرا $n=k: \log x^k=k\log x$

حکم استقرا $n=(k+1): \log x^{(k+1)}=(k+1)\log x$

به دو طرف فرض، logx را اضافه می‌کنیم:

$$\log x+\log x^k=\log x+k\log x$$
$$\Rightarrow \log x\times x^k=(k+1)\log x$$
$$\Rightarrow \log x^{(k+1)}=(k+1)\log x$$

پس حکم استقرا برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

هـ) درست است $n=1: 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$

فرض استقرا $n=k: 1^3+2^3+3^3+\dots+k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$

حکم استقرا $n=(k+1): 1^3+2^3+3^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$

به دو طرف فرض استقرا، $(k+1)^3$ را اضافه می‌کنیم:

$$1^3+2^3+3^3+\dots+k^3+(k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2+4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2\left(k^2+4k+4\right)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

پس حکم استقرا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است:

و) $n=1: (2\times 1)! < 2^{2\times 1}(1!)^2 \ ; \ 2<4$

فرض استقرا $n=k: (2k)! < 2^{2k}(k!)^2$

حکم استقرا $n=(k+1): \left(2(k+1)\right)! < 2^{2(k+1)}\left((k+1)!\right)^2 \ ;$

$$(2k+2)! < 2^{2k+2}\left[(k+1)!\right]^2$$

دو طرف فرض استقرا را در $(2k+1)(2k+2)$ ضرب می‌کنیم:

$$(2k+2)(2k+1)(2k)! < (2k+2)(2k+1)2^{2k}(k!)^2$$

$$(2k+2)! < 2(k+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2$$

اکنون برای برقراری حکم استقرا، باید نشان دهیم:

$$2(k+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2 < 2^{2k+2}\left[(k+1)!\right]^2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow 2(k+1)(2k+1)2^{2k}(k!)^2 < 2^{2k}\times 2^2(k+1)^2(k!)^2$$

$$\Rightarrow 2k+1 < 2(k+1) \Rightarrow 1<2$$

چون نابرابری آخر، همواره درست است، پس نابرابری (۱) برقرار می‌باشد؛ درنتیجه، حکم استقرا به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

ز) درست است $n=1: \frac{1}{3\times 8} = \frac{1}{3(5\times 1+3)} = \frac{1}{3\times 8}$

فرض استقرا $n=k:$

$$\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+\dots+\frac{1}{(5k-2)(5k+3)} = \frac{k}{3(5k+3)}$$

حکم استقرا $n=k+1:$

$$\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+\dots+\frac{1}{(5k-2)(5k+3)}+\frac{1}{(5k+3)(5k+8)} = \frac{k+1}{3(5k+8)}$$

دو طرف فرض استقرا را با $\frac{1}{(5k+3)(5k+8)}$ جمع می‌کنیم:

$$\frac{1}{3\times 8}+\frac{1}{8\times 13}+\dots+\frac{1}{(5k-2)(5k+3)}+\frac{1}{(5k+3)(5k+8)}$$

$$= \frac{k}{3(5k+3)}+\frac{1}{(5k+3)(5k+8)} = \frac{k(5k+8)+3}{3(5k+3)(5k+8)}$$

$$= \frac{5k^2+8k+3}{3(5k+3)(5k+8)} = \frac{(5k+3)(k+1)}{3(5k+3)(5k+8)} = \frac{k+1}{3(5k+8)}$$

درنتیجه، حکم برای هر $n \in \mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $5^n - 1$ بر ۴ بخش‌پذیر است.

حل: ابتدا حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$5^n - 1 = 4k; \ (k \in \mathbb{Z})$$

درست است $n=1: 5^1 - 1 = 4k$

فرض استقرا $n=k: \ 5^k - 1 = 4k_1$

حکم استقرا $n=k+1: \ 5^{k+1} - 1 = 4k_2$

دو طرف فرض را در ۵ ضرب می‌کنیم. بنابراین داریم:

$$5^{k+1}-5=20k_1;\ \ 5^{k+1}-1=20k_1+4;$$

$$5^{k+1}-1=4\underbrace{(5k_1+1)}_{k_2\in Z}=4k_2$$

درنتیجه، حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $4^n+15n-1$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

حل: ابتدا حکم استقرا را به زبان ریاضی می‌نویسیم:

برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$4^n+15n-1=9k;\ (k\in Z)$$

درست است $n=1:\ 4^1+15\times1-1=9k;\ 18=9k$

فرض استقرا $n=k:\ 4^k+15k-1=9k_1$

حکم استقرا $n=(k+1):\ 4^{k+1}+15(k+1)-1=9k_2$

$$\Rightarrow 4^{k+1}+15k+14=9k_2$$

دو طرف فرض را در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$4(4^k+15k-1)=36k_1;\ 4^{k+1}+60k-4=36k_1$$

$$4^{k+1}+15k+45k-4+18=36k_1+18$$

$$4^{k+1}+15k+14=36k_1+18-45k$$

$$4^{k+1}+15k+14=9\underbrace{(4k_1+2-5k)}_{k_2\in Z}=9k_2$$

درنتیجه، حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $9^{n+1}-8n-9$ بر ۶۴ بخش‌پذیر است.

حل:

$$9^{n+1}-8n-9=64k;\ (k\in Z)$$

درست است $n=1:\ 9^{1+1}-8\times1-9=64k;\ 64=64k$

فرض استقرا $n=k:\ 9^{k+1}-8k-9=64k_1$

حکم استقرا $n=(k+1):$

$$9^{k+2}-8(k+1)-9=64k_2;\Rightarrow 9^{k+2}-8k-17=64k_2$$

دو طرف فرض استقرا را در ۹ ضرب می‌کنیم:

$$9(9^{k+1}-8k-9)=576k_1;\ \ 9^{k+2}-72k-81=576k_1$$

$$9^{k+2}-8k-17=576k_1+64k+64$$

$$9^{k+2}-8k-17=64\underbrace{(9k_1+k+1)}_{k_2\in Z}=64k_2$$

درنتیجه، حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است.

مثال: حاصل حدّ زیر را بیابید.

$$A=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

حل: ابتدا مجموع جملات را با استفاده از استدلال استقرایی حدس می‌زنیم. سپس حدس خود را به کمک معادل اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم و با استفاده از آن، این حدّ را محاسبه می‌کنیم.

$$n=1:\ \frac{1}{1\times2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$n=2:\ \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\frac{2}{3}=\frac{2}{2+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$n=3:\ \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\frac{3}{4}=\frac{3}{3+1}=\frac{n}{n+1}$$

با ادامهٔ روند استدلال استقرایی می‌توان حدس زد که مجموع جملات این حد برابر با $\frac{n}{n+1}$ است. اکنون حدس خود را به کمک معادل اصل استقرای ریاضی ثابت می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

درست است $n=1:\ \frac{1}{1\times2}=\frac{1}{1+1}$

فرض استقرا $n=k:\ \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

حکم استقرا $n=(k+1):\ \frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\dots+$

$$\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

به دو طرف فرض استقرا $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\dots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

پس حکم برای هر $n\in\mathbb{N}$ برقرار است. درنتیجه به درستی حدس خود پی می‌بریم و از آن در محاسبهٔ حد به صورت زیر استفاده می‌کنیم: $A=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

ادامه دارد.

زیرنویس

1. pierre fermat 2. Marin Mersenne

تابع‌های متناوب و روش‌های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن‌ها

برای دانش‌آموزان سال سوم متوسطه

هوشنگ شرقی

در شمارهٔ قبل، دربارهٔ تابع‌های متناوب بحث کردیم و ۱۲ روش از روش‌های محاسبهٔ دورهٔ تناوب آن‌ها را بیان کردیم. اکنون مطلب را ادامه می‌دهیم:

۱۳. اگر f و g توابعی متناوب با دورهٔ تناوب T_1 و T_2 باشند و T_1 و T_2 دارای کوچک‌ترین مضرب مشترک نباشند (مثلاً یکی گویا و دیگری گنگ باشد)، آن‌گاه $f \pm g$ و $f.g$ و f/g متناوب نیستند.

مثال: توابع $f(x)=\sin 2x$ و $g(x)=\cos \pi x$ هر دو متناوب و به ترتیب با دورهٔ تناوب $T_1=\pi$ و $T_2=2$ هستند. ولی مجموع آن‌ها، یعنی تابع با ضابطهٔ $h(x)=\sin 2x+\cos \pi x$ متناوب نیست.

۱۴. توابع با ضابطهٔ $f(x)=kx-[kx]$ و $f(x)=[kx]+[-kx]$ با دورهٔ تناوب $(k\neq 0)$ $T=\frac{1}{k}$ متناوبند.

$$f(x)=kx-[kx]\Rightarrow f(x+t)=k(x+t)-[k(x+t)]$$
$$=kx+kt-[kx+kt]=f(x)=kx-[kx]\Rightarrow$$
$$kt-[kx+kt]=0-[kx]$$

اگر $Kt\in Z$ باشد، می‌تواند از جزء صحیح خارج و از Kt بیرون جزء صحیح کم شود و یک برابری صحیح به‌دست آید. بنابراین، به ازای $Kt\in Z$ تابع متناوب است و چون کوچک‌ترین عدد صحیح و مثبت ۱ است. پس $Kt=1$ و $t=\frac{1}{k}$ استدلال برای تابع دوم، به عهدهٔ خواننده است.

مثال: دورهٔ تناوب هریک از توابع زیر را به‌دست آورید:

۱) $f(x)=2x-[2x]$

۲) $f(x)=tg\frac{\pi x}{2}+[3x]+[-3x]$

۳) $f(x)=tg\pi x-\cot g\pi x+3x-[3x]$

حل:

۱. مطابق قضیهٔ گفته شده، داریم: $T=\frac{1}{2}$

۲. برای $tg\frac{\pi x}{2}$، $T_1=2$ و برای $[3x]+[-3x]$،

$T_2 = \frac{1}{3}$ است و از آن‌جا:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 2 = \frac{6}{3} \\ T_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \frac{6}{3} \quad T = 2$$

۳. برطبق قضیهٔ ۱۱، تابع $g(x) = tg\pi x - \cot g\pi x$ با دورهٔ تناوب $T_1 = \frac{1}{2}$ متناوب است و $h(x) = 3x - [3x]$ نیز، با دورهٔ تناوب $T_2 = \frac{1}{3}$ متناوب است. بنابراین، داریم:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} = \frac{3}{6} \\ T_2 &= \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T = \frac{6}{6} \quad T = 1$$

تمرین: دورهٔ تناوب توابع زیر را به‌دست آورید:

۱) $f(x) = 3x - [3x] - \sin^3 \frac{\pi x}{6}$

۲) $f(x) = 5x - [3x] - [2x] + \sin^2 \frac{\pi x}{2}$

۳) $f(x) = [4x] + [-4x] + tg\frac{\pi x}{3} - \cot g\frac{\pi x}{3} - \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|$

۱۵. تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^{kx}$ با دورهٔ تناوب $T = \frac{2}{k}$ متناوب است (برهان به عهدهٔ خواننده).

مثال۱: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^{2x}$ برابر با $T = \frac{2}{2} = 1$ است.

مثال: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x) = (-1)^x (x - [x])$ را به‌دست آورید.

حل: تابع با ضابطهٔ $(-1)^x$ با دورهٔ تناوب $T_1 = 2$ متناوب است و تابع با ضابطهٔ $x - [x]$ با دورهٔ تناوب $T_2 = 1$ متناوب است. بنابراین: $T=2$

تمرین: دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $g(x) = (-1)^{2x}([3x] + [-3x])$ را به دست آورید.

۱۶. تابع ثابت، تابعی است متناوب با دورهٔ تناوب هر عدد حقیقی و مثبت.

برهان: روشن است که برای $f(x) = c$، $f(x+t) = c$ است. پس همواره $f(x+t) = f(x)$ کافی است $T > 0$ باشد.

این نمونه، نشان می‌دهد که ممکن است کوچک‌ترین دورهٔ تناوب را نتوان مشخص کرد.

حالت‌های خاص در تعیین دورهٔ تناوب توابع

طبقه‌بندی حالت‌های گوناگون در تعیین دورهٔ تناوب توابع، نمی‌تواند تمام‌کنندهٔ بحث باشد و در همه حال، باید نگاهی هم به تعریف اصلی تابع متناوب داشت. مثال‌های زیر می‌توانند گویای این مطلب باشند.

مثال: می‌خواهیم دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=tgx.cotgx$ را تعیین کنیم.

حل: اگر به این تابع، به چشم یک تابع مثلثاتی مرکب از tgx و cotgx بنگریم، شاید بتوان در نظر اول، دورهٔ تناوب آن را $T = \pi$ گرفت. ولی با کمی دقت می‌توان دریافت که با تبدیل x به $x + \frac{\pi}{2}$، tgx به ‎-cotgx و cotgx به ‎-tgx تبدیل می‌شوند. بنابراین حاصل ضرب آن‌ها تغییری نمی‌کند. یعنی: $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x)$. که دورهٔ تناوب آن، $T = \frac{\pi}{2}$ است. از طرف دیگر، ممکن است به نظر آید که این تابع، با تابع ثابت $f(x)=1$ برابر است که در این صورت دورهٔ تناوب آن، هر عدد حقیقی و مثبتی می‌تواند باشد. ولی چنین نیست. چراکه دامنهٔ تعریف این تابع با دامنهٔ تعریف تابع ثابت $f(x)=1$ یکسان نیست.

نمودار این تابع، ما را به درستی نتیجه‌گیری خود مطمئن می‌سازد؛ ابتدا دامنهٔ تعریف این تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = tgx \cot gx \Rightarrow \sin x \neq 0 \;,\; \cos x \neq 0$$

$$\Rightarrow x \neq k\pi \;,\; x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$$

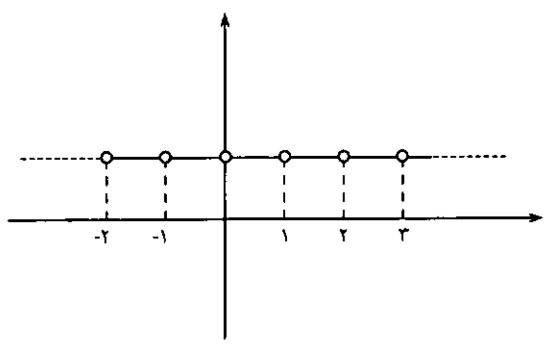
مجموعه جواب مخرج کسرها را، می‌توان به صورت $x=\frac{k\pi}{2}$ در نظر گرفت؛ یعنی:

$$Df = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2} | k \in Z\right\}$$

بنابراین، تابع فوق با تابع معرفی شده در زیر، برابر است:

$$f(x)=1 \qquad x \neq \frac{k\pi}{2} \qquad k \in Z$$

و نمودار آن، همان خط راست y=۱ است که در $x=\frac{k\pi}{2}$ دارای نقاط انفصال است:



و این نمودار نشان می‌دهد که دورهٔ تناوب تابع $\frac{\pi}{2}$ است.

مثال: می‌خواهیم دورهٔ تناوب تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sin^4 x+\cos^2 x$ را تعیین کنیم.

حل: اگر از قضیه‌های ۲ و ۴ برای به‌دست آوردن دورهٔ تناوب این تابع استفاده کنیم، به‌دست می‌آید: $T=\pi$. که دورهٔ تناوبی برای f به حساب می‌آید. ولی کوچک‌ترین دورهٔ تناوب این تابع $T=\frac{\pi}{2}$ است؛ زیرا $f(x+\frac{\pi}{2})=\cos^4 x+\sin^2 x$ که به صورت زیر می‌توان ثابت کرد، برابر ضابطهٔ f(x) است:

$$\cos^4 x+\sin^2 x=(1-\sin^2 x)^2+\sin^2 x=$$
$$1+\sin^4 x-2\sin^2 x+\sin^2 x=\sin^4 x+1-\sin^2 x=$$
$$\sin^4 x+\cos^2 x=f(x)$$

چند تعریف دیگر

تابع پاد متناوب یا ضد متناوب(۱)

تابع f را پاد متناوب گوئیم؛ هرگاه برای هر $x \in Df$، حداقل یک مقدار مثبت T یافت شود؛ به قسمی که: f(x+T)=f(x). T را دورهٔ تناوب آن می‌خوانیم.

برای مثال تابع f با ضابطهٔ f(x)=sinx و دورهٔ تناوب $T=\pi$، پاد متناوب است. یعنی:

$$f(x+\pi)=\sin(x+\pi)=-\sin x=-f(x)$$

تمرین۱: نشان دهید هریک از توابع $f(x)=\cos 2x$ و $g(x)=tg^3 x$ پاد متناوب هستند و دورهٔ تناوب آن‌ها را به دست آورید.

تمرین۲: ثابت کنید توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sin^2 x$ و $g(x)=x-[x]$ پاد متناوب نیستند؛ ولی تابع با ضابطهٔ $f(x)=(-1)^x$ پاد متناوب است.

تابع شبه متناوب(۲)

تابع f را شبه متناوب گوئیم؛ هرگاه برای هر $x \in Df$، دو مقدار مثبت T و T′ وجود داشته باشند؛ به قسمی که داشته باشیم:

$$f(x+t)=f(x)+T'$$

برای مثال، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ شبه متناوب است و در آن $T=T'=1$؛ زیرا اگر $f(x+t)=f(x)+T'$ باشد، می‌توان نوشت:

$$[x+T]=[x]+T'$$

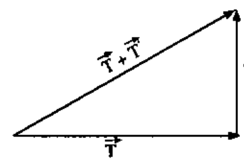
به روشنی می‌توان تشخیص داد که لازم است $T=T' \in Z$ باشد و از آن‌جا کوچک‌ترین مقدار T و T′ مساوی ۱ است.

تمرین: نشان دهید توابع با ضابطه‌های $f(x)=x+[x]$ و $g(x)=x+\sin x$ هردو شبه متناوب هستند و مقادیر T و T′ را برای آن‌ها بیابید.

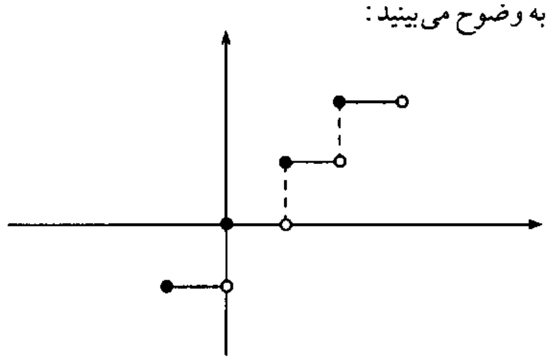
۱۷. تعبیر هندسی تابع شبه‌متناوب

تابع شبه‌متناوب نیز مانند تابع متناوب، خاصیت انتقالی دارد و نمودار آن را می‌توان در یک فاصله به طول T رسم

کرد. (مثلاً در فاصلهٔ $[0,T]$)، آن‌گاه آن را با یک بردار در جهت محور xها، به اندازهٔ طول T و با بردار دیگری در جهت محور yها به اندازهٔ طول T'، انتقال داد. یا این که با بردار برآیند این دو بردار، انتقال داد:

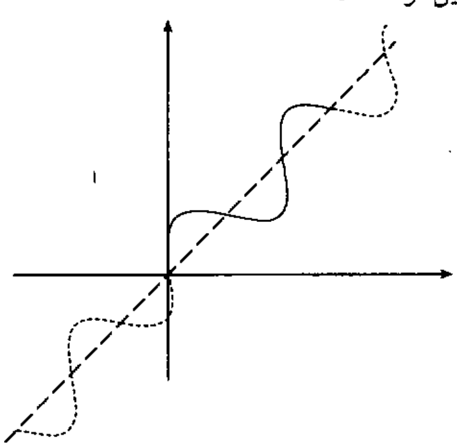


این موضوع را در نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = [x]$، به وضوح می‌بینید:



هریک از پاره‌خط‌ها را می‌توان با یک بردار به طول $\sqrt{2}$ در امتداد خطی که با محور xها زاویهٔ 45° می‌سازد، رسم کرد تا تمام نمودار تابع به دست آید:

همچنین در تابع شبه‌متناوب $f(x)=x+\sin x$ نیز همین گونه است:



در واقع، اگر این تابع حول محور xها و محور yها 45° در جهت مثبت مثلثاتی دوران کند، نمودار آن، به یک تابع متناوب تبدیل می‌شود.

ادب ریاضی

نیوتن ابتدا شاگردی متوسط بود و درخششی از خود نشان نمی‌داد. تا این که از حسن اتفاق، یکی از همسالانش با او به زدوخورد پرداخت و بر او غلبه کرد؛ به زبان ساده‌تر، کتک مفصلی به او زد. راهی برای انتقام مستقیم نبود؛ زیرا حریف خیلی از نیوتون نیرومندتر بود. ناچار تصمیم گرفت، رقیب را در درس عقب بگذارد. با این هدف، جدیت بیش‌تری در درس از خود نشان داد و چنان شوق و ذوقی به کار برد که شاگرد اول مدرسه شد. حق با فیگ‌لیؤ است. وی دربارهٔ نوجوانی که نیوتون را کتک زد، گفته است: «هیچ کس چنین مشت موفقیت‌آمیزی نزده است.»

جواب:



جدول ریاضی

✪ کامران مرادی

افقی

۱. ✽ اگر $f(x) = x + \frac{1}{x}$ باشد، حاصل $30f(f(3)) + 50$ چه قدر است؟

✽ اگر $36 = \binom{n}{2} - p(n,2)$ باشد، حاصل $\binom{n}{6}$ چه قدر است؟

✽ نامعادلهٔ «$x + y + z \leq 14$» چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۲. ✽ $\overline{abcdef}$ عددی است ۶ رقمی، به طوری که $\overline{ab}$ و $\overline{cd}$ و $\overline{ef}$ اعداد فرد متوالی هستند و مجموعشان ۶۹ است و $\overline{ab} < \overline{cd} < \overline{ef}$.

✽ حاصل مقدار مقابل چه قدر است؟

$$\binom{12}{9} + \binom{12}{10} + \binom{13}{11} + \binom{14}{12}$$

۳. ✽ حاصل $835^{1380} \underline{\underline{1380}}\ ?$ چه قدر است؟

✽ اگر $f(x) = x^5$ باشد، حاصل $37f(f'(1) - 3)$ چه قدر است؟

۴. ✽ تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعهٔ ۱۵ عضوی.

۵. ✽ به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را در قفسه‌ای چید.

✽ مجموع مقسوم‌علیه‌های ۴۳۲ .

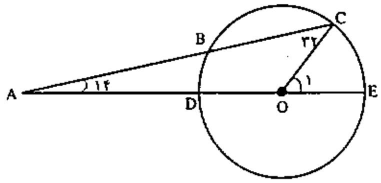
۶. ✽ $10x_1 + x_2$ به طوری که $x_1 < x_2$ و x_2 و x_1 جواب معادلهٔ $x^2 - 12x + 35 = 0$ باشند.

اگر از یک صفحهٔ فلزی به مساحت 150π یک قوطی استوانه‌ای شکل به حجم ماکزیمم بسازیم، اگر حجم این استوانه برابر با $a\pi$ باشد، آنگاه a چه قدر است؟

✽ عدد N در مبنای ۲ برابر است با ۱۱۰۰۰۱۱ . همین عدد در مبنای ۸ برابر است با a ، $a - 1$ چه قدر است؟

۷. ✽ $10x + y$ به طوری که x,y جواب معادله‌های
$$\begin{cases} 5x + y = 32 \\ x - y = 4 \end{cases}$$
باشند.

✽ اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BD}$ در شکل زیر:



۸. ✽ در یک تقسیم، اگر ۱۰۰ واحد به مقسوم و یک واحد به مقسوم‌علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و باقی‌مانده ۲ واحد زیاد می‌شود. اگر خارج قسمت a باشد، $8a + 32$ چه قدر است؟

✽ اگر $a \times 1377$ مربع کامل باشد، آنگاه کوچک‌ترین عدد a چه قدر است؛ $3a$ را در جدول بنویسید.

۹. ✽ به چند طریق می‌توان ۹ مهرهٔ متمایز را به طوری در ۶ جعبه قرار داد که در هر جعبه حداکثر ۹ مهره قرار بگیرد.

✽ کوچک‌ترین عددی که بر همهٔ اعداد یک رقمی بخش‌پذیر است، برابر است با a. حاصل $2a + 3$ را بنویسید.

۱۰. ✽ تعداد روابط بازتابی روی یک مجموعهٔ ۴ عضوی

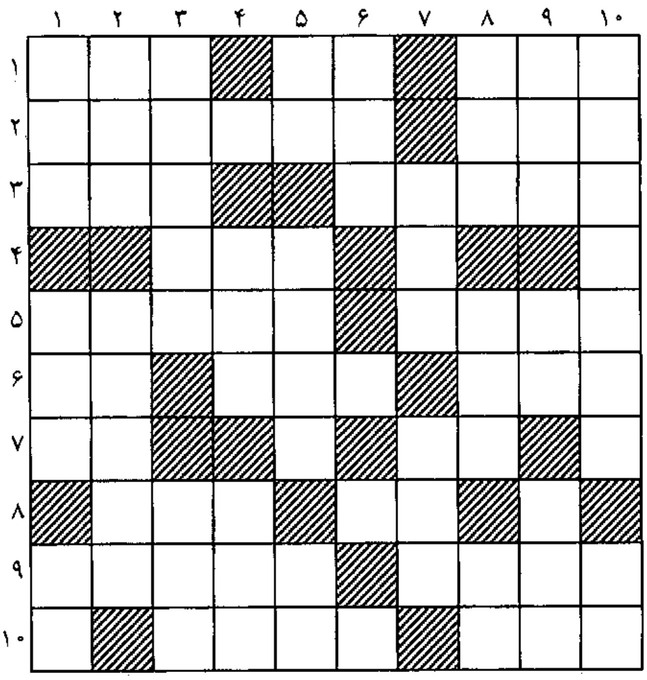
✽ تعداد روابط پاد متقارن روی یک مجموعهٔ ۳ عضوی

عمودی

۱. ✽ اگر $\int \frac{x+1}{x+4}\, dx = f(x) - g(x)$ باشد، $8f(12) = ?$.

✽ تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعهٔ هشت عضوی چندتاست؟

✽ در یک درخت از مرتبهٔ ۱۲ ، به طور کلی چند مسیر وجود دارد؟



۲. * حاصل $۱۳۰+\begin{vmatrix} ۱۰ & ۳ & ۱۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۳ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} ۱۵ & ۰ & ۱۰ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۰ & ۴ & ۵ \end{vmatrix}$ چه قدر است؟

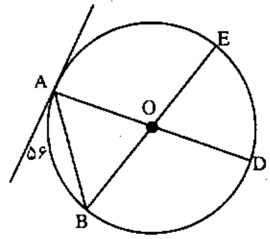
* به چند طریق می‌توان، ۴ دختر و ۵ پسر را طوری در کنار هم و در یک ردیف قرار داد که دخترها کنار هم باشند؟

۳. * اگر $f(x)=x^{۲}(x+۱)^{۲}+x^{۲}$ باشد، حاصل $۱۰۰f(f(۱))+۴۶$ چه قدر است؟

ـ رقم‌های ۳، ۲، ۱ را رقم‌های آبی و رقم‌های ۵، ۴ را رقم‌های قرمز و رقم‌های ۶، ۷، ۸، ۹ را رقم‌های سبز می‌نامیم. حالا بگویید چند عدد سه رقمی غیر همرنگ می‌توان ساخت.

۴. * اعداد ۱ تا ۶ را مرتب می‌کنیم، تعداد حالاتی که اعداد فرد در کنار هم و اعداد زوج در کنار هم هستند، برابر a است. ۲-۷a چه قدر است؟

۵. * در شکل مقابل اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AE}$ برابر است با a است، مقدار ۱۰a چه قدر است؟



* $۱۰x+y$ به طوری که x و y از معادله‌های روبه‌رو به دست می‌آیند: $\begin{cases} ۲x+۳y=۲۲ \\ ۳x+۲y=۲۸ \end{cases}$

* مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰

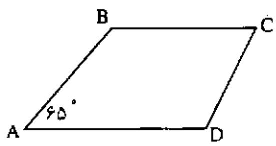
* دو رقم سمت راست حاصل $۲^{۲۰}+۳۳$

۶. * مجموع یازده عدد اول تصاعد زیر:

۱, ۸, ۱۶, ۲۴, ...

۷. * در یک گراف کامل از مرتبهٔ ۱۰، a دور به طول ۳ وجود دارد. a+۱ چه قدر است؟

* اگر چهار ضلعی ABCD قابل محاط در یک دایره باشد، اندازهٔ زاویهٔ C چه قدر است؟



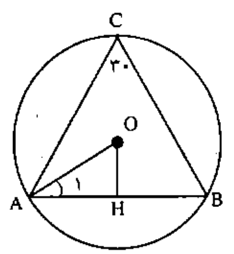
۸. * تعداد مقسوم‌علیه‌های صحیح و مثبت عدد $۲^{۸}\times۳^{۵}\times۵^{۳}\times۷^{۲}$

* در یک گراف کامل مرتبهٔ ۸، a دور به طول ۳ وجود دارد. ۶- ۴a چه قدر است.

* دو رقم سمت راست عدد $۳^{۲۰}+۱$.

۹. * حجم کره‌ای به شعاع ۶ برابر است با a. ۱۰-a چه قدر است؛ در صورتی که $\pi=۳$

ـ اندازهٔ $A_۱$ برابر است با a. ۱۶-a چه قدر است؟



* زاویهٔ بین دو نیم مماس بر منحنی $y=\sqrt{x^{۳}-۳x^{۲}}$ برابر است با a. ۴a+۱ چه قدر است؟

۱۰. * دو رقم سمت راست $۴۹^{۵۷۸}+۴$

* تعداد روابط متقارن روی یک مجموعهٔ چهار عضوی

* چند نقطه با مختصات صحیح و مثبت بر صفحهٔ $x+y+z=۱۰$ واقع است.

آیا قاعده هوپیتال همیشه کارآمد است؟!

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L \quad !??$$

در شمارهٔ قبل قاعده هوپیتال و شرایط استفاده از این قاعده بررسی شد، همچنین با چند هشدار تذکرهای لازم را در استفاده از این قاعده بیان کردیم، اینک در ادامهٔ مطلب:

قسمت دوم

مجتبی معارف‌وند
دبیر ریاضی اسلامشهر

برای دانش آموزان سال سوم و دورهٔ پیش دانشگاهی

معجون هوپیتال و روش‌های دیگر

در محاسبهٔ حدود، گاه استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال به‌تنهایی کارآمد و ثمربخش نیست. درحالی‌که به‌کارگیری روش‌های دیگری چون «تغییر متغییر»، «جانشانی مثلثاتی» و... به همراه قاعدهٔ هوپیتال می‌تواند راه‌گشا باشد و ما را به سرمنزل مقصود رهنمون شود.

به نمونه‌های زیر توجه کنید:

مثال ۱۱. مطلوب است محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{0}{0}$ را دارد، قاعدهٔ هوپیتال را به‌کار می‌بریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}}{1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{2x^3}=\cdots$$

و پس از n مرحله کاربرد قاعدهٔ هوپیتال، به کسر $\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{n!x^{n+1}}$ می‌رسیم. نتیجه می‌گیریم هرگز رفع ابهام

نخواهد شد. درحالی‌که با تغییر متغییر سادهٔ $t=\frac{1}{x}$ و یک‌بار کاربرد قاعدهٔ هوپیتال، نتیجهٔ مطلوب حاصل می‌شود؛ توجه کنید:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{-t}}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{t}}=0$$

مثال ۱۲. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\cot 2x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد، قاعدهٔ هوپیتال را به کار می‌بریم:

یادآوری:

$$\csc x=\frac{1}{\sin x}\to(\csc x)'=-\csc x\cot x;(\cot x)'=-\csc^2 x$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\cot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\csc^2 x}{2\csc^2 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\csc^2 x.\cot x}{\csc^2 2x.\cot 2x}=\cdots$$

هر کاربرد قاعدهٔ هوپیتال، به صورت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ منجر می‌شود درحالی‌که با استفادهٔ ترکیبی از جانشانی مثلثاتی و قاعده هوپیتال، حد مذکور به‌راحتی محاسبه می‌شود؛ توجه کنید:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cot x}{\cot 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan x}}{\frac{1}{\tan 2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2(1+\tan^2 2x)}{1+\tan^2 x}=2$$

مثال ۱۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}})$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\infty-\infty$ را دارد و می‌توان آن را به صورت $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}$ نوشت و به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ تبدیل کرد. استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال ثمربخش نیست. درحالی‌که گویا کردن و ضرب صورت و مخرج در عبارتی یکسان به همراه هوپیتال می‌تواند راه‌گشا باشد، توجه کنید:

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}})=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}\sqrt{\sin x}}\times\frac{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}+\sqrt{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x\sqrt{\sin x}+\sqrt{x}\sin x}\times\frac{\frac{1}{x^{3/2}}}{\frac{1}{x^{3/2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x-\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x}}\quad(※)$$

حال از آن‌جا که داریم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\sin x}{x}}+\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=2$$

اکنون کافی است سعی کنیم حد صورت کسر (※) را بیابیم.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\frac{3}{4}x^{\frac{-1}{2}}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{4}{3}\sqrt{x}\sin x=0$$

بنابراین طبق قضیهٔ حد خارج قسمت، حد کسر (※) برابر صفر است و درنتیجه:

$$\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\sqrt{\sin x}}-\frac{1}{\sqrt{x}})=0$$

تمرین ۲. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0^+}x^2\ln\sin x$.

قاعدهٔ هوپیتال، ملال‌آور و خسته‌کننده

در بعضی مسائل، استفاده از قاعدهٔ هوپیتال میسر است، اما استفاده از آن به‌طور مکرر، گاه ملال‌آور و خسته‌کننده است و گاه مسأله را دشوارتر می‌کند. درحالی‌که روش‌های دیگر می‌توانند مفیدتر، مؤثرتر و ساده‌تر باشند و ما را سریع‌تر به جواب رهنمون شوند. به این نمونه‌ها توجه کنید:

مثال ۱۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}-3\sin x}{3x^5+4x^{10}}$.

حل: صورت و مخرج کسر فوق را بر x^{10} تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{10}-3\sin x}{3x^5+4x^{10}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-(\frac{3\sin x}{x^{10}})}{\frac{3}{x^5}+4}=\frac{1}{4}$$

درحالی‌که استفادهٔ مکرر (۱۰ مرتبه) از قاعدهٔ هوپیتال بسیار ملال‌آور و خسته‌کننده خواهد بود.

مثال ۱۵ . مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x.\tan 2x.\tan 3x\cdots\tan nx}{x^n}.$$

حل: کسر فوق را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم و از قضیهٔ $\lim_{u\to 0}\frac{\tan u}{u}=1$ سود می‌بریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x.\tan 2x.\tan 3x\cdots\tan nx}{x^n}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}.\frac{2\tan 2x}{2x}.\frac{3\tan 3x}{3x}\cdots\frac{n\tan nx}{nx}$$

درحالی‌که n بار استفاده از قاعدهٔ هوپیتال، هم خسته‌کننده است و هم در هر مرحله، کار سخت‌تر، دشوارتر و پیچیده‌تر خواهد شد.

عدم کارایی قاعده هوپیتال

گاه در بعضی مسائل از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم، اما رفع ابهام صورت نمی‌گیرد. چندین بار قاعده را به کار می‌بریم، اما باز هم نتیجه‌ای حاصل نمی‌آید و صورت‌های مبهم همچنان تکرار می‌شوند. در مواردی نیز صورت مسأله به مسأله‌ای بسیار پیچیده‌تر بدل می‌شود. درحالی‌که با استفاده از روش‌های دیگری چون تغییر متغییر، جانشانی مثلثاتی، «گویا کردن»، «حذف عامل ابهام از صورت و مخرج» و... بدون هیچ نیازی به قاعدهٔ هوپیتال، حدود مورد نظر به سادگی و زیبایی محاسبه می‌شوند. به این نمونه‌ها توجه کنید:

مثال ۱۶ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعدهٔ هوپیتال را به کار می‌بریم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\cdots$$

همان طور که مشاهده می‌شود، استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال سودی ندارد و دچار مشکل می‌شویم. درحالی‌که با یک فاکتورگیری ساده و حذف عامل ابهام از صورت و مخرج، حد کسر فوق به سادگی محاسبه می‌شود. ملاحظه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(\frac{1}{x^2}+1)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=1$$

مثال ۱۷ . مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعدهٔ هوپیتال را به کار می‌بریم:

یادآوری:

$$\sec x=\frac{1}{\cos x}\to(\sec x)'=\sec x.\tan x;(\tan x)'=\sec^2 x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec x.\tan x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x.\tan x}{\sec^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \cdots$$

همان طور که مشاهده می شود، استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال ثمربخش نیست و دچار مشکل می شویم.

درحالی که یک جانشانی مثلثاتی، محاسبهٔ حد فوق را زیبا و ساده می کند. ملاحظه کنید:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x.\cos x}{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$$

مثال ۱۸. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{x+1}$.

حل: حد فوق، حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ را دارد. قاعدهٔ هوپیتال را به کار می بریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{10}{2\sqrt{10x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{10\sqrt{x+1}}{\sqrt{10x+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{10}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{10}{2\sqrt{10x+1}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}} = \cdots$$

همان طور که مشاهده می شود، استفادهٔ مکرر از قاعدهٔ هوپیتال به نتیجه نمی انجامد و دچار مشکل می شویم، درحالی که فاکتورگیری و حذف عامل ابهام از صورت و مخرج کسر می تواند راه گشا باشد. ملاحظه کنید:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{10x+1}}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x(10+\frac{1}{x})}}{\sqrt{x(1+\frac{1}{x})}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt{10+\frac{1}{x}}}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{10+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \sqrt{10}$$

تمرین ۳. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt{x}+5}$.

تمرین ۴. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}}{x}$.

تمرین ۵. مطلوب است محاسبهٔ $\lim_{x\to 0} \frac{\csc x}{\cot x}$.

تمرین ۶. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{\sin(\sin x)} - \frac{1}{\sin(\sin(\sin x))}\right)$$

راهنمایی: قاعدهٔ هوپیتال برای محاسبهٔ این حد کارایی ندارد. سعی کنید از روش دیگری آن را محاسبه کنید.

نتیجه گیری

ریاضیات اقیانوس بیکرانی از مسائل و حل آن هاست و اصل ها، تعریف ها، مفهوم ها، قضیه ها، برهان ها، نظریه ها، دستورها و روش ها، همگی برای حل مسائل موجودیت یافته اند. اما آیا این قضیه ها و دستورها همیشه و برای همهٔ مسائل کارامد هستند؟ آیا نباید شرایط و ضوابط حاکم بر آن ها، مورد توجه قرار گیرند؟

قاعدهٔ هوپیتال، نمونه ای از این قضیه هاست که قدرت و کارایی فوق العاده و معجزه آسایی در محاسبهٔ حدود مبهم دارد و انکار آن کاری عبث و بیهوده است. اما دارای شرایط و ضوابط خاصی است که در حین استفاده، باید مورد توجه قرار گیرند و نیز باید پذیرفت که در حل برخی از مسائل، محاسبهٔ حدود، نه تنها مفید و کارامد نیست، بلکه باعث پیچیدگی و دشواری بیش تر مسأله می شود. درحالی که

روش‌ها و دستورات دیگری می‌توانند به سهولت و زیبایی مسأله را حل کنند. بنابراین، در برخورد با مسائل ریاضی، باید خود را به ابزار، قضیه‌ها و شیوه‌های گوناگونی مجهز کنیم و با فکر و اندیشه‌ای باز، برای حل هر مسأله، از راه و روش و ابزار مناسب آن سود بریم. به امید کسب چنین توانایی و مهارتی.

منابع

۱. تلگینی، محمود و خردپژوه، فروزان و رجالی، علی وقیاسیان، احمد. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). چاپ پنجم. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران. ۱۳۷۸.

۲. هاورد و. ایوز. آشنایی با تاریخ ریاضیات. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. جلد دوم. چاپ اول. مرکز نشر دانشگاهی تهران. ۱۳۶۸.

۳. تمپل بل، اریک. ریاضی‌دانان نامی. ترجمهٔ حسن صفاری. چاپ سوم. امیرکبیر. ۱۳۷۱.

۴. (زیر نظر) بیرشک، احمد. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. چاپ اول. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی بنیاد. دانشنامه فارسی. ۱۳۷۴.

۵. آیرس، فرانک. نظریه و مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و غلامرضا زبانندان. چاپ اول. فارابی. ۱۳۷۲.

۶. جهانشاهی، محمد. اصول فراگیری و آموزش ریاضیات دبیرستانی و پیش‌دانشگاهی. چاپ اول. مدرسه. ۱۳۷۷.

۷. آپوستل، تام. م. حساب دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ علیرضا ذکایی و همکاران. جلد اول. چاپ چهارم. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۹.

۸. نیکولسکی، اس. ام. دوره‌ای بر آنالیز ریاضی. ترجمهٔ بهمن هنری و همکاران. چاپ اول. دانشگاه امام رضا(ع). ۱۳۷۶.

۹. استورات، جیمز. حسابگان دیفرانسیل و انتگرال. ترجمهٔ محمدحسین علامت‌ساز و همکاران. جلد اول. چاپ دوم. دانشگاه اصفهان. ۱۳۷۸.

۱۰. آذرپناه، فریبرز. روش‌های تحدید حد و تعویض متغیر در محاسبهٔ حد. رشد آموزش ریاضی. شمارهٔ ۴۹، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. پائیز ۱۳۷۶.

۱۱. پارزینسکی، ویلیام ر. وزیپس، فیلیپ. آشنایی با آنالیز ریاضی. ترجمهٔ سید محمود طالبیان. چاپ دوم. آستان قدس رضوی. ۱۳۷۵.

۱۲. توماس، جرج. بی و فینی، راس. ال. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی. ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده و داریوش بهمردی. جلد اول. چاپ چهارم. پژوهش. ۱۳۷۲.

۱۳. بارتل، رابرت. جی، دانلدر، شربرت. آشنایی با آنالیز حقیقی. ترجمهٔ دکتر طاهر قاسمی هنری و دکتر حکیمه ماهیار. چاپ اول. مبتکران. ۱۳۷۸.

نتایج بازی فوتبال

این جدول، رده‌بندی مسابقهٔ فوتبالی را که طی شش بازی انجام گرفته است، بین تیم‌های (الف)، (ب)، (ج) و (د) نشان می‌دهد. در این مسابقه، هر تیم با سه تیم حریف بازی کرده است. به نظر شما نتایج دو به دوی تیم‌ها چیست؟

	برد	باخت	تساوی	گل زده	گل خورده
الف	۲	۰	۱	۵	۲
ب	۲	۱	۰	۶	۳
ج	۱	۲	۰	۱	۳
د	۰	۲	۱	۰	۴

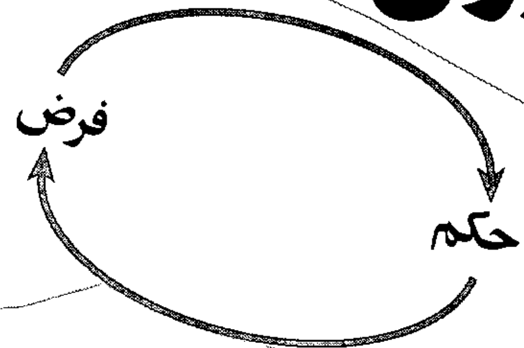
الف) ب = ______ - ______ ب) ج = ______ - ______

الف) ج = ______ - ______ ب) د = ______ - ______

الف) د = ______ - ______ ج) د = ______ - ______

پرویز شهریاری

پیشامد نامنتظر در قضیهٔ وارون





برای دانش‌آموزان سال اوّل و دوم متوسطه

می‌دانیم قضیهٔ وارون یک قضیه، قضیه‌ای است که حکم آن، فرض قضیهٔ اصلی، و فرض آن، حکم قضیهٔ اصلی باشد. در این جا شش قضیهٔ مستقیم داده شده است. همهٔ آن‌ها ساده و برای دانش‌آموزان سال‌های اول دبیرستان شناخته شده‌اند. تلاش کنید وارون این قضیه را تنظیم و ثابت کنید. شما درمی‌یابید که وارون قضیه‌ها، به مراتب از قضیه‌های مستقیم دشوارترند.

قضیه‌های مستقیم

۱. در ذوزنقه، پاره‌خط راستی که میان دو قاعده را به هم وصل کند، ذوزنقه را به دو شکل هم ارز (با مساحت‌های برابر) تقسیم می‌کند.

۲. در متوازی‌الاضلاع، مجموع فاصله‌های بین میان‌های ضلع‌های روبه‌رو، برابر با نصف محیط است.

۳. اگر H نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها در مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC باشد، داریم:

$$H\hat{B}A = H\hat{C}A \quad , \quad H\hat{A}B = H\hat{C}B$$

۴. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC باشد، آن وقت:

$$O\hat{A}B - O\hat{B}A = O\hat{B}C - O\hat{C}B = O\hat{C}A - O\hat{A}C$$

۵. در مثلث متساوی‌الساقین، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث، روی «خط راست اویلر» است (خط راست اویلر، خط راستی است که از نقطهٔ برخورد میانه‌ها و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث گذشته باشد.)

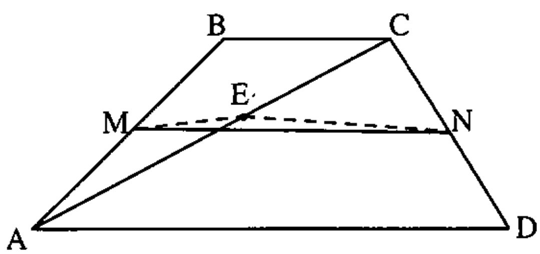
۶. در مثلث متساوی‌الساقین، نیمسازها زاویه‌های مجاور به قاعده با هم برابرند.

راهنمایی برای اثبات قضیه‌های وارون

۱. در چهارضلعی ABCD، نقطهٔ M را وسط AD و نقطهٔ N را وسط BC بگیرید. ثابت کنید مساحت مثلث ABN با مساحت مثلث DCN برابر است. در این صورت، AD با BC موازی، یعنی ABCD ذوزنقه است.

۲. ثابت کنید چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است (شکل ۱). نقطه‌های M، N و E را وسط پاره‌خط‌های راست AB، DC و AC بگیرید. در این صورت AD موازی EN و طول EN برابر نصف طول AD خواهد شد. همچنین، BC موازی ME و طول ME برابر نصف طول BC خواهد شد. از آن‌جا که:

$MN \le ME + EN$



شکل۱

پس: $MN \le \frac{AD+BC}{۲}$. L و K را وسط‌های ضلع‌های BC و AD بگیرید. شبیه پیش به‌دست می‌آید: $LK \le \frac{AB+CD}{۲}$.

بنا به فرض: $MN + LK = \frac{AB+BC+CD+AD}{۲}$

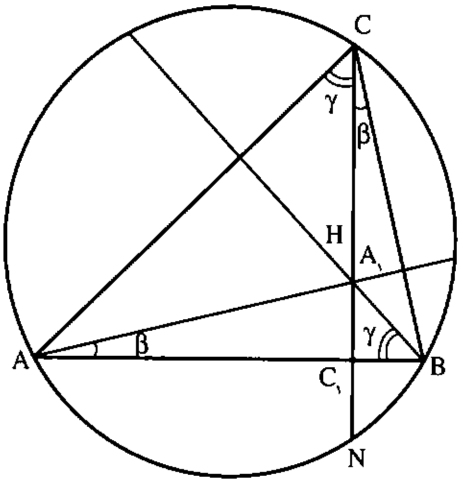
بنابراین باید این دو برابری درست باشد:

$MN = \frac{AD+BC}{۲}$, $LK = \frac{AB+CD}{۲}$

و این تنها وقتی ممکن است که نقطهٔ مورد نظر به پاره‌خط‌های راست MN و LK متعلق باشد. از این‌جا:

$BC \parallel MN \parallel AD$, $AB \parallel LK \parallel CD$

۳. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کنید و پاره‌خط راست $CC_۱$ را تا نقطهٔ N، محل برخورد با دایره امتداد دهید(شکل۲).



شکل۲

ثابت کنید، اگر داشته باشید:

$H\hat{A}B = H\hat{C}B$, $H\hat{B}A = H\hat{C}A$

آن‌وقت نقطهٔ H، محل برخورد ارتفاع‌های مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC است. چون $B\hat{A}N = B\hat{C}N$ ، پس $H\hat{A}B = B\hat{A}N$ ؛ به همین ترتیب $H\hat{B}A = A\hat{B}N$ که از آن نتیجه می‌شود: $C_۱H$ بر AB عمود است. ثابت کنید زاویهٔ $AA_۱C$ برابر ۹۰ درجه است. زاویهٔ HAC را α ، زاویهٔ $HAC_۱$ را زاویهٔ β و زاویهٔ HBA را γ بنامید. چون مثلث $ACC_۱$ قائم‌الزاویه است،

پس: $\alpha + \beta + \gamma = ۹۰^\circ$

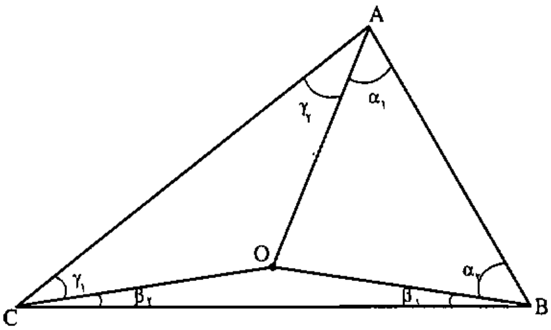
از قائم‌الزاویه بودن مثلث $CC_۱B$ استفاده و ثابت کنید: زاویهٔ HBC برابر α است. زاویهٔ $AA_۱B$ را برابر x می‌گیریم. در مثلث $AA_۱B$ داریم:

$x + \alpha + \beta + \gamma = ۱۸۰^\circ$

که از آن برای x، مقدار ۹۰ درجه به دست می‌آید.

۴. ثابت کنید، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است (شکل ۳).

زاویه‌هایی را که در فرض مسأله نام برده شده است، $\alpha_۱$ ، $\alpha_۲$ ، $\beta_۱$ ، $\beta_۲$ ، $\gamma_۱$ و $\gamma_۲$ می‌نامیم. برای معلوم بودن



شکل ۳

وضع، فرض می‌کنیم:

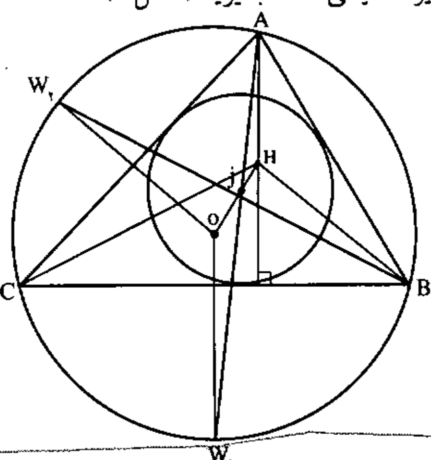
$$\alpha_1 > \alpha_2,\ \beta_1 > \beta_2,\ \gamma_1 > \gamma_2$$

در این صورت، با توجه به شکل داریم:

$$OB > OA,\ OC > OB,\ OA > OC$$

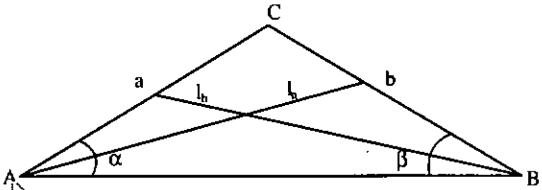
که از آن به‌دست می‌آید: $OB > OC$ و به تناقض می‌رسیم.

۵. ثابت کنید اگر مرکز دایرهٔ محاطی در مثلث، یعنی j روی خط راست اویلر باشد، مثلث، متساوی‌الساقین است. O را مرکز دایرهٔ محیطی، J را مرکز دایرهٔ محاطی، H را نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها، M را وسط ضلع BC، W_1 را نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ BAC با محیط دایرهٔ محیطی مثلث AB، و W_2 را نقطهٔ برخورد نیمساز زاویهٔ ABC با محیط دایرهٔ محیطی مثلث بگیرید (شکل ۴).



شکل ۴

به مثلث‌های متشابه OW_1J، HAJ، OW_2J و HBJ توجه کنید: به دست می‌آورید: AC=BC.



شکل ۵

۶. تنظیم قضیهٔ وارون به این ترتیب است: اگر در مثلث ABC، نیمسازهای درونی L_a و L_b برابر باشند، ضلع‌های ba هم طولی برابر دارند: a=b (شکل ۵).

اثبات را با برهان خُلف انجام می‌دهیم. برای نمونه فرض کنید: a>b. در این صورت $\alpha > \beta$ (در مثلث زاویهٔ بزرگ‌تر روبه‌روی ضلع بزرگ‌تر است). طول نیمساز در مثلث با این دستورها به دست می‌آید:

$$L_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},\ L_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2}$$

این دو دستور را ثابت کنید.

چون $\alpha > \beta$ و در ضمن $\pi > \alpha > 0$ و $\pi > \beta > 0$، بنابراین $\cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$. به جز این، $\frac{a}{a+c} < \frac{b}{b+c}$. در واقع.

$$\frac{a}{a+c} - \frac{b}{b+c} = \frac{c(a-b)}{(a+c)(b+c)} > 0$$

بنابراین به‌دست می‌آید: $L_a < L_b$ که با فرض تناقض دارد.

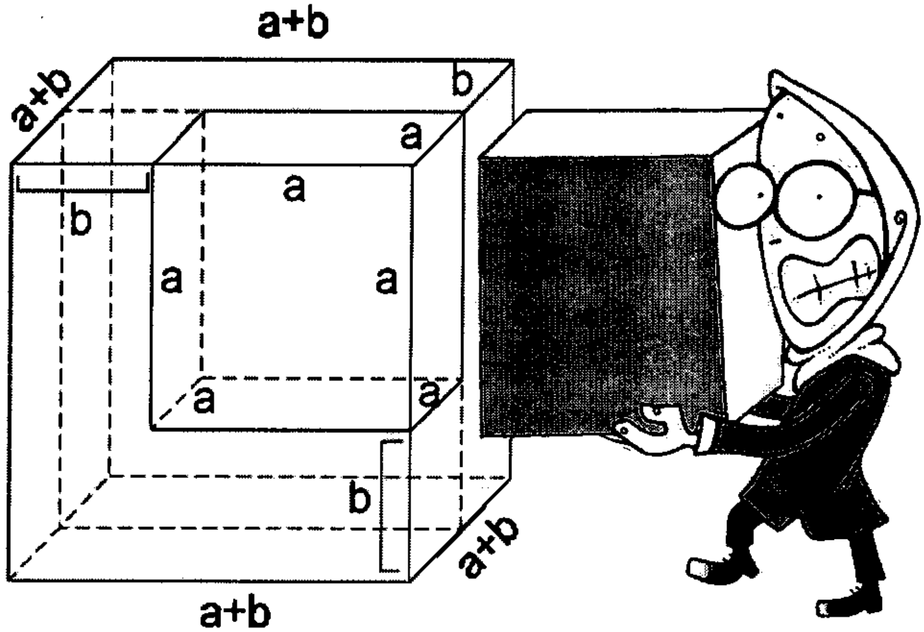
این‌ها نمونه‌هایی از قضیه‌هایی هستند که اثبات وارون آن‌ها، دشوار است. آیا شما چنین قضیه‌هایی را به‌خاطر دارید؟



اثبات اتحادها به کمک هندسه

برای دانش‌آموزان سال اول متوسطه

احمد قندهاری



مثال۱ : تساوی $4x - 12 = 0$ را در نظر می‌گیریم. اگر بنویسیم: $4x = 12$، و دو طرف تساوی را بر ۴ تقسیم کنیم، آن‌گاه $x = 4$ عدد ۴، تنها عددی است که اگر به جای x در تساوی $4x - 12 = 0$ قرار گیرد، تساوی برقرار است.

مثال۲ : حال اگر تساوی $(2x - 4)(x - 5) = 0$ را در نظر بگیریم، باتوجه به این که وقتی حاصل ضرب دوپرانتز برابر صفر است، می‌گوییم: یا پرانتز اول برابر صفر است یا پرانتز دوم، لذا می‌نویسیم:

الف) $2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$

یا

ب) $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

اعداد ۲ و ۳، تنها دو عددی هستند که اگر هریک از آن‌ها را در تساوی $(2x - 4)(x - 5) = 0$ قرار دهیم، تساوی برقرار خواهد شد. تساوی $4x - 12 = 0$ و تساوی $(2x - 4)(x - 5) = 0$ را «معادله» می‌گوییم. پس معادله، یک تساوی است که به ازای یک، دو یا چند مقدار مشخص که همان جواب یا جواب‌های معادله هستند، برقرار است.

تساوی $4x - 12 = 0$ را معادلهٔ درجه اول و تساوی $(2x - 4)(x - 5) = 0$ را معادلهٔ درجه دوم می‌گوییم.

اتحاد

مثال۱ : تساوی $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ را در نظر می‌گیریم. اگر در این تساوی، به‌جای x عدد ۲ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$4 - 9 = (2 - 3)(2 + 3) \Rightarrow -5 = -5$$

حال اگر به جای x، عدد ۷- را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$49 - 9 = (-7 - 3)(-7 + 3) \Rightarrow 40 = 40$$

چنانچه به جای x ، عدد $\frac{5}{2}$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{25}{4} - 9 = (\frac{5}{2} - 3)(\frac{5}{2} + 3)$$
$$\Rightarrow \frac{25 - 36}{4} = (\frac{5 - 6}{2})(\frac{5 + 6}{2})$$
$$\Rightarrow \frac{11}{4} = (\frac{-1}{2})(\frac{11}{2}) \Rightarrow \frac{11}{4} = \frac{11}{4}$$

و اگر به جای x، $\sqrt{3}$ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(\sqrt{3})^2 - 9 = (\sqrt{3} - 3)(\sqrt{3} + 3)$$
$$\Rightarrow 3 - 9 = 3 + 3\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 9$$
$$\Rightarrow -6 = -6$$

ملاحظه می‌کنیم، اگر در تساوی بالا به جای x، هر عددی را قرار دهیم، دو طرف تساوی به دو عدد مساوی تبدیل می‌شود که در این صورت می‌گوییم، تساوی برقرار است.

تساوی $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ را اتحاد می‌گوییم و برای آن‌که تفاوتی با معادله داشته باشد، بهتر است بنویسیم:

$$x^2 - 9 \equiv (x - 3)(x + 3)$$

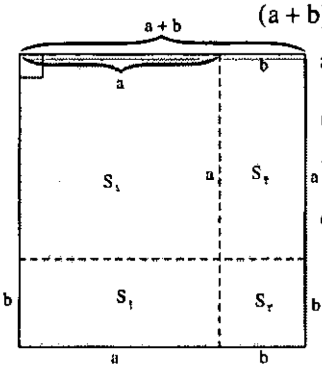
تعریف اتحاد

اگر دو طرف یک تساوی، به ازای همهٔ مقادیر عددی که به‌جای حرف یا حروف آن قرار دهیم؛ به دو عدد مساوی تبدیل شوند. آن را «اتحاد» می‌گوییم در این مقاله قصد داریم، همهٔ اتحادهای اصلی را به کمک هندسه ثابت کنیم.

۱. اثبات اتحاد اول (مربع مجموع دو جمله):

$$(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 + 2ab$$

مربعی به ضلع a+b مطابق شکلْ مقابل رسم می‌کنیم. با توجه به اندازه‌هایی که در شکل نشان داده شده است، می‌توان نوشت:



$(a + b)^2$ = اندازهٔ مساحت مربع اصلی

= مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع اصلی

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

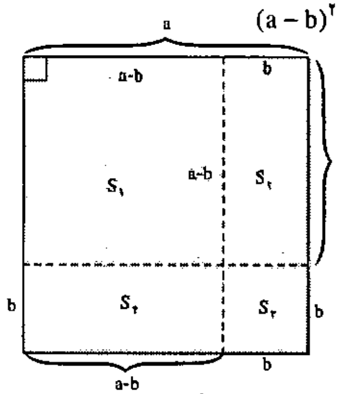
= مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع اصلی

$$a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$\Rightarrow \boxed{(a + b)^2 \equiv a^2 + b^2 + 2ab}$$

۲. اثبات اتحاد دوم (مربع تفاضل دو جمله):

$$(a - b)^2 \equiv a^2 + b^2 - 2ab$$

مربعی به ضلع a را مطابق شکل در نظر می‌گیریم. به اندازه‌هایی که در شکل نوشته شده است، توجه فرمایید.



a^2 = اندازهٔ مساحت مربع اصلی

= مجموع اندازه‌های مساحت‌های درون مربع اصلی

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4$$

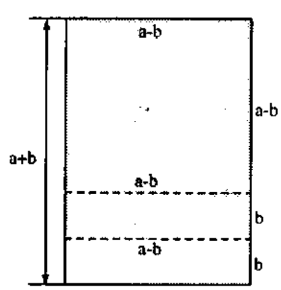
= مجموع اندازه‌های مساحت‌های درون مربع اصلی

$$(a - b)^2 + b(a - b) + b^2 + b(a - b) \Rightarrow$$
$$(a - b)^2 + b(a - b) + b^2 + b(a - b) = a^2$$
$$(a - b)^2 + ab - b^2 + b^2 + ab - b^2 = a^2$$
$$\Rightarrow (a - b)^2 + 2ab - b^2 = a^2$$
$$\Rightarrow \boxed{(a - b)^2 \equiv a^2 + b^2 - 2ab}$$

۳. اثبات اتحاد سوم (اتحاد مزدوج):

$$a^2 - b^2 \equiv (a + b)(a - b)$$

مستطیلی به اضلاع (a-b) و (a+b)، مطابق شکل در نظر می‌گیریم. به اندازه‌هایی که در شکل نوشته شده است، توجه فرمایید.



$$(a-b)(a-b) = \text{اندازهٔ مساحت مستطیل اصلی}$$

= مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

$$(a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b)$$

$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = (a-b)^2 + b(a-b) + b(a-b)$$

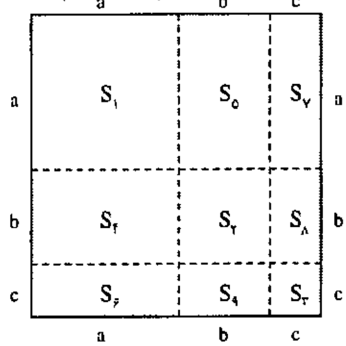
$$\Rightarrow (a-b)(a+b) = a^2 + b^2 - 2ab + ab - b^2 + ab - b^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a^2 - b^2 \equiv (a-b)(a+b)}$$

۴. اثبات اتحاد چهارم (مربع مجموع سه جمله):

$$(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

مربعی به ضلع (a+b+c) مطابق شکل رسم می‌کنیم. با توجه به اندازه‌هایی که در شکل نشان داده شده است، می‌توان نوشت:



$$(a+b+c)^2 = \text{اندازهٔ مساحت مربع اصلی}$$

$$= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9$$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع

$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab + ab + ac + ac + bc + bc$$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)$$

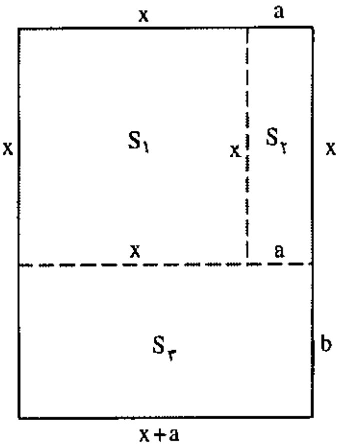
مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مربع

$$\boxed{(a+b+c)^2 \equiv a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc)}$$

۵. اثبات اتحاد جمله مشترک:

$$(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$$

مستطیلی به اضلاع (x+a) و (x+b) مطابق شکل رسم می‌کنیم. به اندازه‌هایی که در شکل نوشته شده است، توجه



فرمایید.

$$(x+a)(x+b) = \text{اندازهٔ مساحت مستطیل اصلی}$$

$$= S_1 + S_2 + S_3$$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

$$= x^2 + ax + b(x+a)$$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

$$= x^2 + ax + bx + ab$$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

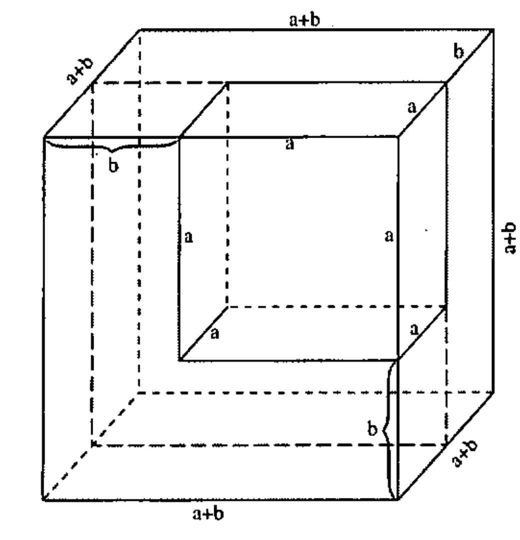
$$= x^2 + (a+b)x + ab \Rightarrow$$

مجموع اندازه‌های شکل‌های داخل مستطیل اصلی

$$\boxed{(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab}$$

۶. اثبات اتحاد مکعب مجموع دو جمله:

$$(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$



مکعبی به طول یال (a+b) مطابق شکل در نظر می‌گیریم. تصور فضایی این نتایج قدری مشکل است، مگر آن‌که جسم را بسازیم. به هرحال، در داخل جسم حاصل یک مکعب به طول یال a، یک مکعب به طول یال b و سه مکعب مستطیل به طول یال‌های (a+b)، a و b وجود دارد.

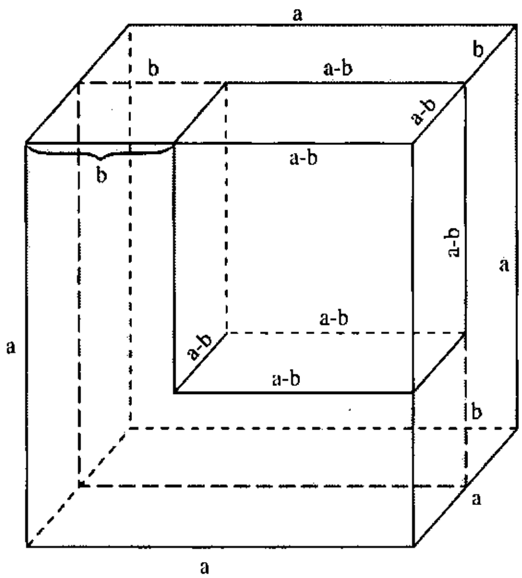
با توجه به این که اگر طول یال مکعبی x باشد، حجم آن x^3 است و اگر طول یال‌های مکعب مستطیلی x، y و z باشد، حجم آن، x.yz است، پس می‌توان نوشت:

$(a+b)^3$ = اندازهٔ حجم مکعب اصلی

$a^3+b^3+3ab(a+b) \Rightarrow$ = مجموع اندازه‌های حجم‌های مکعب‌ها و مکعب مستطیل داخلی

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) \Rightarrow$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2}$$



۷. اثبات اتحاد مکعب تفاضل دو جمله:

$$(a-b)^3 \equiv a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$$

مکعبی به طول یال a می‌سازیم. سپس در گوشهٔ مکعب شکل، مکعبی به طول یال (a-b) می‌سازیم. مطابق شکل، همان‌طوری که قبلاً گفته شد، تصور فضایی آن فوق‌العاده مشکل است. بنده خودم مکعب‌ها را با این شرایط ساختم و به نتایج زیر دست یافتم.

در داخل مکعب اصلی، یک مکعب به طول یال (a-b)، یک مکعب به طول یال b و سه مکعب مستطیل به طول یال‌های (a-b) و a و b به‌وجود می‌آید.

با توجه به توضیح مورد ۶، می‌توان نوشت:

a^3 = اندازهٔ حجم مکعب اصلی

$(a-b)^3+b^3+3ab(a-b)$ = مجموع اندازه‌های مکعب‌های داخلی و مکعب‌مستطیل‌های داخلی

$(a-b)^3+b^3+3a^2b-3ab^2$ = مجموع اندازه‌های مکعب‌های داخلی و مکعب‌مستطیل‌های داخلی

$$\Rightarrow a^3 = (a-b)^3+b^3+3a^2b-3ab^2$$

$$\Rightarrow \boxed{(a-b)^3 \equiv a^3-b^3-3a^2b+3ab^2}$$

مسائل مسابقه‌ای

احمد قندهاری

از بین پاسخ‌های درست، به سه نفر برای حل یک مسأله جایزه داده می‌شود.

برای سال دوم رشتهٔ ریاضی

اگر $x-\frac{1}{x}=2$ و $k=x^8-408x$، مقدار k را بیابید.

برای سال سوم ریاضی

اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^{12}+\frac{1}{x^{12}}$، آن‌گاه $f(\sqrt{3})$ را بیابید.

برای پیش‌دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

ثابت کنید:

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x+\frac{2}{3} \right\rfloor$$

مکان‌های هندسی دو نقطه‌ای

دکتر احمد شرف‌الدین

دانش‌آموزان گرامی، این مقاله چند مسألهٔ مکان هندسی را مطرح می‌کند که با مکان‌های هندسی معمولی فرق دارند. در این مسائل، دو نقطهٔ متحرک با دو شرط درنظر می‌گیریم و مکان هندسی دو نقطهٔ موردنظر را بررسی می‌کنیم. پس از مطالعهٔ این مقاله کوشش کنید، مسائلی از این نوع را طرح و حل کنید.

مسألهٔ ۱

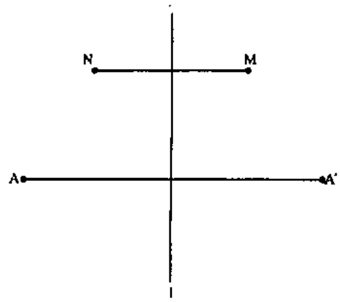
در صفحهٔ P خط l و نقطهٔ A را درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N به طوری که:

اولاً این دو نقطه همواره نسبت به خط l قرینه باشند (یعنی خط l عمودمنصف پاره‌خط MN باشد).

ثانیاً مجموع فاصله‌های نقطهٔ A از دو نقطهٔ M و N برابر عدد معلوم P باشد.

حل: قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط l می‌سازیم و آن را A' می‌نامیم. داریم:

$$\overline{MA'} = \overline{AN}$$



پس:

$$\overline{MA} + \overline{MA'} = \overline{AM} + \overline{AN} = P$$

بنابراین، مجموع فاصله‌های نقطهٔ متحرک M از دو نقطهٔ ثابت A و A' برابر مقدار ثابت P است.

پس مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی است که دو نقطهٔ A و A' دو کانون آنند و طول قطر بلندتر آن برابر P است. این بیضی را E می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ N، نیز همان بیضی E است. وقتی نقطهٔ متحرک M، بیضی E را در جهتی بپیماید، نقطهٔ متحرک N بیضی E را در جهت مخالف آن می‌پیماید.

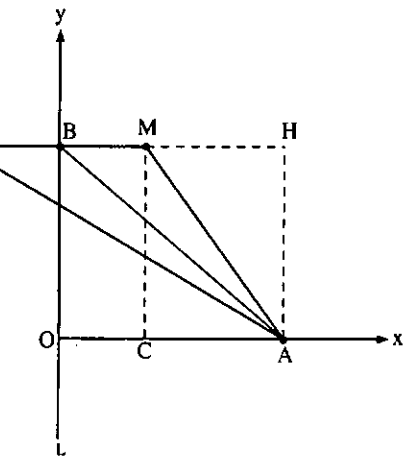
مسألهٔ ۲:

در صفحهٔ P خط l و نقطهٔ A را درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N به طوری که:

اولاً دو نقطهٔ M و N نسبت به خط l قرینه باشند.

ثانیاً مساحت مثلث متغیر AMN برابر مقدار معلوم S باشد.

حل: تصویر نقطهٔ A را روی خط l با o نشان می‌دهیم. تصویرهای دو نقطهٔ A و M را به ترتیب بر دو خط MN و oA، با H و C نشان می‌دهیم. وسط پاره‌خط MN را B می‌نامیم. چون خط AB میانهٔ مثلث AMN است، پس مساحت مثلث AMN دو برابر مساحت مثلث ABM است. بنابراین:



$$s = ۲\left(\frac{۱}{۲}\overline{BM}\,.\,\overline{AH}\right) = \overline{BM}\,.\,\overline{MC}$$

یعنی نقطهٔ M در صفحهٔ P طوری حرکت می‌کند که حاصل‌ضرب فاصله‌های آن از دو خط عمود بر هم oA و l همواره معادل مقدار ثابت S است. پس مکان هندسی نقطهٔ M یک هذلولی است که دو خط oA و l دو مجانب آن هستند، به طور دقیق‌تر می‌گوییم، مکان هندسی نقطهٔ M دو هذلولی که مجانب هریک از آن‌ها دو خط oA و l هستند. هریک از شاخه‌های دو هذلولی، در یکی از ربع‌های صفحه قرار دارند (دو خط oA و l صفحه P را به چهار مربع تقسیم می‌کنند).

در مطلب بالا، این قضیهٔ را به کار برده‌ایم:

قضیه :

در صفحهٔ P دو خط متقاطع l و ′l را درنظر می‌گیریم. مکان هندسی نقاطی که حاصل ضرب فاصله‌های آن‌ها از دو خط یاد شده، برابر مقدار ثابتی باشد، یک هذلولی است که دو خط یاد شده دو مجانب آن هستند. در حالت خاصی که دو خط l و ′l بر هم عمود باشند، هذلولی متساوی‌القطرین است.

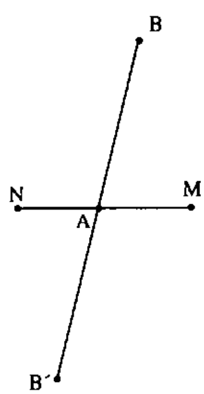
در مسألهٔ مورد بحث، مکان هندسی نقطهٔ M، از دو هذلولی متساوی‌القطرین تشکیل شده است. مکان هندسی نقطهٔ N نیز، همان دو هذلولی یاد شده است.

مسألهٔ ۳ :

در صفحهٔ P دو نقطهٔ ثابت A و B داده شده است. مطلوب است مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N از صفحهٔ P به طوری که :

اولاً همواره دو نقطهٔ متحرک M و N نسبت به نقطهٔ ثابت A قرینه باشند.

ثانیاً مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ M و N از نقطهٔ ثابت B، برابر عدد معلوم l باشد.



حل: نقطهٔ ′B، قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به نقطهٔ A تعیین می‌کنیم. دو مثلث ′AMB و ABN مساوی‌اند (ض زض). پس: $\overline{MB'} = \overline{BN}$ بنابراین:

$$\overline{MB} + \overline{MB'} = \overline{MB} + \overline{NB} = l$$

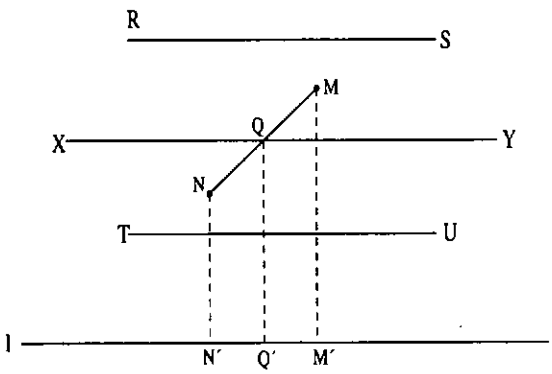
یعنی، مجموع فاصله‌های نقطهٔ متحرک M از دو نقطهٔ ثابت B و ′B برابر l است بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی است که دو نقطهٔ ثابت B و ′B دو کانون آنند و طول قطر بلندتر آن l است. این بیضی را E می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ متحرک N نیز، همان بیضی E است. هنگامی که نقطهٔ متحرک M بیضی E را در جهتی می‌پیماید، نقطهٔ متحرک N همان بیضی را در همان جهت می‌پیماید.

مسألهٔ ۴ :

خط l را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N از صفحهٔ S، به طوری که :

اولاً طول پاره‌خط MN برابر P باشد.

ثانیاً مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ M و N از خط l برابر q باشد (با شرط $(P \geq 2q)$).



حل: نقطهٔ وسط پاره‌خط MN را، Q می‌نامیم. تصویرهای سه نقطهٔ M، Q و N را بر خط l به ترتیب ′M، ′Q و ′N می‌نامیم. در ذوزنقه ′MNN′M داریم:

$$\overline{QQ'} = \frac{1}{2}\left(\overline{MM'} + \overline{NN'}\right) = \frac{1}{2}q$$

پس فاصلهٔ نقطهٔ متحرک Q از خط l، برابر مقدار ثابت $\frac{1}{2}q$ است. بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ متحرک Q، خط راست xy است که موازی خط l می‌باشد و به فاصلهٔ $\frac{1}{2}q$ از آن قرار دارد (دو خط داریم یکی در بالای خط l و یکی در پائین آن).

دو خط RS و TV را در دو طرف خط xy، موازی با آن و به فاصلهٔ $\frac{1}{2}l$ از آن، رسم می‌کنیم. مکان هندسی دو نقطهٔ متحرک M و N نواری است از صفحهٔ S که به دو خط RS و TV محدود می‌شود (دو نوار داریم: یکی بالای خط l و دیگری در پائین این خط).

ترجمه:
مهدی گروسیان



سهم تو، بزرگ‌تر از سهم من است! *

روزی از روزها یک مرد چاق و یک مرد لاغر، برای صرف شام در واگن رستوران یک قطار نشسته بودند. از قضا هر دو ماهی سفارش دادند. وقتی پیشخدمت ماهی‌ها را آورد، مرد چاق پیش‌دستی کرد و ماهی بزرگ‌تر را برای خودش برداشت. مرد لاغر از این حرکت او آزرده شد. او معتقد بود، کاری که مرد چاق کرد زشت و ناشایست بود.

مرد چاق پرسید: «اگر شما جای من بودید، چه می‌کردید؟»

مرد لاغر با دلچرکینی پاسخ داد: «مراعات ادب را می‌کردم و ماهی کوچک را برمی‌داشتم.»

مرد چاق گفت: «خوب، این همان چیزی است که به شما رسیده است!»

همان‌طور که از این لطیفهٔ باستانی برمی‌آید، همیشه نمی‌توان همه را راضی نگاه داشت. مسألهٔ تقسیم عادلانه، در پنجاه سال اخیر ریاضی‌دانان زیادی را به چالش طلبیده است. در این گونه مسائل شیء مورد ادعا، معمولاً کیک بوده است. جک رابرتسن[1] و ویلیام وب[2] در این باره، کتابی به نام «الگوریتم‌های کیک‌بری»[3] منتشر کرده‌اند که به بررسی دقیق این موضوع پرداخته است.

در این مقاله، راه‌هایی برای تقسیم یک کیک بین چند نفر و به گونه‌ای که همه راضی شوند،[4] ارائه می‌کنیم. ساده‌ترین حالت این است که یک کیک را بین دو نفر تقسیم کنیم. هر کدام از این دو نفر در صورتی راضی می‌شود که سهم عادلانه‌ای ببرد. در این جا سهم عادلانه یعنی: «نصف یا بیش‌تر

براساس ارزشگذاری خودم». البته ممکن است سهم‌بران در مورد ارزش هر قسمت، اختلاف نظر داشته باشند. به عنوان مثال، اگر آلیس[5] گیلاس دوست داشته باشد و باب[6] ژله، هر دو خوش‌شانس هستند و راه‌حل آسان است. می‌توانیم نیمهٔ گیلاس‌دار را به آلیس و نیمهٔ ژله‌دار را به باب بدهیم. بدین صورت هردو را راضی کرده‌ایم.

حال اگر هر دو نفر ژله دوست داشته باشند، مسأله اندکی بغرنج‌تر می‌شود و راه حل آن، روشی است که به ۲۸۰۰ سال پیش بازمی‌گردد: آلیس می‌برد و باب انتخاب می‌کند.

روش بالا از این روی عادلانه است که نه آلیس و نه باب حق شکایت ندارند؛ اگر آلیس از نتیجهٔ تقسیم ناراضی باشد، نمی‌تواند شکایت کند زیرا او می‌توانست با بُرش برابر، متحمل ریسک نشود. باب نیز باید راضی باشد، چون حق انتخاب داشته است.

مسأله وقتی جالب می‌شود که نفر سومی هم وارد کار کنیم.

رابرتسن و وب، کتابشان را با یک مثال الهام‌بخش ولی نادرست آغاز می‌کنند: تام[7]، دیک[8] و هری[9] می‌خواهند یک کیک را بین خودشان قسمت کنند. هرکدام از آن‌ها وقتی راضی می‌شوند که بنا به ارزش‌دهی خود، حداقل $\frac{1}{3}$ کیک را دریافت کنند. فرض می‌کنیم که کیک کاملاً برش‌پذیر است، یعنی، می‌توانیم هر قطاع دلخواهی از آن را ببریم، بدون این‌که له شود. الگوریتم آن از این قرار است:

قدم اول: تام کیک را به دو قطعهٔ x و w که در نظرش به‌ترتیب ارزشی برابر $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ دارند، قسمت می‌کند.

قدم دوم: دیک w را به دو قسمت برابر y و z برش می‌دهد.

قدم سوم: هری به دلخواه یکی از سه تکهٔ یادشده را برمی‌گزیند. بعد از او نوبت تام است که بین دو تای باقیمانده، سهمش را انتخاب کند. آخرین تکه هم به دیک می‌رسد.

واضح است که رضایت هری جلب می‌شود، زیرا اولین انتخاب کننده است. تام نیز به دلایلی پیچیده‌تر، راضی خواهد شد. اگر هری x را انتخاب کند، تام می‌تواند بین y و z تکه‌ای را که در نظرش باارزش‌تر است، انتخاب کند. به یاد داشته باشید که او معتقد بود، مجموع این دو قطعه به اندازهٔ $\frac{2}{3}$ ارزش دارد؛ پس قبول دارد که حداقل یکی از آن‌ها به اندازهٔ $\frac{1}{3}$ می‌ارزد. حال اگر هری y یا z را انتخاب کند، تام با انتخاب x راضی می‌شود. مشکل این‌جاست که ممکن است رضایت دیک جلب نشود. اگر او با تام بر سر تعیین x اختلاف داشته باشد، ارزش w را $\frac{2}{3}$ نخواهد دانست. یعنی تنها تکه‌ای که او را راضی می‌کند، x است. اما هری می‌توانست y و تام x را انتخاب کنند که درنتیجه z می‌ماند برای دیک بیچاره.

هوگو اشتاین هاوس[10] اولین کسی بود که در ۱۹۴۴ روشی برای تقسیم عادلانه ارائه داد. او عضو یک گروه از ریاضیدانان لهستانی بود که به طور منظم در یک کافه دور هم جمع می‌شدند. روش او به «پیرایش»[11] معروف است.

قدم اول: تام کیک را به دو تکهٔ x و w که در نظرش به‌ترتیب ارزش‌هایی برابر با $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ دارند، قسمت می‌کند.

قدم دوم: تام x را به دیک پیشنهاد می‌کند و از او می‌خواهد، اگر آن را می‌پذیرد، پیرایشش کند (منظور این است که اضافهٔ آن را پس دهد). البته او می‌تواند x را نپذیرد. نتیجهٔ این مرحله را x' می‌نامیم، این تکه برابر x یا از آن کوچک‌تر است.

قدم سوم

الف) دیک x' را به هری می‌سپارد؛ او نیز در پذیرش آن مختار است.

ب) اگر هری x' را بپذیرد، آن‌گاه تام و دیک باقیماندهٔ کیک $(w + x - x')$ را با روش عادلانهٔ «من می‌برم، تو انتخاب کن»، بین خود تقسیم می‌کنند.

قدم چهارم

الف) اگر دیک x را پیرایش کند، ولی هری آن را نپذیرد، خود دیک به قبول آن رضایت می‌دهد. می‌مانند هری و تام که به روش «من می‌برم، تو انتخاب کن» بقیهٔ کیک $(w + x - x')$ را بین خود تقسیم می‌کنند.

ب) حال اگر هری x' را نپذیرد و دیک هم آن را پیرایش نکند، تام آن را برمی‌دارد و باز بقیهٔ کیک $(w-x)$ به روش «من می‌برم، تو انتخاب کن» تقسیم می‌شود.

روشی که بیان شد، می‌تواند یک راه‌حل قابل تعمیم باشد. بررسی ساختار منطقی آن را به خودتان واگذار می‌کنیم. اساساً اگر کسی از نتیجهٔ تقسیم ناراضی باشد، یا در انتخاب دچار اشتباه شده یا در برش ریسک کرده است که در هر صورت مقصر کسی نیست جز خودش.

در سال ۱۹۶۱، لستر ای. دوبینز[12] و ادوین ایچ. اسپنیر[13] روشی ارائه دادند که در آن از یک چاقوی متحرک استفاده می‌شد.

اکنون به شرح این روش می‌پردازیم:

ابتدا یک برش در کیک ایجاد می‌کنیم و آن را مبدأ کیک قرار می‌دهیم. سپس چاقو را به نرمی و آرامی حرکت می‌دهیم، به گونه‌ای که در هر لحظه روی یکی از شعاع‌های دایره باشد. مقداری از کیک را

که در هر لحظه پشت چاقو می‌ماند L می‌نامیم. تام، دیک و هری باید در لحظه‌ای که به نظرشان L به مقدار $\frac{1}{3}$ رسیده است، فریاد بزنند: «کافیه!» اولین کسی که فریاد می‌زند، صاحب L می‌شود. چاقو پس از برش سهم اولین شخص به حرکت ادامه می‌دهد. دومین شخص هم این گونه به سهم خود می‌رسد که وقتی در نظرش چاقو به نصف باقیماندهٔ کیک رسید، قبل از دیگری فریاد بزند: «کافیه!»

چه باید کرد اگر هر دو در یک لحظه فریاد بزنند؟ خودتان در این باره فکر کنید.

واضح است آنچه می‌ماند، سهم سومین نفر است. البته دو نفر آخر به روش دیگری نیز می‌توانند باقیماندهٔ کیک را بین خود تقسیم کنند و آن روش «من می‌برم، تو انتخاب کن» است.

روش دوبینز و اسپنیر قابل تعمیم به تقسیم کیک بین n نفر نیز هست. چاقو را حرکت دهید تا کسی که به نظرش L به مقدار $\frac{1}{n}$ رسیده است، فریاد بزند، کافیه و L را به عنوان سهم خود دریافت کند. برای تقسیم بقیهٔ کیک بین $(n-1)$ نفر باقیمانده، همین روش را ادامه دهید، توجه دارید که iامین نفر انتظار دریافت $\frac{1}{i}$ از قطعهٔ باقیمانده کیک را در مرحلهٔ iام دارد.

تأخیر زمانی کوتاهی که بین تصمیم‌گیری و عکس‌العمل شخص به وجود می‌آید، از کارایی این روش‌ها می‌کاهد. از این رو، الگوریتم‌های چاقوی متحرک راضی‌کننده نیستند. بهترین راه برای کاهش اثر این مسأله، حرکت دادن بسیار آرام چاقو است.

از این پس الگوریتم‌های نوع اول را الگوریتم‌های چاقوی ثابت و الگوریتم‌های نوع اخیر را الگوریتم‌های چاقوی متحرک می‌نامیم. در ادامه، یک روش چاقوی ثابت برای سه نفر معرفی می‌کنیم که قابلیت تعمیم نیز دارد.

تام از این که دور از چشم دیگران صاحب یک کیک شده، خوشحال است. برای خوردن اولین تکه خیز برمی‌دارد که دیک در مقابلش ظاهر می‌شود. ناچار می‌شود کیک را با او تقسیم کند، از این رو آن را با ارزشگذاری خودش به دو تکه تقسیم می‌کند. دیک یک قسمت را برمی‌دارد.

قبل از این که آن‌ها بتوانند چیزی از سهم کیکشان بخورند، هری سر می‌رسد و تقاضای یک سهم عادلانه می‌کند. تام و دیک به طور مستقل تکه کیک خود را به سه قسمت تقسیم می‌کنند. البته قسمت‌هایی که در نظرشان ارزش برابر دارند. هری اجازه دارد یک تکه از کیک تام و تکه‌ای دیگر از سهم دیک بردارد. نام این روش، «برش‌های تودرتو»[۱۴] است.

تحقیق کارا بودن این الگوریتم مشکل نیست و روش تعمیم آن هم برای n نفر سرراست است. روش پیرایش نیز قابلیت تعمیم دارد، به این صورت که به هر دریافت‌کننده فرصت پیرایش داده می‌شود.

کدام روش برش‌های کم‌تری طلب می‌کند؟ روش چاقوی متحرک برای تقسیم بین n نفر، $n-1$ برش انجام می‌دهد که حداقل تعداد برش ممکن است. روش‌های چاقوی ثابت پیچیده‌تر و دست‌وپاگیرترند. تعداد برش‌های لازم برای تقسیم یک کیک بین n نفر، با استفاده از روش پیرایش $\frac{n^2-n}{2}$ و با روش برش‌های تودرتو $n!-1$ است.

حالا یک روش چاقوی ثابت کارآمدتر معرفی می‌کنیم؛ به نام «تقسیم کن و دست پیدا کن»[۱۵]. روش کار از این قرار است:

سعی کنید کیک را به گونه‌ای به دو تکه تقسیم کنید که نیمی از دریافت‌کننده‌ها مایل به سهیم بودن در یکی باشند و بقیه در دومی. این کار را با زیر کیک‌ها تکرار کنید. تعداد برش‌های لازم برای این روش تقریباً $n \log 2n$ است. فرمول دقیق $nk - 2k + 1$ است که در آن k عددی صحیح و منحصر به فرد است و $2k - 1 < n \le 2k$. بعید است بتوانید روش چاقوی ثابتی بیابید که بهتر از این روش باشد.

الگوریتم‌های تقسیم کیک می‌توانند در مسائل واقعی و روزمره به کار گرفته شوند. اولین کوشش برای تقسیم آلمان بین متفقین و روسیه، به گونه‌ای بود که برلین به هیچ‌کدام تعلق نگرفت. بنابراین مجبور شدند، آن را جداگانه قسمت کنند. مذاکره‌کنندگان برای حل این مشکل، به طور شهودی از یک روش تقسیم کیک استفاده کردند.

زیرنویس

*این مقاله ترجمه‌ای است از: "Your Half's Bigger Than My Half!"، نوشتهٔ "Ian Stewart"، در قسمت "MATHEMATICAL RECREATIONS" از مجلهٔ December 1988, "SCIENTIFIC American"

1. Jack Robertson
2. William Webb
3. Cake Cutting Algorithms
۴. یا حداقل حق اعتراض نداشته باشند، م.
5.. Alice
6. Bob
7. Tom
8. Dick
9. Harry
10. Hugo Steinhaus
11. trimming
12. Lester E. Dubins
13. Edwin H. Spanier
14. Successive Pairs
15. Divide and Comquer


با دیگر مجلات
دفتر انتشارات کمک آموزشی
آشنایی دارید؟
دفتر انتشارات کمک آموزشی
این مجلات را نیز منتشر
می کند:
رشد کودک
(ویژه‌ی پیش‌دبستان و دانش‌آموزان کلاس اول دبستان)
رشد نوآموز
(برای دانش‌آموزان دوم و سوم دبستان)
رشد دانش آموز
(برای دانش‌آموزان چهارم و پنجم دبستان)
رشد نوجوان
(برای دانش‌آموزان دوره‌ی راهنمایی)
رشد جوان
(برای دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه)
و مجلات:
رشد معلم، تکنولوژی آموزشی
آموزش ابتدایی، آموزش فیزیک،
آموزش شیمی، آموزش زبان،
آموزش راهنمایی تحصیلی
آموزش ریاضی، آموزش زیست شناسی
آموزش جغرافیا، آموزش تربیت بدنی
آموزش معارف اسلامی، آموزش تاریخ
آموزش قرآن، آموزش هنر
آموزش علوم اجتماعی، برهان (راهنمایی)،
برهان (متوسطه)،
آموزش زمین‌شناسی و مدیریت مدرسه

رشد

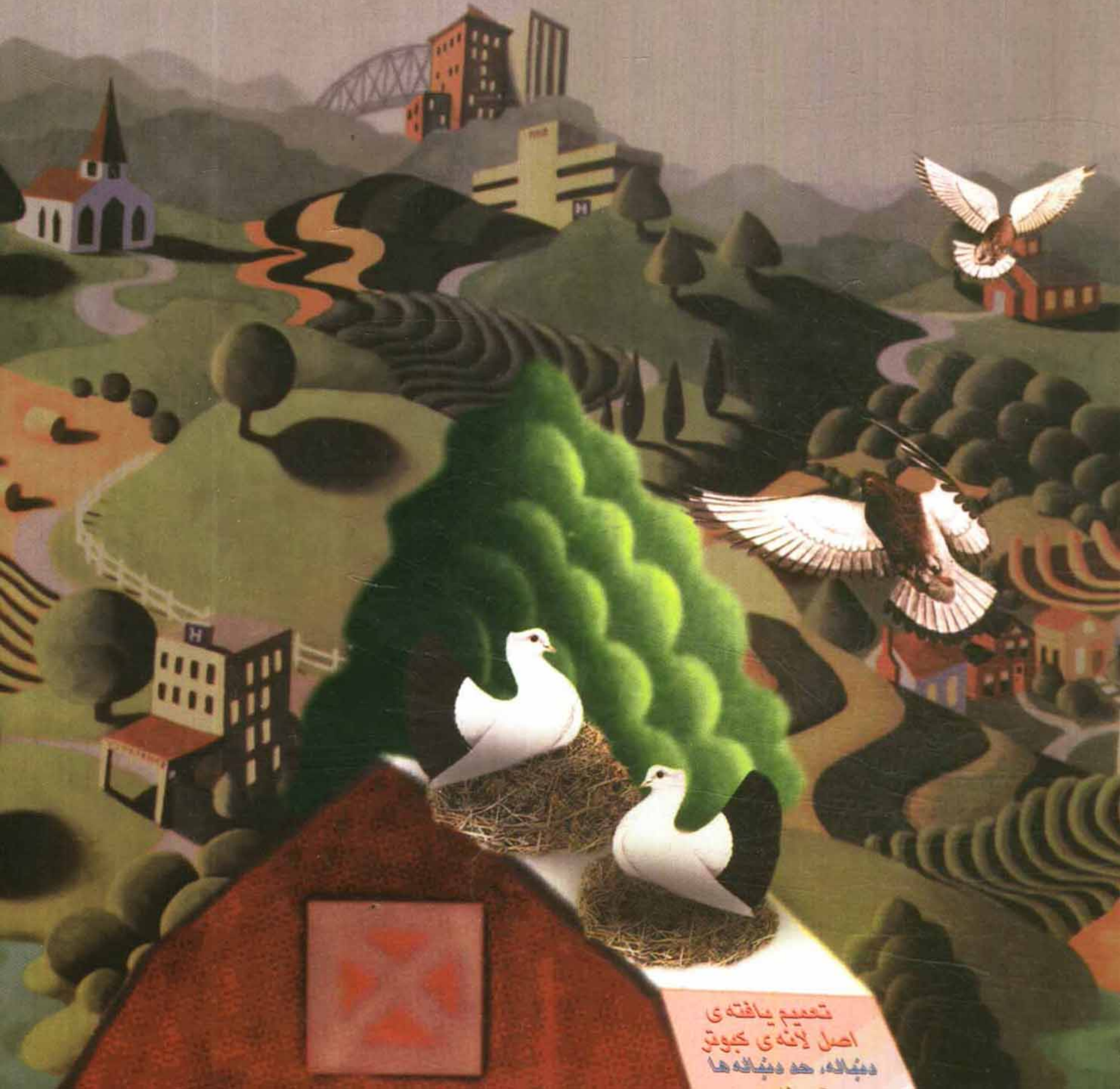
برهان ۴۱

برای دانش‌آموزان دوره‌ی **متوسطه**

سال دوازدهم، شماره‌ی سوم
۱۳۸۲، بها: ۲۰۰۰ ریال

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



تعمیم یافته‌ی
اصل لانه‌ی کبوتر
دنباله، حد دنباله‌ها



طرح از نوشین شرف‌الدین

بسم الله الرحمن الرحیم

رشد برهان ۴۳

❖ سال سیزدهم، شمارهٔ سوم ❖ ۱۳۸۲

❖ بها: ۲۰۰۰ ریال ❖ شمارگان: ۱۵۰۰۰ نسخه

❖ برای دانش آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

۲ یادداشت سردبیر

۳ از تاریخ بیاموزیم (۱۵)/ پرویز شهریاری

۶ حل معادله‌های مثلثاتی(۳)/ محمدهاشم رستمی

۱۰ حد، پیوستگی و مشتق پذیری.../ احمد قندهاری

۱۵ در حاشیه گراف‌های ساده/ احسان یارمحمدی

۱۸ دترمینان (کاربرد قضایا و...) (۲)/ حمیدرضا امیری

۲۵ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم/ غلامرضا یاسی پور

۲۶ دنباله، حد دنباله‌ها (۱)/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی

۲۹ مسائل مسابقه‌ای

۳۰ تعمیم یافتهٔ اصل لانهٔ کبوتر/ هوشنگ شرقی

۳۲ استقرای ریاضی (۲)/ میرشهرام صدر

۳۸ دربارهٔ اتحاد و معادله (۲)/ پرویز شهریاری

۴۲ ریاضیات و نقش آن در زندگی روزمره/ سهیل برادران

۴۵ چند مسأله جالب دربارهٔ اعداد اول/ هانیه شکوه

۴۸ اثبات اتحادها به کمک هندسه/ احمد قندهاری

۵۰ حل مساله‌های مسابقه‌ای برهان ۴۰

۵۲ پاسخ جدول شمارهٔ ۴۰/ کامران مرادی

۵۶ اعداد فیبوناتچی(۲)/ کامران مرادی

۶۰ گفت‌وگوی خودمانی با استاد شهریاری

❖ مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده

❖ سردبیر: حمیدرضا امیری

❖ مدیر داخلی: میرشهرام صدر

❖ طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی

❖ اعضای هیأت تحریریه:

حمیدرضا امیری

محمد هاشم رستمی

احمد قندهاری

میرشهرام صدر

هوشنگ شرقی

سید محمدرضا هاشمی موسوی

غلامرضا یاسی پور

❖ و با تشکر از همکاری ارزندهٔ

آقای پرویز شهریاری

چاپ و صحافی:

شرکت افست (سهامی عام)

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه‌های زیر دعوت به همکاری می‌کند:

✍ نگارش مقاله‌های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب‌های ریاضی متوسطه و پیش‌دانشگاهی) ✍ طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان)

✍ طرح مسائل مسابقه‌ای به همراه حل آن‌ها (برای دانش‌آموزان) ✍ طرح معماهای ریاضی ✍ نگارش یا ترجمهٔ مقاله‌های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات،

زندگینامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته‌های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می‌شود.

✍ مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله‌ها آزاد است. ✍ مقاله‌های وارده ،باید خوانا و حتی‌الامکان کوتاه باشد.

✍ مقاله‌های رسیده مسترد نمی‌شود. ✍ استفاده از مطالب مجلّه در کتاب‌ها یا مجله‌های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵

تلفن دفتر مجله: ۹ـ ۸۸۳۱۱۶۲ داخلی ۳۷۰

تلفن امور مشترکین: ۷۳۳۶۶۵۶ ـ ۷۳۳۵۱۱۰

یادداشت سردبیر

ریاضیات را برای چه می‌آموزید؟ انگیزهٔ شما از مطالعهٔ درس‌های ریاضی چیست؟ به کدام مبحث از مباحث ریاضی بیش‌تر علاقه دارید و چرا؟ آیا همهٔ مباحث ریاضیات را می‌شناسید؟ مطالعهٔ ریاضیات و یادگیری درس‌های آن برای شما چه فایده‌ای داشته است؟ اگر درس ریاضی را با درس‌های دیگر مقایسه کنیم، چه ویژگی‌هایی در این درس بارزند که آن را از علوم دیگر مجزا می‌کنند؟

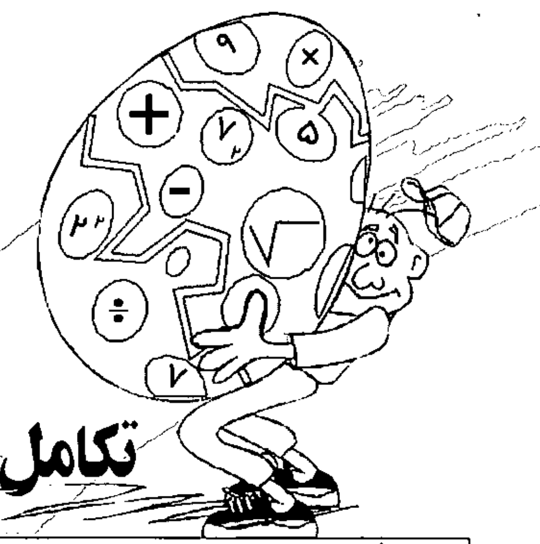
چرا ریاضیات را «ملکهٔ علوم» نامیده‌اند؟ آیا تفکر ریاضی و مطالعهٔ عمیق درس‌های ریاضی، تأثیری در زندگی روزمرهٔ شما داشته یا می‌تواند داشته باشد؟ چه عواملی در پیشرفت شما در ریاضیات مؤثرند؟ آیا تاکنون به کسی ریاضیات درس داده‌اید و اگر شما یک معلم ریاضی باشید، با دانش‌آموزان خود چگونه ارتباط برقرار می‌کنید تا آن‌ها بهتر و راحت‌تر درس را یاد بگیرند؟ اصلاً آیا دوست دارید، معلم ریاضی باشید؟ چرا؟ کدام یک از عوامل، کتاب درسی، کتاب‌های کمک‌درسی و کمک‌آموزشی، معلم، فضای آموزشی و ابزارهای آموزشی تأثیر بیش‌تری در آموزش ریاضیات دارند؟ چرا؟ کتاب درسی تا چه حد برای شما خودآموز بوده و در یادگیری ریاضیات کمکتان کرده است؟ مجلهٔ ریاضی رشد برهان چه‌طور؟ آیا تا به حال مطلبی یا مقاله‌ای راجع به ریاضیات نوشته‌اید؟ آیا با تاریخ ریاضیات و فلسفهٔ آن آشنا هستید و به آن علاقه دارید؟ به نظر شما اگر دو عامل «درونی» و «بیرونی»، یعنی عامل ذاتی و عامل محیطی را، عامل‌های اصلی در پیشرفت ریاضیات جهان بدانیم، کدام عامل مؤثرتر بوده است؛ زیبایی‌ها و خودجوشی‌های ریاضیات، یا نیازهای بشر به ریاضیات؟ زندگی بدون ریاضیات را چگونه تعبیر می‌کنید؟ آیا این تفکر یا طرز فکر را که «حرف زیادی‌زدن ممنوع»، به عنوان یک تفکر منطقی و ریاضی قبول دارید؟ آیا تاکنون به آزمایشگاه ریاضیات فکر کرده‌اید؟ اگر بخواهم به این سؤالات و جواب آن‌ها بپردازیم، حرف آخر هم باید باشد که نیست.

به هر حال شما متوجه شدید که قصد جوابگویی به این سؤالات را ندارم. درواقع سؤالاتی که مطرح کرده‌ام، هریک برای خود جوابی مفصل و شاید در بعضی موارد، در حد واندازه‌های یک یا چند مقاله دارند، ولی از شما دانش‌آموزان عزیز و فهیم خواهش می‌کنم، برای ما نامه بنویسید و به یک یا چند سؤال از سؤالات یاد شده پاسخ دهید و نظرات خودتان را برای ما بفرستید. جواب شما که ان‌شاءالله در همین مجله به چاپ می‌رسد، برای دوستانتان در اقصی نقاط کشور اسلامی‌مان مفید باشد و برای ما و مسؤولان آموزش ریاضیات کشور راهگشا باشد.

● پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری



در شمارهٔ قبل تکامل ریاضیات کاربردی و عنصر استدلال که باعث سنت ساختمان نظری ریاضیات شد، صحبت کردیم، اینک ادامه مطلب را در پی می‌آوریم.

ریاضیات کاربردی در سطح نخستین خود (میان دوره و غیره) به طور کامل، در گونه‌های مختلف مسأله‌ها، سمت‌گیری کاربردی دارد که در درون خود، گونه‌های متفاوت را از هم جدا کرده است و به صورتی پنهانی، بر راه‌حل‌های کلی گونه‌های مختلف مسأله‌ها اشاره می‌کند. ولی در حالتی که سنت نظری وجود دارد، وقتی که ارزش و اهمیت روش استدلالی، به عنوان یک هدف مستقل، شناخته شده است، وقتی که ریاضیدان ایرانی، ارثیهٔ فرهنگی باستان را حفظ کردند و آن را به مراتب پیش بردند، دیگر جدایی قطعی گونه‌های مختلف مسأله‌ها مشاهده می‌شود و روش‌های کلی حل، به صورت عددی، پدید می‌آید. این روش‌ها به صورت دنباله‌ای از روندهای محاسبه‌ای ارائه می‌شوند که به کمک آن‌ها، راه‌حل کلی هر مسأله‌ای از یک گونهٔ خاص، قابل تشخیص است.

از جمله **محمدموسی خوارزمی**، یکی از متخصصین ریاضیدانانی که هم به ریاضیات کاربردی «میان‌دورود» و هم به ریاضیات نظری «یونان» توجه داشته است، «جبر و مقابله» خود را به صورت زیر تنظیم می‌کند: آغاز کتاب به شرح الگوریتم‌های حل معادلهٔ درجه دوم، در شکل‌های مختلف خود، اختصاص دارد (شش فصل اول). الگوریتم‌ها روی مثال‌های عددی داده شده‌اند که ریاضیات کاربردی سده‌های میانه را، بر ریاضیات کاربردی در سطح نخستین خود، نزدیک می‌کند.

به همین ترتیب، یکی از نخستین ریاضیدانان اروپایی غربی، «لئوناردو پیزایی»، در کتاب حساب خود، نه تنها توجه خواننده را به جنبه‌های کاربردی مسأله‌ها جلب می‌کند، بلکه به صورتی روشن، روش حل آن‌ها را هم ارائه می‌دهد. شیوهٔ «دستوری» و نسخه مانند الگوریتم‌ها، ریاضیات سده‌های میانه را به ریاضیات کاربردی دوران قبل از یونان پیوند می‌دهد. با وجود این، سنت نظری تأثیر خود را گذاشت و «نسخه‌نویسی» را به الگوریتم، که موقعیتی برون عملی است، رسانده است (این الگوریتم‌ها سمت‌گیری محاسبه‌ای جبری دارند).

سنت نظری، تمایل به بیرون رفتن از محدودهٔ کاربرد را افزایش می‌دهد و ریاضیات کاربردی را در بستر سنتز نظریه و عمل به حرکت در می‌آورد.

روش و راه الگوریتمی پیشرفت، از ویژگی‌های آشکار ریاضیات کاربردی است و سنت نظری، تنها موجب افزایش گرایش به سمت الگوریتمی کردن می‌شود. از جمله، ریاضیات کاربردی چین که کم‌وبیش مستقل از تأثیر مرکزهای یونانی پیش‌رفت، تا سدهٔ چهاردهم، به سمت‌گیری در جهت ریاضیات محاسبه‌ای جبری رسید. همین وضع دربارهٔ ریاضیات قرن هفدهم وجود دارد که جهت‌گیری مسأله‌های کاربردی در آن‌جا، همراه با روش‌های کلی حل است. برای نمونه در رسالهٔ «لیلا واتی» (مربوط به سدهٔ دوازدهم که در سدهٔ سیزدهم بازنویسی شده است)، این مسأله آمده است: «اگر ۱۶ غلام ۳۲ واحد پول ارزش داشته باشند، ۲۰ غلام چند می‌ارزند؟» راه‌حل کلی این مسأله که در جهت کاربردی تنظیم شده است، به این ترتیب اعلام می‌شود که، ارزش وجودهای زنده، به نسبت افزایش تعداد آن‌ها، زیاد می‌شود.

در عین حال که گونه‌های مسأله، سمت‌گیری کاربردی خود را حفظ می‌کنند، همراه با نیازهایی که در عمل پدید می‌آیند، خصلت محاسبه‌ای و اندازه‌پذیری به خود می‌گیرند. ریاضیات سده‌های میانه، در پایه‌های اساسی خود، عکس‌العملی در برابر این نیازهاست؛ نیازهایی که بسیار نیرومندند و نمی‌توانند با ریاضیات نظری، چندان برآورده شوند. ضرورت ایجاب می‌کند که به این ریاضیات نظری، مسأله‌هایی اضافه شود تا بتوانند نیازهای محاسبه‌ای را در تجارت، اخذ مالیات، اقتصاد نظامی و غیر آن حل کنند.

مسأله‌های مربوط به تقسیم ارث، در کشورهای مسلمان‌نشین نقشی اساسی داشته‌اند و یکی از موارد درسی در مکتب‌ها بوده‌اند. از سوی دیگر، پیشرفت روابط بازرگانی، مسأله‌های پیچیده‌ای را مطرح کرد و این در حالی است که اختر شناسی عملی که اُ. نیگه‌بادر آن را انگیزهٔ اصلی پیشرفت ریاضیات می‌داند، از دورهٔ باستان آغاز شده بود. ب. آ. بستازستین، به ویژه روی دریانوردی و نیازهای ناشی از آن تکیه می‌کند. مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ زاویه‌ها (که برای تیراندازی به

هدف لازم بود)، اندازه‌گیری فاصله تا جای غیرقابل دسترس، تعیین جهت قبله، همهٔ این مسأله‌ها، پاسخگوی نیازهای مشخص زندگی عملی بودند؛ نیازهایی که عنصرهای ساختاری ریاضیات کاربردی سده‌های میانه را تشکیل می‌دادند. هریک از گونه‌های متفاوت مسأله‌ها، دورو بر این عنصرها پدید می‌آمدند. ریاضیات سده‌های میانه شامل آگاهی‌های تنظیم شده‌ای بیرون از جنبهٔ نظری است که با رشتهٔ پایداری، به نیازهای عملی بسته شده‌اند.

تمامیت کاربردی مسأله‌ها، ارتباط تنگاتنگی با الگوریتم‌ها دارد. خوارزمی این گونه مسأله‌ها را بعد از شرح الگوریتم‌ها می‌آورد و آن‌ها را در بخش‌های مربوط به وصیت‌ها یا تعیین سهم ارث و یا تعیین تکلیف در حالتی که یک یا چند تن از وارثان وصیت کننده از دنیا بروند، متمرکز می‌کند. بین معادله‌هایی که در جهت کاربردی تنظیم شده‌اند و الگوریتم‌ها که با دستگاه نیرومند روش‌های محاسبه‌ای مشخص شده‌اند[1]، هیچ شکافی وجود ندارد: الگوریتم‌ها ادامهٔ مستقیم گونه‌های مختلف مسأله‌های عملی هستند و از آن‌جا برآمده‌اند. ریاضیات کاربردی، به عنوان مجموعهٔ واحدی که گونه‌های مختلف مسأله‌های ناشی از زندگی عملی را در خود جمع کرده است، تحت تأثیر سنت‌های نظری، به سمت الگوریتمی شدن و جدا شدن عنصرهای محاسبه‌ای از تودهٔ مسأله‌های عملی، گرایش پیدا می‌کند.

اگر از طرف ریاضیات کاربردی در شرایط وجود سنت‌های نظری، تلاشی برای نظری کردن موضوع‌ها دیده می‌شود، از طرف سنت‌های نظری، گرایش عکس وجود دارد: دمساز شدن با موقعیت موجود کارها و با ریاضیات کاربردی که به هیچ وجه از جریان اصلی تکامل دانش ریاضی عقب نمانده است. در «طبقه» مربوط به آگاهی‌های نظری، آنچه که از ریاضیات یونانی به ارث رسیده است و همچنین بررسی‌های تازه‌ای که خصلت نظری دارند، حفظ می‌شود.

حفظ سنت‌های نظری در کشورهایی مثل ایران، به صورت ترجمهٔ آثار اقلیدس، آپولونیوس، ارشمیدس، بطلمیوس و دیگر مؤلفان قدیمی، به زبان عربی (و اغلب از زبان‌های پهلوی و سریانی) انجام گرفت. همین آثار با آغاز سدهٔ یازدهم، به لاتینی ترجمه و در اروپا منتشر شد. بازگشت به دانش باستان در سده‌های دوازده و سیزده میلادی، دوره‌ای را در تفکر علمی اروپا تشکیل می‌دهد. ورود متن‌های «عربی» به آموزش غرب، تاریخ دانش و فلسفهٔ سده‌های میانه را به دو دورهٔ متفاوت تقسیم می‌کند: دورهٔ اول، تفکر انسان اروپایی، تنها به قطعه‌های ناچیزی از آگاهی‌های مربوط به مکتب‌های رومی محدود می‌شد.

در دورهٔ دوم، دانش باستان، در حجم کامل خود، به غرب بازگشت. تجدید حیات دانش باستان که با ملاحظه‌ها و اضافه‌های کشورهای شرق همراه بود، رنسانس عملی دوران سده‌های میانه به شمار می‌رود [رنان Renan] ولی در این دوره آگاهی بسیار کند منتشر می‌شد. برای مثال، خبر مرگ فردریک بارباروس، از روم تا کانتربوری هفت هفته در راه بود، ولی خبرهای مهم ممکن بود این فاصله را در چهار هفته طی کنند. به علاوه، رابطهٔ پستی منظمی برقرار نبود. به سختی می‌توان تصور کرد که «جریان آگاهی‌های تازه که از لوله رو و سیسیل و سایر نقطه‌هایی که با دانش باستان و دانش «عربی» آشنا بودند، به مرکزهای فرهنگی اروپای غربی سده‌های میانه، چقدر دیر می‌رسید.»[2]

بررسی مستقل در این دوره، عبارت است از: اثبات دوبارهٔ بسیاری از قضیه‌ها (با شیوهٔ دیگری که ساده‌تر بود و بر اساس ویژگی‌هایی به دست می‌آمد که اقلیدس، ارشمیدس و دیگر ریاضیدانان یونانی هم از آن‌ها اطلاع داشتند)؛ اثبات قضیه‌های تازه، به ویژه قضیه‌هایی که برای ساختن الگوریتم و ساده کردن محاسبه‌ها لازم بود (مثل قضیهٔ سکینوس‌ها در مثلثات روی صفحه و کره) با تلاش برای نفوذ در زمینهٔ پایه‌های دانش ریاضی و اثبات، به صورت قضیه‌ها و اثبات آن‌ها وارد ریاضیات می‌شود. با وجود این، بر خلاف ریاضیات نظری، در این جا نظری شدن، زیر فشار نظام درونی ریاضیات انجام نمی‌گیرد، بلکه به ریاضیات کاربردی توجه دارد و زیر تأثیر آن است. در این جا اثبات و استدلال تنها حلقهٔ نخستین از زنجیره‌ای است که دانش ریاضی را تکان می‌دهد.

خط‌های کلی بستگی بین تمایل به اثبات با جهت‌گیری کاربردی دانش ریاضی را می‌توان در این جا دید که اثبات تا جایی پیش می‌رود که به محاسبه و روش‌های الگوریتمی حل مسأله‌های نمونه برسد. در ضمن رشد مسأله‌هایی که جهت‌گیری کاربردی دارند و همچنین مجموعهٔ الگوریتم‌ها، نسبت به رشد استدلالی که در درجهٔ اول ذر رابطه با موقعیت محاسبه‌ای آن‌ها به وجود می‌آید، آهنگ تندتری دارد؛ از جمله، قضیه‌های مربوط به مثلثات روی صفحه و کره (که به وسیلهٔ بوزجانی، بیرونی و دیگران آورده شدند)، به روشنی در جهت ساده‌تر کردن محاسبه‌های اخترشناسی و در رابطه با تشکیل جدول‌های مثلثاتی، اثبات می‌شوند. کار واقعی نظری در دورهٔ ریاضیات کاربردی، در دقیق‌تر کردن پایه‌های ریاضیات نظری دورهٔ قبل، متمرکز شده است. حجم دانش نظری کندتر از حجم ریاضیات کاربردی و الگوریتمی افزایش می‌یابد و این نشانهٔ نامتعادل بودن نظریه و عمل در سنتز ریاضیات سده‌های میانه است. این عدم تعادل، ریشه‌های بسیار عمیقی دارد که یک رشته از علت‌هایی را روشن می‌کند که موجب ترمز دانش نظری شدند؛ از جمله، وقتی ریاضیدانان ایرانی، فضا را سه‌بعدی می‌دانستند، و پاره‌خط راست را نمایندهٔ طول و مربع آن را نمایندهٔ سطح می‌دانستند، عبور به معادله‌های درجهٔ چهارم و بالاتر ممکن نبود.

ولی قضیه، به عنوان مجموعه‌ای از روندهای الگوریتمی در نظر گرفته می‌شود. اغلب، قضیه، به طور غیر مستقیم با الگوریتم برخورد می‌کند: هدف اثبات‌ها، به طور عمده، عبارت است از جهت دادن به مبانی قابل اثبات الگوریتم‌ها. برای نمونه ابوریحان بیرونی، ساختارهای نظری را در «قانون مسعودی» وارد می‌کند. ولی هدف این ساختمان‌های نظری، انجام عمل‌هایی از محاسبه است که درستی آن‌ها را تأیید می‌کند. بیرونی می‌نویسد که دانش مربوط به وتر کمان‌های دایره، یعنی اثبات‌های هندسی که به دایره مربوط می‌شوند، «کاربرد عملی دارد و ضمن محاسبهٔ عددها تعیین می‌شود». نظر رگیومونتان[3] (سدهٔ پانزدهم) هم در کتاب او با عنوان «پنج کتاب دربارهٔ مثلث هایی از هر نوع» همین گونه است. نیازهای عملی بر کشش های نظری اثر می‌گذارد و موجب تبدیل دانش ریاضی به دنباله‌ای از حلقه‌های یک زنجیر می‌شود که در یک سر آن آگاهی های قابل اثبات و در سر دیگر آن، گونه‌های متفاوت مسأله‌های کاربردی قرار دارند. در بنیانگذاری استدلالی الگوریتم‌ها، هر قضیه، برای چند الگوریتم مورد استفاده قرار می‌گیرد و از نظر ساختمان الگوریتمی دانش ریاضی، ساختارهای نظری به وسیلهٔ الگوریتم تقسیم می‌شوند. الگوریتم‌ها هم برای انجام محاسبه لازمند و سرانجام، تنظیم نظری با وضع ریاضیات کاربردی ویران می‌شود. با همهٔ این‌ها، این جهت‌گیری کاربردی که به کمک نظریه «اصلاح می‌شود»، خود خصلتی منظم و آراسته دارد. دو تمایل مختلف برای سامان دادن به دانش ریاضی، یعنی تمایل به دانش‌های کاربردی و تمایل به روش‌های نظری، در روش الگوریتمی به هم می‌پیوندند که در واقع، برآیند موقعیت کاربردی و سنت نظری است. ریاضیات سده‌های میانه پیش از هر چیز ریاضیات محاسبه‌ای است. مجموعه‌ای از الگوریتم‌های محاسبه‌ای، برای حل مسأله‌های حساب، جبر و هندسه که در ابتدا ساده و سپس بغرنج می‌شوند، انگیزهٔ دستاوردهای نظری و به وجود آمدن مفهوم‌های تازه ریاضی می‌شوند. الگوریتم‌ها در آغاز نارسا و جدا از هم بودند و سپس در یک نظام علمی به هم پیوستند: زنجیرهٔ حرکت، ریاضیات نظری و ریاضیات کاربردی را به هم پیوند می‌دهد. این پیوند هم از بیرون است و هم از درون. نه تنها از جنبهٔ جهت‌گیری کاربردی گونه‌های متفاوت مسأله که با الگوریتم‌ها متناقض نیستند. بلکه از جنبهٔ سنت نظری که سازواره در شیوهٔ الگوریتمی دانش ریاضی، جمع شده است.

موقعیت خاص الگوریتم در ریاضیات کاربردی، معرف اشتراک ساختارهای فعالیت عملی و فعالیت فکری است. الگوریتم این امکان را پیدا کرد که نظریه و عمل را به هم پیوند دهد: از یک طرف عمل‌های متفرقی را که جنبهٔ تکراری داشتند و از نظر ماهیت دارای خصلت یکسانی بودند، به صورت عمل واحدی درآورد، و از طرف دیگر، به دانش نظری که جنبهٔ انتزاعی داشت، نزدیک بود. ویژگی شکل بیان عمل و نظریه به صورتی واحد، در روش الگوریتمی خط روشنی است که مرزها را، چه در تحقق روندهای عملی و چه در فرایند تفکر، معین می‌کند.

الگوریتم می‌تواند به عنوان برآیند سمت‌گیری کاربردی و سنت نظری دانش ریاضی پدید آید. همان‌طور که ریاضیات کاربردی پیش از یونان، زمینه را برای ریاضیات نظری یونان باستان فراهم کرد، تا ریاضیات کاربردی سده‌های میانه هم که برآیند ریاضیات کاربردی و نظری پیش از خود بود، راه بعدی تکامل و ساختار نظری ریاضیات در دورهٔ جدید را هموار کرد. نیازهای تازه، در گونه‌های مختلف ریاضیات کاربردی، به طور اساسی وجود داشت و پیش از دوران جدید در حلقهٔ الگوریتمی زنجیرهٔ محرک دانش ریاضی، مستحکم شده بود. نیوتن و لایپ نیتس این الگوریتم‌ها را به مفهوم‌هایی از بستگی‌های نظری ریاضی تبدیل کردند و به پدید آمدن ساختمان نظری ریاضیات منجر شد که این بستگی‌ها را به هم پیوند می‌داد.

به این ترتیب، تمامیت دانش ریاضی، به وسیلهٔ زنجیرهٔ محرک دگرگونی‌های آن تأمین شد؛ چرا که در آن اثبات و استدلال، به تدریج رسمیت عملی پیدا کرده بود. ولی این تمامیت به هیچ‌وجه به معنای تمامیت در روش‌های آموزشی آن نیست با وجود پیوستگی در دگرگونی‌ها، دانش ریاضی می‌تواند در طرح مسأله‌ها، در روش عمل آن‌ها و حتی در نمادهای خود، رنگارنگ و چندسو باشد.

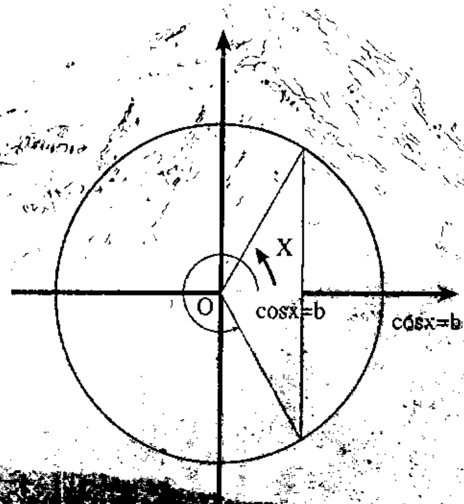
علت اصلی تصوری که دربارهٔ گسیختگی دانش ریاضی پیش می‌آید، در این است که در زنجیرهٔ حرکت و تغییر آن، اثبات‌ها (که به تمامیت نظری مربوطند)، نمی‌توانند از الگوریتم جلوتر بروند و در حالت جبری، به خود همین الگوریتم‌ها می‌رسند. از طرف دیگر، گونه‌های متفاوت مسأله‌ها نمی‌توانند خود را به سطح ساختمان‌های نظری بکشانند. الگوریتم، سنت نظری و سمت‌گیری کاربردی را در یک‌جا جمع می‌کنند و آن‌ها را به هم می‌پیوندند. ولی در هر حال، گونه‌های متفاوت مسأله‌ها با قضیه‌ها، رابطه‌ای غیر مستقیم دارند، نوعی سازوکار کمکی لازم است تا تمامیت دانش را در سطح روش‌های آموزشی تحکیم کند. این سازوکار عبارت است از **سازوکار اجتماعی پخش و انتقال آگاهی‌ها، در جریان آموزش**. این سازوکار که اجتماعی است و حلقه‌های به ظاهر جدا از هم زنجیرهٔ تحول دانش را به هم پیوند می‌دهد، جهت‌گیری کاربردی و سنت نظری را متحد می‌کند و از نظر روش‌شناسی، تمامیت واقعی دانش را تأمین می‌کند.

زیرنویس

۱. چنین است که جبر به عنوان شاخه مستقیمی از ریاضیات، شکل می‌گیرد.

2. C.N.Haskins

3. Regiomontanus



مقمد هاشم رستمی

برای دانش‌آموزان سال دوم متوسطه

حلّ معادله‌های مثلثاتی

حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $\text{Sin}X = a, (-۱ \le a \le +۱)$ را قبلاً دیدیم. اینک به حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $\text{Cos}X = b, (-۱ \le b \le ۱)$ می‌پردازیم.

حل معادلهٔ $\text{Cos}X = b, (-1 \le b \le +1)$

فرض می‌کنیم $b = \text{Cos}\alpha$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{Cos}X = \text{Cos}\alpha \Rightarrow X = ۲k\pi \pm \alpha$$

حالت خاص $\quad \text{Cos}X = ۰ \Rightarrow X = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

زیرا داریم:

$$\text{Cos}X = ۰ = \text{Cos}\frac{\pi}{۲} \Rightarrow \begin{cases} X = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} = \pi \text{مضرب زوج} + \frac{\pi}{۲} \\ X = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} = ۲k\pi - \pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \\ X = (۲k-۱)\pi + \frac{\pi}{۲} = \pi \text{مضرب زوج} + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

درنتیجه داریم:

$$X = k\pi + \frac{\pi}{۲} = \pi \text{ مضربی از } + \frac{\pi}{۲}$$

مثال ۱. معادلهٔ $۲\text{Cos}x - \sqrt{۳} = ۰$ را حل کنید.

حل. داریم:

$$۲\text{Cos}x - \sqrt{۳} = ۰ \Rightarrow ۲\text{Cos}x = \sqrt{۳} \Rightarrow \text{Cos}x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \text{Cos}\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۶} \quad \text{جواب‌های عمومی معادله}$$

مثال ۲. جواب‌های عمومی معادلهٔ $۲\text{Cos}x + ۱ = ۰$ و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(۰, ۲\pi)$ را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$۲\text{Cos}x + ۱ = ۰ \Rightarrow \text{Cos}x = -\frac{۱}{۲} = -\text{Cos}\frac{\pi}{۳} = \text{Cos}(\pi - \frac{\pi}{۳})$$

$$\text{Cos}\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$ = جواب‌های عمومی معادله

برای تعیین جواب‌های خصوصی واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ به‌جای k عددهای مناسب قرار می‌دهیم. این عددها با توجه به جواب کلی معادله و بازهٔ داده شده، انتخاب می‌شوند.

k	x	
-1	$-\frac{8\pi}{3} < 0,$	$-\frac{4\pi}{3} < 0$
0	$+\frac{2\pi}{3}$ ج	$-\frac{2\pi}{3} < 0$
1	$\frac{8\pi}{3} > 0,$	$\frac{4\pi}{3}$ ج
2	$\frac{14\pi}{3} > 2\pi,$	$\frac{10\pi}{3} > 2\pi$

مثال ۳. معادلهٔ $2\text{Cos}(2x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

حل. داریم:

$$2\text{Cos}(2x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2\text{Cos}(2x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\text{Cos}(2x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \text{Cos}\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{5\pi}{24} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{24} \end{cases}$$ جواب‌های عمومی معادله

مثال ۴. $\text{Cos}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) + \text{Sin}(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) = 0$ را حل کنید و جواب‌های محصور بین ۰ و 2π را به‌دست آورید.

حل. این معادله را می‌توان به صورت $\text{Sin}X = \text{Sin}\alpha$ یا $\text{Cos}X = \text{Cos}\alpha$ تبدیل کرد. ما آن را به صورت $\text{Cos}X = \text{Cos}\alpha$ درمی‌آوریم. همان‌طور که قبلاً گفته شد، X و α هر دو می‌توانند عبارت‌هایی شامل x (حرف مجهول) باشند.

$$\text{Cos}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) + \text{Sin}(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Cos}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) = -\text{Sin}(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) = \text{Sin}(-\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$\text{Cos}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) = \text{Cos}\left[\frac{\pi}{2} - (-\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3})\right] = \text{Cos}(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{4} - \frac{\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$\text{Cos}(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) = \text{Cos}(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{x}{4} + \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{x}{4} - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \\ \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2k\pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{12} = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \\ \frac{7x}{12} = 2k\pi - \frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24k\pi - \pi \\ x = \frac{24k\pi}{7} - \frac{5\pi}{7} \end{cases}$$ جواب‌های عمومی

k	x	
0	$-\pi < 0,$	$\frac{-5\pi}{7} < 0$
1	$23\pi > 2\pi,$	$\frac{19\pi}{7} > 2\pi$

همان‌طور که دیده می‌شود، این معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارای جواب نیست.

مثال ۵. معادلهٔ $2\text{Cos}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}) = m + 3$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) حدود m را چنان تعیین کنید که $0 < x < \pi$ باشد.

پ) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله، $x = \frac{\pi}{6}$ باشد.

ت) مقدار m را طوری تعیین کنید که $2\text{Cos}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$ باشد.

ث) به ازای $m = -3$، معادله را حل کنید.

حل. الف) داریم:

$$Cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=\frac{m+3}{2} \Rightarrow -1 \le \frac{m+3}{2} \le +1 \Rightarrow$$

$$-2\le m+3 \le +2 \Rightarrow -2-3 \le m+3-3 \le +2-3$$

$$\Rightarrow -5 \le m \le -1$$

ب) معادله را به صورت $Cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=\frac{m+3}{2}$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از شرط داده شده، داریم:

$$0<x<\pi \Rightarrow 0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0-\frac{\pi}{3}<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{3}<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < Cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}) < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{m+3}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1<m+3<\sqrt{3} \Rightarrow -2<m<\sqrt{3}-3$$

پ) شرط لازم و کافی برای آن که $x=\frac{\pi}{6}$ یک ریشهٔ معادلهٔ $2Cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3$ باشد، آن است که در این معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$2Cos(\frac{\pi/6}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3 \Rightarrow 2Cos(-\frac{\pi}{6})=m+3$$

$$2Cos\frac{\pi}{6}=m+3\Rightarrow 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=m+3 \Rightarrow m=-3+\sqrt{3}$$

ت) ریشه‌های معادلهٔ $2Cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ باید در معادلهٔ $2Cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3$ صدق کنند. بنابراین نخست باید جواب‌های معادلهٔ $2Cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ را به‌دست آوریم. سپس آن‌ها را در معادلهٔ $2Cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3$ قرار دهیم.

$$2Cos\frac{x}{2}=\sqrt{3} \Rightarrow Cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=Cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

دو جواب خصوصی $k=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\ x=-\frac{\pi}{3}$ و

جواب‌های عمومی $x=4k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$$x=\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{در معادلهٔ دومی}} 2Cos(\frac{\pi/3}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3\Rightarrow$$

$$2Cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=m+3 \Rightarrow 2Cos(-\frac{\pi}{6})=m+3\Rightarrow$$

$$2Cos\frac{\pi}{6}=m+3\Rightarrow 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=m+3\Rightarrow m=-3+\sqrt{3}$$

ث)

$$m=-3\Rightarrow 2Cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow$$

$$Cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{x}{2}=k\pi+\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{3}$$

مثال ۶. جواب‌های کلی معادلهٔ $2Cos4\pi x-\sqrt{2+\sqrt{2}}=0$ را به‌دست آورید و جواب‌های موجود در بازهٔ (۰,۱) را مشخص سازید.

حل. داریم:

$$2Cos4\pi x-\sqrt{2+\sqrt{2}}=0\Rightarrow 2Cos4\pi x=\sqrt{2+\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$Cos4\pi x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=Cos\frac{\pi}{8}\Rightarrow 4\pi x=2k\pi\pm\frac{\pi}{8}\Rightarrow$$

$$x=\frac{2k\pi}{4\pi}\pm\frac{\pi/8}{4\pi},\quad x=\frac{k}{2}\pm\frac{1}{32}$$

$x=\frac{k}{2}+\frac{1}{32},\quad x=\frac{k}{2}-\frac{1}{32}$ جواب‌های کلی معادله

برای تعیین جواب‌های موجود در بازهٔ (۰,۱)، به جای k عددهای صحیح مناسب قرار می‌دهیم.

k	x	
-1	$-\frac{15}{32}$ ج 0	$-\frac{17}{32}<0$
0	$\frac{1}{32}$ ج	$-\frac{1}{32}$ ج 0
1	$\frac{17}{32}$	$\frac{15}{32}$ ج
2	$\frac{33}{32}>1$	$\frac{31}{32}$
3	$\frac{49}{32}>1$	$\frac{47}{32}>1$

همان طور که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی مورد

نظر مسأله $\frac{1}{32}$، $\frac{15}{32}$، $\frac{17}{32}$ و $\frac{31}{32}$ هستند.

مثال ۷. معادلهٔ $2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})-2m+3=0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله جواب داشته باشد.

ب) حدود m را چنان تعیین کنید که $0<x<\frac{1}{2}$ باشد.

پ) به ازای $m=1$ معادله را حل کنید.

حل. داریم:

الف)

$$2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})-2m+3=0\Rightarrow$$

$$\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})=\frac{2m-3}{2}\Rightarrow -1\le\frac{2m-3}{2}\le 1\Rightarrow$$

$$-2\le 2m-3\le +2\Rightarrow -2+3\le 2m\le +2+3\Rightarrow$$

$$1\le 2m\le 5\Rightarrow \frac{1}{2}\le m\le\frac{5}{2}$$

ب)

$$0<x<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<\pi x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4}<\pi x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\pi x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})<+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2m+3}{2}<+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow -\sqrt{2}<2m+3<\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$-3-\sqrt{2}<2m<-3+\sqrt{2}\Rightarrow\frac{-3-\sqrt{2}}{2}<m<\frac{-3+\sqrt{2}}{2}$$

پ) به ازای $m=1$ داریم:

$$2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})-2+3=0\Rightarrow 2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})+1=0\Rightarrow$$

$$2\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}=\cos(\pi-\frac{\pi}{3})=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\cos(\pi x+\frac{\pi}{4})=\cos\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\pi x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{4}=2k\pm\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k-\frac{1}{4}\pm\frac{2}{3}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=2k-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k+\frac{5}{12}\\ x=2k-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k-\frac{11}{12}\end{cases}$$

جواب‌های کلی معادله

مثال ۸. معادلهٔ $\cos(x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=0$ را حل کنید.

حل. این معادله را می‌توان به صورت $\sin X=\sin\alpha$ یا $\cos X=\cos\alpha$ درآورد و سپس حل کرد. برای این کار از رابطه‌های بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ متمم $(\frac{\pi}{2}-\alpha,\alpha)$ و یا شبه‌متمم $(\frac{\pi}{2}+\alpha,\alpha)$ استفاده می‌کنیم. زیرا داریم:

$$\sin\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\quad\text{و}$$

$$\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

در این جا، معادله را به صورت $\cos X=\cos\alpha$ درمی‌آوریم و حل می‌کنیم. داریم:

$$\cos(x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$\cos(x-\frac{\pi}{6})=\cos(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=2k\pi-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3x}{2}=2k\pi+\frac{5\pi}{12}\\ \frac{x}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4k\pi}{3}+\frac{5\pi}{18}\\ x=4k\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$

جواب‌های عمومی معادله

حد، پیوستگی و مشتق پذیری به کمک نمودارها

در این مقاله سعی شده است، دربارهٔ تابعی مانند f، موارد حد، پیوستگی، مشتق پذیری، اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق، یکنوایی و اکیداً یکنوایی را به صورت شهودی بیان کنیم.

● احمد قندهاری

حدتابع در یک نقطه

الف) نقطهٔ توخالی را در نمودار تابع f، نقطهٔ حد گوییم.

ب) اگر در سمت چپ این نقطهٔ توخالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد چپ تابع f گوییم.

ج) چنانچه در سمت راست نقطهٔ توخالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد راست تابع f گوییم.

د) اگر در دو نقطهٔ توخالی، نمودار تابع f وجود داشته باشد، آن نقطه را حد تابع گوییم. به نمودارهای شمارهٔ ۱ زیر توجه کنید:

نتایج شکل

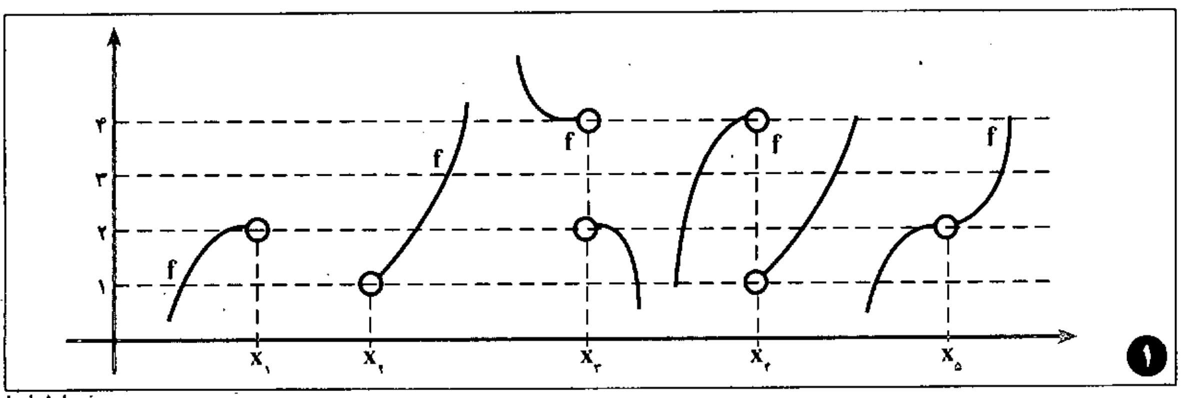
۱. تابع f در x_1 فقط حد چپ دارد که مقدار آن در این نقطه عدد ۲ است.

۲. تابع f در x_2 فقط حد راست دارد که فقط آن در این نقطه ۱ است.

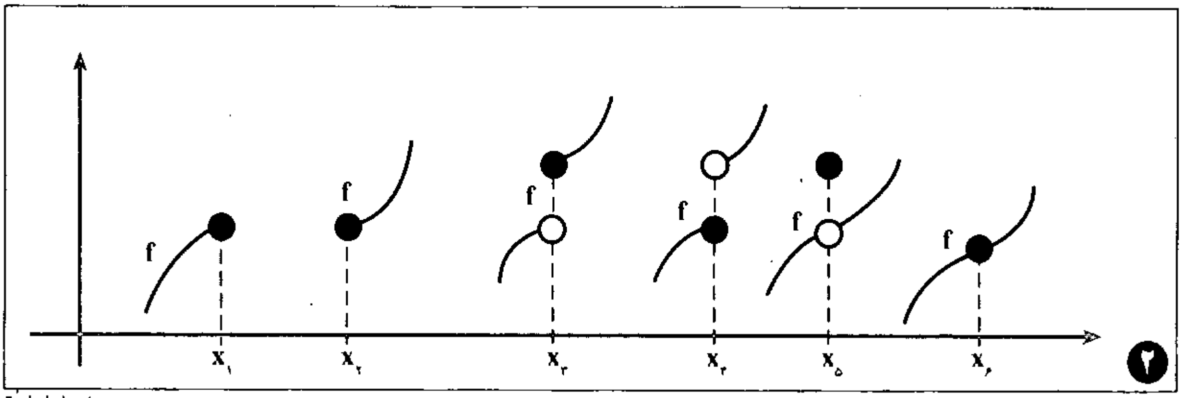
۳. تابع f در x_3، حد راست ۲ و حد چپ ۳ دارد. چون حد راست تابع در x_3 با حد چپ تابع در این نقطه برابر نیست، پس باز هم تابع در این نقطه حد ندارد.

۴. تابع f در x_4، حد راست ۱ و حد چپ ۳ دارد. ولی چون حد راست تابع برابر با حد چپ آن در x_4 نیست، بازهم تابع در x_4 حد ندارد.

۵. تابع f در x_5، حد راست و حد چپ دارد که هر دو برابر ۲ هستند. می گوییم تابع در x_5 حد دارد.



نمودار شماره ۱



نمودار شماره ۲

پیوستگی تابع در یک نقطه

الف) نقطهٔ توپر (سیاه) شکل را مقدار تابع گوییم.

ب) اگر مقدار تابع فقط روی حد چپ قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه فقط پیوستگی چپ دارد.

ج) اگر مقدار تابع فقط روی حد راست، قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه فقط پیوستگی راست دارد.

د) اگر مقدار تابع روی حد تابع قرار گیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه پیوسته است.

هـ) اگر مقدار تابع روی نقطهٔ حد تابع قرار نگیرد، می‌گوییم تابع در آن نقطه حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.

به نمودارهای شمارهٔ ۲ توجه کنید:

نتایج شکل

۱. تابع f در x_1 ، حد راست ندارد و مقدار تابع روی حد چپ قرار گرفته است، می‌گوییم تابع در این نقطه فقط پیوستگی چپ دارد.

۲. تابع f در x_2 ، حد چپ ندارد و مقدار تابع روی حد راست قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در این نقطه فقط پیوستگی راست دارد.

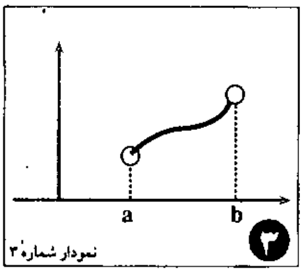
۳. تابع f در x_3 ، حد راست و حد چپ نابرابر دارد، ولی مقدار تابع روی حد راست قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_3 ، حد چپ دارد، ولی فقط پیوستگی راست دارد.

۴. تابع f در x_4 ، حد راست و حد چپ نابرابر دارد، ولی مقدار تابع روی حد چپ قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_4 ، حد راست دارد، ولی فقط پیوستگی چپ دارد.

۵. تابع f در x_5 ، حد دارد، ولی مقدار تابع روی حد قرار ندارد. می‌گوییم تابع f در x_5 حد دارد، ولی هیچ نوع پیوستگی ندارد.

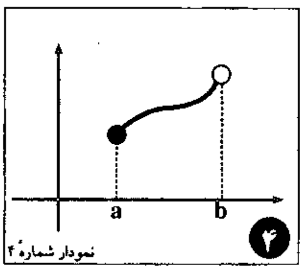
۶. تابع f در x_6 ، حد دارد و مقدار تابع روی حد تابع قرار گرفته است. می‌گوییم تابع در x_6 پیوسته است.

پیوستگی در یک بازه



نمودار شمارهٔ ۳

۱. تابع f را در بازهٔ $(a,b)\subset D_f$ وقتی پیوسته گوییم که f در هر x_0 ، $a<x_0<b$ پیوسته باشد. (نمودار شمارهٔ ۳)

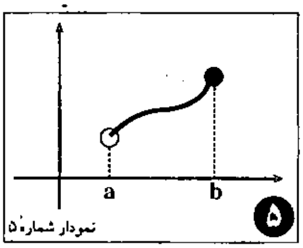


نمودار شمارهٔ ۴

۲. تابع f را در بازهٔ $[a,b)$ وقتی پیوسته گوییم که:

الف) f در هر x_0 ، $a<x_0<b$ پیوسته باشد.

ب) f در a پیوستگی راست داشته باشد. (نمودار شمارهٔ ۴)



نمودار شمارهٔ ۵

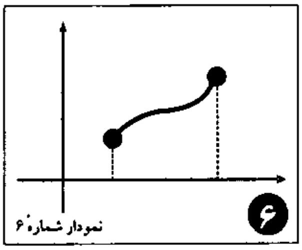
۳. تابع f را در بازهٔ $(a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که:

الف) f در هر x_0 ، $a<x_0<b$ پیوسته باشد.

ب) f در b پیوستگی چپ باشد. (نمودار شمارهٔ ۵)

۴ . تابع f در بازهٔ $[a,b]$ وقتی پیوسته گوییم که:

الف) f در هر x_0 ، $a < x_0 < b$ پیوسته باشد.

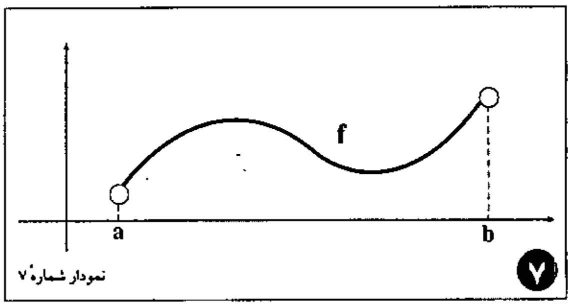

نمودار شمارهٔ ۶

ب) f در a پیوستگی راست و در b پیوستگی چپ داشته باشد. (نمودار شمارهٔ ۶)

مشتق‌پذیری تابع در یک نقطه

قرارداد: نمودار تابع پیوستهٔ f را در بازهٔ $(a,b) \subset D_f$ وقتی هموار گوییم که در هر نقطهٔ x_0 ، $a < x_0 < b$ بتوان فقط یک خط مماس بر منحنی f رسم کرد که موازی محور yها نباشد.

شکل تابع f (نمودار شمارهٔ ۷)، نمونهٔ یک تابع هموار در بازهٔ (a,b) است.



نمودار شمارهٔ ۷

۱ . تابع f را در نقطهٔ پیوستهٔ x_0 وقتی مشتق‌پذیر گوییم که فقط و فقط یک خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ x_0 وجود داشته باشد، به طوری که آن خط، موازی محور yها نباشد.

با توجه به تعریف (۱)، تابع های f، g، h، (نمودارهای شمارهٔ ۸) در x_0 مشتق‌پذیرند.

۲ . اگر تابع f در بازهٔ $[a,b] \subset D_f$ پیوسته و در بازهٔ (a,b) هموار باشد، آن‌گاه تابع f در بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر است.

سؤال: یک تابع مانند f در چه نقاطی مشتق‌پذیر نیست؟

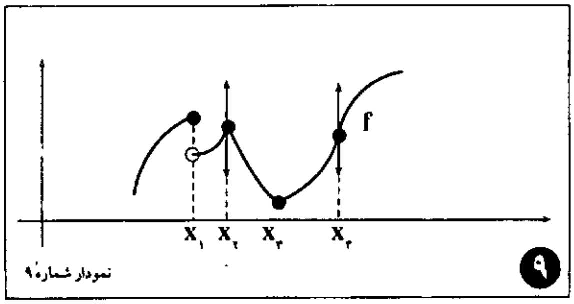
جواب:

الف) در نقاطی که تابع در آن‌ها ناپیوسته باشد.

ب) در نقاطی که دو خط مماس بر منحنی f وجود داشته باشد.

ج) در نقاطی که خط مماس بر منحنی f موازی محور yها باشد.

به نمودار شمارهٔ ۹ توجه کنید:

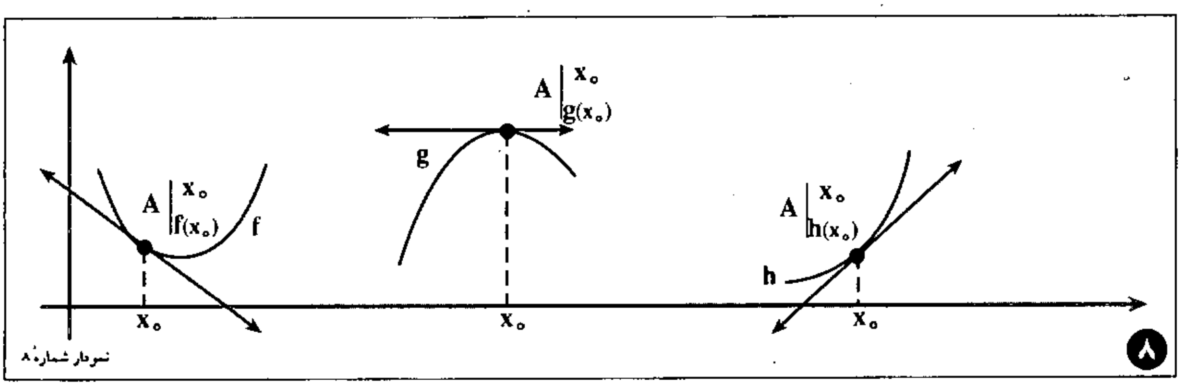


نمودار شمارهٔ ۹

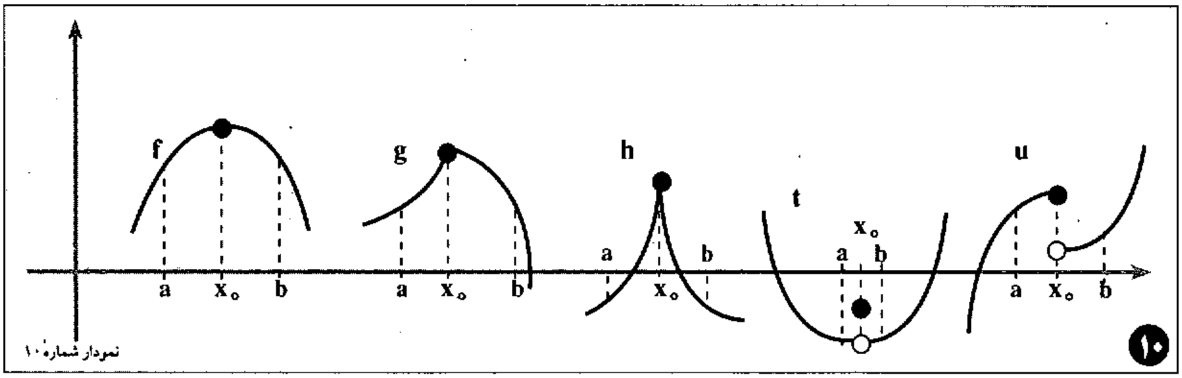
۱ . تابع f در x_1 مشتق‌پذیر نیست؛ زیرا تابع f در x_1 ناپیوسته است.

۲ . تابع f در x_3 مشتق‌پذیر نیست. زیرا منحنی تابع f در نقطه‌ای به طول x_3 ، زاویه‌دار است. در نتیجه در این نقطه دو خط مماس بر منحنی f وجود دارد.

۳ . تابع f در x_2 و x_4 مشتق‌پذیر نیست. زیرا خط های مماس بر منحنی تابع f در نقاطی به طول های x_2 و x_4 ، موازی محور yها هستند.



نمودار شمارهٔ ۸



اکسترمم نسبی

۱ . نقطه‌ای به طول $x_0 \in D_f$ را طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f گوییم؛ در صورتی‌که:

اولاً: در همسایگی x_0 ، نمودار تابع f وجود داشته باشد.

ثانیاً: عرض نقطهٔ x_0 ، از عرض‌های نقاط همسایگی بیش‌تر و یا مساوی آن‌ها باشد.

فرض می‌کنیم بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 باشد $(a < x_0 < b)$. به نمودار شمارهٔ ۱۰ تابع‌های f، g، h، t و u توجه کنید.

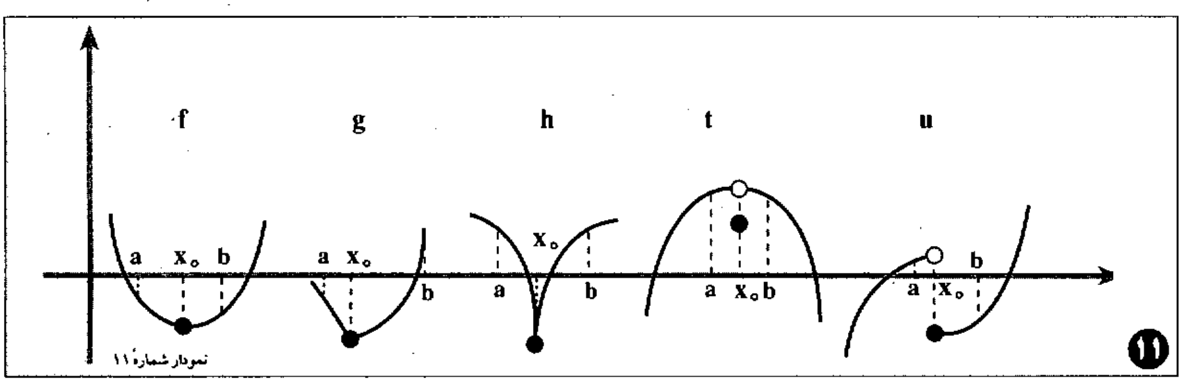
نقطه‌ای به طول x_0 ، در تابع‌های f، g، h، t، u طول ماکزیمم نسبی است.

۲ . نقطه‌ای به طول $x_0 \in D_f$ را طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f گوییم؛ در صورتی‌که:

اولاً: در همسایگی x_0 نمودار تابع f وجود داشته باشد.

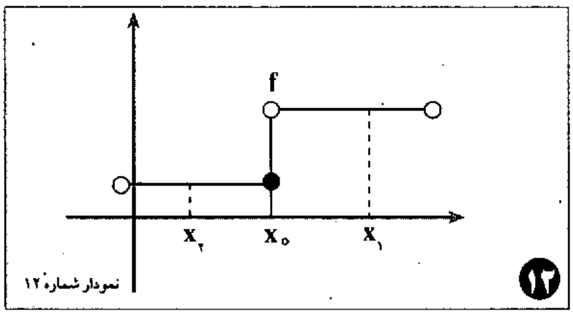
ثانیاً: عرض نقطهٔ (a,b) از عرض‌های نقاط همسایگی کم‌تر و یا مساوی آن‌ها باشد.

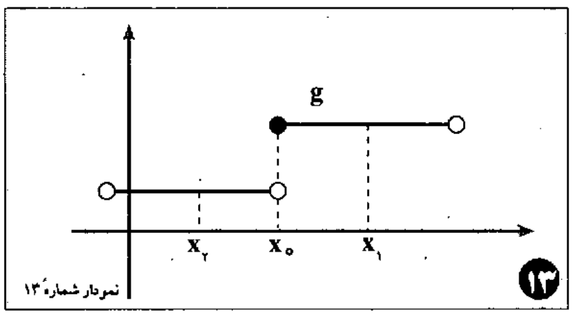
فرض می‌کنیم بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 باشد $(a < x_0 < b)$. به نمودارهای شماره ۱۱ توجه کنید:



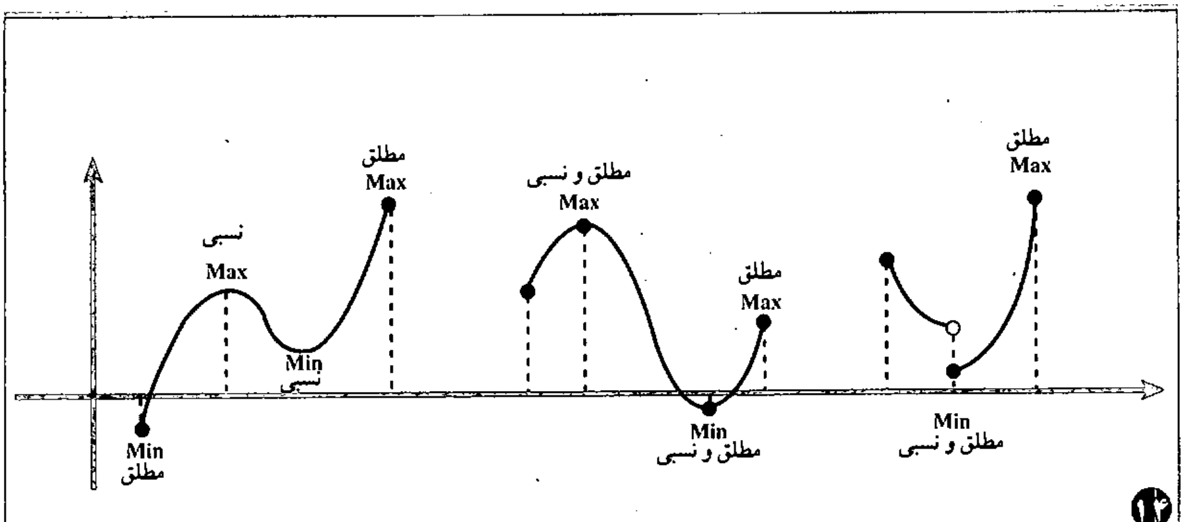
نقطه‌ای به طول x_0 ، در تابع‌های f، g، h، t و u طول مینیمم نسبی است.

سؤال. دو تابع f و g با نمودارهای ۱۲ و ۱۳ مفروضند:





نقاطی به طول‌های x_0 ، x_1 و x_2 در تابع‌های f و g دقیقاً طول‌های چه نقاطی هستند؟



۱۴ نمودار شمارهٔ ۱۴

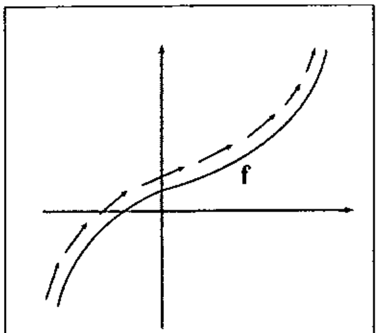
ماکزیمم و مینیمم مطلق

بالاترین نقطهٔ نمودار تابع را ماکزیمم مطلق و پائین‌ترین نقطهٔ نمودار تابع را مینیمم مطلق گوییم(نمودار شمارهٔ ۱۴).

تذکر: اگر ماکزیمم مطلق همسایگی داشته باشد، ماکزیمم نسبی هم خواهد بود، و اگر مینیمم مطلق همسایگی داشته باشد، مینیمم نسبی هم خواهد بود.

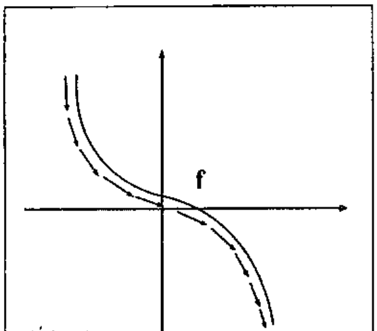
تابع اکیداً یکنوا

۱. نمودار تابع پیوستهٔ f را وقتی صعودی اکید گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، همواره به طرف بالا برویم(نمودار شمارهٔ ۱۵).



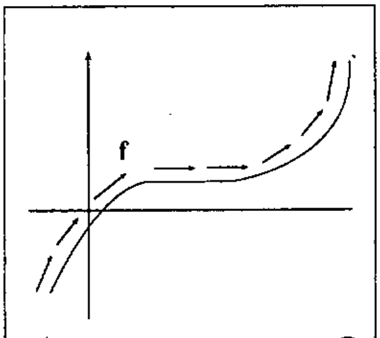
۱۵ f صعودی اکید است. نمودار شمارهٔ ۱۵

۲. نمودار تابع پیوستهٔ f را وقتی نزولی اکید گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، همواره به طرف پائین بیاییم (نمودار شمارهٔ ۱۶).



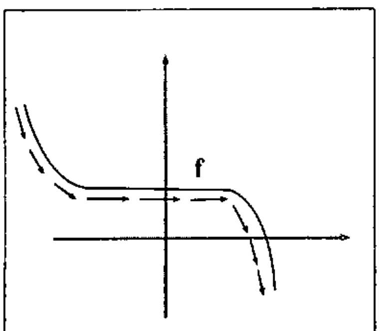
۱۶ f نزولی اکید است. نمودار شمارهٔ ۱۶

۳. نمودار تابع پیوستهٔ f را وقتی صعودی گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، به طرف بالا برویم و در قسمتی از نمودار، حرکت افقی باشد (نمودار شمارهٔ ۱۷).



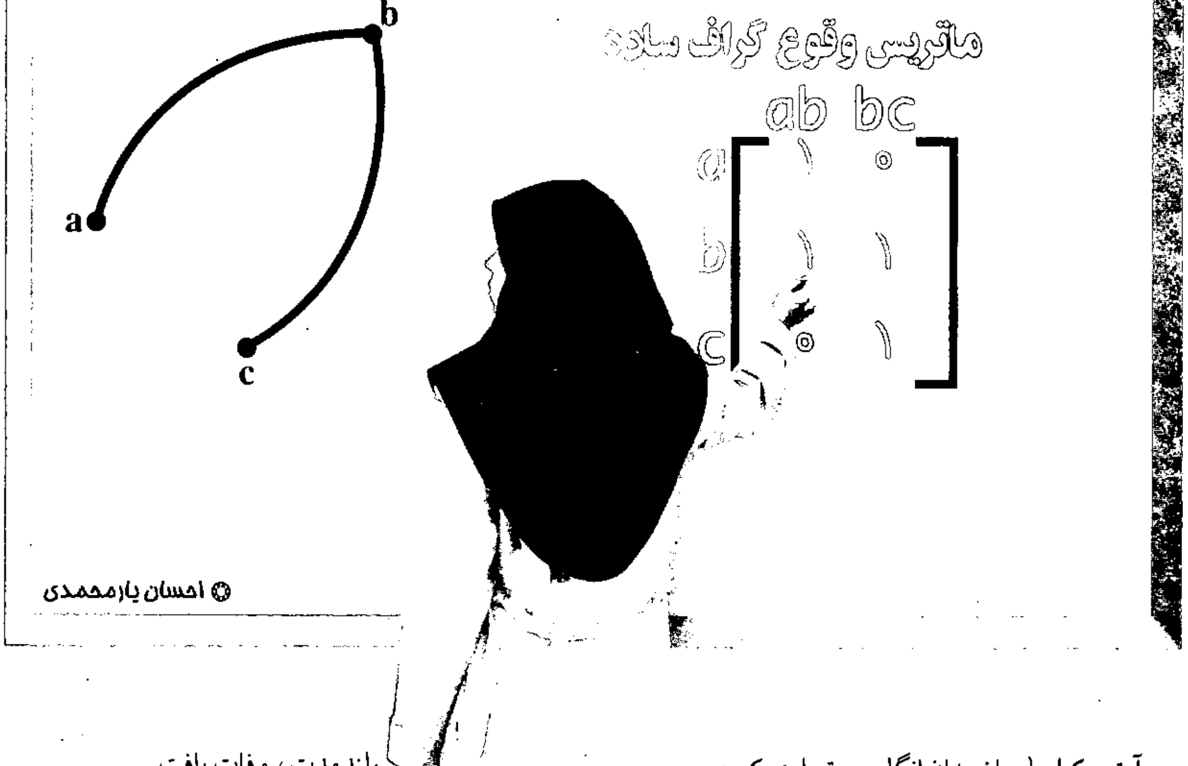
۱۷ f صعودی است. نمودار شمارهٔ ۱۷

۴. نمودار تابع پیوستهٔ f را وقتی نزولی گوییم که اگر از سمت چپ شکل روی نمودار حرکت کنیم، به طرف پائین بیاییم و در قسمتی از نمودار، حرکت افقی باشد(نمودار شمارهٔ ۱۸).



۱۸ f نزولی اکید است. نمودار شمارهٔ ۱۸

در حاشیه گراف های ساده



احسان یارمحمدی

آرتور کیلی[1] ریاضیدان انگلیسی تباری که در شانزدهم اوت سال ۱۸۲۱ میلادی در ریچموند[2] ناحیهٔ سوری[3] جزیرهٔ بریتانیا به دنیا آمد، اولین کسی بود که ماتریس را در ریاضیات مطرح کرد. ۱۰ سال بعد از این که **گوستاو کیرشهف** (۱۸۸۷ ـ ۱۸۴۲) در تعمیم قوانین اهم برای جریان الکتریکی، در کاربردهایی که شامل شبکه های الکتریکی بودند، نوع خاصی از گراف های همبند و بدون دور را مطرح ساخت، آرتور کیلی توانست، هنگام شمارش ایزومرهای متمایز هیدروکربن های اشباع شده ای به نام آلکان با فرمول عمومی «C_nH_{2n+2}» $(n \in \mathbb{N})$ نام درخت را برای این گراف های همبند و بدون دور، اختیار کند. بنابراین می توان از او به عنوان یکی از کسانی نام برد که با مطرح کردن ماتریس و نهادن نام درخت بر یک گراف خاص، در پیشبرد نظریهٔ گراف نقشی را ایفا کرده اند.

کیلی در حالی که فعالیت علمی خویش را تا یک هفته قبل از مرگش ادامه می داد، در روز بیست و ششم ژانویهٔ سال ۱۸۹۵ میلادی، بعد از تحمل یک بیماری دردناک و بلند مدت، وفات یافت.

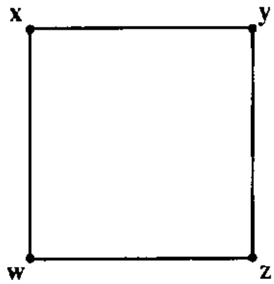
به هر گراف سادهٔ $G=(V,E)$ از مرتبهٔ p و اندازهٔ q که دارای یک مدل ریاضی با عنوان نمودار گراف G است، می توان یک ماتریس از مرتبهٔ $p \times q$ نسبت داد که به ماتریس «وقوع گراف G» شهرت دارد و آن را با $M(G)$ نمایش می دهیم. بدین ترتیب که در مقابل p سطر این ماتریس، رأس های $V_1, V_2, \ldots, V_p$ را از مجموعهٔ رأس های $V=\{V_1, V_2, \ldots V_p\}$ گراف G و در مقابل q ستون این ماتریس، یال های $E_1, E_2, \ldots, E_q$ را از مجموعهٔ یال های $E=\{E_1, E_2, \ldots E_q\}$ گراف G می نویسیم.

در این صورت ماتریس وقوع گراف سادهٔ G، شامل درایه های صفر و یک است. بدین ترتیب که اگر رأس V_i، ابتدا یا انتهای یالی از گراف G باشد، درایهٔ ماتریس $M(G)$ یک و در غیر این صورت صفر است.

مثال ۱. در گراف سادهٔ $G=(V,E)$ داریم: $V=\{x,y,z\}$ ، $E=\{xy, yz, zx\}$. بنابراین ماتریس وقوع

این گراف به صورت $M(G) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} xy & yz & zx \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ است.

مثال ۲. نمودار گراف سادهٔ $G = (V, E)$ شکل زیر است.



بنابراین ماتریس وقوع این گراف ساده به این صورت است.

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} xy & yz & zw & wx \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ویژگی‌های ماتریس وقوع گراف سادهٔ $G = (V, E)$

۱. ممکن است تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر باشد (مثال ۱)؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مربعی باشد، یا تعداد سطرهای ماتریس وقوع گراف، با تعداد ستون‌های آن برابر نباشد؛ یعنی ماتریس وقوع گراف، مربعی نباشد.

۲. چون گراف ساده موضوع مورد بحث ساده است، بنابراین درایه‌های ماتریس وقوع این گراف همواره صفر و یک هستند.

اکنون که با ماتریس وقوع گراف سادهٔ G و ویژگی‌های آن آشنا شدیم، در مورد این گراف و ماتریس وقوع مربوط به آن چند قضیه را مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ ۱

گراف سادهٔ $G = (V, E)$ دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع درایه‌های سطر iام ماتریس $M(G)$ برابر با درجهٔ رأس V_i است.

برهان

هر عدد یک که در سطر iام وجود دارد، نشان می‌دهد که از رأس V_i یک یال عبور کرده است. بنابراین تعداد یک‌های سطر iام، برابر تعداد یال‌هایی است که از رأس V_i عبور کرده‌اند. درنتیجه، مجموع این یک‌ها، درجهٔ رأس V_i را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲

گراف سادهٔ $G = (V, E)$ از مرتبهٔ p، دارای ماتریس وقوع $M(G)$ است؛ به طوری که مجموع تمام درایه‌های سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر $\sum_{i=1}^{p} \deg(V_i)$ است.

برهان

مجموع درایه‌های سطر iام ماتریس $M(G)$، برابر با درجهٔ رأس V_i است. بنابراین مجموع تمام درایه‌های سطرهای ماتریس $M(G)$، برابر با $\sum_{i=1}^{p} \deg(V_i)$ است.

مثال ۱. ماتریس وقوع گراف سادهٔ $G = (V, E)$، عبارت است از:

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} xy & yz & yw & zw & xw \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

بنابراین در گراف سادهٔ G، $\deg(x) = \deg(z) = ۲$ و $\deg(y) = \deg(w) = ۳$ است.

مثال ۲. ماتریس وقوع گراف سادهٔ $G = (V, E)$، به صورت زیر است.

$$M(G) = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} xy & yz & zx \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

بنابراین در گراف سادهٔ G داریم :

$$\sum_{i=1}^{p} \deg (V_i) = ۱+۱+۱+۱+۱+۱ = ۶$$

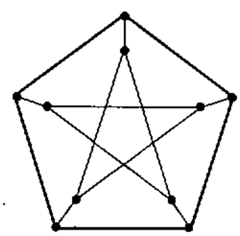
قضیهٔ ۳

ماتریس وقوع گراف سادهٔ همبند و بدون دور $G = (V, E)$، مربعی نیست.

برهان

از آن جا که گراف G همبند بدون دور است، نتیجه می‌گیریم که درخت است. بنابراین، در این درخت که از مرتبهٔ p و اندازهٔ q است، همواره داریم: $p = q + 1$. بنابراین، ماتریس M(G) که از مرتبهٔ $p \times q$ است، مربعی نیست.

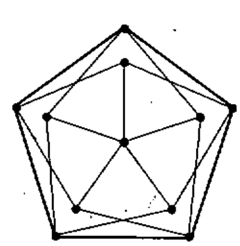
آزمون۱. شکل زیر نمودار گراف «پترسن» است. تعداد درایه‌های یک ماتریس وقوع این گراف کدام است؟



الف) ۱۵۰   ب) ۱۲۰   ج) ۳۰   د) ۶۰

جواب: گزینهٔ (ج) صحیح است. چون گراف «پترسن» از مرتبهٔ ۱۰ و اندازهٔ ۱۵ است، بنابراین طبق قضیهٔ ۲، تعداد یک‌های ماتریس وقوع آن برابر $2q = ۳۰$ می‌شود.

آزمون۲. شکل زیر نمودار گراف «گروتژ» است. تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع این گراف کدام است؟



الف) ۲۲۰   ب) ۴۰   ج) ۱۸۰   د) ۸۰

جواب: گزینهٔ (ج) صحیح است. چون گراف «گروتژ» از مرتبهٔ ۱۱ و اندازهٔ ۲۰ است. پس بنا بر قضیهٔ ۲، تعداد یک‌های ماتریس وقوع آن برابر $2q = ۴۰$ و تعداد درایه‌های صفر ماتریس وقوع آن برابر $p \times q - 2q = ۱۸۰$ است.

زیرنویس

1. Arthur Cayley
2. Richmond
3. Surrey

منابع

۱. ریاضیات گسستهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی.
۲. نظریهٔ گراف. حسین ابراهیم‌زاده قُلزم. انتشارات مدرسه.
3. M. Behzad, G. chartrand. and L. Lesniak Foster, Graphs and Digraphs wadsworth International Group.
۴. آشنایی با ریاضیات گسستهٔ دورهٔ پیش‌دانشگاهی. سیدحسین سیدموسوی و جواد ترکمن. انتشارات مبتکران.



رشته‌های گوناگون ریاضی مانند: نظریه شبکه‌ها، جبر جامع، توپولوژی، معادلات دیفرانسیل، آنالیز عددی، تاریخ ریاضیات و کاربردهای گوناگون ریاضی، به خصوص در مهندسی هسته‌ای، به چاپ رساند. وی یا به تنهایی و یا با همکاری دیگران، ده عنوان کتاب نوشته است. پنجاه دانشجو نیز رسالهٔ دکترای خود را به راهنمایی او گذرانده‌اند.



◎ حمیدرضا امیری

دترمینان

کاربرد قضایا و نکته های دترمینان در حل مسأله ها

برای دانش آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

در شمارهٔ قبل قضیه ها و ویژگی های مربوط به دترمینان را بیان کردیم، حال با استفاده از قضیه ها و ویژگی های ذکر شده می خواهیم به طرح و حل مسائل متنوعی در این زمینه بپردازیم. مسائل مربوط به ویژگی های دترمینان بسیار جالب، سرگرم کننده و تفکر برانگیزند و می توان آن ها را به سه نوع تقسیم کرد. این ویژگی ها در قالب مسائل حل شده در این مقاله می آیند.

مسائل نوع اوّل: مسائلی که در آن ها باید ثابت کنیم مقدار یک دترمینان صفر است. در این نوع مسأله ها تلاش می کنیم که دو سطر یا دو ستون مضربی از یکدیگر شوند یا یک سطر یا یک ستون آن ماتریس صفر شود.

مسألهٔ ۱. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & 3 \\ b & a+c & 3 \\ c & a+b & 3 \end{vmatrix} = 0$$

حل. (متذکّر می شوم که سطر i ام را با R_i و ستون j ام را با C_j نمایش می دهیم.)

$$\begin{vmatrix} a & b+c & 3 \\ b & a+c & 3 \\ c & a+b & 3 \end{vmatrix} \overset{R_1+R_2}{=} \begin{vmatrix} a & a+b+c & 3 \\ b & a+b+c & 3 \\ c & a+b+c & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ b & 1 & 3 \\ c & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c) \times 0 = 0$$

مسألهٔ ۲. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(yz) \\ 5 & \log y & \log(xz) \\ 5 & \log z & \log(xy) \end{vmatrix} = 0$$

حل: از رابطهٔ $\log a + \log b = \log(ab)$ کمک می‌گیریم و ستون دوم را به ستونِ سوم اضافه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(yz) \\ 5 & \log y & \log(xz) \\ 5 & \log z & \log(xy) \end{vmatrix} \overset{C_3+C_2}{=} \begin{vmatrix} 5 & \log x & \log(xyz) \\ 5 & \log y & \log(xyz) \\ 5 & \log z & \log(xyz) \end{vmatrix}$$

$$= \log(xyz) \begin{vmatrix} 5 & \log x & 1 \\ 5 & \log y & 1 \\ 5 & \log z & 1 \end{vmatrix} = \log(xyz) \times 0 = 0$$

مسألهٔ ۳. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & ay+az & x-t \\ a & ax+az & y-t \\ a & ax+ay & z-t \end{vmatrix} = 0$$

حل.

$$\begin{vmatrix} a & ay+az & x-t \\ a & ax+az & y-t \\ a & ax+ay & z-t \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & y+z & x-t \\ a & x+z & y-t \\ a & x+y & z-t \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2+C_3}{=} a \begin{vmatrix} a & x+y+z-t & x-t \\ a & x+y+z-t & y-t \\ a & x+y+z-t & z-t \end{vmatrix} = a(x+y+z-t) \begin{vmatrix} a & 1 & x-t \\ a & 1 & y-t \\ a & 1 & z-t \end{vmatrix}$$

(ستون اوّل، a برابر ستون دوم است.)

$$= a(x+y+z-t) \times 0 = 0$$

مسألهٔ ۴. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

حل. (ستون‌های دوم، سوم و چهارم را به ستون اوّل اضافه می‌کنیم.)

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

مسألهٔ ۵. ثابت کنید:

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin(x+t) & \sin(y+t) & \sin(z+t) \end{vmatrix} = 0$$

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x\cos t+\sin t\cos x & \sin y\cos t+\cos y\sin t & \sin z\cos t+\cos z\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x\cos t & \sin y\cos t & \sin z\cos t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin t\cos x & \cos y\sin t & \cos z\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \sin x & \sin y & \sin z \end{vmatrix} + \sin t \begin{vmatrix} \sin x & \sin y & \sin z \\ \cos x & \cos y & \cos z \\ \cos x & \cos y & \cos z \end{vmatrix}$$

$$= \cos t \times 0 + \sin t \times 0 = 0 + 0 = 0$$

مسألهٔ ۶. ثابت کنید:

حل.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & x' & ax+bx' \\ y & y' & ay+by' \\ z & z' & az+az' \end{vmatrix} = 0$$

$$|A| = \frac{1}{a \times b} \begin{vmatrix} ax & bx' & ax+bx' \\ ay & by' & ay+by' \\ az & bz' & az+bz' \end{vmatrix}$$

$$\overset{C_2+C_1}{=}\frac{1}{ab}\begin{vmatrix} ax+bx' & bx' & ax+bx' \\ ay+by' & by' & ay+by' \\ az+bz' & bz' & az+bz' \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{ab}\times 0=0$$

مسائل نوع دوم: مسائلی که در آن‌ها باید ثابت کنیم مقدار یک دترمینان برابر با عددی ناصفر یا عبارتی جبری است. در این نوع مسأله‌ها باید سعی کنیم با استفاده از ویژگی‌های دترمینان، ماتریس را مثلثی کنیم و حاصل ضرب درایه‌های روی قطر اصلی که همان دترمینان ماتریس است، جواب مسأله خواهد بود.

مسألهٔ ۷. ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=9$$

حل. قرینهٔ ستون چهارم را به ستون‌های اول، دوم و سوم اضافه می‌کنیم.

$$\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}\overset{R_1+R_4}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2+R_4}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}\overset{R_3+R_4}{=}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}=9\times1\times1\times1=9$$

مسألهٔ ۸. ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}=abc$$

حل. (-1) برابر ستون اوّل را به بقیّهٔ ستون‌ها اضافه می‌کنیم:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}=1\times a\times b\times c=abc$$

مسألهٔ ۹. ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 0 & a & 1+a^2 \end{vmatrix}=(1+a^2)^3$$

حل.

$$|A|\overset{R_1+R_3}{=}\begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ a & 1+a^2 & a \\ 1+a^2 & 0 & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-C_3+C_1}{=}\begin{vmatrix} 1+a^2 & -a & 0 \\ 0 & 1+a^2 & a \\ 0 & 0 & 1+a^2 \end{vmatrix}=(1+a^2)^3$$

مسألهٔ ۱۰. ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x^2-1 & 2y^2-1 & 2z^2-1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=2(y-x)(x-z)(z-y)$$

حل.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x^2 & 2y^2 & 2z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}+\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{0}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=2\times(-1)\times\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix}=2\times(-1)\times(-1)\times\underbrace{\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$=2(x-y)(x-z)(y-z)$$

مسأله ۱۱ . اگر $x+y+z=0$ ، ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+x & y & z \\ x & a+y & z \\ x & y & a+z \end{vmatrix}=a^3$$

حل . یک برابر ستون دوم و سوم را به ستون اوّل اضافه می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x+y+z=0$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+x+y+z & y & z \\ a+x+y+z & a+y & z \\ a+x+y+z & y & a+z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & y & z \\ a & a+y & z \\ a & y & a+z \end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{-R_1+R_2 \\ -R_1+R_3}}{=}\begin{vmatrix} a & y & z \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^3$$

مسأله ۱۲ . ثابت کنید:

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & b & b \\ a & b+1 & a \\ 1 & 1 & a+b \end{vmatrix}=4ab$$

حل .

$$|A|\overset{-C_1+C_2}{=}\begin{vmatrix} a+1 & b-a-1 & b \\ a & b+1-a & a \\ 1 & 0 & a+b \end{vmatrix}=(a+b)\begin{vmatrix} a+1 & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ a & b+1-a & \frac{a}{a+b} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-C_3+C_1}{=}(a+b)\begin{vmatrix} \frac{a^2+ab+a}{a+b} & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ \frac{a^2+ab-a}{a+b} & b+1-a & \frac{a}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+ab+a & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ a^2+ab-a & b+1-a & \frac{a}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{-R_1+R_2}{=}\begin{vmatrix} a^2+ab+a & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ -2a & 2 & \frac{a-b}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{aC_2+C_1}{=}\begin{vmatrix} 2ab & b-a-1 & \frac{b}{a+b} \\ 0 & 2 & \frac{a-b}{a+b} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=4ab$$

مسائل نوع سوم . مسائلی که در آن‌ها تساوی بین دو دترمینان مطرح است و برای حلّ این نوع مسائل باید (مانند اثبات اتّحادها) از یک طرف شروع کنیم و با استفاده از ویژگی‌های ذکر شده، به طرف دیگر برسیم.

مسأله ۱۳ . ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3-1 & y^3-1 & z^3-1 \end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}}_{k}\times(xyz-1)=k(xyz-1)$$

حل .

$$\text{دترمینان سمت چپ}=\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

در ستون‌های ۱ ، ۲ و ۳ به ترتیب از x، y و z فاکتور می‌گیریم.

$$xyz\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=(xyz)\times k-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

$$=(xyz)k-k=k(xyz-1)$$

مسألهٔ ۱۴. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & 0 & 0 \\ c & 0 & a & 0 \\ d & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^4 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 1 & 0 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

در سطرهای اول تا چهارم، به ترتیب a، b، c و d ضرب و کلّ دترمینان بر abcd تقسیم شده است.

$$\text{دترمینان سمت چپ} = \frac{1}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ b^2 & ab & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & ac & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & ad \end{vmatrix}$$

از ستون‌های دوم، سوم و چهارم، به ترتیب از b، c و d فاکتور گرفته‌ایم.

$$= \frac{bcd}{abcd}\begin{vmatrix} a^2 & a & a & a \\ b^2 & a & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & a & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

(سطر اول و ستون اول هر کدام در a ضرب شده‌اند.)

$$= \frac{1}{a\times a\times a}\begin{vmatrix} a^4 & a^2 & a^2 & a^2 \\ ab^2 & a & 0 & 0 \\ ac^2 & 0 & a & 0 \\ ad^2 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

(در سطرهای دوم، سوم و چهارم، از a فاکتور گرفته‌ایم.)

$$= \frac{a^3}{a^3}\begin{vmatrix} a^4 & a^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & 1 & 0 & 0 \\ c^2 & 0 & 1 & 0 \\ d^2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

مسألهٔ ۱۵. ثابت کنید:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

حل. از سمت چپ تساوی شروع و در ستون‌های ۲، ۳ و ۴، به ترتیب، yz، xz و xy را ضرب می‌کنیم (لذا باید بر $x^2y^2z^2$ تقسیم شود.) سپس از xyz در سطر اول و از x، y و z به ترتیب در سطرهای دوم، سوم و چهارم فاکتور می‌گیریم.

$$\text{دترمینان سمت چپ} = \frac{1}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & xyz & xyz & xyz \\ x & 0 & xz^2 & xy^2 \\ y & yz^2 & 0 & x^2y \\ z & y^2z & x^2z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{xyz\times xyz}{x^2y^2z^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}$$

مسألهٔ ۱۶. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$، در این صورت، با استفاده از ماتریس (AA^t) ثابت کنید:

$$|B| = \begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & z^2+x^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

حل.

$$AA^t = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & z^2+x^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} = B$$

از طرفی: $|AA^t| = |A|\,|A^t| = |A|\,|A| = |A|^2$

$$\Rightarrow |AA^t| = |B| \Rightarrow |A|^2 = |B|$$

$$\begin{vmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & z \\ z & 0 \\ y & x \end{matrix} \Rightarrow |A| = (xyz+xyz)-(0+0+0) = 2xyz$$

$$\Rightarrow |B| = (2xyz)^2 = 4x^2y^2z^2$$

مسألهٔ ۱۷ . اگر A ماتریسی ۲×۳ و B ماتریسی ۳×۲ و $A \times B = C$ باشد، که C ماتریسی ۳×۳ خواهد شد، ثابت کنید $|C| = 0$.

حل. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix}$

و می‌دانیم که:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix} = C_{3\times 3}$$

حال اگر یک ستون صفر به ماتریس A و یک سطر صفر به ماتریس B اضافه کنیم تا به ترتیب، ماتریس‌های A_1 و B_1 به دست آیند، واضح است که $A_1 \times B_1 = C$ خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ e & f & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C$$

$$A_1 \times B_1 = C \Rightarrow |A_1 \times B_1| = |C| \Rightarrow |A_1| \times |B_1| = |C|$$
$$\Rightarrow 0 \times 0 = |C| \Rightarrow |C| = 0$$

تذکر بسیار مهم: مسألهٔ قبل در حالت کلّی نیز برقرار است، یعنی می‌توان گفت: «اگر A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times m$ و $m > n$ و فرض کنیم $A \times B = C$ باشد؛ در این صورت $|C| = 0$» (اثبات، شبیه به اثبات مسألهٔ قبل و به عهدهٔ شماست.)

نتیجه. اگر A ماتریسی $m \times n$ باشد و $m > n$ ، در این صورت، همواره A^t ماتریسی $n \times m$ است و داریم: $|AA^t| = 0$.

نکات مهم و کاربردهای دترمینان در محاسبهٔ مساحت و حجم

از اثبات رابطه‌ها و فرمول‌ها، به دلیل خارج بودن از بحث اصلی و نیاز به مفاهیم دیگر در هندسهٔ تحلیلی، خودداری می‌کنیم و فقط به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

نکتهٔ ۱ . اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ سه بردار در فضای سه بعدی (IR^3) باشند، در این صورت:

الف) حاصل ضرب خارجی $\vec{a} \times \vec{b}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ i & j & k \end{vmatrix}$$

ب) مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده از دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و مساحت مثلث پدید آمده از آن‌ها از فرمول‌های زیر حاصل می‌شود:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ i & j & k \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{مساحت متوازی‌الاضلاع} = |\vec{a} \times \vec{b}| \\ \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| \end{cases}$$

(منظور از $|\vec{a} \times \vec{b}|$ اندازهٔ بردار $(\vec{a} \times \vec{b})$ است.)

ج) حجم متوازی‌السطوح پدید آمده از سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{حجم} = V = |k| \ (\text{قدر مطلق } k) \\ \text{ضرب مختلط} = a.(b \times c) = k \end{cases}$$

(اگر $k=0$ در این صورت، سه بردار حجمی تشکیل نمی‌دهند و باید در یک صفحه قرار داشته باشند.)

نکتهٔ ۲: اگر $A\begin{vmatrix}a_1\\a_2\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}b_1\\b_2\end{vmatrix}$ و $C\begin{vmatrix}c_1\\c_2\end{vmatrix}$ سه نقطه در IR^2 باشند، در این صورت، مساحت مثلث پدید آمده از این سه نقطه برابر است با:

$$k=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ c_1 & c_2 & 1\end{vmatrix}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}|k| \quad (\text{قدر مطلق } k)$$

حالت خاص: اگر O مبدأ مختصات باشد، در این صورت $k=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 1\\ b_1 & b_2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$ خواهد بود و $S_{OAB}=\frac{1}{2}|k|$ و مساحت متوازی‌اضلاع پدید آمده از $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با $|k|$ است.

نکتهٔ ۳: اگر $P_1\begin{vmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{vmatrix}$ و $P_2\begin{vmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{vmatrix}$ و $P_3\begin{vmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{vmatrix}$ سه نقطه در IR^3 باشند، در این صورت معادلهٔ صفحه‌ای که از این سه نقطه عبور می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

نکتهٔ ۴: اگر نقطهٔ $A\begin{vmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{vmatrix}$ متعلّق به خط L_1 با بردار هادی $\vec{u_1}=(p_1,q_1,r_1)$ و نقطهٔ $B\begin{vmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{vmatrix}$ متعلّق به خط L_2 با بردار هادی $\vec{u_2}=(p_2,q_2,r_2)$ باشد، در این صورت:

الف) شرط لازم و کافی برای متقاطع بودن دو خط L_1 و L_2 آن است که موازی نباشند و در یک صفحه قرار بگیرند؛ یعنی:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متقاطع‌اند} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{p_1}{p_2}\neq\frac{q_1}{q_2} \text{ یا } \frac{q_1}{q_2}\neq\frac{r_1}{r_2}\\ \begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

(سه بردار $\vec{AB}$ و $\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ در یک صفحه باشند.)

ب) شرط لازم و کافی برای آن که دو خط L_1 و L_2 متنافر باشند آن است که موازی نباشند و در یک صفحه قرار نگیرند؛ یعنی:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متنافرند} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{p_1}{p_2}\neq\frac{q_1}{q_2} \text{ یا } \frac{q_1}{q_2}\neq\frac{r_1}{r_2}\\ \begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}\neq 0\end{cases}$$

ج) دو خط L_1 و L_2 بر هم عمودند، اگر و فقط اگر $p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0$ باشد. در این صورت داریم:

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متقاطع و عمود بر یکدیگرند} \Leftrightarrow \begin{cases}p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0\\ \begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

$$L_1 \text{ و } L_2 \text{ متنافر و عمود بر یکدیگرند} \Leftrightarrow \begin{cases}p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2=0\\ \begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{vmatrix}\neq 0\end{cases}$$



ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

غلامرضا یاسی‌پور

تقریباً در سال ۵۰۰ پیش از میلاد، یک کشاورز یونانی تصمیم گرفت، با ۶۰ «دراخما»[۱] قطعه زمینی مربع شکل خریداری کند و دور آن را حصار بکشد. او باید بابت هر مترمربع از زمین، یک دراخما و برای حصارکشی دور آن نیز یک دراخمای دیگر می‌پرداخت. او حساب کرد، اگر ضلع زمین مربع شکل او N متر باشد، مساحت آن $N^۲$ (مترمربع) و محیط آن ۴N (متر) خواهد بود. پس هزینهٔ زمین و نصب حصار، مجموعاً $N^۲ + ۴N$ دراخما خواهد شد. بنابراین، بزرگ‌ترین قطعه زمینی که او می‌توانست با ۶۰ دراخما خریداری کند، برابر بود با:

$$N^۲ + ۴N = ۶۰$$

کشاورز برای حل معادله، به $N^۲ + ۴N$ توجه کرد که می‌تواند به صورت $(N+۲)^۲$، یعنی $(N+۲)^۲ = N^۲ + ۴N + ۴$ نوشته شود.[۲]

پس می‌توان نوشت:

$$(N+۲)^۲ = N^۲ + ۴N + ۴ = ۶۴$$

بنابراین پاسخ‌های کشاورز $N + ۲ = ۸$ و $N = ۶$ خواهند بود.

اما آن موقع $N + ۲ = -۸$ برای او قابل فهم نبود.

پس از گذشت سال‌ها، ریاضیدانان متوجه شدند، معادلهٔ $aN^۲ + bN + c = ۰$ وقتی جواب دارد که $b^۲ - ۴ac \geq ۰$ باشد که جواب‌های آن با فرمول‌های زیر به دست می‌آیند:

$$N_۱ = \frac{۱}{۲a}(-b + \sqrt{b^۲ - ۴ac})$$

$$N_۲ = \frac{۱}{۲a}(-b - \sqrt{b^۲ - ۴ac})$$

و اگر $b^۲ - ۴ac = ۰$ باشد، دو پاسخ معادله یکسان خواهند بود.[۳]

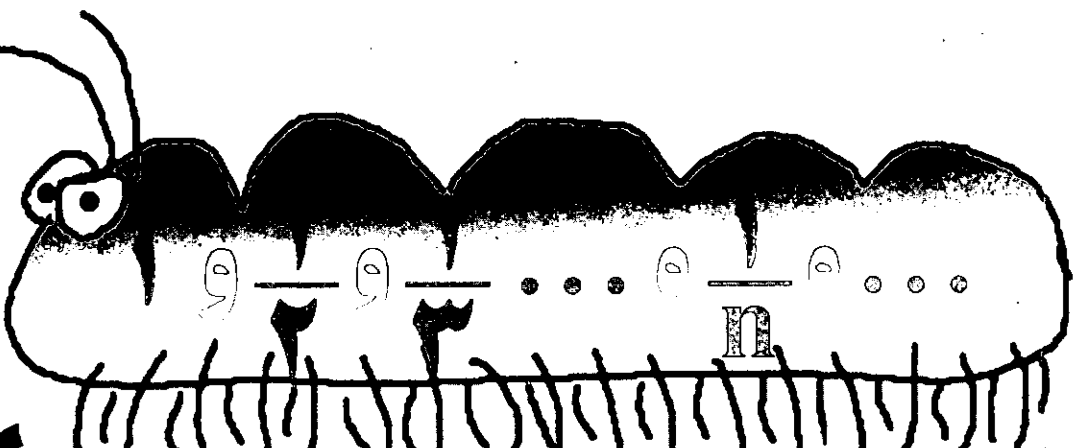
$N_۱$ و $N_۲$ ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم نامیده می‌شوند. شما می‌توانید برای به دست آوردن فرمول‌های $N_۱$ و $N_۲$، معادله را بر a تقسیم و سپس برای به‌دست آوردن ریشه‌های معادله از روش کشاورز یونانی استفاده کنید.

زیرنویس

۱. واحد پول یونان.

۲. او برای این کار، از پسربچه‌ای ۶ ساله و کارشناسان تبلیغاتی آگهی‌های شهری کمک گرفت.

۳. در معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$، $\Delta = b^۲ - ۴ac$ را «دلتای معادله» یا «مبین معادله» می‌نامیم. در صورتی که $b^۲ - ۴ac < ۰$ (زیر رادیکال با فرجهٔ زوج نمی‌تواند عدد منفی قرار گیرد)، می‌گوییم، معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.



دنباله، حد دنباله ها

سید محمدرضا هاشمی موسوی

دنباله[1]

«دنباله» یکی از اساسی‌ترین مفهوم‌ها در ریاضیات است؛ زیرا مهم‌ترین مفهوم‌های ریاضیات عالی، بر پایهٔ آن ساخته شده‌اند. یکی از آن مفهوم‌ها که خود پایه و اساس آنالیز ریاضی را می‌سازد، مفهوم حد است. در این جا، مفهوم و تعریف دنباله و حد یک دنباله را یادآور می‌شویم. به مجموعهٔ زیر از عددهای گویا توجه کنید:

$$s=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots\right\}=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$$

این مجموعه را می‌توان برد تابعی با دامنهٔ عددهای طبیعی درنظر گرفت که به ازای هر عدد طبیعی n، عدد گویای $\frac{1}{n}$ به دست می‌آید. مجموعهٔ S را می‌توان به صورت جدول زیر نشان داد:

n	۱	۲	۳	۴	۵	...
$\frac{1}{n}$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	...

در این مثال، واضح است که به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی نسبت داده‌ایم. در حقیقت تابعی را تعریف کرده‌ایم که دامنهٔ آن عددهای طبیعی و برد آن زیرمجموعهٔ عددهای حقیقی است که دنباله نامیده می‌شود.

تعریف. هر تابع a را که دامنهٔ آن مجموعهٔ عددهای طبیعی و برد آن زیرمجموعه‌ای از عددهای حقیقی باشد $(a:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R})$، یک دنبالهٔ متناهی از عددهای حقیقی می‌نامند. به طور معمول، $a(n)$ را با a_n نمایش می‌دهند و آن را **جملهٔ عمومی** می‌نامند و دنباله را با جملهٔ عمومی آن و به صورت $\{a_n\}$ و یا مقادیر آن نشان می‌دهند:

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$$

قرارداد: به طور کلی جملهٔ عمومی دنباله را با a_n و خود دنباله را با نماد $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم و همیشه n عددی طبیعی است $(n\in\mathbb{N})$.

معرفی دنباله به عنوان یک تابع

هر دنبالهٔ عددی را می‌توان یک تابعِ متغیر طبیعی دانست. مجموعهٔ عددهای طبیعی این ویژگی را دارند که برای هر دو عدد طبیعی دلخواه a و b، می‌توان ترتیبی در نظر گرفت؛ یعنی همیشه یکی از این دو حکم می‌تواند درست باشد: $a\le b$ یا $a\ge b$.

در واقع، همین ویژگی مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است که به ما امکان می‌دهد، جمله‌هایی را که در یک دنباله به نحوی دلخواه مرتب شده‌اند، **«شماره‌گذاری»** کنیم.

به این ترتیب، می‌توانیم تابعِ روی مجموعهٔ $\mathbb{N}$ را تعریف کنیم:

$$\mathbb{N}\xrightarrow[(n)]{f}A \qquad (1)$$

که این تعریف دنبالهٔ عضوهای A در رابطه با مجموعهٔ

$\mathbb{N}$ است. واضح است که مجموعهٔ A می‌تواند شامل هر گونه عضوی باشد. ولی باید هر عضو دنبالهٔ A متناظر با عدد معین n از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ باشد و برعکس، برای هر $n \in \mathbb{N}$، باید عضوی مانند: $a \in A$ مشخص شود. در ضمن، این توضیح نیز لازم است که امکان دارد، بستگی بین عضوهای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ با مجموعهٔ A یک به یک نباشد؛ هر عضو A ممکن است با چند عضو $\mathbb{N}$ متناظر باشد.

هر مقدار تابع (۱) و یا به بیان دیگر، هر عضو دنباله را به طور معمول با حرف کوچک لاتینی همراه با عددی طبیعی در زیر و سمت راست آن به نام اندیس نشان می‌دهند که معرف عضوی از $\mathbb{N}$ است:

$$a_1 = f(1)\ ,\ a_2 = f(2)\ ,\ \cdots\ ,\ a_n = f(n)\ ,\ \cdots$$

و یا با توجه به قرارداد، می‌توان نوشت:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad (۲)$$

یادآور می‌شویم که لزومی ندارد، همهٔ جمله‌های دنبالهٔ (۲) با هم متفاوت باشند. در ضمن، اگر تعداد جمله‌های دنباله نامحدود باشند، شمارا بودن آن‌ها ضروری است؛ یعنی باید بتوان هر جملهٔ دنباله را به یک عدد طبیعی بستگی داد.

مثال. دنبالهٔ عددهای مثبت بخش‌پذیر بر ۱۱، چنین است:

(دنبالهٔ نامتناهی) ... , ۴۴ , ۳۳ , ۲۲ , ۱۱

جملهٔ عمومی این دنباله، به صورت $11n$ است. زیرا اگر مقدار n را به ترتیب برابر ۱ و ۲ و ... بگیریم، جمله‌های پشت سر هم دنباله به دست خواهند آمد. به طور مثال، جملهٔ بیستم این دنباله چنین است:

$n = 20:\ 11n = 11 \times 20 = 220$ (جملهٔ بیستم دنباله)

مسأله. اگر بدانیم، جملهٔ عمومی یک دنباله $a_n = \frac{2n}{n+1}$ است، پنج جملهٔ اول این دنباله را بنویسید و سپس تعیین کنید که عدد $\frac{99}{50}$، چندمین جملهٔ دنباله است.

حل: ابتدا عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را به n نسبت می‌دهیم:

$$a_1 = \frac{2(1)}{1+1} = 1\ ,\ a_2 = \frac{2(2)}{2+1} = \frac{4}{3}\ ;\ a_3 = \frac{2(3)}{3+1} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{2(4)}{4+1} = \frac{8}{5}\ ,\ a_5 = \frac{2(5)}{5+1} = \frac{5}{3}$$

بنابراین، پنج جملهٔ اول این دنباله چنین است:

$$1\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{8}{5}\ ,\ \frac{5}{3}$$

عدد $\frac{99}{50}$ یا $\frac{2(99)}{100}$، جملهٔ نود و نهم دنباله است؛ زیرا:

$$n = 99:\ a_{99} = \frac{2(99)}{99+1} = \frac{2(99)}{100} = \frac{99}{50}$$

مسأله. اگر $a_n = \frac{n^2+n}{2}$ جملهٔ عمومی یک دنباله باشد، عدد ۵۵ چندمین جملهٔ آن است؟

حل:

$$a_n = \frac{n^2+n}{2} = 55 \Rightarrow n^2 + n = 110$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+11) = 0\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 10 \Rightarrow a_{10} = 55$$ (جملهٔ دهم دنباله)

مسأله. نخستین جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{n}{2n-1}$ که کوچک‌تر از $\frac{3}{4}$ باشد را بیابید.

حل:

$$a_n = \frac{n}{2n-1} < \frac{3}{4} \Rightarrow 4n < 3(2n-1)$$

$$\Rightarrow 4n < 6n - 3 \Rightarrow 2n > 3 \Rightarrow n > \frac{3}{2} \Rightarrow n > 1/5\ ,$$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 2$ (دومین جمله)

دومین جملهٔ دنباله، دارای شرایط موردنظر است؛ زیرا:

$$a_2 = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

نکته. با دانستن چند جملهٔ نخست یک دنبالهٔ نامتناهی، همیشه تعیین جملهٔ عمومی آن امکان‌پذیر نیست؛ زیرا به طور مثال جملهٔ عمومی دنبالهٔ نامتناهی:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{3}{8}\ ,\ \cdots$$

یا:

$$\frac{2}{4}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{6}{16}\ ,\ \cdots$$

را می‌توان: $a_n = \frac{2n}{(n+1)^2}$

یا $a_n = \frac{2n}{(n+1)^2} + (n-1)(n-2)(n-3)$ ، و یا در حالت کلی، به صورت زیر درنظر گرفت:

$$n \in \mathbb{N}\ ,\ f(n) \neq 0:\ a_n = \frac{2n}{(n+1)^2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{f(n)}$$

با شرط $f(n) \neq 0$ $(n \in N)$ ، عبارت $f(n)$ را می‌توان به دلخواه اختیار کرد.

حدِ دنبالهٔ عددی

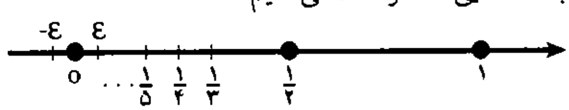
تصور شهودی دربارهٔ حد، به نحوی تصویر نوعی حرکت را در ذهن ما ایجاد می‌کند؛ چنان که هرگاه در مجموعهٔ مرتب $\mathbb{N}$ پیش رویم، به رفتار جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ پی خواهیم برد. رفتار جمله‌ها گاهی چنین است که هر چه شمارهٔ آن‌ها زیاد شود، به طور پیوسته به عددی مانند a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. با شرایطی که بیان خواهد شد، عدد a می‌تواند به عنوان حد دنبالهٔ مفروض $\{a_n\}$ محسوب شود.

در این‌جا پرسشی مطرح می‌شود: نزدیکی جمله‌های دنباله به عدد a چگونه خواهد بود و به چه صورتی می‌توان به این نزدیکی پی برد.

به طور مثال، دنباله‌ای را که از معکوس عددهای طبیعی به وجود می‌آید، با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{1}{n}$ در نظر می‌گیریم:

$$1\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{1}{n}\ ,\ \dots$$

در این‌جا اگر به طور مرتب n را بزرگ و بزرگ‌تر اختیار کنیم، واضح است که جمله‌های دنباله به مراتب کوچک و کوچک‌تر خواهند شد. یعنی اختلاف هر دو عدد متوالی دنباله به طور پیوسته، همیشه از صفر کم‌تر است. بدیهی است که از جملهٔ دهم به بعد، هریک از جمله‌های دنباله از ۰/۱ کوچک‌ترند. جمله‌های دنبالهٔ $a_n = \frac{1}{n}$ را روی یک محور، با نقطه‌هایی متناظر نشان می‌دهیم:



ε (اپسیلن) را یک عدد دلخواه مثبت در نظر می‌گیریم. روی این محور فاصله‌ای متقارن به مرکز o و طول ε ، یعنی فاصلهٔ $(-\varepsilon , \varepsilon)$ را انتخاب می‌کنیم. واضح است که اگر $\varepsilon = ۱/۲$ ، آن‌گاه همهٔ جمله‌های دنبالهٔ مورد نظر درون این فاصله واقع می‌شوند. ولی اگر $\varepsilon = ۰/۱$ ، آن‌گاه فاصلهٔ $(-۰/۱ , ۰/۱)$ بعضی جمله‌های نخستینِ دنباله، یعنی $\frac{1}{10}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ 1$ ، را شامل نمی‌شود. حال اگر ε را بسیار کوچک‌تر و برابر ۰/۰۰۱ در نظر بگیریم، فاصلهٔ $(-۰/۰۰۱ , ۰/۰۰۱)$ جمله‌های دنباله مورد بحث را شامل نمی‌شود. ولی همهٔ جمله‌های بعد از جملهٔ هزارم، یعنی $\frac{1}{1001}\ ,\ \frac{1}{1002}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{1}{n}\ ,\ \dots$ را شامل می‌شود.

به این ترتیب ε هر چه باشد، همیشه می‌توانیم عدد طبیعی M را چنان انتخاب کنیم که همهٔ جمله‌های دنباله که برای آن‌ها $n \geq M$ است، درون فاصلهٔ $(-\varepsilon , \varepsilon)$ واقع باشند و تنها تعدادی محدود از جمله‌ها، یعنی $a_1 , a_2 , \dots , a_{M-1}$ در بیرون این فاصله قرار گیرند.

در این‌جا به دو نکتهٔ مهم اشاره می‌کنیم:

۱. فاصلهٔ انتخابی دلخواه است.

۲. با درنظر گرفتن طول فاصلهٔ انتخابی، یعنی با معلوم بودن ε ، عدد M را می‌توان چنان انتخاب کرد که همهٔ جمله‌های دنباله که شماره‌ای بزرگ‌تر از M دارند، در درون فاصلهٔ $(-\varepsilon , \varepsilon)$ واقع باشند.

در این‌جا، با توجه به مطالب گفته شده، می‌توانیم تعریف «حد دنباله» را ارائه دهیم: عدد a را حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامیم، اگر برای هر عدد دلخواه مثبت ε $(\varepsilon > 0)$ بتوان عددی مانند M پیدا کرد، به طوری که به ازای همهٔ مقدارهای $n \geq M$ ، داشته باشیم:

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

وقتی دنباله‌ای حدی برابر a داشته باشد، یا به بیان دیگر جمله‌های آن به سمت a میل کنند، با نماد ریاضی چنین نشان می‌دهند:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ a_n = a$$

مثال. حد دنبالهٔ[1] $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ را بیابید.

حل: جملهٔ عمومی دنباله چنین است: $a_n=\frac{1}{n}$

بنابراین باید حاصل $\lim_{n\to\infty} a_n$ ، یا به تعبیر ساده‌تر $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ را به دست آوریم. می‌بینیم که هر چه n بزرگ‌تر می‌شود، حاصل $\frac{1}{n}$ هم به صفر نزدیک‌تر می‌شود. به همین خاطر، می‌توان حدس زد که حد این دنباله باید برابر صفر شود. ولی این حدس باید به اثبات برسد. برای این منظور باید ثابت کنیم که به ازای هر $\varepsilon>0$ ، می‌توان عددی مانند M (وابسته به ε) را چنان تعیین کرد که به ازای هر $n\geq M$ ، داشته باشیم:

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$$

که از این رابطه، نتیجه می‌گیریم: $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

بنابراین، با انتخاب $M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ (در این برابری منظور از $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ ، بخش صحیح عدد $\frac{1}{\varepsilon}$ است؛ برای مثال: $\varepsilon=\frac{1}{2/5}:\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=[2/5]=2$) برای هر $\varepsilon>0$ ، همیشه می‌توان مطمئن بود که برای $n\geq M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ ، نابرابری $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ برقرار است. یعنی می‌توانیم شماره‌ای از جمله‌های دنباله را تعیین کنیم (M)؛ به طوری که جمله‌هایی با شماره‌های بزرگ‌تر از آن، هریک در درون فاصلهٔ $(-\varepsilon,\varepsilon)$ واقع باشند. بنابراین به یقین می‌توان نوشت:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

زیرنویس

1. sequence

مسائل مسابقه‌ای

احمد قندهاری

۱. اگر $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$ ، آن‌گاه حاصل $k=\left(\frac{x^4}{x^8+x^4+1}\right)^2$ را بیابید.

۲. دو تصاعد عددی به صورت‌های زیر داریم:

$$4,\frac{47}{3},\cdots \qquad 2,14,\cdots$$

الف. نشان دهید، این دو تصاعد جملات مشترک دارند.

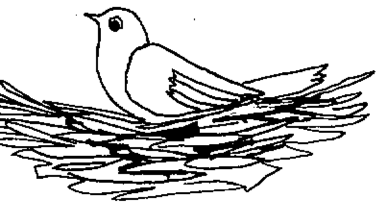
ب. مجموع شش جملهٔ مشترک این دو تصاعد را بیابید.

۳. اگر $x>1$ و $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^8-\frac{1}{x^8}$ ، آن‌گاه $f(\sqrt{5})$ را بیابید.

از بین پاسخ‌های درست، به سه نفر برای حل یک مسأله جایزه داده می‌شود.

هوشنگ شرقی

تعمیم یافتهٔ اصل لانه کبوتر



بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستانی، با اصل لانه کبوتر و کاربردهای آن آشنایی دارند:

اگر m کبوتر وارد n لانه شوند و m>n، آن گاه حداقل در یکی از لانه‌ها، دو کبوتر یا بیش‌تر وارد می‌شوند.

اما بدیهی است که اگر تعداد کبوترها از چند برابر تعداد لانه‌ها بیش‌تر باشد، مسلماً نتیجه‌ای بیش از این که «حداقل دو کبوتر وارد یک لانه می‌شوند»، می‌تواند به دست آید.

به عنوان مثال فرض کنید، ۱۰ کبوتر وارد ۴ لانه می‌شوند. به طور شهودی روشن است که در بدترین حالت، اگر کبوترها نخواهند وارد یک لانه شوند (یعنی تا حد امکان در لانه‌ها پخش شوند)، وقتی ۸ کبوتر وارد لانه‌ها می‌شوند، در هر لانه دو کبوتر بنابراین، کبوترهای نهم و دهم می‌توانند، وارد لانه‌هایی شوند که در آن‌ها قبلاً دو کبوتر وجود داشته‌اند. یعنی حداقل در یکی از لانه‌ها سه کبوتر (یا بیش‌تر) وجود خواهد داشت. این همان تعمیم یافتهٔ اصل لانه کبوتر است.

مثال۱. ۵۰ عدد طبیعی به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید، حداقل هشت تا از این عددها در تقسیم بر هفت، باقیمانده‌های یکسانی دارند.

برهان. باقیمانده‌های عددهای طبیعی در تقسیم بر هفت، یکی از هفت عدد متعلق به مجموعهٔ $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ است. بنابراین وقتی پنجاه عدد می‌نویسیم، در بدترین وضعیت، یعنی در صورتی که این عددها باقیمانده‌های متفاوتی داشته باشند، باید در تقسیم بر هفت، هفت تا از آن‌ها باقیماندهٔ ۰، هفت تای دیگر باقیماندهٔ ۱ و... و هفت تای دیگر باقیماندهٔ ۶ داشته باشند. به این ترتیب از ۴۹ عدد، هر هفت عدد یک نوع باقیمانده خواهد داشت.

بنابراین عدد پنجاهم به ناچار باید باقیمانده‌ای مشابه یکی از هفت عدد قبلی داشته باشد. در نتیجه، حداقل هشت عدد، هم باقیمانده خواهیم داشت.

برای آن که دستوری کلی برای حل این گونه مسائل داشته باشیم، فرض می‌کنیم، m کبوتر داریم و n لانه. بدیهی است که طبق الگوریتم تقسیم، از تقسیم m بر n خواهیم داشت:

$$m=nk+r \qquad 0\le r<n$$

حال به روشی مشابه می‌توان گفت، اگر $1\le r<n$، حداقل $k+1$ کبوتر وارد یک لانه خواهند شد. اما روشن است که $k=\frac{m-r}{n}$ و چون به ازای هر $1\le r<n$ داریم:

$$\left[\frac{m-r}{n}\right]=\left[\frac{m-1}{n}\right]$$ ([ ] علامت جزء صحیح عدد است)

(چرا؟) بنابراین نتیجهٔ کلی زیر را استنتاج می‌کنیم:

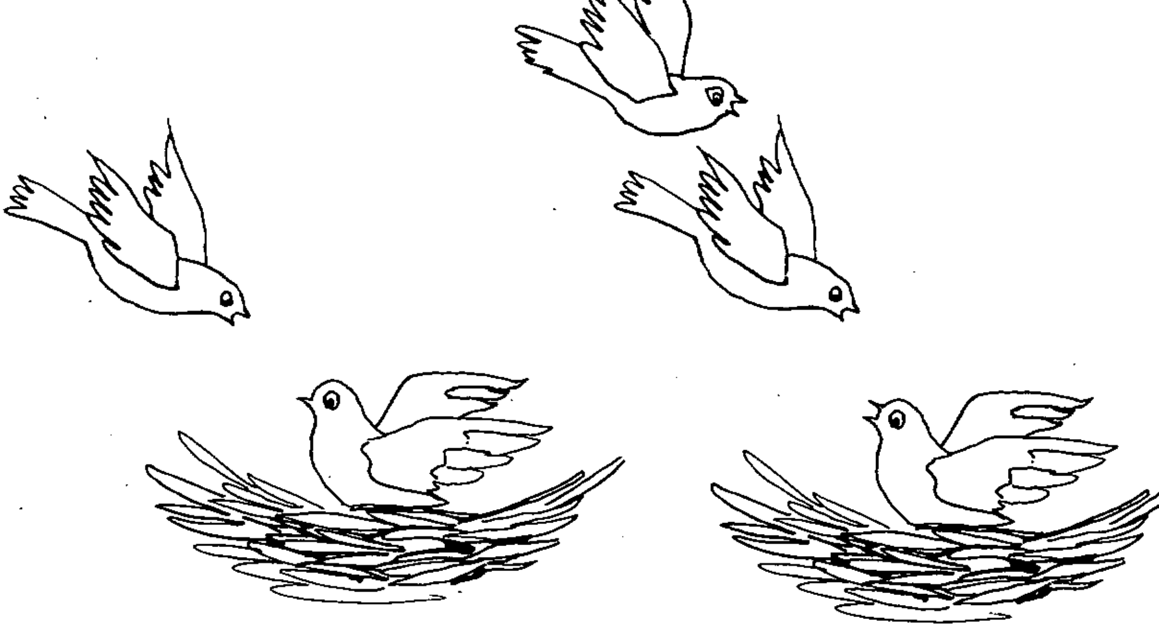
هر گاه m کبوتر وارد n لانه شوند و m>n، آن گاه حداقل $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

به عنوان مثال، هر گاه ۲۰ کبوتر وارد شش لانه شوند، آن گاه حداقل $\left[\frac{20-1}{6}\right]+1=4$ کبوتر وارد یک لانه می‌شوند.

حال به این مثال‌ها توجه کنید:

مثال۲. نشان دهید، در مدرسه‌ای با ۱۲۰۰ دانش‌آموز حداقل ۴ دانش‌آموز پیدا می‌شوند که در یک روز سال به دنیا آمده باشند.

حل. از اصل لانه کبوتر تعمیم یافته در حالت $m=1200$ و $n=365$ استفاده می‌کنیم:



$$\left[\frac{۱۲۰۰-۱}{۳۶۵}\right]+۱=۳+۱=۴$$

بنابراین، حداقل چهار دانش‌آموز پیدا می‌شوند که در یک روز سال به دنیا آمده باشند.

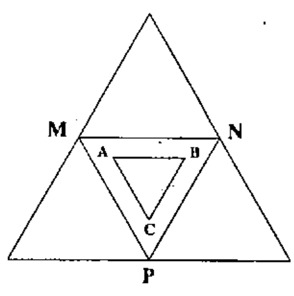
مثال۳. از کیسه‌ای شامل تعداد زیادی مهره به رنگ‌های سفید، سیاه، قرمز و آبی حداقل چند مهره خارج کنیم تا مطمئن شویم ۵ مهرهٔ همرنگ داریم؟

حل. در این جا n=۴ (تعداد لانه کبوترها که همان انواع رنگ‌ها است) و m مجهول است. ولی طبق فرض مسأله می‌توان نوشت:

$$۱+\left[\frac{m-۱}{۴}\right]=۵\Rightarrow ۴\leq\frac{m-۱}{۴}<۵\Rightarrow ۱۶\leq m-۱<۲۰$$
$$\Rightarrow ۱۷\leq m<۲۱$$

یعنی باید حداقل ۱۷ مهره از کیسه خارج کنیم. اگر ۲۱ مهره یا بیش‌تر خارج کنیم، می‌توانیم بگوییم حداقل شش مهرهٔ همرنگ داریم (چرا؟)

مثال۴. در یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه به طور تصادفی اختیار می‌کنیم. ثابت کنید، سه تا از این نقاط رئوس مثلثی با محیط کم‌تر از ۱/۵ واحد هستند.



حل. مطابق شکل مثلث را با وصل کردن وسط‌های اضلاع آن به یکدیگر، به چهار مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{۱}{۲}$ تفکیک می‌کنیم. اکنون ۱۰ نقطه درون مثلث اصلی در نظر گرفته‌ایم. طبق تعمیم یافتهٔ اصل لانه کبوتر، حداقل سه نقطه درون یکی از مثلث‌های کوچک قرار می‌گیرد: $\left(\left[\frac{۱۰-۱}{۴}\right]+۱=۳\right)$؛ مانند نقاط A، B و C در شکل. و چون فاصلهٔ هر دو نقطه از این نقاط، از طول ضلع مثلث MNP کوچک‌تر است، می‌توان نوشت:

$$AB+AC+BC<\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}=۱/۵$$

تمرین

برای فعالیت بیش‌تر در این زمینه، تمرین‌های زیر را حل کنید:

۱. S یک مجموعهٔ ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. ثابت کنید، اگر اعضای S را بر ۲۰ تقسیم کنیم، حداقل ۴ عضو دارای یک باقیمانده‌اند.

۲. در یک دایره که مساحت آن برابر واحد است، ۱۳۸۱ نقطه به دلخواه در نظر گرفته‌ایم. ثابت کنید، دست‌کم یک مثلث پیدا می‌شود که رئوس آن سه نقطه از این نقاط و مساحت آن کم‌تر از ۰/۰۰۱۵ باشد.

۳. برای آن که در یک کلاس، دست کم سه دانش‌آموز در یکی از ماه‌های سال به دنیا آمده باشند، این کلاس حداقل باید چند دانش‌آموز داشته باشد؟

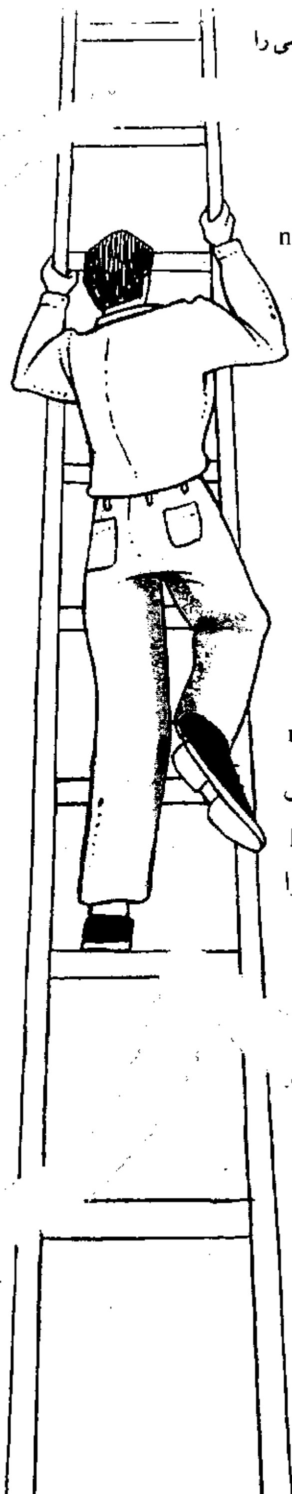
۴. از یک کیسه که در آن مهره‌هایی به ۵ رنگ متفاوت وجود دارند، دست کم چند مهره خارج کنیم تا مطمئن شویم که حداقل ۵ مهرهٔ همرنگ داریم؟

۵. در مربعی به ضلع واحد، ۲۸ نقطه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید چهار تا از این نقاط، رئوس یک چهار ضلعی با محیط کم‌تر از $\frac{۴}{۳}$ هستند.

استقرای ریاضی

میرشهرام صدر

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی



در شمارهٔ قبل با استدلال استقرایی و محدودیت‌های آن آشنا شدید، همچنین اصل استقرای ریاضی را بیان کردیم و کاربرد این اصل را در حل مسأله‌ها ملاحظه کردید، اینک در ادامه مطلب داریم:

تعمیم معادل اصل استقرای ریاضی (استقرای تعمیم‌یافته)

تاکنون با حکم‌هایی مواجه شده‌ایم که درستی آن‌ها به‌ازای عددهای طبیعی $n \geq 1$ برقرار بودند. اما ممکن است با حکم‌هایی روبه‌رو شویم که از مرحله‌ای به بعد، در اعداد طبیعی درست باشند، مانند حکم $2^n > 5n + 6$ که به ازای عددهای طبیعی $n \geq 5$ برقرار است؛ زیرا:

$n = 1:\ 2 > 11$ نادرست

$n = 2:\ 4 > 16$ نادرست

$n = 3:\ 8 > 21$ نادرست

$n = 4:\ 16 > 26$ نادرست

$n = 5:\ 32 > 31$ درست

$n = 6:\ 64 > 36$ درست

$n = 7:\ 128 > 41$ درست

چنین حکم‌هایی را با استفاده از استقرای ریاضی **تعمیم‌یافته** اثبات می‌کنند. فرض کنیم $p(n)$ حکمی دربارهٔ عدد صحیح n باشد، اگر به‌ازای یک $m \in Z$ ، $p(m)$ درست باشد و حکم برای هر $n \geq m$ برقرار باشد، آن‌گاه طی مراحل زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: عدد صحیح m مناسب را به‌دست می‌آوریم.

مرحلهٔ دوم: درستی حکم را به ازای $n = m$ نشان می‌دهیم.

مرحلهٔ سوم: فرض استقرا: فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای $n = k \geq m$ درست باشد.

مرحلهٔ چهارم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای $n = k + 1$ درست است.

مرحلهٔ پنجم: در این صورت، حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

مثال. با استفاده از اصل استقرای **تعمیم‌یافته**، برای هریک از حکم‌های زیر، ابتدا عدد طبیعی مناسب m را بیابید، سپس حکم را برای هر عدد طبیعی $n \geq m$

ثابت کنید:

الف) $n^۳ < ۳^n$

ب) $n! > ۳^n$

ج) $۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\dots+\frac{۱}{۲^n-۱}<\frac{n}{۲}$

د) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$

حل. **الف)** ابتدا با اندکی جست‌وجو، m مناسب را می‌یابیم:

$n=۱:\ ۱<۳$

$n=۲:\ ۸<۹$

$n=۳:\ ۲۷<۲۷$

$n=۴:\ ۶۴<۸۱$

$n=۵:\ ۱۲۵<۲۴۳$

ملاحظه می‌کنیم که $m=۴$.

فرض استقرا $n=k\geq ۴:\ k^۳<۳^k$

حکم استقرا $n=(k+۱):\ (k+۱)^۳<۳^{k+۱}$

دو طرف فرض استقرا را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$۳k^۳<۳^{k+۱}$

با مقایسه رابطهٔ اخیر و حکم استقرا ملاحظه می‌کنیم که برای اثبات حکم استقرا باید درستی نابرابری $(k+۱)^۳<۳k^۳$ را نشان دهیم:

$k^۳+۳k^۲+۳k+۱<۳k^۳$

برای اثبات این نابرابری، با فرض $k\geq ۴$، درستی دو نابرابری $k^۳+۱<k^۳+k^۳$ و $۳k^۲+۳k<k^۳$ را ثابت می‌کنیم:

۱) $k^۳+۱<k^۳+k^۳ \Leftrightarrow k^۳>۱$ (برای $k\geq ۴$ درست است)

۲) $۳k^۲+۳k<k^۳ \Rightarrow k^۳-۳k^۲-۳k>۰;$

$k(k^۲-۳k-۳)>۰\ \ (I)$

با فرض $k\geq ۴$ و تشکیل جدول تعیین علامت برای عبارت $P=k^۲-۳k-۳$، درستی رابطهٔ (I) برقرار است. پس حکم برای هر عدد طبیعی $n\geq ۴$ برقرار است.

ب)

$n=۱:\ ۱>۳\ ;\quad n=۵:\ ۱۲۰>۲۴۳$

$n=۲:\ ۲>۹\ ;\quad n=۶:\ ۷۲۰>۷۲۹$

$n=۳:\ ۶>۲۷\ ;\quad n=۷:\ ۵۰۴۰>۲۱۸۷$

$n=۴:\ ۲۴>۸۱\ ;\quad n=۸:\ ۴۰۳۲۰>۶۵۶۱$

ملاحظه می‌کنیم که $m=۷$.

فرض استقرا $n=k\geq ۷:\ k!>۳^k$

حکم استقرا $n=(k+۱):\ (k+۱)!>۳^{k+۱}$

دو طرف فرض استقرا را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$۳k!>۳^{k+۱}$

برای اثبات حکم استقرا، باید نابرابری $(k+۱)!>۳k!$ را برای $k\geq ۷$ ثابت کنیم:

$(k+۱)!>۳k!\Rightarrow (k+۱)k!>۳k!\Rightarrow k>۲$

نابرابری آخر برای هر $k\geq ۷$ برقرار است، پس حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n\geq ۷$ درست است.

ج)

$n=۱:\ ۱<\frac{۱}{۲}$

$n=۲:\ ۱+\frac{۱}{۳}<\frac{۲}{۲};\ \frac{۴}{۳}<۱$

$n=۳:\ ۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}<\frac{۳}{۲};\ \frac{۳۱}{۲۱}<\frac{۳}{۲}$

$n=۴:\ ۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۵}<\frac{۴}{۲};\ \frac{۱۶۲}{۱۰۵}<۲$

ملاحظه می‌کنیم که $m=۳$.

فرض استقرا $n=k\geq ۳:\ ۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\dots+\frac{۱}{۲^k-۱}<\frac{k}{۲}$

حکم استقرا $n=k+1$:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{k+1}{2}=\frac{k}{2}+\frac{1}{2}$$

به دو طرف فرض استقرا، $\frac{1}{2}$ را اضافه می‌کنیم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2}<\frac{k}{2}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$$

برای اثبات حکم استقرا، باید درستی نابرابری زیر را نشان دهیم:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^{k+1}-1}<1+\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{k+1}-1}<\frac{1}{2}\Rightarrow 2^{k+1}-1>2\Rightarrow 2^{k+1}>3$$

نابرابری آخر، برای هر $k\geq 3$ برقرار است؛ بنابراین حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n\geq 3$ برقرار است.

د)

$$n=1:\ \frac{1}{\sqrt{1}}>\sqrt{1}$$

$$n=2:\ \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$$

$$n=3:\ \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}>\sqrt{3}$$

ملاحظه می‌کنیم که $m=2$.

فرض استقرا $n=k\geq 2$: $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$

حکم استقرا $n=k+1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

به دو طرف فرض استقرا $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ را اضافه می‌کنیم:

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

برای اثبات حکم استقرا، باید نشان دهیم:

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}\Rightarrow\frac{\sqrt{k^2+k}+1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{k^2+k}+1>k+1$$

$$\Rightarrow\sqrt{k^2+k}>k\Rightarrow k>0$$

نابرابری آخر، برای هر $k\geq 2$ برقرار است. بنابراین حکم استقرا برای هر عدد طبیعی $n\geq 2$ برقرار است.

به مثال‌هایی که تاکنون حل شد، دقت کنید. در همگی آن‌ها برای اثبات درستی حکم به ازای $n=k+1$، نیاز به یک فرض داشتیم؛ یعنی فرض می‌کردیم که حکم به ازای $n=k$ برقرار است. اما در بعضی از مسائل استقرا، برای اثبات درستی حکم به ازای عدد طبیعی n، به دو یا چند فرض نیاز داریم. برای مثال، در بعضی از حکم‌ها لازم است که فرض کنیم، حکم برای عددهای طبیعی $(n-1)$ و $(n-2)$ برقرار است. سپس با استفاده از این دو فرض می‌توانیم حکم استقرا را ثابت کنیم. در این گونه مسائل باید از **اصل استقرای قوی ریاضی** استفاده کنیم.

اصل استقرای قوی ریاضی

هر زیرمجموعه S از $\mathbb{N}$ که دارای دو خاصیت زیر باشد، با مجموعهٔ $\mathbb{N}$ برابر است:

۱. $1\in S$.

۲. اگر اعداد کوچک‌تر از n در S باشند، آن‌گاه $n\in S$.

معادل اصل استقرای قوی ریاضی

فرض کنیم $P(n)$ حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. برای اثبات درستی این حکم به کمک معادل اصل استقرای قوی ریاضی، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ اول: حکم باید به ازای $n=1$ درست باشد.

مرحلهٔ دوم: فرض‌های استقرا: فرض می‌کنیم که حکم به‌ازای عددهای طبیعی کم‌تر از $n\in\mathbb{N}$ درست باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم که حکم به ازای عددهای طبیعی $1,2,3,\dots,n-3,n-2,n-1$ برقرار باشد.

مرحلهٔ سوم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد طبیعی n درست است.

مرحلهٔ چهارم: در این صورت حکم برای هر عدد طبیعی n درست است.

مثال: دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی

دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی را با $\{u_n\}$ نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$u_1 = u_2 = 1 , \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

با توجه به تعریف بالا، دنبالهٔ عددهای فیبوناتچی به صورت زیر است:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

ثابت کنید در دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی، جملهٔ عمومی آن از دستور زیر به دست می‌آید:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

حل. به رابطهٔ $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ دقت کنید. ملاحظه می کنیم که جمله nام دنبالهٔ فیبوناتچی بر اساس جمله های $(n-1)$ام و $(n-2)$ام به دست می‌آید. یعنی برای اثبات درستی حکم به ازای $n \in \mathbb{N}$، باید درستی حکم را برای عددهای طبیعی $(n-1)$ و $(n-2)$ فرض کنیم. به همین منظور ازمعادل اصل استقرای قوی ریاضی استفاده می کنیم:

$$n = 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \qquad \text{درست است}$$

فرض های استقرا: فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی کم‌تر از n برقرار باشد. یعنی جمله های u_1 ، u_2 ، u_3 ، ...، u_{n-2} ، u_{n-1} برطبق دستور داده شده باشند. اکنون ثابت می کنیم که جمله nام دنبالهٔ فیبوناتچی از این دستور به دست می‌آید:

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} =$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] + \left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \quad (1)$$

می دانیم که:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

با قراردادن (۲) و (۳) در (۱) داریم:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

در نتیجه حکم برای هر عدد طبیعی n برقرار است.

مثال. دنبالهٔ $\{a_n\}$ با تعریف زیر را درنظر بگیرید:

$$a_0 = 2 , a_1 = 3 , \quad a_n = a_1 a_{n-1} - a_0 a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

جملهٔ عمومی این دنباله را بر حسب n بنویسید.

حل. ابتدا جملهٔ عمومی این دنباله را با استدلال استقرایی حدس می زنیم. سپس به کمک معادل اصل استقرای قوی ریاضی آن را ثابت می کنیم؛ زیرا همان‌طور که ملاحظه می کنید، جملهٔ $(n+1)$ام این دنباله با استفاده از دو جمله قبل از آن، یعنی جمله های nام و $(n-1)$ام به دست می‌آید.

بنابه‌فرض مثال داریم:

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

چند جملهٔ نخست دنباله را پیدا می کنیم:

$$n = 0: \ a_0 = 2 = 2^0 + 1$$
$$n = 1: \ a_1 = 3 = 2^1 + 1$$
$$n = 2: \ a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 9 - 4 = 5 = 2^2 + 1$$
$$n = 3: \ a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 15 - 6 = 9 = 2^3 + 1$$
$$n = 4: \ a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 27 - 10 = 17 = 2^4 + 1$$
$$n = 5: \ a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 51 - 18 = 33 = 2^5 + 1$$
$$n = 6: \ a_6 = 3a_5 - 2a_4 = 99 - 34 = 65 = 2^6 + 1$$

در نتیجه می‌توان حدس زد که جملهٔ عمومی این دنباله

به صورت $a_n = ۲^n + ۱$ است. اکنون حدس خود را به کمک اصل استقرای قوی ریاضی ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی $۲ \le k < n$ برقرار باشد. ثابت می‌کنیم که جملهٔ nام این دنباله از دستور $a_n = ۲^n + ۱$ به دست می‌آید:

$$an = ۳a_{n-۱} - ۲a_{n-۲} = ۳(۲^{n-۱} + ۱) - ۲(۲^{n-۲} + ۱)$$
$$= ۳ \times ۲^{n-۱} + ۳ - ۲ \times ۲^{n-۲} - ۲$$
$$= (۳ \times ۲ - ۲)۲^{n-۲} + ۱ = ۴ \times ۲^{n-۲} + ۱$$
$$= ۲^۲ \times ۲^{n-۲} + ۱ = ۲^n + ۱$$

بنابراین، حکم برای هر عدد طبیعی $n \ge ۲$ برقرار است.

مثال. دنبالهٔ عددی $\{a_n\}$ با این شرط‌ها تعریف شده است:

$$a_۰ = a \ , \ a_۱ = b \ , \ a_n = \frac{۱}{۲}(a_{n-۱} + a_{n-۲})$$

ثابت کنید که جملهٔ عمومی این دنباله از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$a_n = \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{n-۱} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{n-۱}}$$

حل. فرض کنیم که حکم برای عددهای صحیح $۰ \le k < n$ برقرار باشد؛ یعنی:

$$a_۰ = \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{۰-۱} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{۰-۱}} = \frac{a+۲b}{۳} - \frac{۲b-۲a}{۳} = a$$
$$a_۱ = \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{۱-۱} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{۱-۱}} = \frac{a+۲b}{۳} + \frac{b-a}{۳} = b$$
$$a_۲ = \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{۲-۱} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{۲-۱}} = \frac{a+۲b}{۳} - \frac{b-a}{۶} = \frac{a+b}{۲}$$
$$\vdots$$
$$a_{n-۲} = \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{n-۳} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{n-۳}}$$
$$a_{n-۱} = \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{n-۲} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{n-۲}}$$

اکنون ثابت می‌کنیم که جملهٔ nام این دنباله از همین دستور محاسبه می‌شود:

$$a_n = \frac{۱}{۲}(a_{n-۱} + a_{n-۲})$$
$$= \frac{۱}{۲}\left(\frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{n-۲} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{n-۲}} + \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{n-۳} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{n-۳}}\right)$$
$$= \frac{a+۲b}{۳} + \frac{۱}{۲}\left[(-۱)^{n-۳} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{n-۲}}(-۱+۲)\right]$$
$$= \frac{a+۲b}{۳} + \frac{۱}{۲}\left[(-۱)^{n-۱} \times (-۱)^{-۲} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{n-۲}}\right]$$
$$= \frac{a+۲b}{۳} + (-۱)^{n-۱} \times \frac{b-a}{۳ \times ۲^{n-۱}}$$

پس حکم برای هر عدد صحیح نامنفی برقرار است.

تذکر ۱. در مثال قبل، از تعمیم معادل اصل استقرای قوی ریاضی (استقرای قوی تعمیم یافته) استفاده کردیم که به شرح زیر است.

فرض کنیم $p(n)$ حکمی دربارهٔ عدد صحیح n باشد. اگر به ازای یک $m \in Z$ ، $P(m)$ درست باشد و حکم برای هر $n \ge m$ برقرار باشد، آن‌گاه طی مراحل زیر حکم را ثابت می‌کنیم:

مرحلهٔ اول: عدد صحیح m مناسب را پیدا می‌کنیم.

مرحلهٔ دوم: درستی حکم را به ازای $n=m$ بررسی می‌کنیم.

مرحلهٔ سوم: فرض‌های استقرا: فرض می‌کنیم که حکم برای عددهای صحیح $m \le k < n$ برقرار باشد.

مرحلهٔ چهارم: حکم استقرا: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد صحیح n درست است.

مرحلهٔ پنجم: در این صورت حکم برای هر عدد صحیح $n \ge m$ برقرار است.

تذکر ۲. برای اثبات تمام مسائلی که با استفاده از **معادل اصل استقرای ریاضی** ثابت می‌شوند، می‌توان از **معادل اصل استقرای قوی ریاضی** استفاده کرد. به این ترتیب که بعد از بررسی درستی حکم به ازای $n=۱$ ، نوبت به نوشتن فرض‌های

استقرا می‌رسد که در این مرحله، فرض می‌کنیم، حکم برای عددهای طبیعی کم‌تر از n برقرار باشد. در مرحله‌ای که می‌خواهیم درستی حکم را به ازای عدد طبیعی n بررسی کنیم، فقط از یکی از فرض‌های استقرا (درستی حکم به ازای عدد طبیعی (n-۱)) استفاده می‌کنیم.

مسأله. ثابت کنید هر عدد طبیعی $n > ۱$ را می‌توان به حاصل ضربی از عددهای اول تجزیه کرد.

حل. اثبات به کمک اصل استقرای قوی ریاضی تعمیم یافته.

مرحلهٔ اول. فرض کنیم $n = ۲$. می‌دانیم عدد ۲ را می‌توان به حاصل ضرب عددهای اول تجزیه کرد.

مرحلهٔ دوم. فرض کنیم که حکم برای عددهای طبیعی کمتر از n برقرار باشد، یعنی حکم برای عددهای ۲، ۳، ۴، ...، (n − ۱) برقرار است.

مرحلهٔ سوم: ثابت می‌کنیم که حکم برای عدد طبیعی n نیز برقرار است.

اگر n عددی اول باشد که حکم درست است، فرض کنیم که n اول نباشد، لذا n مرکب است. پس می‌توان آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی به صورت $n = m \times k$ نوشت، واضح است که m و k هر دو کمتر از n هستند، پس بنابه فرض استقرا m و k را می‌توان به صورت حاصل ضرب عددهای اول نوشت. در نتیجه $n = m \times k$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب عددهای اول نوشت.

مرحلهٔ چهارم. پس حکم برای هر عدد طبیعی $n > ۱$ برقرار است.

تمرین: درستی این اتحادها را ثابت کنید.

۱.

$$۱^۲ - ۲^۲ + ۳^۲ - ۴^۲ + ... + (-۱)^{n-۱} \times n^۲ = (-۱)^{n-۱} \frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲.

$$۱\times۲\times۳ + ۲\times۳\times۴ + ... + n(n+۱)(n+۲) = \frac{۱}{۴} n(n+۱)(n+۲)(n+۳)$$

۳.

$$\frac{۱}{۱\times۳\times۵} + \frac{۱}{۳\times۵\times۷} + ... + \frac{۱}{(۲n-۱)(۲n+۱)(۲n+۳)} = \frac{n(n+۲)}{۳(۲n+۱)(۲n+۳)}$$

۴.

$$(۱-\frac{۱}{۴})(۱-\frac{۱}{۹})...(۱-\frac{۱}{(n+۱)^۲}) = \frac{n+۲}{۲(n+۱)}$$

۵.

$$(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})...(۱-\frac{۱}{n+۱}) = \frac{۱}{n+۱}$$

۶. مطلوب است محاسبهٔ حد زیر:

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{۱}{۱\times۵} + \frac{۱}{۵\times۹} + ... + \frac{۱}{(۴n-۳)(۴n+۱)})$$

۷. دنبالهٔ $\{u_n\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_۱ = ۲, \quad u_{n+۱} = \frac{n+۲}{۲} u_n$$

جملهٔ عمومی این دنباله را بر حسب n به دست آورید.

فهرست منابع

۱. جبر و احتمال (کتاب درسی)
۲. ریاضیات گسسته (کتاب درسی)
۳. جبر و احتمال / حمیدرضا امیری و میرشهرام صدر / انتشارات مدرسه
۴. استقرای ریاضی / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه



[illegible] ۷ سالگی در شهر [illegible]

عبدالسلام در سال ۱۳۵۸ شمسی (۱۹۸۰ م) همراه با دو فیزیکدان دیگر به نام‌های [illegible] و گلاشو، به کسب جایزهٔ نوبل دست یافت. این جایزه به خاطر ارائهٔ «نظریه نیروهای بنیادی» به این دانشمندان اعطا شد که یکی از نقاط عطف در پیشرفت علم فیزیک نظری قرن بیستم است.

یکی از کارهای بزرگ این سه نفر، یافتن معادلاتی است که بین نیروی مغناطیس یا نیروی هسته‌ای ضعیف، ارتباطی (یا تقارنی) ضعیف را نشان می‌دهند.

دربارهٔ اتحاد و معادله ۲

پرویز شهریاری



تاریخچه نمادهای ریاضی و اتحادها

در شمارهٔ ۳۸ مجلهٔ برهان، مقاله‌ای دربارهٔ اتحادها و معادله‌ها داشتیم و در آن به معرفی این دو و تفاوت‌هایشان پرداختیم. اینک ادامهٔ مطلب را در پی می‌آوریم.

پیش از آن‌که جبرِ علامتی به‌وجود آید و نمادهایی برای «+»، «−»، «=»، مجهول (x یا y) و غیره پیدا شود، اغلب مسأله‌های جبر را به یاری هندسه حل می‌کردند.

نمادهای «+» و «−» از پایان سدهٔ پانزدهم میلادی فقط در آلمان به‌کار می‌رفتند، ولی **میخائیل شتیفل** (۱۵۶۷-۱۴۸۷) کشیش و ریاضیدان آلمانی، به آن‌ها رسمیت داد. در آلمان روی بشکه‌های خالی علامت «−» و روی بشکه‌ها علامت «+» می‌گذاشتند و شتیفل و دیگران از همین نمادها برای جمع و تفریق استفاده می‌کردند. شتیفل برای ضرب و تقسیم از حرف‌های لاتینی «m» و «d» (که حرف‌های اول واژه‌های «multipicather» به معنی ضرب و «divisio» به معنی تقسیم بود) استفاده می‌کرد.

رنه دکارت (۱۶۵۰-۱۵۹۶)، فیلسوف، نویسنده و ریاضیدان فرانسوی، برای نشان برابری از علامت ویژه‌ای شبیه « ∝ » استفاده می‌کرد؛ گرچه علامت امروزی برای برابری حتی پیش از تولد دکارت پیدا شده بود. کسی که علامت امروزی برابری را قرار گذاشت، **روبرت رکورد** (۱۵۵۸-۱۵۱۰) پزشک و ریاضیدان لندنی بود. خودکورد در این‌باره می‌نویسد: «هیچ چیز، مانند دو پاره خط راست موازی (=)، نمی‌تواند مفهوم برابری را برساند.»

فرانسوا ویت (۱۶۰۳-۱۵۴۰) حقوقدان و ریاضیدان فرانسوی، برای نخستین بار از یک حرف لاتینی برای نشان دادن مجهول استفاده کرد. او از حرف «N» برای مجهول استفاده می‌کرد.

البته در سرزمین میان دورود (بین‌النهرین)، عیلام، مصر و چین نمادهایی وجود داشت که بیش‌تر آن‌ها فراموش شد و به نسل‌های بعدی نرسید. به ویژه در میان دورود، نه تنها نشان‌هایی برای عددها و صفر داشتند، بلکه عددها را به صورت موضعی می‌نوشتند؛ یعنی هر رقم در مکان خود

معنای خاصی داشت. ولی از همهٔ این‌ها، تنها تقسیم محیط دایره به ۳۶۰ درجه و بعد دقیقه و ثانیه باقی ماند. مردم سرزمین بابل فکر می‌کردند، در حرکت ظاهری خورشید، به دور زمین، خورشید هر روز به تقریب به اندازهٔ ۱۸۰ برابر قطر خود حرکت می‌کند و بنابراین دایره‌ای که در شبانه‌روز می‌پیماید، ۳۶۰ برابر قطر خورشید است. به همین مناسبت، محیط دایره را به ۳۶۰ بخش تقسیم کردند و هر بخش را یک درجه نامیدند که امروز هم به کار می‌رود. مبنای عددشماری بابلی‌ها ۶۰ بود و بنابراین عددهای کم‌تر از واحد را هم به شصت تقسیم می‌کردند و هر بخش را دقیقه می‌نامیدند. مردم سرزمین «میان‌دورود» نشان‌های دیگری (البته با خط میخی) هم داشتند که به دلیل فراموش شدن، از آن‌ها می‌گذریم.

نخستین بار رنه‌دکارت در سال ۱۶۳۷ از حرف‌های x، y و z برای نشان دادن مجهول یا کمیت متغیر، استفاده کرد. مجهول را محمد فرزند موسی، مشهور به خوارزمی «شیء» می‌نامید. شتیفل در سدهٔ شانزدهم از حرف R برای مجهول استفاده می‌کرد که حرف اول از واژهٔ آلمانی «Res» به معنای «چیز» یا «شیء» است؛ یعنی از همان واژهٔ خوارزمی سود برده است.

از علامت a^n، برای نشان دادن توان‌های مختلف عدد (وقتی n، عددی طبیعی باشد)، نخستین بار در سال ۱۶۳۷ به وسیلهٔ دکارت استفاده شد. علامت ریشگی را آلبرت ژیرار (۱۶۳۲-۱۵۹۵) در سال ۱۶۲۹ و علامت‌های cos,sin (سینوس و کسینوس) را لئوناردو اولر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) در سال ۱۷۴۸ و علامت tan (تانژانت) را هم او در سال ۱۷۵۳، قرار گذاشتند. یادآوری می‌کنیم واژهٔ سینوس به معنای «گریبان» و درست ترجمهٔ واژهٔ عربی «جیب» به زبان فرانسوی است که از روی نوشته‌های محمد خوارزمی برداشته شده است. به احتمال زیاد، خوارزمی از واژهٔ «چیپ» زبان پهلوی استفاده می‌کرده و نسخه‌نویسان کتاب او که پهلوی نمی‌دانستند و معنایی برای «چیپ» در زبان عربی پیدا نمی‌کردند، آن را به «جیب» به معنی «گریبان» تغییر دادند که هیچ ربطی به مفهوم «سینوس» ندارد.

منظور از بیان مطالب فوق این بود که نشان داده شود، نمادهای ریاضی که امروز معمول هستند، در زمانی نه چندان دور مقرر شدند و به زحمت از عمر قدیمی‌ترین آن‌ها، ۵۰۰ سال می‌گذرد و برای نمونه، میخائیل شتیفل که سهم بزرگی در معرفی نمادهای ریاضی دارد، برای نشان دادن معادلهٔ:

$$116+\sqrt{41372}-18x-\sqrt{648x^2}=0$$

این طور می‌نوشت:

۱۱۶ + VZ۴۱۳۷۲ − ۱۸R − VZ۶۴۸acq a ntaseo

شتیفل ریشگی را با «V» (حرف اول واژهٔ Vadim به معنی ریشه) نشان می‌داد و از نظر او «VZ» یعنی ریشهٔ دوم. این معادله از کتاب «حساب کامل» شتیفل برداشته شده است.

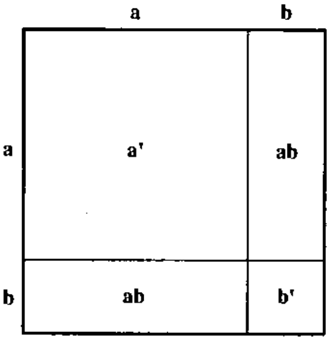
به نمادهای دیگر نمی‌پردازیم. همین قدر کافی است تا بیندیشیم، یونانی‌ها و یا ریاضیدانان ایرانی که از نمادها و جبر علامتی آگاه نبودند، چرا برای اثبات از هندسه کمک می‌گرفتند و یا به شرح و توضیح رو می‌آوردند.

اکنون ببینیم چگونه با اتحادها از دید هندسی برخورد می‌کردند. در سدهٔ سوم پیش از میلاد، اقلیدس کتاب خود را به نام «مقدمات» نوشت که شامل ۱۳ بخش بود. بخش دوم این کتاب مربوط به اتحادهای جبری است که البته، با استدلال‌ها و تعبیرهای هندسی نوشته شده است. برای نمونه، او در مسألهٔ دهم از بخش دوم کتاب خود، درستی اتحاد

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

را ثابت کرده است. از زبان خود اقلیدس بخوانیم:

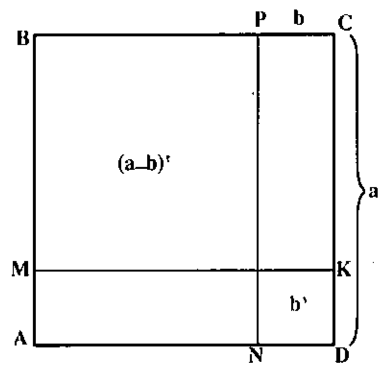
«اگر پاره‌خط راستی را به دو بخش تقسیم کنیم، آن وقت مربعی که روی تمامی این پاره‌خط راست ساخته می‌شود، برابر است با مجموع مربع‌هایی که هر کدام از بخش‌ها ساخته شده است و دو برابر مستطیلی که روی بخش‌ها ساخته می‌شود.»



شکل ۱

در شکل ۱ به روشنی دیده می‌شود که مساحت مربعی به ضلع a+b، برابر است با مجموع چهار مساحت: مساحت مربع به ضلع α، مساحت مربع به ضلع b و مساحت‌های دو مستطیل برابر با بعدهای a و b.

همچنین، با توجه به شکل ۲، می‌توان اتحاد $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ را ثابت کرد؛ به شکل توجه کنید:



شکل۲

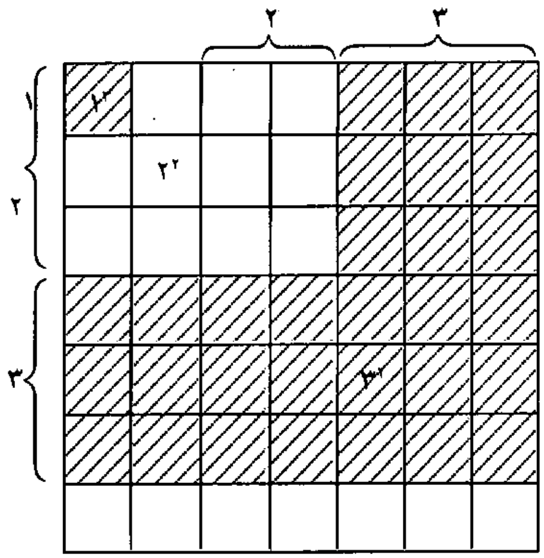
در این شکل، اگر a^2 (مساحت مربع بزرگ به ضلع a) را با b^2 (مساحت مربع کوچک به ضلع b) جمع کنیم و مساحت دو مستطیل AMKD و NPCD را از آن برداریم، مساحت مربع به ضلع $(a-b)$ به دست می‌آید.

دیوفانت که در سدهٔ سوم پیش از میلاد در اسکندریه می‌زیست، کتابی به نام «حساب» دارد. او در این کتاب، اتحادهای

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

را از دیدگاه حساب بررسی می‌کند و آن‌ها را «قانون‌های اصلی حساب» می‌نامد.

ریاضیدانان ایرانی هم اتحادهای جبری را می‌شناختند و از آن‌هااستفاده می‌کردند؛ و البته در بیش‌تر حالت‌ها، آن‌ها را با شکل‌های هندسی نشان می‌دادند. برای نمونه، اتحاد عددی $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$ را روی یک شکل هندسی نشان می‌دادند (شکل ۳):



شکل۳

به شکل توجه کنید: بخشی از یک مربع که طول ضلع آن برابر n+...+۳+۲+۱است، به مربع‌های کوچک‌تر به ضلع واحد تقسیم شده است. مساحت تمامی مربع بزرگ، برابر است با:

$$(1+2+3+\cdots+n)^2 \qquad (1)$$

همین مربع را به بخش‌های جداگانه‌ای تقسیم کرده‌ایم و آن‌ها را یک در میان هاشور زده‌ایم. مربع هاشور خوردهٔ سمت چپ، مساحتی برابر ۱ (یا 1^3) دارد. بخش‌های بعدی که یکی سفید و دیگری هاشور خورده است، شامل ۸ مربع (2^3)، ۲۷ مربع (3^3) و غیره است. پس مساحت تمامی مربع چنین می‌شود:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 \qquad (2)$$

عبارت‌های عددی (۱) و (۲) معرف یک مقدار از مساحت مربع بزرگ هستند و بنابراین:

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1+2+\cdots+n)^2$$

بنابر قضیه‌ای که معروف به «قضیهٔ فیثاغورس» است، اگر دو ضلع پهلوی زاویهٔ قائمه را با b,a و وتر را با c نشان دهیم، این رابطه بین آن‌ها برقرار است:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

پیدا کردن عددهایی درست (و به احتمالی گویا) که در این دستور صدق کند، از همان دوران کهن مورد توجه

ریاضیدانان بوده است. از جمله مردم مصر، عیلام و بابل کهن، برای رسم دو خط عمود بر هم بر روی زمین (که برای کارهای کشاورزی لازم بود)، از طنابی استفاده می‌کردند که به ۳، ۴ و ۵ بخش تقسیم شده بود؛ دو بخش به طول‌های ۳ و ۴ برهم عمود بودند.

اتحادی وجود دارد که به یاری آن می‌توان مثلث‌های فیثاغورسی را (یعنی مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های آن‌ها، عددهایی طبیعی هستند) پیدا کرد. این اتحاد که در دوران یونان باستان نیز شناخته شده بود، چنین است:

$$(m - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

(آزمایش کنید تا از درستی این اتحاد، مطمئن شوید.)

بنابراین، اگر m>n (n>m) را دو عدد طبیعی دلخواه در نظر بگیریم، آن‌وقت یک مثلث فیثاغورثی با ضلع‌های a، b و c به دست می‌آید:

$$a = m^2 - n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

چند نمونه از این مثلث‌ها را در ادامه می‌آوریم:

۱. برای m=۲ و n=۱ به دست می‌آید:

a=۳ و b=۴ و c=۵

۲. برای m=۳ و n=۲ به دست می‌آید:

a=۵ و b=۱۲ و c=۱۳

۳. برای m=۴ و n=۱ به دست می‌آید:

a=۱۵ و b=۸ و c=۱۷

۴. برای m=۴ و n=۳ به دست می‌آید:

a=۷ و b=۲۴ و c=۲۵

۵. برای m=۱۰ و n=۱ به دست می‌آید:

a=۹۹ و b=۲۰ و c=۱۰۱

۶. برای m=۱۰ و n=۷ به‌دست می‌آید:

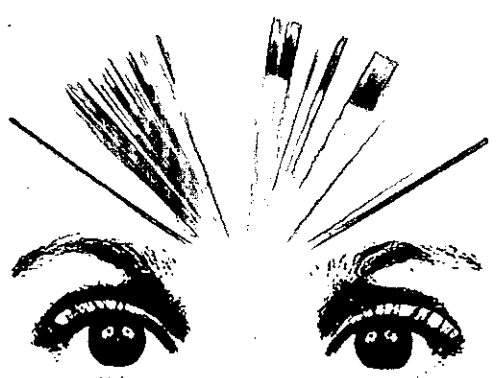
a=۵۱ و b=۱۴۰ و c=۱۴۹

ادامه دارد...

ادب ریاضی

فرگه، منطقدان آلمانی به پیروی از طرز تفکر کانت، در کتاب «مبانی حساب» خود می‌نویسد: حقایق هندسی بر هر چه برای ما از جنبهٔ فضایی قابل درک باشد، حکومت می‌کنند؛ خواه مستدرکات ما واقعی باشند و خواه محصول تخیلمان.

پرت و پلاهایی که به هنگام هذیان می‌شنویم، قوی‌ترین مخترعات افسانه و شعر، جایی که جانوران سخن می‌گویند و ستارگان خاموش می‌مانند، جایی که آدمیان سنگ می‌شوند و درختان آدمی می‌گردند، جایی که غرق شدگان در آب، زلف خود را می‌گیرند و خود را از آب بیرون می‌کشند، همه، تا وقتی که قابل درک باشند، تابع اصول هندسی هستند.



تفریح اندیشه

مجموع دو ریشه از سه ریشهٔ معادلهٔ زیر، صفر است:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

معادله‌ای بیابید که c را به طور صریح بر حسب a و b نمایش دهد.



ریاضیات و نقش آن در زندگی روزمره

سهیل برادران

هنگامی که شاگرد مدرسه بودم، بارها این سؤال را از خودم و معلمانم می‌پرسیدم که فلان فرمول ریاضی و فلان رابطه در کجا کاربرد دارد؟ به چه دردی می‌خورد؟ اصلاً دانستن این قوانین چه فایده‌ای می‌تواند داشته باشد؟

جوابی که در آن زمان می‌گرفتم، به من آموخت که برای این سؤال نباید پاسخ روشنی را انتظار داشته باشم و فایدهٔ دانستن فلان فرمول، قبولی در امتحان، ورود به دانشگاه و مواردی از این گونه است.

البته در آن دوران، من تصوری از این که ریاضیات چه تأثیری در صنعت، علوم، یا نحوهٔ تفکرم می‌تواند داشته باشد، نداشتم و حتی زمانی که می‌شنیدم، برای به‌دست آوردن شغل مناسب، جایگاه اجتماعی و غیره باید این مطالب را یاد بگیرم و نمرهٔ خوبی بیاورم، باز رضایت خاطری برای من حاصل نمی‌شد و همواره این سؤال در ذهنم نقش می‌بست که مگر امکان دارد، تنها دلیل وجود یک علم و پیدایش آن، به‌دست آوردن شغل مناسب، قبولی در دانشگاه و مواردی از این نوع باشد.

در این مقاله، مطالبی را در پاسخ به سؤال‌های زیر بیان می‌کنیم: ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ ندانستن آن ممکن است چه زیانی به‌بار آورد؟ اصلاً یک علم از کجا به‌وجود می‌آید؟

***

هنگامی که به بررسی تاریخی علوم می‌پردازیم، متوجه می‌شویم که طبیعت و نیازهای زندگی، عوامل و منابع اصلی پیدایش و رشد علوم در طول تاریخ هستند. ریاضیات در ابتدا تحت تأثیر نیازهای عملی زندگی انسان پا به عرصهٔ وجود نهاد. سپس به رشد و پیشرفت، و انتزاعی شدن هرچه بیش‌تر خود ادامه داد. به همین جهت است که **الکساندروف** می‌گوید:

منبع زنده بودن ریاضیات این است که مفاهیم و نتایج آن، با همهٔ انتزاعی بودنشان، ناشی از واقعیت هستند و در سایر علوم، صنعت، و همهٔ زمینه‌های مربوط به زندگی بشری، کاربرد فراوانی پیدا می‌کنند. این مهم‌ترین مطلب برای درک ریاضیات است.

همچنین اودموس رودسی، دانشمند یونانی سدهٔ چهارم قبل از میلاد نوشته است:

هندسه به‌وسیلهٔ مصری‌ها کشف شد و ضمن اندازه‌گیری زمین به‌وجود آمد. این اندازه‌گیری برای جلوگیری از طغیان رودخانهٔ نیل که دائماً مرزها را می‌شست، لازم بود. هیچ چیز تعجب‌آوری در این مطلب نیست که هندسه نیز مانند سایر علوم، از احتیاجات بشری به‌وجود آمده باشد. هر دانشی که به‌وجود می‌آید، از حالت ناقص به طرف کامل می‌رود. آغاز این دانش از طریق درک احساسی به‌وجود می‌آید و به‌تدریج به موضوع مورد بررسی ما تبدیل می‌شود. در آخر کار، به مطالبی که می‌تواند در ذهن مجسم شود، مبدل می‌گردد.

***

ریاضیات که به مفهوم عام خود تاریخی برابر تاریخ بشری دارد، تحت تأثیر دو نیروی بیرونی و درونی به پیشرفت خود ادامه داده است. نیروی بیرونی مربوط به طبیعت، نیازهای زندگی و اجتماعی، و مقتضیات و احوال یک دوره است که با گذشت زمان و تغییر نوع زندگی انسان، تغییر می‌کند.

نیروی درونی ریاضیات که می‌توانیم آن را پیشرفت در خود بنامیم، جنبه‌هایی از ریاضیات است که بدون مشاهدهٔ مستقیم طبیعت و به‌صورتی کاملاً انتزاعی رشد می‌کند. به‌عنوان مثال پس از درک اعداد طبیعی، ریاضیات موجبات به‌وجود آمدن کسرهای ده‌دهی، اعداد صحیح، اعداد گنگ و غیره را مهیا می‌کند و به پیشرفت درونی خود ادامه می‌دهد.

* * *

به سؤال‌های دیگر بپردازیم. ریاضیات چه فایده‌ای دارد؟ و ندانستن آن چه زیانی ممکن است بار آورد؟

درواقع این دو سؤال ارتباطی ظریف و تنگاتنگ با هم دارند. ما هنگامی می‌توانیم به زیان‌های ناشی از نبود یک علم پی ببریم که ارزش‌ها و فایده‌های آن را به خوبی درک کرده باشیم.

از مهم‌ترین خصوصیات ریاضیات، کاربرد فوق‌العاده زیاد آن در زندگی و صنعت است. ما همواره در زندگی خود بدون این‌که متوجه باشیم، از مفاهیم ریاضی استفاده می‌کنیم. امروزه حساب، اساسی‌ترین کاربرد را در زندگی ما دارد. پرداخت کرایه، خرید وسایل، نگهداشتن حساب روزها، همه و همه به علمی با نام حساب و دانستن چگونگی شمارش اشیا احتیاج دارند. جالب‌تر این‌که، تمامی این نتایج ساده، در زمان باستان، از ارزشمندترین پیشرفت‌های بشری به‌شمار می‌آمدند.

بدون اطلاع از مفاهیم و قوانین ریاضیات، رشد صنعت معاصر و به‌طور کل وجود آن غیرممکن است. با بررسی علوم (مکانیک، نجوم، فیزیک و تا حدی شیمی)، متوجه می‌شویم که معمولاً قوانین آن‌ها به‌وسیلهٔ فرمول ریاضی بیان می‌شوند و تئوری‌های آن‌ها با استفاده از ریاضیات پیشرفت می‌کنند.

همان‌طور که گفتیم، ریاضیات تحت‌تأثیر دو نیروی بیرونی و درونی پیشرفت می‌کند. نیروی بیرونی به عمل توجه دارد و نیروی درونی به نظریه. در طول تاریخ گاهی عمل از نظریه جلو افتاده است و گاهی نظریه از عمل. اما این دو برای مدت زیادی نمی‌توانند از هم فاصله بگیرند. به‌عنوان مثال، نظریهٔ اعداد پس از سال‌ها مبنای ساخت ماشین حساب و سپس کامپیوتر شد و یا نظریهٔ اعداد مختلط که به سختی پذیرفته شد، برای توضیح بسیاری از موضوع‌های فیزیکی و صنعتی کاربرد فراوانی پیدا کرده است.

در مثالی دیگر، جملاتی از مقالهٔ «اندیشه‌هایی دربارهٔ دانش و صنعت و هنر آینده و کاربرد ریاضیات در آن‌ها» که از بیانات دکتر محسن هشترودی است و در مجلهٔ «آشتی با ریاضیات» به چاپ رسیده است را بیان می‌کنیم:

... مهندس برق... به کلی با مهندسِ سی چهل سال قبل فرق کرده است. فرض بفرمایید در سی سال قبل اگر شهری وسعت پیدا می‌کرد، کمپانی برق و یا شهرداری نمی‌توانست تعهد کند که برق شهر را به‌طور کامل تأمین کند؛ مگر این‌که گسترش شهر به‌طور متقارن صورت گیرد. یعنی این‌که از شمال و جنوب و شرق و غرب، کیفیت توسعه‌یافتن شهر برحسب نقشهٔ معینی باشد که تقارن شهر را به‌هم نزند. زیرا در شبکهٔ برق، وقتی سیم‌ها با هم تقاطع پیدا می‌کنند، نقاطی پیدا می‌شود که پتانسیل آن‌ها صفر می‌گردد و دیگر نمی‌توان از آن‌جا برق گرفت. معمولاً در این مواقع ترانسفورماتور به‌کار می‌برند. در خیلی از منازل و کارخانه‌ها ترانسفورماتور وجود دارد و یخچال و وسایل الکتریکی در تمام روز ممکن است لازم باشد با ترانسفورماتور کار کنند، زیرا پتانسیل پائین می‌افتد. شک نیست که معمولاً نصب ترانسفورماتورها خرج زیادی دارد و پیش‌بینی آن نیز خیلی مشکل است. ولی امروز طرح ریاضی، به کلی مسأله را حل کرده است. در تئوری گراف‌ها که مدل ریاضی این شبکه‌بندی است و در شبکه‌بندی به اصطلاح «CLANNER»، دیگر به‌وجود ترانسفورماتور احتیاجی نیست. اگر شبکه‌بندی CLANNER نشد، می‌دانند که ترانسفورماتور لازم است...

* * *

ریاضیات علاوه بر این تأثیرات مستقیم و مهم، فایده‌های جنبی دیگری نیز دارد که می‌تواند برای عوام و در هنگام مطالعهٔ صحیح و اصولی ریاضیات، میسر واقع شود. ما به بیان آن‌ها نیز می‌پردازیم.

از جمله این فایده‌ها که نقشی اساسی در رسیدن به حقیقت دارد، عادت‌دادن ما به نپذیرفتن امور فاقد دلیل و برهان است. این مورد را خیام در رسالهٔ «شرح ما اشکل من مصادرات و اقلیدس» به زیبایی بیان می‌کند:

«... و فایدت علوم ریاضی این است که موجب ورزیدگی ذهن و تندکردن خاطر شود و نیز نفس را عادت دهد، از قبول اموری که مقرون به دلیل و برهان نباشد، اجتناب کند...»

و یا هنگامی که ویلیام هرمان دربارهٔ محدودبودن خواص و

این‌که برای باز شناختن حقیقت نمی‌توانیم به چشمانمان اطمینان داشته باشیم، به انیشتین تذکر می‌دهد، این پاسخ را دریافت می‌کند که:

«البته! ولی ریاضیات عالی را هم داریم. مگر نه؟ ریاضیات مرا از قید چشمانم آزاد می‌سازد. زبان ریاضیات حتی از زبان موسیقی هم فطری‌تر و جهانی‌تر است. هر فرمول ریاضی، همچون بلوری شفاف است و به‌هیچ‌یک از حس‌های ما نیز وابسته نیست.»

در نمونه‌ای دیگر که به بررسی تاریخی موضوع می‌پردازد، می‌بینیم که تغییرناپذیری اندیشه و ارزش‌های نادرست مردم یک دوره (که به صورت غیر استدلالی بوده است)، چه زیان‌هایی به‌بار آورده است و با این‌که آن تفکر در زمان خودش کاملاً صحیح قلمداد می‌شده، برای ما چه‌قدر تعجب‌برانگیز و یا حتی احمقانه است. به‌عنوان مثال، فرهنگ غرب تا مدت‌ها بر این نکته تأکید می‌کرد که زمین مرکز عالم است، مسطح است و حرکت نمی‌کند. دانشمندان برای اثبات نادرستی این ادعا تحت تعقیب قرار می‌گرفتند و یا حتی اعدام می‌شدند. در این بررسی می‌بینیم که دستگاه تفتیش عقاید، برونو را به جرم مخالفت با دستگاه رسمی بطلمیوسی می‌سوزاند، گالیله را خانه‌نشین می‌کند و کپلر را به کفر متهم می‌گرداند.

* * *

تأثیر دیگری که ریاضیات در چگونگی تفکر و بینش ما می‌گذارد، شهامت است.

زمانی که به بررسی و برخورد با مسائل و یا مشکلاتی می‌پردازیم که برای پاسخگویی به آن‌ها در آن واحد چند راه‌حل یا عقیده در ذهن ما نقش می‌بندد، باید بیاموزیم که قدر این تکثر را بدانیم و در هر زمان که فکر می‌کنیم آن راه‌حل و عقیده صحیح است، به بیان آن بپردازیم (شهامت بیان عقیده). همچنین ترس و احتیاط ناشی از تصور احتمال نادرست‌بودن آن اندیشه را کنار بگذاریم و آن را با شهامت بیان کنیم. سپس به بررسی درستی و نادرستی آن بپردازیم (شهامت دفاع از عقیده). زیرا در غیر این صورت، توصیهٔ فوق ارزشی ندارد. می‌توان گفت، اصلی‌ترین سود این کار آن است که به ما چیزهای بیش‌تری علاوه بر یک راه‌حل یاد می‌دهد و حتی امکان دارد به ما روش کشف را بیاموزد.

پس از بررسی صحت یا عدم‌صحت یک نظر (دفاع از عقیده)، در صورت اشتباه‌بودن، باید شهامت پذیرفتن آن اشتباه را داشته باشیم؛ زیرا اصلی‌ترین رکن رسیدن به حقیقت، جدل نکردن با امور صحیح و آشکار است.

* * *

علاوه بر مطالب گفته شده، هنگامی که به حل مسائل ریاضی می‌پردازیم، به صورتی ناخودآگاه روش‌هایی را می‌آموزیم که می‌توانیم از آن‌ها به‌عنوان اصلی‌ترین موارد لازم برای تبحر در یک حرفه نام ببریم.

اولین مورد که انضباط است، می‌تواند به‌عنوان فرایندی ذهنی ـ عملی و به معنای قرار گرفتن، انجام‌دادن و یا به‌کاربردن هر چیز در سر جای مقدر شده برای آن و یا در جایی که باعث جلوگیری از آشفتگی و عدم‌تمرکز شود باشد. این مورد در حل مسائل ریاضی به روشنی دیده می‌شود. یعنی در هنگامی که به حل مسائل می‌پردازیم، اگر انضباط را رعایت نکنیم، ممکن است مرتکب اشتباه شویم و یا این‌که حل آن مسأله برای ما طاقت‌فرسا شود.

باید توجه داشته باشیم که تنها رعایت انضباط در هنگام تمرین یک عمل کافی نیست، بلکه باید آن را در سراسر زندگی‌مان، مانند تمامی موارد دیگری که یک علم در نحوهٔ تفکر به ما می‌آموزد، رعایت کنیم و نیز باید خود را چنان آهسته‌آهسته به آن عادت دهیم که اگر وقفه‌ای در انجامش به‌وجود آید، احساس کنیم چیزی را از دست داده‌ایم.

تمرکز و بردباری دو مورد دیگری هستند که ما هنگام حل مسأله با آن‌ها مواجه می‌شویم. این دو برخلاف عامل اول (انضباط)، فرایندی ذهنی در حل مسائلند و آموختن آن‌ها علاوه بر تمرین، به داشتن عشق و علاقه، و امید به مبحث مورد نظر احتیاج دارد.

* * *

نکتهٔ آخر و بسیار حائز اهمیت این که ما می‌توانیم بادقت و توجه خود، تمامی موارد گفته شده در بخش اخیر (تأثیرات و فایده‌های جنبی ریاضیات) را از علوم دیگر نیز بیاموزیم. منتها ریاضیات به مدد ساختار خوب خود، بهتر می‌تواند این نکات را آموزش دهد.

منابع

۱. سرگذشت ریاضیات/ پرویز شهریاری.
۲. ریاضیات (محتوا، روش واهمیت آن)/ گروهی از ریاضیدانان شوروی/ ترجمهٔ پرویز شهریاری.
۳. مجلهٔ آشتی با ریاضیات شماره ۳/ به سردبیری پرویز شهریاری.
۴. شاعر و اینشتن/ ویلیام هرمان/ ترجمهٔ دکتر ناصر موفقیان.
۵. ریاضیدانان نامی/ اریک تمپل بل/ ترجمهٔ حسن صفاری.



چند مسألهٔ جالب دربارهٔ اعداد اول

هانیه شکوه

واژهٔ «اول»، ترجمهٔ کلمهٔ «Prime» است. این کلمه در دو معنای «ساده بودن» و «بنیادی بودن» به کار برده شده است.

تعریف: عدد طبیعی $p > 1$ را اول گویند، هرگاه تنها مقسوم علیه های مثبت آن ۱ و p باشند. هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک را که اول نباشد، «مرکب» گوییم.

مثال. اعداد ۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱ و ۱۳ و ۲۹ اول و ۱۸ و ۱۵ و ۵۱ مرکبند.

تذکر: با توجه به تعریف یاد شده معلوم است که عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

با توجه به تعریف عدد اول، اگر p عددی اول باشد، به طوری که $p = ab$ $(a < b)$، از آن جایی که a و b مقسوم علیه های عدد p هستند و p اول است، لذا: $a = 1$ و $b = p$ (با فرض $a < b$). بنابراین، هر عدد اول به جز تجزیهٔ بدیهی $1 \times p$ تجزیهٔ دیگری ندارد.

مثال. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، به طوری که $9m^2 - 4n^2 = 5$، مطلوبست تعیین m و n.

حل. با استفاده از اتحاد مزدوج طرف چپ تساوی فوق را تجزیه می کنیم:

$$(3m + 2n)(3m - 2n) = 5$$

چون ۵ یک عدد اول است، پس تنها تجزیهٔ آن به صورت

$a \times b = 5$ است که در آن: $a = 5$ و $b = 1$. پس، از تساوی $(3m+2n)(3n-2n) = 5\times 1$ داریم: $3n+2n = 5$ و $3m-2n = 1$ (به‌وضوح مشخص است که $3m-2n < 3m+2n$). حال m و n را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 3m+2n=5 \\ 3m-2n=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m=1 \\ n=1 \end{matrix}$$

اکنون این سؤال مطرح می‌شود که آیا بزرگ‌ترین عدد اول وجود دارد؟ پاسخ این سؤال را **اقلیدس** ۲۰۰۰ سال پیش به‌صورت زیر داده است:

قضیهٔ اقلیدس: مجموعهٔ اعداد اول نامتناهی است. به‌عبارت دیگر، بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

با این که بی‌نهایت عدد اول وجود دارد، توزیع اعداد اول در مجموعهٔ اعداد طبیعی پر رمز و راز است. این اعداد، برخلاف تعریف ساده‌شان، در میان اعداد طبیعی رشد می‌کنند و هیچ‌کس نمی‌تواند پیش‌بینی کند که عدد اول بعدی در کجا سبز خواهد شد. در عین حال، واقعیت شگفت‌انگیز دیگری هم دربارهٔ این اعداد وجود دارد: این است که به‌جز کوچک‌ترین دو عدد اول یعنی ۲ و ۳، هیچ دو عدد اول دیگری متوالی نیستند و تنها عدد ۲، عدد اول زوج است. بنابراین، همهٔ اعداد اول به‌غیر از ۲ فردند و اختلاف دو عدد اول متوالی حداقل برابر ۲ است. اگر اختلاف دو عدد اول برابر ۲ باشد، آن دو عدد اول را «دوقلو» می‌گوییم.

مثال. «۱۱ و ۱۳» و «۱۷ و ۱۹» نمونه‌هایی از اعداد اول دوقلو هستند.

نکته: هر عدد اول به یکی از صورت‌های ۲ یا $4k+1$ یا $4k+3$ $(K \in N)$ است. زیرا تنها عدد اول زوج، عدد ۲ است و سایر اعداد اول فردند و اعداد فرد نیز به یکی از صورت‌های $4k+1$ یا $4k+3$ هستند.

به‌عنوان مثال، عدد اول ۱۷ به صورت $4\times4+1$ $(k=4)$ یا عدد اول ۲۳ به‌صورت $4\times5+3$ $(k=5)$ نوشته می‌شود.

توجه کنید که عکس مطلب فوق درست نیست. یعنی نمی‌توان گفت که هر عدد به‌صورت $4k+1$ یا $4k+3$ اول است. مثلاً به‌ازای $k=5$ ، $4k+1$ مساوی ۲۱ است و ۲۱ اول نیست. درواقع $4k+1$ و $4k+3$ به‌ازای بعضی مقادیر طبیعی k اعداد اول را تولید می‌کنند. با توجه به نامتناهی بودن مجموعهٔ اعداد اول می‌توان نتیجه گرفت که بی‌نهایت عدد اول از نوع $4k+1$ یا $4k+3$ وجود دارد.

دیریکله[۱] (۱۸۵۹ ـ ۱۸۰۵م) ثابت کرد، اگر a و b نسبت‌به‌هم اول باشند، $a+kb$ بی‌نهایت عدد اول تولید می‌کند. البته این نکته بدین معنی نیست که $a+kb$ فقط اعداد اول تولید می‌کند.

اعداد مرسن[۲] (۱۶۴۸ـ۱۵۸۸م): اعداد به‌صورت $M_n = 2^n - 1$ را به‌افتخار کشیش فرانسوی، **مارین مرسن**، اعداد مرسن نامیده‌اند. ولی مرسن در زمینهٔ اول‌بودن این نوع اعداد اظهارنظر نادرستی ارائه کرد. در سال ۱۶۴۴، مرسن اظهار داشت که $M_n = 2^n - 1$، به‌ازای اعداد اول $n = 2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$ عددی اول است و به‌ازای سایر عددهای طبیعی کوچک‌تر از ۲۵۷ عددی مرکب است.

به اعدادی به شکل $2^n - 1$ که در آن n اول است، اعداد اول مرسن می‌گویند.

مرسن چند اشتباه داشت. اولاً او به خطا تصور کرد $M_{67} = 2^{67} - 1$ و $M_{257} = 2^{257} - 1$ اول هستند. ثانیاً M_{61}, M_{89}, M_{107} را در زمرهٔ اعداد اول در نظر نگرفته بود. بعدها در سال ۱۹۵۲، اعداد اول مرسن بزرگ‌تری نیز به‌دست آمدند که عبارتند از:

$M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203}, M_{2281}$. همچنین، در سال ۲۰۰۱ بزرگ‌ترین عدد اول مرسن به‌صورت $M_{13466917}$ به‌دست آمده است.[۳]

حال در مسألهٔ زیر می‌بینیم که شرط لازم برای اول‌بودن $2^n - 1$ چیست.

مسأله. اگر $2^n - 1$ اول باشد، نشان دهید n اول است.

اثبات. (برهان خلف) فرض می‌کنیم n اول نباشد، بنابراین می‌توان آن را به‌صورت $n = pq$ در نظر گرفت که در آن $1 < p,q < n$. حال داریم:

$$2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + \ldots + 1)$$

به وضوح روشن است که هریک از عوامل فوق از ۱ بزرگ‌ترند؛ یعنی $2^n - 1$ تجزیهٔ غیربدیهی دارد که این خلاف

اول بودن $۲^n - ۱$ است.

البته عکس مسألهٔ فوق درست نیست. به‌عنوان مثال، $۲۰۴۷ = ۲^{۱۱} - ۱$ که بر ۲۳ بخش‌پذیر است، اول نیست.

عدد فرما:[4] (۱۶۶۵ـ۱۶۰۱م)

هر عدد فرما، عددی است به صورت $F_n = ۲^{۲^n} + ۱ \quad (n \geq ۰)$. اگر F_n اول باشد، آن را عدد اول فرما می‌گویند.

مسأله. اگر $۲^m + ۱$ اول باشد، نشان دهید: $m = ۲^n$.

اثبات. (برهان خلف) فرض کنید m توانی از ۲ نیست؛ یعنی: $m \neq ۲^n$. لذا m مقسوم‌علیه فردی مانند $۲k + ۱$ دارد که از یک بزرگ‌تر است. بنابراین:

$$M = (۲k + ۱)L; \quad (k, L \in \mathbb{N})$$

اعداد اول بین ۱ و ۱۰۰۰ در جدول زیر آمده‌اند :

	۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳
۲۹	۳۱	۳۷	۴۱	۴۳	۴۷	۵۳	۵۹	۶۱	۶۷
۷۱	۷۳	۷۹	۸۳	۸۹	۹۷	۱۰۱	۱۰۳	۱۰۷	۱۰۹
۱۱۳	۱۲۷	۱۳۱	۱۳۷	۱۳۹	۱۴۹	۱۵۱	۱۵۷	۱۶۳	۱۶۷
۱۷۳	۱۷۹	۱۸۱	۱۹۱	۱۹۳	۱۹۷	۱۹۹	۲۱۱	۲۲۳	۲۲۷
۲۲۹	۲۳۳	۲۳۹	۲۴۱	۲۵۱	۲۵۷	۲۶۳	۲۶۹	۲۷۱	۲۷۷
۲۸۱	۲۸۳	۲۹۳	۳۰۷	۳۱۱	۳۱۳	۳۱۷	۳۳۱	۳۳۷	۳۴۷
۳۴۹	۳۵۳	۳۵۹	۳۶۷	۳۷۳	۳۷۹	۳۸۳	۳۸۹	۳۹۷	۴۰۱
۴۰۹	۴۱۹	۴۲۱	۴۳۱	۴۳۳	۴۳۹	۴۴۳	۴۴۹	۴۵۷	۴۶۱
۴۶۳	۴۶۷	۴۷۹	۴۸۷	۴۹۱	۴۹۹	۵۰۳	۵۰۹	۵۲۱	۵۲۳
۵۴۱	۵۴۷	۵۵۷	۵۶۳	۵۶۹	۵۷۱	۵۷۷	۵۸۷	۵۹۳	۵۹۹
۶۰۱	۶۰۷	۶۱۳	۶۱۷	۶۱۹	۶۳۱	۶۴۱	۶۴۳	۶۴۷	۶۵۳
۶۵۹	۶۶۱	۶۷۳	۶۷۷	۶۸۳	۶۹۱	۷۰۱	۷۰۹	۷۱۹	۷۲۷
۷۳۳	۷۳۹	۷۴۳	۷۵۱	۷۵۷	۷۶۱	۷۶۹	۷۷۳	۷۸۷	۷۹۷
۸۰۹	۸۱۱	۸۲۱	۸۲۳	۸۲۷	۸۲۹	۸۳۹	۸۵۳	۸۵۷	۸۵۹
۸۶۳	۸۷۷	۸۸۱	۸۸۳	۸۸۷	۹۰۷	۹۱۱	۹۱۹	۹۲۹	۹۳۷
۹۴۱	۹۴۷	۹۵۳	۹۶۷	۹۷۱	۹۷۷	۹۸۳	۹۹۱	۹۹۷	(۱۰۰۹)

حال داریم:

$$۲^m + ۱ = ۲^{(۲k+۱)L} + ۱ = (۲^L)^{(۲k+۱)} + ۱$$

$$= (۲^L + ۱)((۲^L)^{(۲k+۱-۱)} - ۲^{L(۲k-۱)} + \ldots + ۱)$$

یعنی $۲^{m+۱}$ تجزیهٔ غیربدیهی دارد، پس اول نیست که این خلاف فرض است. پس نتیجه می‌گیریم که شرط لازم برای اول بودن $۲^m + ۱$، این است که $m = ۲^n$ باشد.

فرما مشاهده کرد که:

$F_۰ = ۲^{۲^۰} + ۱ = ۳$ ، $F_۱ = ۲^{۲^۱} + ۱ = ۵$ ، $F_۲ = ۲^{۲^۲} + ۱ = ۱۷$ ، $F_۳ = ۲^{۲^۳} + ۱ = ۲۵۷$ و $F_۴ = ۲^{۲^۴} + ۱ = ۶۵۵۳۷$ اولند و به خطا تصور کرد که همهٔ F_n ها اولند.

در سال ۱۷۳۲، اولر نشان داد که $F_۵$ بر ۶۴۱ بخش‌پذیر است.

$$F_۵ = ۲^{۲^۵} + ۱ = ۲^{۳۲} + ۱ = ۴۲۹۴۹۶۷۲۹۷$$

بنابراین خط بطلانی بر ادعای فرما کشید. البته ممکن است برای ما چنین عددی بزرگ جلوه نکند، ولی در زمان فرما به علت محدودیت ابزار محاسبه‌های بزرگ، تشخیص اول بودن این عدد کاری بسیار دشوار بود.

اکنون ثابت شده است که به‌ازای همهٔ اعداد طبیعی $۵ \leq n \leq ۲۱$ ، F_n مرکب است.

ریاضیدانان اعداد اول را مانند بلوک‌های ساختمانی می‌دانند که همهٔ اعداد از آن‌ها ساخته شده‌اند. به همین دلیل، سالیان درازی است که ریاضیدانان را شیفتهٔ خود ساخته و فکر آن‌ها را مشغول کرده‌اند.

زیرنویس

1. Dirichlet
2. Mersenne
3. http://www-gap.dcs.St-And.ac.uk/~History/MistTopics/Prime-numbers.html
4. Fermat

منابع

1. Burton, David M. Elementary Number Theory

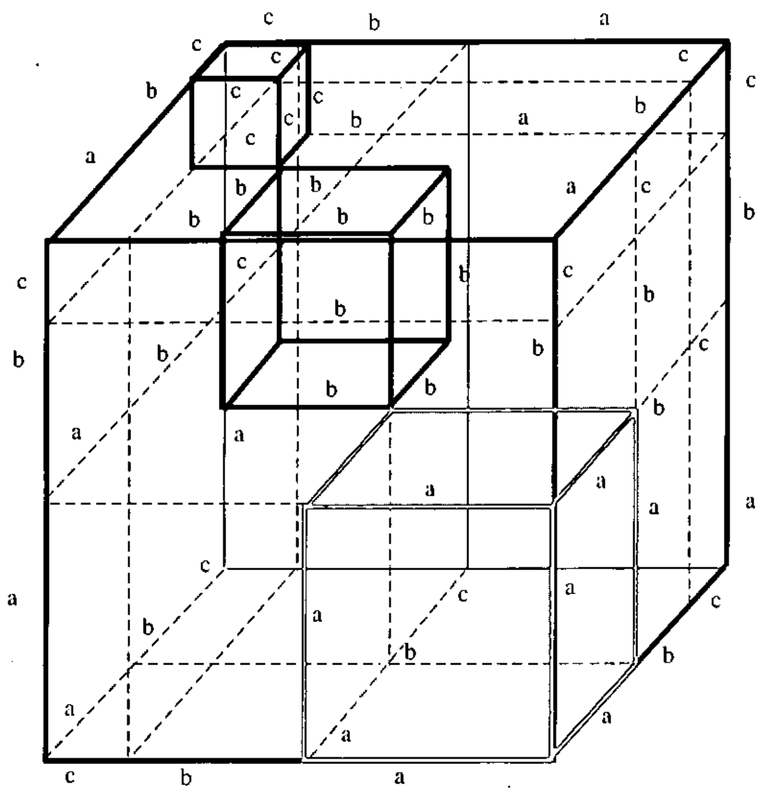
۲. نظریهٔ اعداد. سیدحسین سید موسوی و شمس‌الدین انوار.

اثبات اتحادها به کمك هندسه

۲ اثبات مکعب مجموع سه جمله ای

برای دانش آموزان سال اول متوسطه

احمد قندهاری



در شمارهٔ قبل، اثبات هندسی چند اتحاد را ملاحظه کردید. اینک در ادامه، اثبات هندسی وجبری اتحاد مکعب مجموع سه جمله‌ای را می‌آوریم.

در این شکل مکعبی به اضلاع «a+b+c» رسم شده است. اگر روی ۱۲ یال مکعب c,b,a را جدا کنیم و آن‌ها را به نقاط مقابل وصل کنیم، در ضمن اگر از نقاط برخورد خطوطی که به‌هم وصل می‌شوند، خطوطی موازی یال‌ها رسم کنیم، جمعاً ۲۷ مکعب و مکعب‌مستطیل خواهیم داشت.

از این ۲۷ مکعب و مکعب‌مستطیل:

۱ . سه مکعب به حجم‌های a^3, b^3, c^3 داریم.

۲ . سه مکعب مستطیل به حجم a^2b ،

سه مکعب‌مستطیل به حجم ab^2 ،

سه مکعب مستطیل به حجم a^2c ،

سه مکعب مستطیل به حجم ac^2 ،

سه مکعب مستطیل به حجم b^2c و

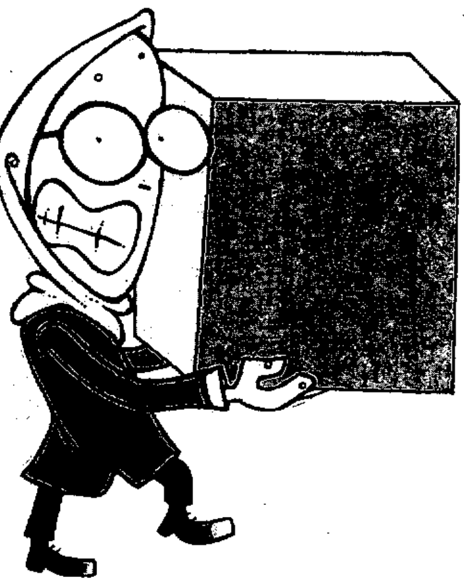
سه مکعب‌مستطیل به حجم bc^2 .

۳ . شش مکعب مستطیل به حجم abc داریم. پس:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

$$\Rightarrow (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc$$

توجه: اگر بخواهید کاملاً متوجه مسأله بشوید، باید مکعب اولیه را بسازید و روی هر یال به اندازهٔ c,b,a جدا کنید و چنان‌که گفتیم، عمل کنید. من هم این شکل را ساختم و



حجم‌ها را با دقت بسیار و صرف وقت زیاد در شکل ملاحظه کردم تا به نتیجهٔ فوق رسیدم.

نتایج مرحله به مرحلهٔ شکل چنین است.

الف) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت پائینی جسم، با حجم‌های زیر ملاحظه می‌شوند.

$a^3 + a^2b + a^2c$

$a^2b + ab^2 + abc$

$a^2c + abc + ac^2$

ب) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت میانی جسم، با حجم‌های زیر ملاحظه می‌شوند.

$a^2b + ab^2 + abc$

$ab^2 + b^3 + b^2c$

$abc + b^2c + bc^2$

ج) ۹ مکعب و مکعب مستطیل در قسمت بالایی جسم، با حجم‌های زیر دیده می‌شوند.

$a^2c + abc + ac^2$

$abc + b^2c + bc^2$

$a^2c + bc^2 + c^3$

مجموع آن‌ها این است:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc = (a+b+c)^3$$

در نتیجه داریم:

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc$$

توجه: قطرهای مکعب‌هایی به حجم a^3, b^3, c^3 درامتداد قطر مکعب اصلی هستند.

اثبات جبری اتحاد مکعب مجموع سه جمله‌ای

فرض می‌کنیم $x = (a+b)$ باشد. داریم:

$$\begin{aligned}
(a+b+c)^3 &= (x+c)^3 \\
&= x^3 + c^3 + 3x^2c + 3c^2x \\
&= (a+b)^3 + c^3 + 3(a+b)^2c + 3c^2(a+b) \\
&= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 + 3c(a^2 + b^2 + 2ab) + 3ac^2 + 3bc^2 \\
&= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + c^3 + 3a^2c + 3b^2c + 6abc + 3ac^2 + 3bc^2 \\
&= a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab(a+b) + 3ac(a+c) + 3bc(b+c) + 6abc$$

حل مسأله های مسابقه ای
برهان ۴۰

مسأله ۱

اگر $x-\frac{1}{x}=2$ و $k=x^8-408x$ ، آن گاه مقدار k را بیابید.

حل:

دو طرف را در $x \neq 0$ ضرب می‌کنیم $\quad x-\frac{1}{x}=2$

$$x^2-1=2x \Rightarrow x^2=2x+1$$

$$x^4=(x^2)^2=(2x+1)^2=4x^2+4x+1=4(2x+1)+4x+1$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم $\quad \Rightarrow x^4=12x+5$

$$x^8=144x^2+120x+25=144(2x+1)+120x+25$$

$$x^8=288x+144+120x+25$$

$$\Rightarrow x^8=408x+169$$

$$k=x^8-408x$$

$$\Rightarrow k=408x+169-408x=169 \Rightarrow \boxed{k=169}$$

مسأله ۲

اگر $f(x+\frac{1}{x})=x^{12}+\frac{1}{x^{12}}$ ، آن گاه $f(\sqrt{3})$ را بیابید.

حل:

$$f(x+\frac{1}{x})=(x^6+\frac{1}{x^6})^2-2$$

$$\Rightarrow f(x+\frac{1}{x})=\left((x^3+\frac{1}{x^3})^2-2\right)^2-2$$

در نتیجه اگر به جای $x^3+\frac{1}{x^3}$ مساوی آن، یعنی $(x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})$ را قرار می‌دهیم. پس:

$$f(x+\frac{1}{x})=\left(\left((x+\frac{1}{x})^3-3(x+\frac{1}{x})\right)^2-2\right)^2-2$$

حال در این رابطه به جای $x+\frac{1}{x}$ ، $\sqrt{3}$ را قرار می‌دهیم. درنتیجه:

$$f(\sqrt{3})=\left(\left((\sqrt{3})^3-3(\sqrt{3})\right)^2-2\right)^2-2$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{3})=\left(\underbrace{\left(3\sqrt{3}-3\sqrt{3}\right)^2}_{0}-2\right)^2-2$$

$$f(\sqrt{3})=(-2)^2-2=4-2=2$$

مسأله ۳

ثابت کنید:

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x+\frac{2}{3} \right\rfloor$$

حل:

$x = n + p \ , \ n \in z \ , \ 0 \le p < 1$

اگر به جای x، $n+p$ را در مسأله قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\lfloor 3n+3p \rfloor = \lfloor n+p \rfloor + \left\lfloor n+p+\frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor n+p+\frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow 3n + \lfloor 3p \rfloor = n + \lfloor p \rfloor + n + \left\lfloor p+\frac{1}{3} \right\rfloor + n + \left\lfloor p+\frac{2}{3} \right\rfloor$$

پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\lfloor 3p \rfloor = \lfloor p \rfloor + \left\lfloor p+\frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor p+\frac{2}{3} \right\rfloor$$

$$0 \le p < 1 \Rightarrow \lfloor p \rfloor = 0 \Rightarrow$$

حال باید ثابت کنیم:

$$\boxed{\lfloor 3p \rfloor = \left\lfloor p+\frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor p+\frac{2}{3} \right\rfloor} \qquad (1)$$

الف) $0 \le p < \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \lfloor 3p \rfloor = 0 \\ \left\lfloor p+\frac{1}{3} \right\rfloor = 0 \\ \left\lfloor p+\frac{2}{3} \right\rfloor = 0 \end{cases} \Rightarrow$ تساوی (۱) برقرار است

ب) $\frac{1}{3} \le p < \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} \lfloor 3p \rfloor = 1 \\ \left\lfloor p+\frac{1}{3} \right\rfloor = 0 \\ \left\lfloor p+\frac{2}{3} \right\rfloor = 1 \end{cases} \Rightarrow$ تساوی (۱) برقرار است

ج) $\frac{2}{3} \le p < 1 \Rightarrow \begin{cases} \lfloor 3p \rfloor = 2 \\ \left\lfloor p+\frac{1}{3} \right\rfloor = 1 \\ \left\lfloor p+\frac{2}{3} \right\rfloor = 1 \end{cases} \Rightarrow$ تساوی (۱) برقرار است

بنابراین همواره داریم:

$$\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x+\frac{1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor x+\frac{2}{3} \right\rfloor$$

پاسخ
تفریح اندیشه
صفحه ۴۱

جواب: $c = ab$.

حل: اگر مجموع دو ریشه، صفر باشد، ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. ریشه‌های معادله را s، $-s$ و t فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x-s)(x+s)(x-t)$$
$$= x^3 - tx^2 - s^2x + s^2t$$

بنابراین داریم $a=-t$ و $b=-s^2$ و $c=s^2t$،

پس:

$$c = s^2t = (-b)(-a) = ab$$



اشاره

در شمارهٔ قبل برای اولین بار یک جدول ریاضی را چاپ کردیم، در این شماره پاسخ تشریحی سؤالات جدول را می‌آوریم. همچنین از همهٔ علاقه‌مندان درخواست می‌کنیم که جدول‌های ریاضی ابتکاری خود را برای ما بفرستند تا از بین آنها بهترین‌ها را چاپ کنیم.

پاسخ جدول

کامران مرادی

افقی

۱.

$$f(۳) = ۳ + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۰}{۳}$$

$$f(f(۳)) = f(\frac{۱۰}{۳}) = \frac{۱۰}{۳} + \frac{۳}{۱۰} = \frac{۱۰۹}{۳۰}$$

$$۳۰f(f(۳)) + ۵۰ = ۱۵۹$$

•••••••

$$p(n,۲) = \frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱)$$

$$\binom{n}{۲} = \frac{n!}{(n-۲)!۲!} = \frac{n(n-۱)}{۲}$$

$$n(n-۱) - \frac{n(n-۱)}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} = ۳۶$$

$$n(n-۱) = ۷۲,\ ۹\times ۸ = ۷۲$$

$$\Rightarrow n = ۹;\ \binom{۹}{۶} = \frac{۹!}{۳!\times ۶!} = ۸۴$$

•••••••

جواب‌های صحیح و نامنفی $x+y+z \le ۱۴$ برابر است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $x+y+z+t=۱۴$ و تعداد جواب‌های معادلهٔ اخیر برابر است با:

$$\binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۱۴+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۱۷}{۳} = ۶۸۰$$

۲.

$$۲k-۱+۲k+۱+۲k+۳ = ۶k+۳ = ۶۹ \Rightarrow k = ۱۱$$

$$۲۱,۲۳,۲۵ \Rightarrow ۲۱۲۳۲۵$$

•••••••

طبق قاعدهٔ پاسکال داریم: $\binom{n+۱}{r} = \binom{n}{r-۱} + \binom{n}{r}$

درنتیجه:

$$\binom{۱۲}{۹} + \binom{۱۲}{۱۰} = \binom{۱۳}{۱۰}$$

$$\binom{۱۳}{۱۰} + \binom{۱۳}{۱۱} = \binom{۱۴}{۱۱}$$

$$\binom{۱۴}{۱۱} + \binom{۱۴}{۱۲} = \binom{۱۵}{۱۲}$$

$$\binom{۱۵}{۱۲} = ۴۵۵$$

۳.

اگر p عدد اول باشد و $(a,p)=۱$، آن‌گاه داریم $a^p \overset{p}{\equiv} a$، پس $۸۳۵^{۱۳۸۰} \overset{۱۳۸۰}{\equiv} ۸۳۵$.

•••••••

$$f(x) = x^۵ \Rightarrow f'(x) = ۵x^۴ \Rightarrow f'(۱) = ۵$$

$$۳۷f(f'(۱)-۳) = ۳۷f(۵-۳) = ۳۷f(۲)$$

$$= ۳۷\times ۲^۵ = ۳۷\times ۳۲ = ۱۱۸۴$$

۴.

$$\binom{۱۵}{۳} = \frac{۱۵!}{۹!\times ۶!} = ۴۵۵$$

•••••••

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱	۱	۵	۹	■	۸	۴	■	۶	۸	۰
۲	۲	۱	۲	۳	۲	۵	■	۴	۵	۵
۳	۸	۳	۵	■	■	۱	۱	۸	۴	
۴	■	■	۴	۵	۵	■	۲	■	■	۱
۵	۲	۱	۶	۰	۰	■	۱	۲	۴	۰
۶	۵	۷	■	۲	۵	۰	■	۱	۴	۲
۷	۶	۲	■	■	۰	■	۱	۸	■	۴
۸	■	۸	۱	۶	■	۵	۱	■	۲	■
۹	۶	۰	۴	۸	۰	■	۵	۰	۴	۳
۱۰	۶	■	۴	۰	۹	۶	■	۲	۱	۶

۵.

به $\binom{۵}{۳}$ طریق، سه کتاب از ۵ کتاب سال اول را می‌توان انتخاب کرد. تعداد روش‌های انتخاب ۴ کتاب از ۶ کتاب هم برابر است با $\binom{۶}{۴}$. اکنون ۳ کتاب از سال اول و ۴ کتاب از سال دوم داریم که آن‌ها را به !۴×!۳ طریق می‌تواند در کنار هم چید. بنابراین:

$$\binom{۵}{۳}\binom{۶}{۴}\times ۳!\times ۴! = ۲۱۶۰۰$$

●●●●●●●

$$۴۳۲ = ۳^{۳}\times ۲^{۴}$$

مجموع مقسوم‌علیه‌های عدد n، از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_۲^{\alpha_۲}\cdots p_s^{\alpha_s}$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_۲^{\alpha_۲+1}-1}{p_۲-1}\cdots\frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}$$

$$\sigma(۴۳۲) = \frac{۳^{۴}-۱}{۳-۱}\cdot\frac{۲^{۵}-۱}{۲-۱} = ۱۲۴۰$$

۶.

$$x^{۲}-۱۲x+۳۵=۰ \quad (x-۵)(x-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۵;\ x_1=۵ \\ x=۷;\ x_۲=۷\end{cases}$$

$$۱۰x_1+x_۲=۵۷$$

●●●●●●●

$$S+۲_s = ۲\pi rh+۲\pi r^{۲} = ۱۵۰\pi \Rightarrow h=\frac{۷۵-r^{۲}}{r}$$

$$V=\pi r^{۲}h \qquad V=\pi r^{۲}\left(\frac{۷۵-r^{۲}}{r}\right)=۷۵\pi r-\pi r^{۳}$$

$$V' = ۷۵\pi-۳\pi r^{۲}=۰ \Rightarrow r=۵,$$

$$h=۱۰ \qquad V=\pi r^{۲}h=۲۵۰\pi \Rightarrow ۲۵۰$$

●●●●●●●

$$(۱۱۰۰۰۱۱)_۲=۱۰۹;\ ۱۰۹=(۱۴۳)_۸;\ a=۱۴۳\Rightarrow a-۱=۱۴۲$$

۷.

$$\begin{cases}۵x+y=۳۲\\ x-y=۴\end{cases}$$

$$۶x=۳۶$$

$$\Rightarrow x=۶,\ y=۲\Rightarrow ۱۰x+y=۶۲$$

●●●●●●●

طبق قاعده، زاویهٔ خارجی هر زاویه برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور است.

$$E_1=۳۲+۱۴\Rightarrow E_1=۴۶$$

چون زاویهٔ مرکزی برابر کمان روبه‌رو است، پس داریم:

$$CE=۴۶$$

$$\frac{CE-BD}{۲}=\hat{A}\Rightarrow\frac{۴۶-BD}{۲}=۱۴\Rightarrow BD=۱۸$$

۸.

$$a=bq+r$$

$$a+۱۰۰=(b+۱)q+r+۲\Rightarrow a+۱۰۰=bq+q+r+۲$$

$$bq+r+۱۰۰=bq+q+r+۲$$

$$۱۰۰=q+۲\Rightarrow q=۹۸\Rightarrow ۹۸\times ۸+۳۲=۸۱۶$$

●●●●●●●

برای این‌که عدد $۱۳۷۷\times a$ مربع کامل باشد، باید $a=۱۷$ باشد. چون: $۱۳۷۷=۳^{۴}\times ۱۷$. پس داریم: $۳a=۵۱$.

۹.

تعداد حالات ممکن برابر است با تعداد تبدیلات ۳ شیء از ۹ شیء. یعنی:

$$p(۹,۳)=\frac{a!}{۳!}=۶۰۴۸۰$$

●●●●●●●

عددی که بر همهٔ اعداد یک رقمی بخش‌پذیر است، برابر است با:

$A=[1,2,3,4,5,6,7,8,9]$

ک.م.م $A=2^3\times3^2\times5\times7=2520$

$2a+3=2\times2520+3=5043$

۱۰.

تعداد روابط بازتابی روی یک مجموعهٔ n عضوی از رابطهٔ 2^{n^2-n} به‌دست می‌آید. پس:

$2^{16-4}=2^{12}=4096$

تعداد روابط پاد متقارن روی یک مجموعهٔ n عضوی، از رابطهٔ $2^n\times3^{\frac{n^2-n}{2}}$ به‌دست می‌آید. پس:

$2^n\times3^{\frac{n^2-n}{2}}=2^3\times3^{\frac{9-3}{2}}=2^3\times3^3=216$

عمودی

۱.

$\int\frac{x+1}{x+4}dr\qquad u=x+4\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\x+1=u-3\end{cases}$

$\Rightarrow\int\frac{u-3}{u}du=\int(1-\frac{3}{u})du=u-3Lnu=x+4-3Ln(x+4)$

$\Rightarrow f(x)=x+4$

$g(x)=3Ln(x+4)$

$8f(12)=16\times8=128$

●●●●○●●

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ n عضوی، از فرمول 2^n به دست می‌آید:

$2^n=256$

●●●●○●●

در یک درخت از مرتبهٔ n، تعداد مسیرها برابر است با تعداد انتخاب‌های ۲ رأس از میان n رأس. پس تعداد مسیرها برابر است با:

$\binom{12}{2}=66$

۲.

$\begin{vmatrix}10&3&12\\1&2&3\\0&1&3\end{vmatrix}=33\qquad\begin{vmatrix}15&0&10\\3&4&1\\0&4&5\end{vmatrix}=350$

$350+33+130=513$

○●○●○●○

دخترها را یک نفر حساب می‌کنیم. در این صورت، !۶ حالت داریم. همچنین خود دخترها هم در !۴ حالت می‌توانند کنار هم باشند. پس در حالت کلی داریم:

$6!\times4!=17280$

۳.

$f(1)=5\rightarrow f(f(1))=f(5)=25\times36+25=925;$

$100\times925+46=92546$

چون از هر دستهٔ ارقام باید یک رقم انتخاب کرد، پس $\binom{3}{1}$ حالت برای ارقام آبی و $\binom{2}{1}$ حالت برای ارقام قرمز و $\binom{4}{1}$ حالت برای ارقام سبز وجود دارد و !۳ حالت هم برای جابه‌جا شدن در کنار هم وجود دارد. پس:

$\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{4}{1}3!=144$

۴.

اعداد فرد $A=\{1,3,5\}$؛ اعداد زوج $B=\{2,4,6\}$

$3!\times3!\times2=72;\qquad7\times72-2=502$

اندازهٔ زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان روبه‌رو است. پس:

$AB=56\times2=112$

چون خط BE قطر دایره است، پس اندازهٔ کمان BAE برابر با °۱۸۰ است. پس:

$180-112=68\Rightarrow a=68\Rightarrow10a=680$

۵.

$\begin{matrix}-2\times\\3\times\end{matrix}\begin{cases}2x+3y=22\\3x+2y=28\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4x-6y=-44\\9x+6y=84\end{cases}$

$5x=40\Rightarrow x=8\Rightarrow y=2\Rightarrow10x+y=82$

○●○●●●○

مجموع اعداد ۱ تا ۱۰۰، یک تصاعد عددی با قدر نسبت ۱ است:

$$1+2+3+\cdots+100$$

$$a=1,\ d=1,\ L=100;\quad S_n=\frac{100(1+100)}{2}=5050$$

●●●●●●●

$$2^7\overset{100}{\equiv}28 \qquad 2^2\times 2^7\overset{100}{\equiv}12 \qquad (2^9)^2\overset{100}{\equiv}(12)^2$$

$$2^2\times 2^{18}\overset{100}{\equiv}44\times 2^2 \qquad 2^{20}\overset{100}{\equiv}76 \qquad 2^{20}+33\overset{100}{\equiv}09$$

۶.

یک تصاعد عددی با قدر نسبت ۸ است.

$$1,8,16,24$$

$$a=1,\ n=11,\ d=8\Rightarrow S_n=\frac{11[2+10\times 8]}{2}=451$$

۷.

تعداد دورها به طول r در یک گراف کامل k_p، از رابطهٔ $\binom{p}{r}$ به دست می‌آید.

$$\binom{p}{r}=\binom{10}{3}=120=a\Rightarrow a+1=121$$

●●●●●●●

اگر چهارضلعی ABCD قابل محاط در دایره باشد، باید مجموع زاویه‌های روبه‌رو برابر ۱۸۰° باشد. یا به عبارت دیگر مکمل یکدیگر باشند، پس داریم:

$$A+C=180\Rightarrow \hat{C}=115$$

۸.

تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت و صحیح عدد n که تجزیهٔ استاندارد آن $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_s^{\alpha_s}$ است، به صورت زیر است:

$$\sigma(n_1)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_s+1)$$

$$\sigma(2^8\times 3^5\times 5^3\times 7^2)=(8+1)(5+1)(3+1)(2+1)=9\times 6\times 4\times 3=648$$

●●●●●●●

$$a=\binom{8}{3}=56;\quad 4\times 56-6=218$$

●●●●●●●

$$3^5\overset{100}{\equiv}43;\qquad 3^{10}\overset{100}{\equiv}49;\qquad 3^{20}\overset{100}{\equiv}01$$

$$3^{20}+1\overset{100}{\equiv}02$$

۹.

$$a=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4\times 3\times r^3}{3}=4r^3=4\times 6\times 6\times 6=864$$

$$864-10=854$$

●●●●●●●

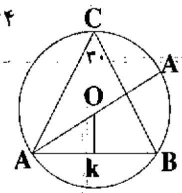
$$AB=2\hat{c}=60$$

چون AA' قطر دایره است؛ پس ABA' برابر است با ۱۸۰°. پس:

$$180-60=120$$

چون A_1 روبه‌روی کمان $A'B$ است و زاویهٔ محاطی نصف کمان روبه‌رو است، پس اندازهٔ زاویهٔ A_1 برابر با ۶۰° است.

$$a=60\Rightarrow a-16=44$$



●●●●●●●

$$y=\sqrt{x^3-3x^2}=|x|\sqrt{x-3}\Rightarrow\begin{cases}y=x\sqrt{x-3} & x\ge 0\\ y=-x\sqrt{x-3} & x<0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'+(0)=\sqrt{3}\\ f'-(0)=-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\tan\theta=\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}\right|\Rightarrow \tan\theta=\sqrt{3}\Rightarrow\theta=60$$

$$\Rightarrow a=60\Rightarrow 4a+1=241$$

۱۰.

$$49^2\overset{100}{\equiv}01\ \Rightarrow\ 49^{578}\overset{100}{\equiv}01\quad 49^{578}+4\overset{100}{\equiv}05$$

●●●●●●●

$$2^{\frac{n^2+n}{2}}\Rightarrow 2^{\frac{16+4}{2}}=2^{10}=1024$$

●●●●●●●

تعداد جواب‌های صحیح و نسبت معادلهٔ $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است. پس داریم:

$$\binom{10-1}{3-1}=\binom{9}{2}=36$$

اعداد فیبوناتچی

Febonacci Numbers

Nccolai N. Vorobiev

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

اشاره

در شمارهٔ قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی پرداختیم، در ادامهٔ مطلب رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را بررسی می‌کنیم:

۵. بسیاری از رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را می‌توان به راحتی و با استفاده از طرحی موسوم به «روش استقرایی کامل»[1] به اثبات رساند.

طرح صوری[2] مزبور که گاهی به آن «روش استقرای ریاضی»[3] نیز گفته می‌شود، دراساس به صورت زیر است:

برای اثبات این موضوع که گزارهٔ معینی شامل اعداد طبیعی، به ازای هر عدد، درست است، کافی است که:

الف) تحقیق کنیم، گزارهٔ مزبور اگر n = ۱ درست است؛

ب) ثابت کنیم، هرگاه آن گزاره به ازای عدد طبیعی دلخواه n درست باشد، آن‌گاه به ازای n + ۱ نیز چنین است.

بنابراین، هر اثبات استقرایی[4] گزاره‌ای که طبق فرض به ازای هر عدد طبیعی، درست است، باید در دو مرحله انجام گیرد:

ابتدا باید درستی گزارهٔ مورد اثبات را به ازای n = ۱ محقق کنیم. این بخش از اثبات را که معمولاً بسیار آسان است، گاهی «پایهٔ استقرا»[5] می‌نامیم.

در بخش دوم اثبات که اصولاً پیچیده‌تر است، فرض می‌کنیم گزاره به ازای عدد دلخواه معین، اما ثابت n ی درست است. سپس از این فرض[6] که اغلب به «فرض استقرایی»[7] موسوم است، برای اثبات این مطلب استفاده می‌کنیم که گزارهٔ مورد بحث، به ازای عدد صحیح[8] بعدی n + ۱ نیز صادق است.

بخش دوم اثبات استقرایی را «مرحلهٔ استقرایی»[9] یا «انتقال استقرایی»[10] می‌نامند.

توضیح مفصل روش استقرای ریاضی و تعداد بسیاری از مثال‌های توضیح دهندهٔ کاربردهای صورت‌های گوناگون این اصل[11] را می‌توان درکتاب زیر:

«The method of Mathematical Induction»

اثر "I.S.Sominskii" یافت.

به این ترتیب، به خصوص صورتی از استقرای ریاضی که ما به‌طور مکرر در زیر از آن استفاده کرده‌ایم، درصفحهٔ ۱۳ کتاب «Sominskii» آورده و بعداً در صفحات ۲۱ و ۲۲ در مثال ۷ و در مسألهٔ ۱۲ توضیح داده شده است (این کتاب توسط پرویز شهریاری به فارسی ترجمه شده است).

این صورت خاص استقرای ریاضی با تحقیق مستقیم، به ازای n = ۱ و n = ۲ آغاز می‌شود و با مرحله استقرایی از n و n + ۱ n + ۲ ادامه می‌یابد.

گاهی می‌توانیم استقراهای ریاضی را گسترش دهیم و آن‌ها را به‌طور مختصر انتقال‌هایی «از جمیع اعداد صحیح و مثبت کم‌تراز n، به n» بنامیم.

باید توجه داشته باشیم که در چنین حالاتی به انجام اثبات خاص باید استقرا نیازی نیست، زیرا، دراین حالات به بیان صوری، اثبات به ازای n = ۱ توسط انتقال از «جمیع» اعداد صحیح و مثبت کم‌تراز ۱ که واضحاً موجود نیستند - به ۱

انجام گرفته است.

در این مرحله، تغییر روش استقرای ریاضی را با اثبات این موضوع توضیح می‌دهیم که هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل ضرب عامل‌های اول[12] نوشت.

برای آغاز کار فرض می‌کنیم، هر عدد صحیح و مثبت کوچک‌تر از عدد طبیعی معین n را می‌توانی به صورت حاصل ضربی از اعداد اول بیان کرد.

اگر n اول باشد، دراین صورت $n = n$ نمایش مطلوب را به دست می‌دهد. اگر n اول نباشد، آن‌گاه بنا به تعریف اعداد اول می‌توانیم، آن‌را به صورت حاصل ضرب دست کم دو عامل بیان کنیم؛ یعنی $n = n_1n_2$ که در آن $n_1 \neq 1$ و $n_2 \neq 1$

از آن‌جا که $n_1 < n$ و $n_2 < n$، فرض استقرایی ایجاب می‌کند که بتوان، n_1، n_2 را به صورت حاصل ضرب‌های عوامل اول نوشت. در نتیجه، n را می‌توان به صورت حاصل ضرب عوامل اول نوشت.

سرانجام صورت‌های پیچیده‌تر استدلال‌های استقرایی[13] را در اثبات قضیهٔ ارائه شده مقاله‌های آینده، بررسی خواهیم کرد.

۶. ساده‌ترین توضیح مفهوم استقرا در ارتباط با کاربردهایی که با اعداد فیبوناتچی سروکار دارند، توطی تعریف خود این اعداد به‌دست می‌آید. این تعریف، همان‌گونه که درمقدمه اشاره کردیم، با مشخص کردن دو عدد اول فیبوناتچی، $u_2 = 1$ و $u_1 = 1$ و انتقال استقرایی از u_n و u_{n+1} به u_{n+2}، داده شده با رابطهٔ استقرایی $u_n + u_{n+1} = u_{n+2}$ بنا شده است.

در حالت خاص، از این تعریف به طور اتوماتیک مشخص می‌شود که هر گاه دنبالهٔ عددی معینی دارای دو جملهٔ اولیهٔ برابر ۱ باشد، و هر جملهٔ بعدی آن با جمع دو جملهٔ ما قبل آن به دست می‌آید، آن دنباله، دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی است.

مثالی که هم اکنون مورد بحث قرارمی‌دهیم، به «مسألهٔ خرگوش»[14] معروف است. این مثال را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

خرگوشی دریکی از دو جهت کوچه‌ای می‌دود که به چندین حجره تقسیم شده است. وی از هر حجره یا به حجرهٔ بعدی یا به حجرهٔ بعد از حجرهٔ بعدی می‌پرد. خرگوش مزبور روی دقیقا $n - 1$ حجره، به چند روش متفاوت می‌پرد؟ به خصوص، خرگوش از حجره اول به حجره n ام به چند طریق می‌تواند برود؟

در این مسأله دو گروه از پرسش‌ها را با این شرط یکسان در نظر می‌گیریم که حجره‌هایی که خرگوش به آن‌ها می‌پرد، یکسان باشند.

فرض می‌کنیم، تعداد مورد جست‌وجو x_n باشد. واضح است که $x_1 = 1$؛ زیرا تنها به یک روش می‌توان از حجرهٔ اول آغاز، وبه همان محل ختم کرد؛ یعنی، اصلاً هیچ پرش صورت نگرفته است.

گذشته از این، $x_2 = 1$؛ زیرا برای رفتن از حجرهٔ اول به دوم دقیقاً یک روش موجود است. این روش، پرسش به حجرهٔ مجاور است.

اکنون فرض می‌کنیم، خرگوش مورد بحث می‌خواهد به حجرهٔ $(n+2)$ ام برسد. تعداد روش‌هایی که با آن‌ها می‌تواند به این هدف برسد، به صورت نمادی، x_{n+2} است. اما باید ملاحظه کنیم که این x_{n+2} روش متفاوت، به دو رده[15] تقسیم می‌شوند؛ زیرا تفاوت بین آن‌ها از همان آغاز رخ می‌دهد:

خرگوش از حجرهٔ اول می‌تواند یا به حجرهٔ دوم برود، یا از روی این حجره بپرد و درحجرهٔ سوم به زمین بنشیند. از حجرهٔ دوم می‌تواند به x_{n+1} روش به حجرهٔ $(n+2)$ ام برسد، و از حجرهٔ سوم به x_n روش به حجرهٔ $(n+2)$ ام می‌رسد.

به این ترتیب، مشخص کردیم که دنباله؛

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

و رابطهٔ بازگشتی:

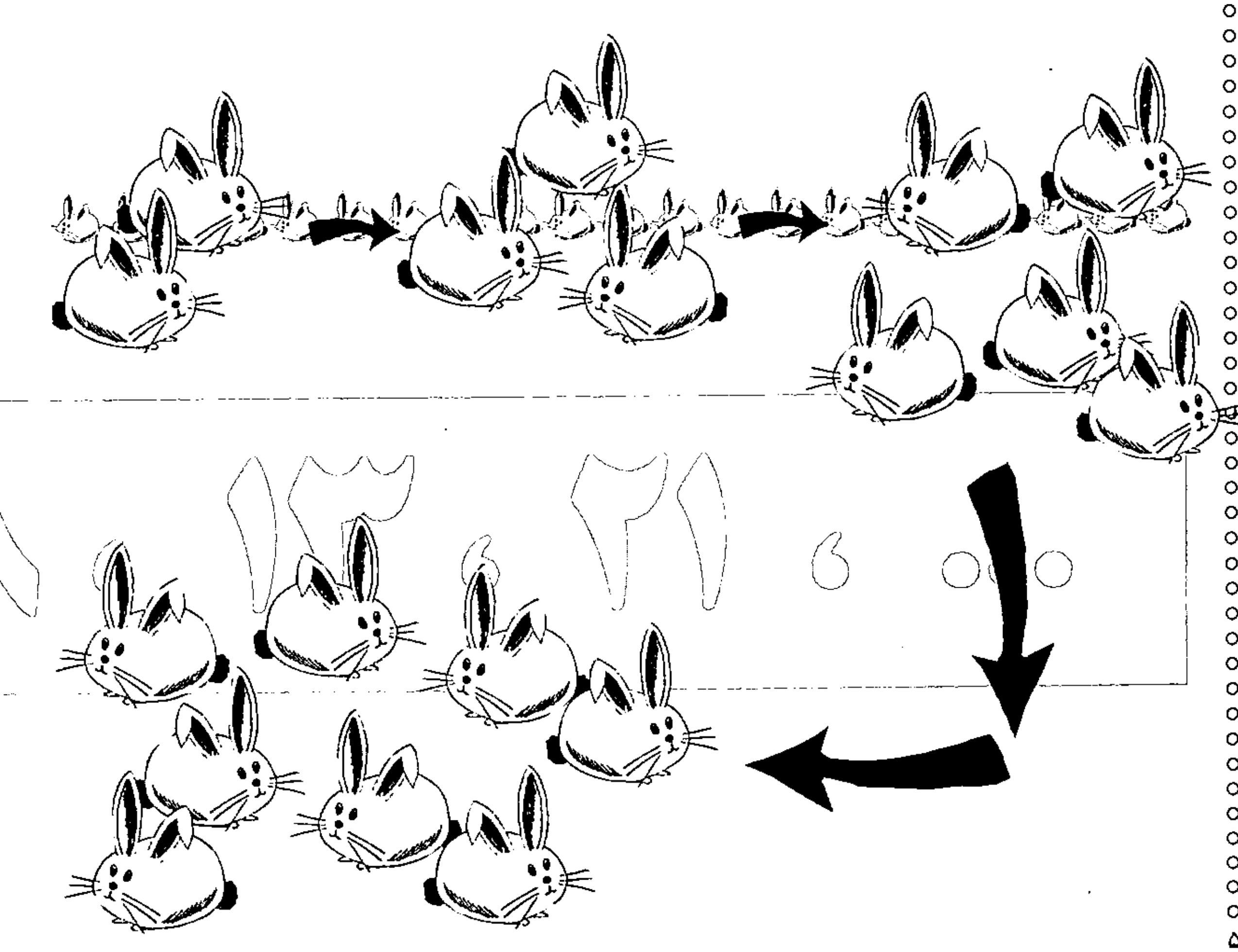
$$x_n + x_{n+1} = x_{n+2}$$

صادق است، و بنابراین باید بر دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی منطبق شود؛ یعنی:

$$x_n = u_n$$

۷. اکنون با استفاده از استقرا، به اثبات فرمول مهم زیر می‌پردازیم:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_nu_{m+1} \qquad (۱-۸)$$



اثبات با استقرای بر m انجام می‌گیرد. به ازای $m = 1$ ، فرمول (۱-۸) به صورت:

$$u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$$

در می‌آید که آشکارا درست است.

فرمول (۱-۸)، به ازای $m = 2$ نیز درست است؛ زیرا:

$$u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1} + 2u_n = u_{n-1} = u_n + u_n + u_{n+1}u_n$$

به این ترتیب، مرحلهٔ پایهٔ استقرا به اثبات می‌رسد. مرحله استقرایی را نیزمی‌توان به روش زیر اثبات کرد:

فرض می‌کنیم، فرض (۱-۸) به ازای $m = k$ و $m = k+1$ درست است و نشان می‌دهیم، به ازای $m = k+2$ نیز چنین است. بنابراین، فرض می‌کنیم:

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1}$$

$$u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+2}$$

با جمع جمله به جمله دومعادله اخیر داریم:

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$$

و این دقیقاً همان نتیجه مطلوب است.

فرمول (۱-۸) رامی‌توان به سادگی برحسب مسألهٔ خرگوش، تعبیر و حتی اثبات کرد.

به طور مشخص، همهٔ روش‌هایی که خرگوش می‌تواند از حجرهٔ اول به حجرهٔ $(n+m)$ ام برود، برابر $u_n + m$ است. در میان این روش‌ها، روش‌هایی را داریم که درآن‌ها، خرگوشی حجرهٔ nام را از دست می‌دهد، ونیز روش‌هایی را که در آن‌ها به این حجره می‌رسد.

دراین صورت، خرگوشی دررابطه با هر روش درردهٔ اول، باید ابتدا به حجرهٔ $(n-1)$ ام برسد که به u_{n-1} روش متفاوت این کار را می‌کند و سپس پرسشی به حجرهٔ $(n+1)$ ام انجام می‌دهد.

سرانجام، باید به $(n-m)-(n+1) = m-1$ حجرهٔ باقیمانده برود که این کار به u_m ممکن می‌شود. بنابراین، ردهٔ اول شامل $u_{n-1}u_m$ روش است.

به روش مشابه، خرگوش به ازای هرگروه از پرش‌هایی که به ردهٔ دوم تعلق دارند، ابتدا به حجرهٔ n ام می‌رسد که ـ u_n روش ممکن برای انجام این کار موجود است ـ و سپس دقیقاً به u_{m+1} روش به حجرهٔ $(n+m)$ ام حرکت می‌کند.

بنابراین، ردهٔ دوم شامل $u_n u_{m+1}$ روش پرسش است، و به این ترتیب، فرمول (۱-۸) به اثبات می‌رسد.

۸. با قرار دادن $m = n$ در فرمول (۱-۸) به دست می‌آوریم:

$$u_{2n} = u_{n-1}u_n + u_n u_{n+1}$$

یا

$$u_{2n} = u_n\left(u_{n-1} + u_{n+1}\right) \qquad (۹-۱)$$

۱، ۱، ۲، ۳، ۵

از معادلهٔ (۱-۹) آشکار است که u_{2n} بر u_n بخش‌پذیر است. درفصل بعد، گزارهٔ عمومی‌تری را اثبات خواهیم کرد. فرمول (۱-۹) از آن‌جا که:

$$u_n = u_{n+1} - u_{n-1}$$

می‌تواند به صورت:

$$u_{2_n} = (u_{n+1} - u_{n-1})(u_{n+1} - u_{n-1})$$

یا:

$$u_{2_n} = u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2$$

نوشته شود؛ یعنی، تفاضل مربع‌های دو عدد فیبوناتچی‌ای که اندیس‌های آن‌ها به اندازهٔ دو واحد اختلاف دارند، باز هم عددی فیبوناتچی است (که علاوه بر این، اندیسی زوج دارد).

به طور مشابه، با قرار دادن $m = 2n$ در معادلهٔ (۱-۸)، می‌توان نشان داد که:

$$u_{3_n} = u_{n+1}^3 + u_n^3 - u_{n-1}^3$$

۹. در مطلب بعد، می‌خواهیم از فرمول:

$$u_n^2 = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1} \qquad (۱-۱۰)$$

استفاده کنیم. فرمول مورد بحث را با استفاده از استقرای بر n به اثبات می‌رسانیم. فرمول (۱-۱۰) به ازای $n = 2$ به صورت:

$$u_2^2 = u_1u_3 - 1$$

در می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم، فرمول (۱-۱۰) به ازای اندیس معین nی درست باشد. با افزودن $u_n = u_{n+1}$ به دو طرف این رابطه، به دست می‌آوریم:

$$u_n^2 + u_nu_{n+1} = u_{n-1}u_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

یا

$$u_n(u_n + u_{n+2}) = u_{n+1}(u_{n-1} + u_n) + (-1)^{n+1}$$

یا:

$$u_n + u_{n+2} = u_{n+1}^2u_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

یا:

$$u_{n+1}^2 + u_nu_{n+2} + (-1)^{n+1}$$

به این ترتیب، مرحلهٔ استقرایی مسأله محقق می‌شود و در نتیجه، فرمول (۱-۱۰) به ازای هر n به اثبات می‌رسد.

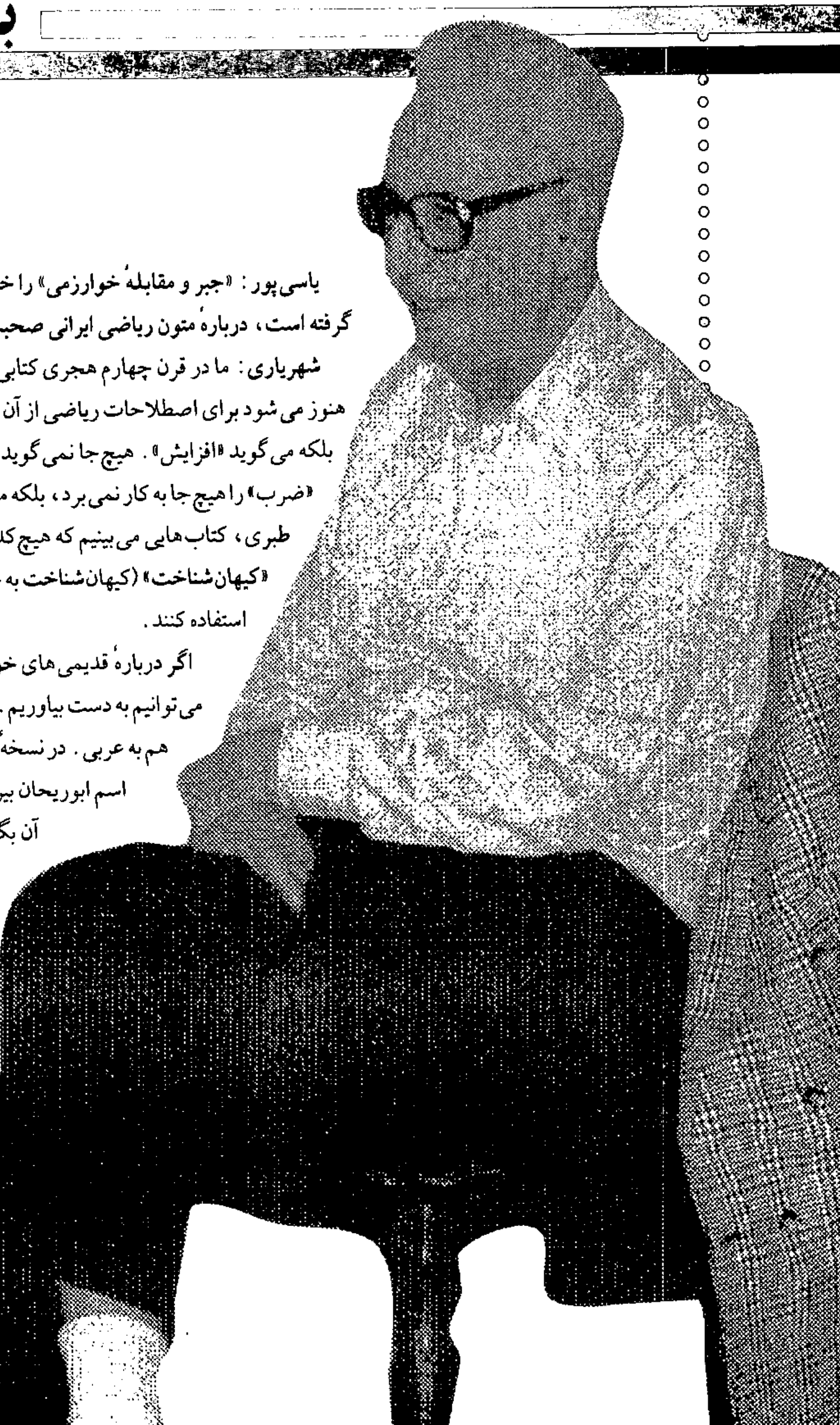
منبع

Popuar Leatures on Malhematics Series, vof.3. Mosecow:Nauka.1974.

زیر نویس

1.Method of compleate induction
2.formal scheme
3.Method of mathematical induction
4.indutive proof
5.basis of induction
6.assumptcon
7.inductive assumption
8.integer
9.inductive step
10.inductive transition
11.principle
12.prime numbers
13.inductive reasonings
14.Bunny problem
15.class

گفتگوی خودمانی با استاد شهریاری



یاسی‌پور: «جبر و مقابلهٔ خوارزمی» را خدیوجم ترجمه کرده است که از شما کمک گرفته است، دربارهٔ متون ریاضی ایرانی صحبت بفرمایید.

شهریاری: ما در قرن چهارم هجری کتابی داریم به اسم «شمارنامه» از ایوب طبری. هنوز می‌شود برای اصطلاحات ریاضی از آن استفاده کرد. او هیچ جا نمی‌گوید «جمع»، بلکه می‌گوید «افزایش». هیچ جا نمی‌گوید «تفریق»، بلکه می‌گوید «کاهش»، و کلمهٔ «ضرب» را هیچ جا به کار نمی‌برد، بلکه می‌گوید «زدن». حالا هزار سال بعد از ایوب طبری، کتاب‌هایی می‌بینیم که هیچ‌کدام نتوانسته‌اند لااقل از «شمارنامه» یا کتاب «کیهان‌شناخت» (کیهان‌شناخت به جای نجوم و اخترشناسی به کار برده می‌شد) استفاده کنند.

اگر دربارهٔ قدیمی‌های خودمان مقداری کاوش کنیم، خیلی چیزها می‌توانیم به دست بیاوریم. «التفهیم» را ابوریحان هم به فارسی نوشته، هم به عربی. در نسخهٔ فارسی آن اصطلاحات بسیاری وجود دارد. اسم ابوریحان بیرونی چه‌قدر عجیب است. یک نکته دربارهٔ آن بگویم. ابوریحان به دختری علاقه‌مند بود ریحانه نام که با شاه خوارزم ازدواج می‌کند. موقعی که شاه خوارزم می‌میرد، او بعد از آن ریحانه را می‌گیرد. ولی از همان ابتدا اسم خودش را گذاشته بود ابوریحانه؛ یعنی پدر ریحانه. کتاب «التفهیم» را هم به خاطر او، با میل او و به نام او نوشته است؛ به نام ریحانه.

یاسی‌پور: دربارهٔ بی‌خبر بودن معلمان ما از آثار فرهنگی گذشته‌مان، من هم با نظر شما

در خرداد ۱۳۸۲ در دو جمعه متوالی، نشستی با استاد ارجمند جناب آقای پرویز شهریاری داشتیم. افراد حاضر در جلسه به غیر از خود استاد، عبارت بودند از: آقایان رستمی، قندهاری، یاسی‌پور، هاشمی موسوی، شرقی، امیری وصدر، و همه از اعضای هیأت تحریریه برهان، گفت‌وگوها مفصل بود و خودمانی، از میان آن همه یک بخش را در شماره قبل و این مختصر را در این شماره از مجله برای شما خوانندگان گلچین کرده‌ایم. باشد که از تجربیات استاد بهره کافی را ببریم.

موافقم. بنده کتاب «مفتاح‌الحساب» غیاث‌الدین جمشید کاشانی را دارم که به زبان عربی و چاپ دانشگاه حلب سوریه است. کشوری که خیلی هم ثروت و امکانات ندارد. از نظر وضع مالی هم، از ما وضع خراب‌تری دارند. عنوان این کتاب و کتاب‌هایی که آن‌جا چاپ کرده و تعدادشان زیاد است، این است: «تُراثُنا». یعنی ارث و میراث ما. در واقع کتاب «مفتاح‌الحساب» کاشانی را جزو میراث عرب در نظر گرفته‌اند و بالای آن کتاب این عنوان است: تراثُنا. و کتابی که یوش کوویچ نوشته است که مفصلاً اشاره فرمودید. او تحقیقات بسیار زیادی در این زمینه کرده است. در عین حال در مدت عمر خودش حدود چهل و چند دکتر ریاضی در تاریخ علم و به‌خصوص تاریخ علم مشرق‌زمین تربیت کرده است. آن‌وقت ما با آن‌ها برخورد نداریم.

یک نمونهٔ دیگر کتاب «خلاصة‌الحساب» شیخ بهایی است. البته دکتر مصاحب در یکی از مقالاتش می‌گوید: این کتاب مطالب چندان مهمی ندارد. نباید هم داشته باشد، برای آن که رسم این بود که کتاب‌ها را خلاصه کنند، مثل «تنقیح‌المنطق»، یا «تهذیب‌المنطق»، و «خلاصة‌الحساب» که شیخ بهایی نوشته است. این کتاب را در زمان قاجاریه، فرهادمیرزا که یکی از شاهزادگان قاجار است، به زبان فارسی ترجمه کرده است. در حالی که ما نه ترجمهٔ فارسی آن را داریم و نه متن عربی‌اش را. الان متن عربی آن در حوزه‌ها تدریس می‌شود. این کتاب جمع و تفریق بسیار نازلی دارد. «ضرب» به سبک بسیار قدیمی است، ولی هنوز به عنوان کتاب درسی ریاضیات، برای بعضی از طلبه‌ها که علاقه‌مندند، تدریس و مطرح می‌شود. ما هنوز حتی راجع به متن فرهادمیرزا نیز اشرافی نداریم و به آن توجه نکرده‌ایم. قرار بود من به اتفاق استاد شهریاری روی همین کتاب جمشید کاشانی و مفتاح‌الحساب و رسالهٔ محیطیه کار کنیم. مقداری هم کار کردیم و قرار بود دانشگاه امیرکبیر آن را چاپ کند که به دلایلی نشد. سرانجام هم خود استاد، یک جلد آن را چاپ کردند. عنوانش را هم بفرمایید.

شهریاری: «جمشید کاشانی، ریاضیدان ایرانی.»

یاسی‌پور: ولی روی آن دو کتاب دیگر کار نکردیم، برای این که دنبالشان نیامدند. به هر حال راجع به دو کتاب «رسالهٔ محیطیه» و «مفتاح‌الحساب» که قرار بود روی آن‌ها کار کنیم، یک کارتن یادداشت و مطلب دارم. «خلاصة‌الحساب» نیز همچنان مانده است. برای این که انسان وقتی کار را رها کرد، دو مرتبه سراغش رفتن خیلی مشکل است. نکتهٔ دیگر این است که آن کتاب‌ها اصطلاحات عربی دارند که باید به فارسی امروزی دربیایند و این هم خیلی کار مشکلی است. دوباره باید آن‌ها را تنظیم کنید که بسیار وقت‌گیر است.

شهریاری: همان‌طور که فرمودید، آن‌ها مفتاح‌الحساب را ارث و میراث خودشان می‌دانند. علتش این است که جمشید کاشانی را می‌گویند «الکاشی». الکاشی را هم به کاشان نسبت نمی‌دهند. فامیلش الکاشی بوده، آن وقت می‌شود ریاضیدان عرب. آن دیگری هم الخیام است. سه یا چهار سال پیش در پاریس بزرگداشتی برای خیام گرفتند. من تمام مقالاتشان را خواندم. حتی یک نفر نگفت که او ایرانی است و به کرات گفته شد که او ریاضیدان عرب است. رشدی راشد که مورخ علم در



از چپ به راست به ترتیب: آقایان: یاسی پور، شهریاری، امیری، رستمی، قندهاری و هاشمی موسوی

دانشگاه پاریس است، فقط در زمینهٔ «خیام، ریاضیدان عرب» سخنرانی کرد؛ با وجودی که خیام نیشابوری، اسمش همراهش هست.

من خیال می‌کنم تا حدی گناه از ما ایرانی‌هاست. ما باید آن‌ها را بیش‌تر بشناسیم و به دنیا بفهمانیم که آن‌ها ایرانی بوده‌اند. حتی ابن‌خلدون وقتی که نمونه‌هایی را پیدا کرده است از کسانی که عرب بودند و نامی داشتند، مشخص کرده است که این‌ها هم باز رگ و ریشهٔ ایرانی دارند. به همان مناسبت یک جا می‌گوید: «علم هرجا هست، متعلق به ایرانی‌هاست. اگر نزد کس دیگری هم پیدا بشود، باز ریشه‌اش، اصلش، به ایرانی‌ها برمی‌گردد»؛ با وجود این که خودش اهل شمال آفریقاست. خیلی آدم باانصافی بوده است.

یاسی‌پور: بله، چون ابن‌خلدون متفکر بود و مقدمهٔ او در فلسفهٔ تاریخ، خیلی معروف است و امروز هم از جمله منابعی است که به آن استناد می‌کنند.

شهریاری: فضل نیریزی آدم بزرگی است که تاکنون سی‌وسه کتابش را شناخته‌اند. فرنگی‌ها به او می‌گویند «آناریوس». من نمی‌دانم این اسم را از کجا آورده‌اند؛ آناریوس، ریاضیدان عرب. این اسم نه با فضل می‌خواند، نه با نیریزی.

یاسی‌پور: در شرح حالتان از مدرسه‌های معروف کرمان در آن زمان نام بردید؛ «کاویانی» و «ایران‌شهر» و این که مدرسهٔ ایران‌شهر از سوم دبستان کلاس داشت تا سوم دبیرستان. مدیر مدرسه شخصی به نام برزو آمیغی بود. او قبل از این که معلم‌ها به مدرسه بیایند، یک ساعت و نیم قبل از این که مدرسه شروع شود، به مدرسه می‌آمد.

شهریاری: بله، او ساعت شش مدرسه بود و ساعت هشت کلاس‌ها شروع می‌شد.

یاسی‌پور: به کار بچه‌ها رسیدگی می‌کرد؛ به مشق‌ها، مسائل و سؤالاتشان. ولی شما در خاطراتتان خاطره‌ای از برزو آمیغی نقل نکرده‌اید. آیا از این شخص خاطره‌ای ندارید که بدانیم در نظر خود شما یا در نظر بچه‌ها، کارش خوب بوده است یا بد؟

شهریاری: یکی دو مورد را عرض می‌کنم. یکی همین که او هر روز شش صبح مدرسه بود. از کلاس سوم متوسطه که نهم بود، شروع می‌کرد. اول مشق آن‌ها را تصحیح می‌کرد. بعد می‌آمد کلاس هشتم و همین‌طور تا می‌رسید به کلاس سوم. پیش سومی‌ها نزدیک‌های زنگ می‌آمد که آن‌ها آمده باشند؛

چون بچه‌تر بودند.

این آدم تمام زنگ‌های تفریح هم در حیاط بود و بین بچه‌ها. سوتش هم دستش بود. تا یک کسی خطایی می‌کرد، یک سوت می‌زد. ظهرها هیچ جا نمی‌رفت. در مدرسه بود و عصرها بعد از این که مدرسه تعطیل می‌شد، به یک زمین فوتبال می‌رفت.

آدم عجیبی بود. تمام وجودش در مدرسه بود. مثلاً کلاس سوم متوسطه امتحان نهایی داشت، و او می‌آمد. می‌توانست اصلاً نیاید، اما می‌آمد و سر می‌زد.

مدرسه حیاطی داشت که در آن ده بیست درخت انار بود. هیچ‌کس حق نداشت به انارها دست بزند تا موقعی که برسند. آن وقت مستخدم مدرسه را می‌فرستاد همه را می‌چید و آن‌ها را در سه دسته می‌چید: انارهای خوب، انارهای متوسط و انارهای بد. آن وقت شاگردها باید صف می‌کشیدند و او به هر شاگرد از هر دسته یکی می‌داد. بعضی‌ها که البته آن موقع کم بودند، انارها را دور می‌ریختند. ولی برای ما، یعنی اکثر بچه‌ها، خیلی باارزش بود، سه تا انار داشتیم و می‌خوردیم.

به هر حال این برزو آمیغی که به او میرزا برزو می‌گفتند، تا آخرین روز زندگی‌اش در همان مدرسهٔ ایرانشهر بود. به نظر من اگر کسی بخواهد یک فرهنگی درست و حسابی را بشناسد، باید شرح حال زندگی برزو آمیغی را بخواند.

یاسی‌پور: شما خسته شده‌اید، ولی دو مطلب دیگر مانده است. قطعه‌ای به یادم افتاد از بوستان سعدی که می‌خواهم با خواندن آن، سؤال بعدی را مطرح کنم. سعدی می‌گوید:

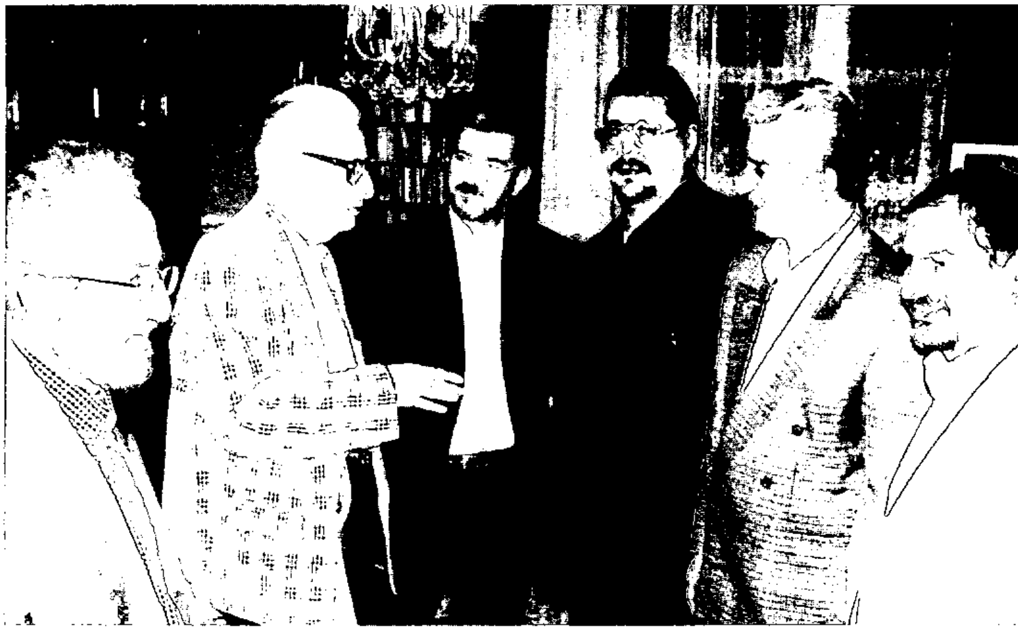
ز عهد پدر یاد دارم همی
که باران رحمت بر او هر دمی
که در خردی‌ام لوح و دفتر خرید
ز بهرم یکی خاتم زر خرید
به در کرد ناگه یکی مشتری
به خرمایی از دستم انگشتری
چو نشناسد انگشتری طفل خرد
به خرمایی از وی توانند برد
بعد می‌گوید:
تو هم قیمت عمر نشناختی
که در عیش شیرینش انداختی

در شرح حالتان، شما اشاره کرده‌اید که فوت پدرتان در چهل و شش سالگی اتفاق افتاد. نوشته‌اید پدر می‌خواست صحبتی با شما بکند، ولی مادر شما را فرستاد به دنبال خرید نان و وقتی برگشتید، دیدید که پدر فوت شده است. فکر می‌کنید پدرتان چه می‌خواست بگوید؟

شهریاری: مثل این که کسی نخی دور انگشتش بسته باشد تا مطلبی را فراموش نکند، بعد خودش فوت کند. شما حالا بخواهید کشف کنید که این نخ را برای چه بسته. قطعاً حدس می‌شود زد، ولی فقط حدس است. من پسر بزرگ خانواده بودم و آن موقع که پدرم فوت کرد، ۱۲ سال داشتم. برادر بعد از من ۶ سالش بود و برادر کوچک‌ترم ۴ سال داشت. طبعاً می‌خواست دربارهٔ زندگی چیزی بگوید. اولاً عرض کنم، پدر من زحمتکش، ولی فوق‌العاده فقیر بود. وقتی مرد، تمام هستی او که داخل کیسهٔ کوچکی بود، به اصطلاح کیف پولش ـ آن موقع ما سکه‌ای داشتیم که به آن می‌گفتیم دوپولی و ده‌تای آن می‌شد یک شاهی ـ فقط یک دانه دوپولی بود. خاطرم هست موقعی که در کرمان بودیم، پدرم کشاورز بود و ما می‌گفتیم صحرا می‌رود. هفته‌ای یک روز می‌آمد خانه. شب و روزی که او خانه بود، ما می‌گفتیم روز جشنمان است. یک روز با صاحب مزرعه دعوایش شد و بی‌کار شد و مدتی بعد در کارخانهٔ خورشید مشغول کار شد. تازه کارخانهٔ خورشید را در کرمان باز کرده بودند. کارخانهٔ ریسندگی بود. از محیط باز دشت و صحرا رفت به سالنی که در آن ریسندگی بکند. یک سال و نیم آن‌جا بود که بیمار شد داروی عوضی به او تجویز شد، که مرد.

من تصور می‌کنم می‌خواست زندگی بقیهٔ بچه‌ها و مادرم را به من بسپرد. تصور من این است. من از مدرسه آمده بودم. پدرم خوابیده بود. به محض این که آمدم، گفت که بیا بابا کارت دارم، با تو صحبتی دارم. مادرم گفت اجازه بده برود دو تا نان بگیرد و بیاید. نانوایی خیلی شلوغ بود و معطل شدم. وقتی آمدم فوت کرده بود. من تصور می‌کنم که می‌خواست بچه‌های دیگر و مادرم را (خواهری هم داشتم) به من بسپرد. حالا من چه کار می‌توانستم بکنم، خودش داستانی بود. تصور من این است، منتها از زبان خودش نشنیدم. هم من پدرم را دوست داشتم و هم او مرا دوست داشت. همیشه با هم رفیق بودیم.

مطلبی یادم آمد، وقتی که او در کرمان بود، یک الاغ



داشت. روزهای جمعه یا تعطیل (چون فصل به فصل کار می‌کرد، یک موقع شب‌ها بود، یک موقع روزها بود) وقتی که بیدار بود، با الاغش کار می‌کرد. یک روز پیرمردی به نام بهشتی، پهلوی خانه او خرابه‌ای بود، آمد و به پدرم گفت، این خشت و آجرها را از این جا ببر فلان‌جا. من هم با او رفته بودم. سه چهار بار که بردیم، یکدفعه آدم دیگری پیدا شدو گفت: این‌ها را کجا می‌برید؟ پدرم گفت: آقای بهشتی گفته. او گفت: غلط کرده و یکی زد توی گوش پدرم. من آن‌جا برانگیخته شدم و خواستم با او دست به یقه شوم که پدرم دستم را گرفت و گفت: آرام باش، می‌رویم پهلوی بهشتی. آن بهشتی هم آدم ارقه‌ای بود. فحش داد و بد و بیراه گفت. بعد به پدرم گفت: برو بعداً بیا. پدرم دیگر نیامد.

یاسی‌پور: استاد شهریاری شما در شرح‌حالتان مطرح کرده‌اید که ظاهراً یک سال هم در شیراز بوده‌اید. من عنوان این بخش را گذاشته‌ام «معلمی در شیراز»:

شیراز و آب رکنی و آن باد خوش‌نسیم
عیبش نکن که خال رخ هفت کشور است

این نظر حافظ است، تا شما نظرتان چه باشد.

شهریاری: من همان موقع آب رکن‌آباد را دیدم که واقعاً قابل توجه نبود، لابد زمان حافظ خوب بوده است، نمی‌دانم. شاید. ولی به طور کلی من شیراز را خیلی دوست دارم. شیراز آن موقع جمعیت خیلی کمی داشت و شهر هم کوچک بود. اولاً معلمان آن‌جا همگی پیاده تردد می‌کردند. من که رفتم آن‌جا گفتم: چرا دوچرخه سوار نمی‌شوید؟ گفتند: مگر می‌شود معلم دوچرخه سوار شود؟ من از فردایش دوچرخه سوار شدم. شاگردها و معلمان تعجب کردند، ولی آن‌ها هم یواش‌یواش شروع کردند به دوچرخه سوار شدن. هر وقت که با دوچرخه می‌آمدم و می‌رفتم، شاگردها، یکی دوتا، یا چندتا، می‌آمدند جلوی من که آقا چیزی می‌خواهید ما برایتان تهیه کنیم؟ می‌گفتم: نه.

یکی از خصوصیات شیرازی‌ها این بود که به فراوانی، آب نارنج می‌خوردند. برای هر بیماری، می‌گفتند خوب است. من عادت کرده بودم، همیشه آب نارنج در خانه داشتم. با آب مخلوط می‌کردم، به جای آب می‌خوردم.

مردمی بسیار مهربان بودند. من هر وقت می‌رفتم نان بگیرم، با وجود این که جمعیت زیادی آن‌جا بود، مرا می‌شناختند (چون شهر کوچک بود) و همه عقب می‌رفتند و می‌گفتند: بفرمایید. من هر چه می‌گفتم: نه خودتان نان بگیرید تا نوبت من بشود، می‌گفتند: نمی‌شود. خیلی مهربانی می‌کردند.

یاسی‌پور: استاد پرویز شهریاری از این که وقت خود را به بنده و اعضای هیأت تحریریه برهان دادید، بسیار سپاسگزاریم و برای شما آرزوی سلامتی و موفقیت را داریم.

دومین دوره
جشنواره
عکس مهر

دفتر انتشارات کمک آموزشی
برگزار می کند



به یاری آفریننده نقش ها، مجلات رشد وابسته به دفتر انتشارات کمک آموزشی، دومین دوره «جشنواره عکس مهر» را برگزار می کنند.
عکاسان بزرگسال و دانش آموز هر کدام می توانند در دو گرایش:
۱. آموزش و پرورش از نگاه دوربین.
۲. آزاد.
در این جشنواره شرکت کنند.

موضوعات گرایش آموزش و پرورش از نگاه دوربین

۱. بازی دانش آموزان (ابتدایی، راهنمایی و متوسطه)
۲. کلاس شلوغ و شیطنت دانش آموزان
۳. لحظه تعطیلی کلاس و مدرسه
۴. امتحان
۵. درس، کار و فعالیت های فوق برنامه
۶. درس پرسیدن و درس جواب دادن
۷. بهداشت در مدارس
۸. دانش آموز و معلم در اردو و سفرها و گردش های علمی
۹. کارهای نو و ابتکاری در تدریس و اداره کلاس و...
۱۰. فضاهای خاص و جالب (مدرسه، کلاس و...)
۱۱. شادی و لحظه ها و فضاهای شاد در مدارس و در میان دانش آموزان
۱۲. امید به آینده و تلاش برای ساختن فردایی بهتر

مقررات

۱. مهلت ارسال آثار تا ۱۳۸۳/۳/۳۱.
۲. هر نفر می تواند حداکثر با هفت قطعه عکس در هر گرایش شرکت کند. (شرکت یک عکاس در دو گرایش آزاد است).
۳. ابعاد عکس ها حداقل ۱۸ × ۱۳ و حداکثر ۳۰ × ۲۰ باشد.
۴. عکاسانی که سن آنها تا ۱۸ سال است، می توانند در گروه دانش آموزی و عکاسانی که سن آنها بیشتر از ۱۸ سال است در گروه بزرگسال شرکت کنند.
۵. عکس های ارسالی نباید قبلاً در نشریه و یا کتابی به چاپ رسیده باشد.
۶. در صورت لزوم، عکاس باید آمادگی ارائه نگاتیو عکس ها را داشته باشد.
۷. شرکت کنندگان باید برگه ای شامل گرایش، شماره، تاریخ و مکان عکاسی و نام عکاس پشت هریک از عکس ها بچسبانند.
۸. اگر برای عکس عنوان انتخاب کرده اید، آن را نیز در برگه مذکور (بند ۷) بنویسید.
۹. در برگه ای جداگانه مشخصات کامل خود را با شماره تلفن تماس و نشانی کامل پستی یادداشت و همراه عکس ها به نشانی دبیرخانه جشنواره بفرستید.
۱۰. دفتر انتشارات کمک آموزشی اجازه دارد عکس های دریافتی را به صورت مجموعه عکس و یا به صورت های دیگر از قبیل چاپ در نشریات یا کتاب ها و... لزوماً با ذکر نام عکاس منتشر کند.
عکس هایی که به نمایشگاه راه پیدا می کنند بازگردانده نخواهد شد و بقیه عکس ها حداکثر تا پایان آبان ۱۳۸۳ به نشانی داده شده، فرستاده خواهد شد.
نشانی دبیرخانه جشنواره عکس مهر: تهران، صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۳۳۳۱ **تلفن: ۸۳۰۵۲۷۹**

جوایز

۱. جایزه نفر اول هر گرایش (علاوه بر دیپلم افتخار)، سفر سوریه و زیارت مرقد مطهر حضرت زینب (س) است.
۲. به کسانی که رتبه دوم و سوم هر گرایش را به دست آورند، علاوه بر اهدای لوح تقدیر به ترتیب به هر کدام سه و دو سکه بهار آزادی اهدا خواهد شد.
۳. در هر گرایش بنا به نظر گروه داوری حداکثر از سه نفر تقدیر می شود که هریک از آنان علاوه بر لوح تقدیر، یک نیم سکه بهار آزادی دریافت خواهند کرد.
۴. به همه کسانی که عکسشان به نمایشگاه راه پیدا کند؛ لوح یادبود، پنج حلقه فیلم عکاسی و برخی از تولیدات دفتر انتشارات کمک آموزشی اهدا می شود.
۵. نمایشگاه آثار برگزیده و مراسم اهدای جوایز نفرات برتر، شهریور ۱۳۸۳ در تهران برگزار خواهد شد که زمان دقیق آن به اطلاع شرکت کنندگان و علاقه مندان خواهد رسید.



رشد
برهان ۴۲

برای دانش آموزان دوره‌ی متوسطه

سال سیزدهم ،شماره‌ی چهارم
۱۳۸۳ ، بها: ۲۰۰۰ ریال

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی



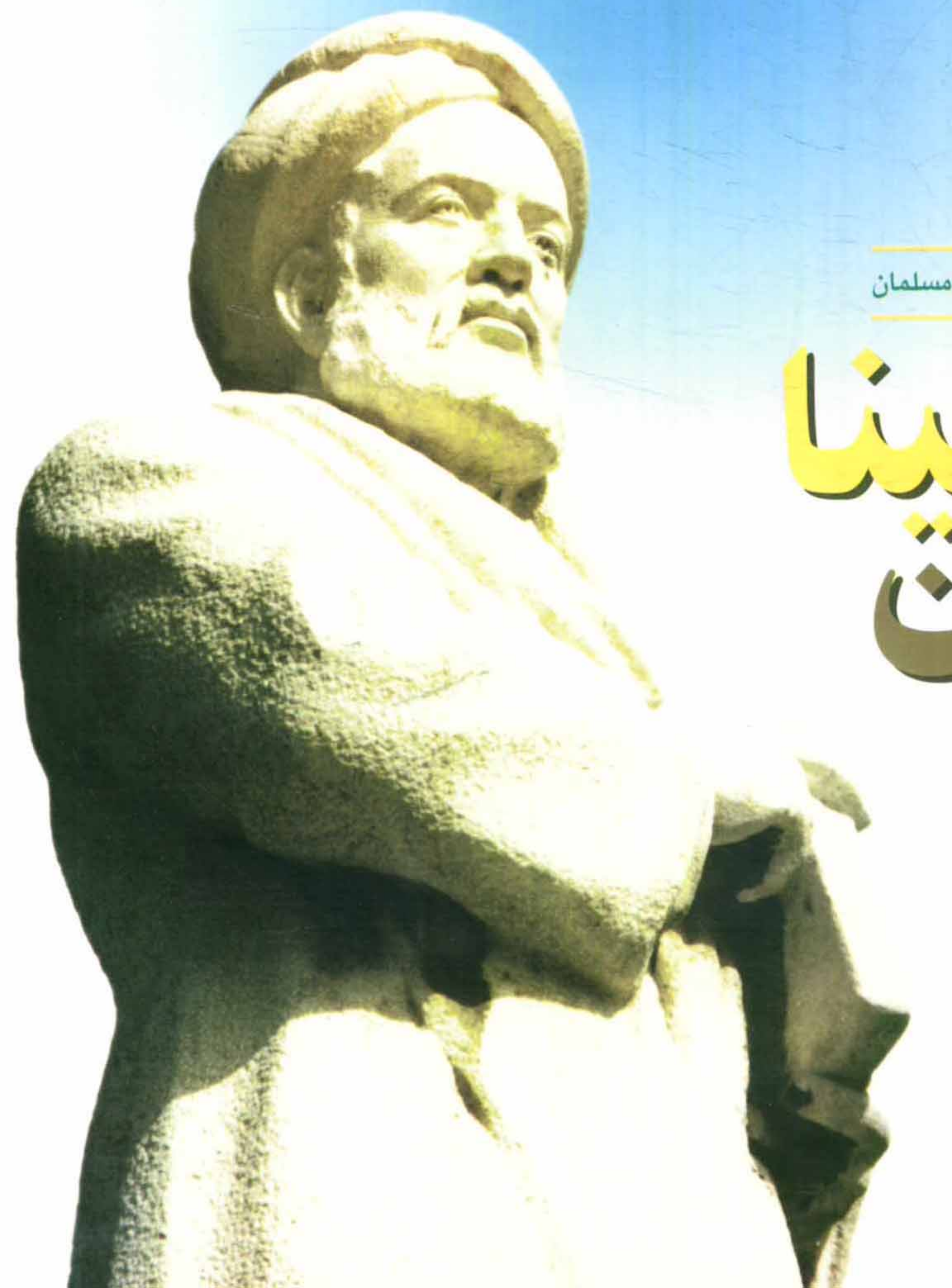
- تابع حسابی فی اویلر
- وارون ماتریس
- یک روش محاسبه
- غیاث الدین جمشید کاشانی
- تقریب ریشهٔ سوم یک عدد
- حل نامعادله های جبری به روش هندسی

ابوعلی حسین بن عبدالله بن حسن بن علی بن سینا،
ملقّب به شیخ الرئیس، فیلسوف، طبیب، ریاضیدان و منجّم، اهل بلخ و متولد بخارا، به سال
۳۷۰ هجری و متوفی در همدان به سال ۴۲۸. در بخارا منطق، طب و ریاضیات را فرا گرفت و در هفده
سالگی، نوح بن منصور سامانی را معالجه کرد و همین امر، موجب راه یافتن وی به کتابخانهٔ سلطنتی امیرسامانی
گردید که در آن جا از کتابهای کمیاب و گرانبهای موجود در آن عصر بهره ها برد.

زندگی پرفراز و نشیبی داشت؛ هم به وزارت رسید، هم به زندان افتاد، و سرانجام در شهر همدان به بیماری درگذشت.

دو ریاضیدان بزرگ، ابونصر عراق و ابوریحان بیرونی، با وی مرتبط بودند، و بنا به گفتهٔ شاگردش ابوعبید جوزجانی، در
بعضی از کتابهای ریاضی، مواردی اضافه کرده و در حساب، خواص جدیدی به دست آورده است.

آثار ریاضی وی عبارت است از: اَرِثما طیقی یا حساب نظری، اصول هندسه، رساله در تحقیق زاویه، رساله در تحقیق مبادی
هندسه، و دانشنامهٔ علائی در هندسه و هیات و حساب.



مشاهیر ریاضی مسلمان

ابن سینا

بسم الله الرحمن الرحیم

آموزشی، تحلیلی و اطلاع رسانی

رشد برهان

سال سیزدهم، شمارهٔ چهارم ۱۳۸۳
بها: ۲۰۰۰ ریال   تیراژ: ۱۲۹۰۰۰ نسخه
برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه

www.roshdmag.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
دفتر انتشارات کمک آموزشی

- مدیر مسؤول: علیرضا حاجیان زاده
- سردبیر: حمیدرضا امیری
- مدیر داخلی: میرشهرام صدر
- طراح گرافیک: شاهرخ خره‌غانی
- اعضای هیأت تحریریه:

حمیدرضا امیری
محمد هاشم رستمی
احمد قندهاری
میرشهرام صدر
هوشنگ شرقی
سید محمدرضا هاشمی موسوی
غلامرضا یاسی پور

- و با تشکر از همکاری ارزندهٔ
آقای پرویز شهریاری

چاپ و صحافی:
شرکت افست (سهامی عام)

۲ یادداشت سردبیر
۳ از تاریخ بیاموزیم (۱۶)/ پرویز شهریاری
۶ یک روش محاسبه $\sum i^k$ / احمد قندهاری
۱۰ حلّ معادله های مثلثاتی (۴)/ محمدهاشم رستمی
۱۵ اعداد فیبوناتچی/ غلامرضا یاسی پور
۲۰ تقریب ریشهٔ سوم یک عدد/ محمدحسین پورسعید
۲۳ حل یک مسالهٔ هندسه به کمک ترسیم/ علی باقری شادمان
۲۴ وارون ماتریس (تعریف، قضیه ها و مساله ها)/ حمیدرضا امیری
۳۰ حلّ نامعادله های جبری به روش هندسی/ هوشنگ شرقی
۳۳ مبحثی در همگرایی چند سری خاص/ احسان یارمحمدی
۳۶ تابع حسابی فی اویلر/ میرشهرام صدر
۴۰ غیاث الدین جمشید کاشانی/ اسفندیار معتمدی
۴۴ دربارهٔ اتحاد و معادله(۳) (نمادهای ریاضی و اتحادها)/ پرویز شهریاری
۴۸ دنباله، حد دنباله ها (۲)/ سیدمحمدرضا هاشمی موسوی
۵۴ مجانب ها/ احمد قندهاری
۶۰ یک مساله از احتمال پیوسته و یک راه حلّ تمام هندسی برای آن/ هوشنگ شرقی
۶۲ بحث پیرامون مقاطع مخروطی (۱)/ رحمان کیومرثی

رشد برهان، تمامی دبیران محترم و دانش آموزان عزیز را در زمینه های زیر دعوت به همکاری می کند:

- نگارش مقاله های کمک درسی (شرح و بسط و رفع مشکلات مبحث درسی کتاب های ریاضی متوسطه و پیش دانشگاهی)
- طرح مسائل کلیدی به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح مسائل مسابقه ای به همراه حل آن ها (برای دانش آموزان)
- طرح معماهای ریاضی
- نگارش یا ترجمهٔ مقاله های عمومی ریاضی (مانند تاریخ ریاضیات، زندگی نامهٔ علمی و اجتماعی ریاضیدانان، نکته های تازه و لطیف ریاضیات، آموزش ریاضیات، آموزش مسائل کامپیوتر و ...)

رشد برهان، هر سه ماه یک شماره منتشر می شود.

- مجلّه در حکّ و اصلاح و حذف و اضافه مقاله ها آزاد است.
- مقاله های وارده، باید خوانا و حتی الامکان کوتاه باشد.
- مقاله های رسیده مسترد نمی شود.
- استفاده از مطالب مجلّه در کتاب ها یا مجله های دیگر با ذکر دقیق ماخذ بلامانع است.

نشانی دفتر مجلّه: صندوق پستی ۱۵۸۷۵/۶۵۸۵
تلفن دفتر مجله: ۹ ـ ۸۸۳۱۱۶۱ داخلی ۲۷۴ ـ ۲۷۰
تلفن امور مشترکین: ۷۷۳۶۶۵۶ ـ ۷۷۳۱۱۱۰

یادداشت سردبیر

یکی از مهم‌ترین مقوله‌هایی که در آموزش ریاضی مدنظر است، ایجاد «تفکر ریاضی» در ذهن دانش‌آموز است. اگر ذهن فرد ساختاری منطقی و ریاضی پیدا کند، وی می‌تواند مفاهیم مختلف ریاضی، حتی مفاهیم پیچیدهٔ این علم را به راحتی فرا بگیرد. علاوه بر این، توانایی «مستقیم فکر کردن» و به عبارت دیگر «میان‌بُر فکر کردن» نیز یکی دیگر از دستاوردهای داشتن ذهن منطقی و ریاضی است.

میان‌بر فکر کردن یعنی این که شما به بهترین وجهی از اطلاعات پیشین خودتان در حل مسأله یا مسائل استفاده کنید و وقت خود را صرف بازگویی و بهتر بگوییم، پرگویی، دربارهٔ آنچه قبلاً می‌دانسته‌اید نکنید، بلکه همهٔ دانسته‌های خود را به عنوان داده‌های موجود، در حل مسأله به‌کار گیرید. با مثالی این مطلب را روشن می‌کنیم.

اگر شما مثلاً در سال‌های قبل مبحث «تشابه در مثلث» را خوانده باشید، می‌دانید هنگامی که دو زاویه مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. حال اگر ـ باز هم برای مثال ـ به مسأله‌ای برخوردید که حل آن مستلزم دانستن قضایای تشابه است؛ آیا باز هم نیازی به اثبات قضیهٔ تشابه دو مثلث و سپس کاربرد آن در حل مسأله احساس می‌کنید و آیا اصولاً این کار لازم است؟ مسلماً نه. بنابراین، هرچه دانسته‌های ریاضی شما در درس ریاضی بیشتر شود، «راه‌های میان‌بر» شما برای حل مسائل مختلف بیشتر می‌شود.

ذکر یک مطلب که چندسال پیش در یکی از مجله‌های ریاضی خارجی منتشر شده بود، شاید به شما کمک کند به اهمیّت این گونه فکر کردن بیشتر پی ببرید: در یکی از دانشگاه‌ها برای ادامه تحصیل دانشجویان رشته ریاضی، مصاحبه‌ای توسط یک استاد ریاضی انجام شده بود، ۱۵ نفر در مصاحبه شرکت کرده بودند. از این ۱۵ نفر قرار بود دو سؤال پرسیده شود و اگر هریک از آنها به هر دو سؤال پاسخ مناسب می‌دادند، برای ادامه تحصیل (درمقطع بالاتر) پذیرفته می‌شدند. دو سؤال برای هر ۱۵ نفر ثابت بوده و افراد از پاسخ‌های یکدیگر بی‌اطلاع بودند.

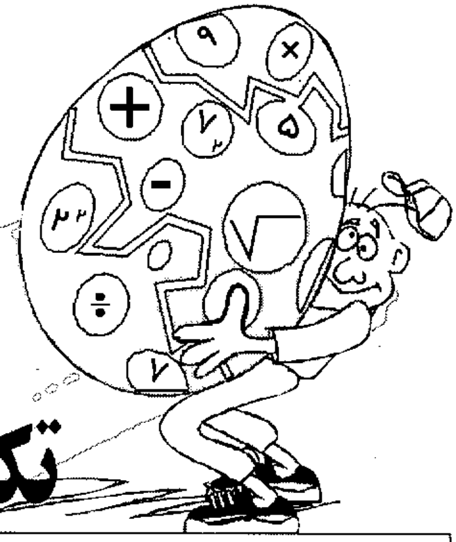
سؤال اول: اگر بخواهیم آب یک کتری پر از آب را که در آشپزخانه، روی میز قرار دارد، جوش بیاوریم (شرایط انجام کار آماده است: کبریت و گاز و...) چه‌کار باید بکنیم؟ جواب شما چیست؟ آری، معجزه که نمی‌توان کرد باید کتری را روی گاز گذاشت و گاز را روشن کرد. آب به جوش می‌آید! هر ۱۵ نفر با کمی اختلاف در جزئیات همین جواب را داده بودند که البته درست بود. همگی خوشحال ولی با تعجب، از این سؤال آسان، جلسه را ترک کردند.

سؤال دوم: استاد ریاضی سؤال دوم را از نفر اول این گونه پرسید: دوباره در همان آشپزخانه هستیم و کتری پر از آب روی زمین است و می‌خواهیم آب آن را جوش بیاوریم، چه‌کار باید بکنیم؟ جواب شما چیست؟

باز هم معجزه‌ای در کار نیست! اما اگر پاسخ شما مثل مرحلهٔ قبل باشد، شما هم شبیه ۱۳ نفر از آن ۱۵ نفر جواب داده‌اید که البته ازنظر استاد ریاضی پاسخ مناسبی نیست! ولی دو نفر از آن ۱۵ نفر این گونه پاسخ دادند: استاد، کتری را روی میز می‌گذاریم و دیگر هیچ! در واقع این دو نفر مسأله را به حالت قبل برگرداندند. چون از حالت میز به روی گاز و روشن کردن گاز و جوش آمدن آب را قبلاً توضیح داده بودند. پس، در واقع حرف زیادی نزدند! این تفکر، یک تفکر ریاضی است که لازمهٔ ادامه تحصیل در رشتهٔ ریاضی است و برای آموزشگران ریاضی اهمیت دارد. شما نیز باید به این تفکر دست پیدا کنید و از آن در پیشرفت درس ریاضی خود بهره برده و بتوانید حتی در زندگی روزمره‌تان از آن استفاده کنید.

به‌نظر شما چه آثار دیگری از تفکر ریاضی می‌توان بر شمرد، برای ما بنویسید و ارسال کنید.

والسلام



◎ پرویز شهریاری

از تاریخ بیاموزیم

تکامل ریاضیات کاربردی و سنت نظری

در شمارهٔ قبل دربارهٔ تکامل ریاضیات کاربردی و موقعیت خاص الگوریتم در ریاضیات کاربردی که معرف اشتراک ساختارهای فعالیت عملی و فکری است، صحبت کردیم. اینک ادامهٔ مطلب را در پی می‌آوریم:

سازوکار پخش دانش در جریان آموزش، تا حدی موجب عمومی شدن آموزش و انتقال سنت نظری شد. سنت نظری در آموزش با تمایل به سمت بخش نظری زنجیرهٔ حرکت دانش، پا گرفت و به صورت روشن‌تری در آموزش‌های خصوصی وارد شد. **علی قوشچی** شاگرد **جمشید کاشانی**، **ابراهیم** فرزند **سنان** نوه و شاگرد **ثابت‌بن قره**، **ابونصر فارابی معلم بیرونی**، جرجانی معلم **پورسینا**، **توسی** معلم **قطب‌الدین شیرازی**، **خیام** شاگرد **شیخ محمد منصور** (که دربارهٔ او هیچ اطلاعی نداریم)، همه در جریان آموزش درس می‌دادند و درس می‌گرفتند. جهت‌گیری کاربردی دانش ریاضی، به طور عمده در نوع دیگری از آموزش تحکیم می‌شد: آموزش عمومی شبیه آموزشی که کاتبان مصری، عیلامی و میان‌دورودی می‌دیدند. در سال ۱۳۳۸ میلادی، در فلورانس شش مدرسه برپا کرد که مردان جوان را برای کار در بخش تجارت و الهیات آماده می‌کرد. در هریک از این مدرسه‌ها تا ۱۲۰۰ شاگرد وجود داشت. آموزش عمومی ریاضیات کاربردی، در کشورهای مسلمان‌نشین در مکتب‌هایی متمرکز بود که در آن‌ها، متخصصان مالی، کارمندان دولتی آینده و غیره را تربیت می‌کردند. هدفمند بودن آموزش و یکپارچگی گروه اجتماعی ریاضیدانان متخصص، امکانی برای عبور از آموزش خصوصی به آموزش عمومی، یعنی عبور از جهت‌گیری کاربردی به سمت سنت نظری شد. اگر چنین گذاری صورت نمی‌گرفت، آن‌وقت آموزش، بسته به گروه‌های اجتماعی متفاوت، به صورت‌های مختلفی درمی‌آمد. در آن صورت، از جنبهٔ روش‌شناسی آموزشی، وجود دو گروه اجتماعی، به معنای وجود دو نوع ریاضی بود «کاربردی و خالص» که هم از نظر موضوع و هم از نظر روش، متفاوت بودند. این که چنین وضعی پیش نیامده است، گواه بر یکپارچگی علاقه‌های ریاضی است. هم آموزش عمومی و هم آموزش خصوصی به یک گروه اجتماعی خدمت می‌کرد که در درون آن، امکان جابه‌جایی این دو نوع آموزش وجود داشت. در آموزشی که پشتیبان ریاضیات سده‌های میانه بود، سودمند بودن و زیبایی درآمیخته بود: «کاری را انجام بده که لازم است و در ضمن با سلیقه.»

نظام کاربردی با ساختارهای نظری پیوند می‌خورد و این دو به صورت خاصی، همچون دانشی سازمان‌یافته، به همجوشی خود ادامه می‌دهند. آموزش به هر گونه‌ای که باشد، چه به صورت آموزش عمومی و چه به صورت آموزش شخصی، چه جهت عمل و کاربرد را نشانه گرفته باشد، چه جهت‌گیری نظری داشته باشد، نتیجه یکی است: در عمل شکافی بین نظریه و کاربرد وجود ندارد. چیزی که به نظر ما عجیب می‌آید، پرسش از استدلال کلی به طرف توصیه‌های عملی مشخص است: همه جا دانش سازمان‌یافتهٔ سده‌های میانه، پیوندی از جهت‌گیری کاربردی با تصورهای نظری است.



دیدگاه‌های مربوط به موضوع و روش‌های ریاضیات، جنبهٔ اجتماعی دارند و در واقع، به تکامل واقع‌بینانهٔ این دانش برمی‌گردند. توجه به موضوع و روش‌های دانش ریاضی، تنها به صورتی سطحی می‌تواند درک مشهورترین نمایندگان اندیشهٔ علمی و فلسفی را بیان کند. با وجود این، به خاطر نیاز گسترده به آگاهی‌های ریاضی و از آن‌جا به وجود آمدن گروه‌های اجتماعی که این آگاهی‌ها را فرامی‌گیرند، حفظ می‌کنند و پایه‌های آن را استحکام می‌بخشند، به یک ساختمان روش‌شناختی نیاز می‌افتد.
دیدگاه‌های مربوطِ به موضوع و روش ریاضیات، معرف و منعکس‌کنندهٔ درک گروه‌های اجتماعی نسبت به فعالیت خود و برخوردی است که با این دانش دارند. بنابراین، دگرگونی واقعی و تدریجی این دانش، در سازوکار اجتماعیِ گسترش و انتقال آن بازتاب می‌یابد.

از طرف دیگر، درک آموزشی هم، به نوبهٔ خود، بر زنجیرهٔ حرکت دانش ریاضی اثر می‌گذارد و گذار «هموارتر» از بین حلقه‌های آن را تأمین می‌کند. به‌خصوص همین مطلب برای تجزیه و تحلیل رابطهٔ بین الگوریتم‌ها با مبانی نظری آن‌ها و به‌ویژه، با اثبات قضیه‌ها، اهمیت دارد. دیدگاه‌های آموزشی به روش‌های مجاز در ریاضیات و به موضوع آن، به «پاک کردن» استدلال‌های نظری کمک می‌کند و موجب می‌شود تا در «باخت» قضیه‌ها، استدلال‌هایی بیرون از طرح نظری وارد شود. در فعالیت‌هایی که نمی‌توان در چارچوب سنت نظری، استدلال دقیقی ارائه داد و تنها «نیم اثباتی» براساس شباهت و استدلال‌های نااستوار وجود دارد، ولی در عین حال ضرورت تعیین تکلیف آن احساس می‌شود (برای آماده کردن الگوریتم‌هایی که در حل مسأله‌های کاربردی سودمند هستند)، نمایندگان ریاضیات کلاسیک با انتخاب شیوه‌های دیگری، مشکل را از سر راه برمی‌دارند؛ شیوه‌هایی که براساس استفاده از وسیله‌های اندازه‌گیری و دیگر وسیله‌های «زیرکانه» (ابوریحان بیرونی) قرار دارند. به این ترتیب، اثبات تنها یکی از راه‌های ساختن دانش ریاضی خواهد بود که نسبت به راه‌های دیگر مزیتی ندارد. این عقب‌نشینی از سازماندهی نظری، به نفع سازماندهی کاربردی است. کم شدن نیاز به اثبات، جدا کردن ساختارهای نظری و تقسیم آن‌ها را به الگوریتم‌ها ساده‌تر می‌کند؛ الگوریتم‌هایی که برای حل گونه‌های متفاوت مسأله‌ها، ضرورت دارند. اثبات به کمک ابزارهای مکانیکی، خیلی ساده‌تر به روندهای الگوریتمی منجر می‌شود (مثل تقسیم زاویه به سه قسمت برابر با استفاده از مقطع‌های مخروطی؛ این اثبات می‌تواند برای محاسبهٔ سینوس یک درجه مورد استفاده قرار گیرد، همان‌طور که ابوریحان بیرونی عمل کرده است).

آنچه به ماهیت دانش ریاضی مربوط می‌شود، آن را به عنوان

دانشی در نظر می‌گیرد که در جهت کاربردی تنظیم شده است؛ با این که به ساختمان نظری ریاضیات هم، باور دارد. بهترین نمونه‌ها در این باره، تعریفی است که فارابی و پورسینا از موضوع ریاضیات می‌کنند. فارابی در سخن، ریاضیات نظری را از ریاضیات کاربردی جدا می‌کند، ولی در همان حال، ضمن سازماندهی ریاضیات، نظام کاربردی را هم در کنار نظام نظری می‌آورد، و این با سازماندهی سنتی فیثاغورس، که به ریاضیات به عنوان یک دانش خالص می‌نگرد، به کلی متفاوت است. فارابی دانش‌های ریاضی را به هفت بخش تقسیم می‌کند: حساب، هندسه، نور، دانش مربوط به ستارگان، دانش مربوط به موسیقی، دانش مربوط به ثقل‌ها و دانش مربوط به «شیوه‌های ابداعی» (شیوه‌های ابداعی به معنای مجموعهٔ روش‌هایی است که در حل مسأله‌های مختلف کاربردی مورد استفاده قرار می‌گیرند).

طبقه‌بندی پورسینا به طبقه‌بندی فارابی نزدیک است. پورسینا هم آن روش‌های کاربردی را که فارابی در بخش «شیوه‌های ابداعی» جمع کرده است، شاخه‌ای از دانش ریاضی می‌داند. پورسینا در شاخه حساب از «جمع و تفریق با روش هندی» و جبر نام می‌برد؛ به شاخهٔ هندسه، دانش مربوط به ابزارهای متحرک، دربارهٔ جابه‌جایی مرکز ثقل، دربارهٔ وزن کردن، دربارهٔ جابه‌جایی آبگون‌ها و همچنین نور و زمین‌سنجی را مربوط می‌داند؛ در شاخهٔ اخترشناسی، تنظیم جدول‌های نجومی و تقویم‌ها؛ و در شاخهٔ موسیقی، آماده کردن «سازهای حیرت‌آور» موسیقی. به این ترتیب، تقسیم‌بندی ریاضیات در بحث آموزشی، کار را به نفع سمت‌گیری کاربردی تمام می‌کند.

از این گذشته، عقب‌نشینی از نظام نظری، در فضای دیدگاه‌های فلسفی هم، به صورت عینی بودن مسأله‌های نظری، ظاهر می‌شود. بحث‌های نظری دوران سده‌های میانه، به کلی از فضای تصورهای کلی دربارهٔ تکامل دانش دور می‌شود که البته، نمی‌تواند یک تصادف ساده باشد. ولی در این صورت باید همزمانی پیشرفت دانش را در مجموع، در نظر گرفت؛ زیرا چنین تصورهایی نمی‌توانند ویژهٔ دانش ریاضی باشند. بنابراین به کلی نادرست است که با ارزیابی حالت ریاضیات امروزی و نقشی که ساختمان نظری دارد، ریاضیات سده‌های میانه را تجزیه و تحلیل کنیم و در دوره‌ای که جهت‌گیری کاربردی نیرومند بود، بر مسأله‌هایی تکیه کنیم که پایهٔ نظری دارند. با این که برای همهٔ ریاضیدانان، سنت نظری و تصور دربارهٔ آن، یار و همراه باوفایی بود، مسأله‌های اصلی فلسفی-آموزشی ریاضیات را نباید در این حوزه جست‌وجو کرد. مسأله اصلی برای ریاضیدانان سده‌های میانه، کاربرد و عملی بود. آن‌ها به خواست عمل و زندگی توجه داشتند که به طور مستقیم و از راه ساختمان‌های محاسبه‌ای-الگوریتمی، در دانش ریاضی نفوذ می‌کرد.

تمامیت ترکیبی و یکپارچه بودن ریاضیات کاربردی سده‌های میانه را، باید همچون زنجیرهٔ حرکت و تغییر دانش ریاضی به حساب آورد. آگاهی در جریان آموزش و کار علمی (که از آموزش جدا نیست) تحکیم می‌یابد. آنچه را که به زنجیرهٔ حرکت و تغییر مربوط است، می‌توان همچون گام ناگزیر منطقی ریاضیات کاربردی دانست که در شرایط وجود سنت نظری، به طرف پایه‌گذاری روش‌ها گام برمی‌دارد. در عین حال، این زنجیره را می‌توان همچون دگرگونی سنت‌های نظری و تلاش برای یکی شدن با مسأله‌های کاربردی دانست. تمامیت و یکپارچگی واهی ریاضیات تحکیم می‌شود و درک موضوع ریاضیات در حوزهٔ آگاهی‌های عملی-الگوریتمی متمرکز می‌شود؛ بدون این که ضمن کار، نظریه را در برابر عمل و کاربرد قرار دهد. به علاوه، بخش عمدهٔ دانش ریاضی، به آگاهی‌های مربوط به محاسبه تبدیل می‌شود. به همین جهت، اگر بخواهیم خصلت واقعی ریاضیات سده‌های میانه را بیان کنیم، باید آن را جهت‌گیری محاسبه‌ای-الگوریتمی بنامیم. به همین دلیل است که ریاضیات سده‌های میانه را، می‌توان یکپارچه و دارای جهت‌گیری کاربردی دانست: **ریاضیات سده‌های میانه، ریاضیات کاربردی است.**

به این ترتیب، در شرایط وجود سنت نظری (ریاضیات نظری یونان باستان)، ریاضیات کاربردی در مسیر سنتز جهت‌گیری کاربردی دانش و ساختمان نظری آن پیش می‌رود. این سنتز در جنبهٔ الگوریتمی دانش ریاضی متمرکز می‌شود و در جریان آموزش، با سازوکار اجتماعی سنت‌ها حفظ می‌شود. دورهٔ دوم وجود ریاضیات کاربردی، یعنی وقتی که عمل و کاربرد، به صورتی فعال در ریاضیات جذب می‌شد، نیروهای لازم برای دوران جدید ریاضیات نظری فراهم شد؛ دورهٔ دوم ریاضیات کاربردی ترکیبی است که تنها به کمک مطالعهٔ ریاضیات کاربردی مصر و میان‌دورود و دیگر جاها، قابل فهم است.

یک روش محاسبه

$$n,K \in N \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

احمد قندها



در بسیاری از کتاب‌ها دیده می‌شود که می‌گویند: ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

که معمولاً به کمک استقرا ثابت می‌شود. همچنین می‌گویند: ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

به طور مسلّم این سؤال پیش می‌آید که از کجا این رابطه‌ها به‌دست آمده است؟ در این مقاله، یک روش محاسبهٔ این رابطه‌ها را بیان می‌کنیم.

۱. ترکیب p حرف از n حرف را چنین نمایش می‌دهیم:

$$C_p^n = \binom{n}{p}$$

و داریم:

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثال:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(4!)} = \frac{4! \times 5 \times 6}{2 \times 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

۲. به کمک اتحادها می‌توان، بسط $(a+b)^2$ و $(a+b)^3$ را به‌دست آورد.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ولی برای محاسبهٔ بسط $(a+b)^۴$ ، $(a+b)^۵$ ، $(a+b)^۶$ از رابطه‌ای به‌نام بسط دو جمله‌ای نیوتن استفاده می‌کنیم.

۳. بسط دو جمله‌ای نیوتن: $(n \in N)$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \binom{n}{۳}a^{n-۳}b^۳ + \cdots + \binom{n}{n-۱}ab^{n-۱} + b^n$$

مثال ۱.

$$(a+b)^۴ = a^۴ + \binom{۴}{۱}a^۳b + \binom{۴}{۲}a^۲b^۲ + \binom{۴}{۳}ab^۳ + b^۴$$

$$(a+b)^۴ = a^۴ + ۴a^۳b + ۶a^۲b^۲ + ۴ab^۳ + b^۴$$

مثال ۲.

$$(a+b)^۵ = a^۵ + \binom{۵}{۱}a^۴b + \binom{۵}{۲}a^۳b^۲ + \binom{۵}{۳}a^۲b^۳ + \binom{۵}{۴}ab^۴ + b^۵$$

$$(a+b)^۵ = a^۵ + ۵a^۴b + ۱۰a^۳b^۲ + ۱۰a^۲b^۳ + ۵ab^۴ + b^۵$$

می‌دانیم: $\sum_{i=۱}^{n} i = ۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

حال بسط دو جمله‌ای نیوتن را برای $(x+۱)^k$ می‌نویسیم.

$$n = k \in N \ , \ a = x \ , \ b = ۱$$

$$(x+۱)^k = x^k + \binom{k}{۱}x^{n-۱} + \binom{k}{۲}x^{k-۲} + \binom{k}{۳}x^{k-۳} + \cdots + \binom{k}{k-۱}x + ۱$$

اگر در این رابطه به جای x، به طور مرتّب، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... و n را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x = ۱ : \ ۲^k = ۱^k + \binom{k}{۱}۱^{k-۱} + \binom{k}{۲}۱^{k-۲} + \binom{k}{۳}۱^{k-۳} + \cdots + \binom{k}{k-۱}۱ + ۱$$

$$x = ۲ : \ ۳^k = ۲^k + \binom{k}{۱}۲^{k-۱} + \binom{k}{۲}۲^{k-۲} + \binom{k}{۳}۲^{k-۳} + \cdots + \binom{k}{k-۱}۱ + ۱$$

$$x = ۳ : \ ۴^k = ۳^k + \binom{k}{۱}۳^{k-۱} + \binom{k}{۲}۳^{k-۲} + \binom{k}{۳}۳^{k-۲} + \cdots + \binom{k}{k-۱}۳ + ۱$$

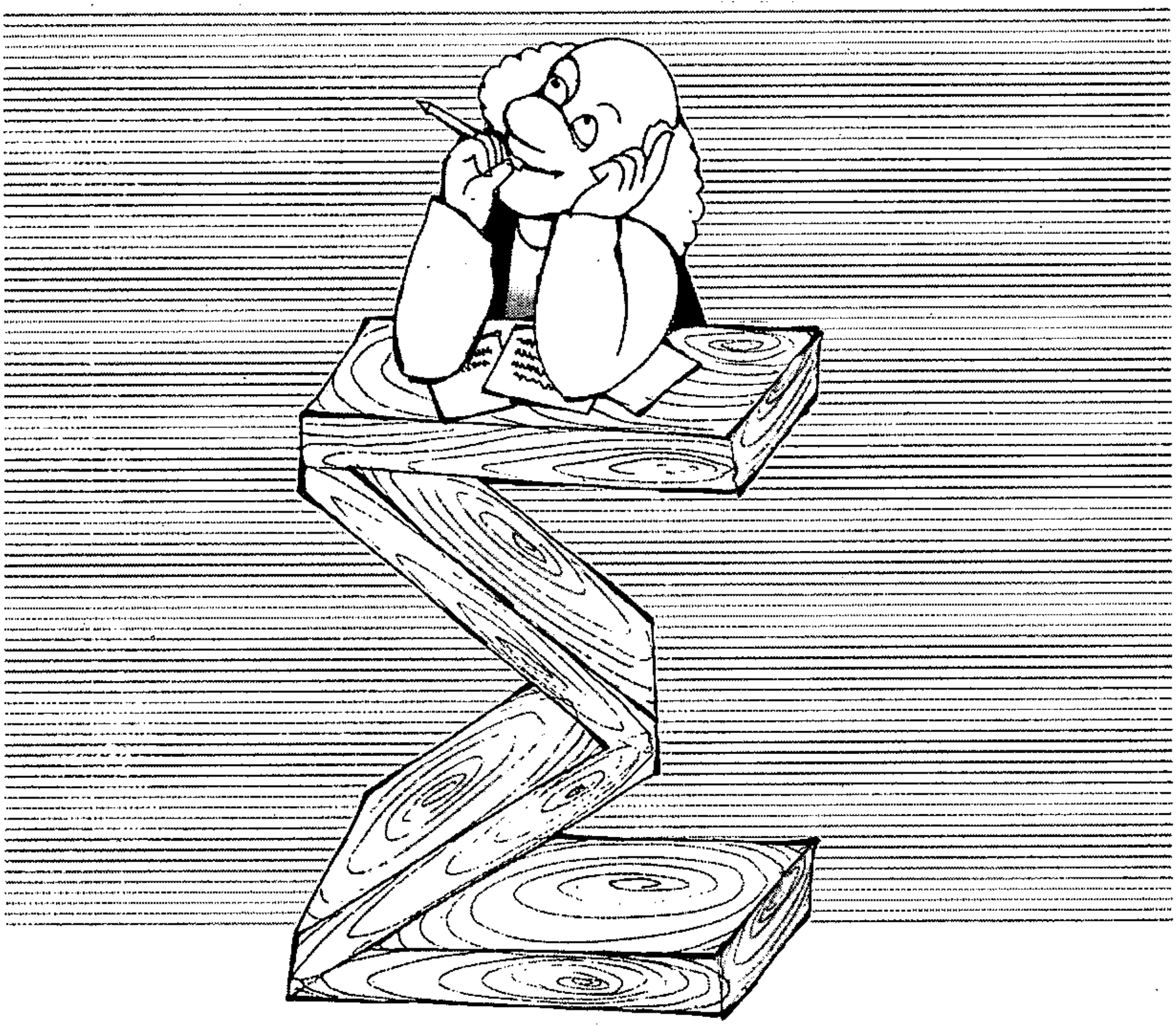
$$x = ۴ : \ ۵^k = ۴^k + \binom{k}{۱}۴^{k-۱} + \binom{k}{۲}۴^{k-۲} + \binom{k}{۳}۴^{k-۲} + \cdots + \binom{k}{k-۱}۴ + ۱$$

....

....

$$x = n : \ (n+۱)^k = n^k + \binom{k}{۱}n^{k-۱} + \binom{k}{۲}n^{k-۲} + \binom{k}{۳}n^{k-۳} + \cdots + \binom{k}{k-۱}n + ۱$$

حال این رابطه‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم و عوامل مساوی را از دو طرف حذف می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$(n+1)^k = \binom{k}{1}\left(1^{k-1}+2^{k-1}+3^{k-1}+\cdots+n^{k-1}\right)$$
$$+\binom{k}{2}\left(1^{k-2}+2^{k-2}+3^{k-2}+\cdots+n^{k-2}\right)$$
$$+\binom{k}{3}\left(1^{k-3}+2^{k-3}+3^{k-3}+\cdots+n^{k-3}\right)$$
$$+\cdots+\binom{k}{k-1}(1+2+3+\cdots+n)+(n+1)$$

در نتیجه:

$$(n+1)^k = \binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1}+\binom{k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^{k-2}+\binom{k}{3}\sum_{i=1}^{n} i^{k-3}$$
$$+\cdots+\binom{k}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i+(n+1) \qquad \text{رابطهٔ (۱)}$$

حال به کمک رابطهٔ (۱) $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ، $\sum_{i=1}^{n} i^3$ ، $\sum_{i=1}^{n} i^4$ را محاسبه می‌کنیم.

الف) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k، عدد ۳ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(n+1)^3 = \binom{3}{1}\sum_{i=1}^{n} i^2+\binom{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i+(n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2+3\sum_{i=1}^{n} i+(n+1) \Rightarrow$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^3-3\sum_{i=1}^{n} i-(n+1) \Rightarrow$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

$$= (n+1)(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1)$$

$$\Rightarrow\ 3\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n+1}{2}(2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

ب) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k، عدد ۴ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(n+1)^4 = \binom{4}{1}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \binom{4}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \binom{4}{3}\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \ \Rightarrow$$

$$(n+1)^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \ \Rightarrow$$

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i - (n+1) \ \Rightarrow$$

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$$

$$\Rightarrow\ 4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)$$

$$= (n+1)(n^3 + n^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

ج) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k عدد ۵ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(n+1)^5 = \binom{5}{1}\sum_{i=1}^{n} i^4 + \binom{5}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \binom{5}{3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \binom{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \ \Rightarrow$$

$$(n+1)^5 = 5\sum_{i=1}^{n} i^4 + 10\sum_{i=1}^{n} i^3 + 10\sum_{i=1}^{n} i^2 + 5\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \ \Rightarrow$$

$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)^5 - 10\sum_{i=1}^{n} i^3 - 10\sum_{i=1}^{n} i^2 - 5\sum_{i=1}^{n} i - (n+1) \ \Rightarrow$$

$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)^5 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - (n+1) \Rightarrow$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = 6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1) \Rightarrow$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\left[6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right] \Rightarrow$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\times \left[6(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right] \Rightarrow$$

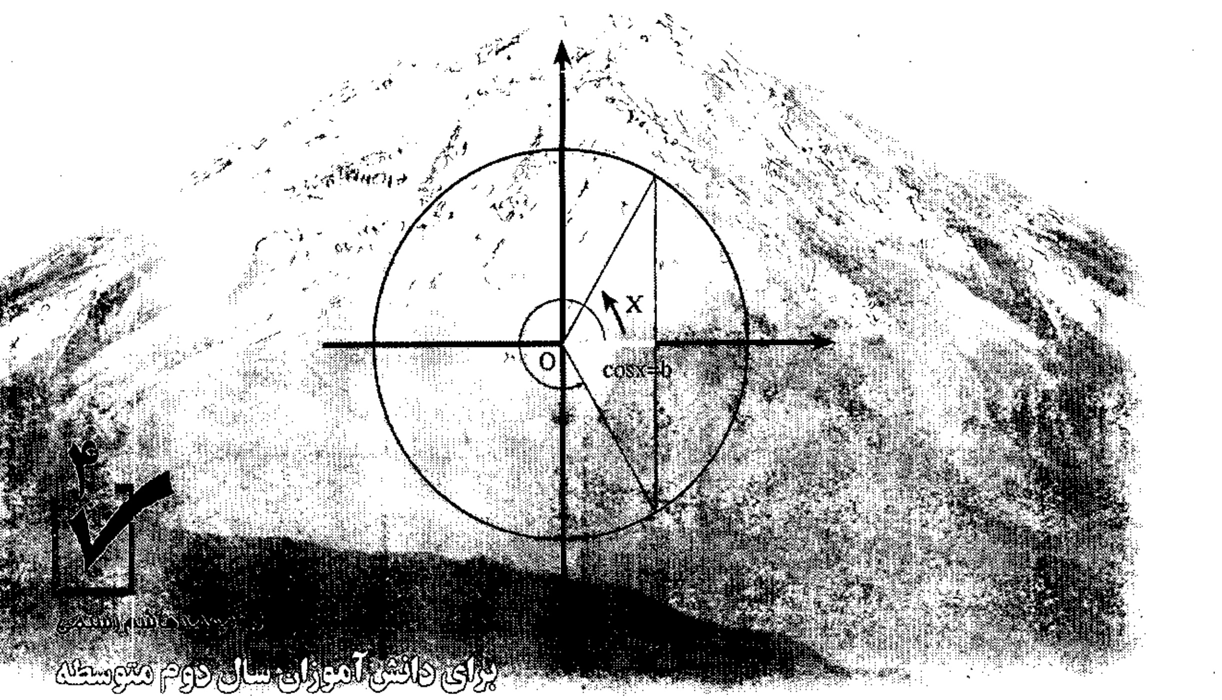
$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\times \left[6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 15n^2 - 20n^2 - 10n - 15n - 6\right]$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\left[6n^4 + 9n^3 + n^2 - n\right]$$

$$= n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}}$$

به همین روش می‌توان $\sum_{i=1}^{n} i^5$ و $\sum_{i=1}^{n} i^6$ و ... را محاسبه کرد.



حلّ معادله های مثلثاتی

اشاره

حلّ معادلهٔ مثلثاتی$(-1 \le b \le 1)$ $\cos x = b$ را در شمارهٔ قبل دیدیم. اکنون چند نکته دربارهٔ این معادله با مثال‌های مختلف ارائه می‌کنیم.

آزمون۱. اگر $-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9}$ و $\operatorname{Cos}3x = \frac{m-1}{2}$، مقادیر m در کدام فاصله است؟

۱) $[1, 2)$ ۲) $(1, 2)$

۳) $(2, 3]$ ۴) $(3, 4]$

کنکور سراسری

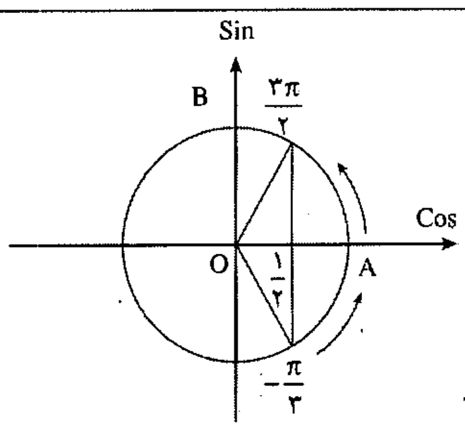
حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. داریم:

$$-\frac{\pi}{9} < x < \frac{\pi}{9} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \operatorname{Cos}3x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \le 1$$

$$\Rightarrow 1 < m-1 \le 2 \Rightarrow 1+1 < m-1+1 \le 2+1$$

$$\Rightarrow 2 < m \le 3 \Rightarrow m \in (2, 3]$$



نکته: $\operatorname{Cos}(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ است هنگامی که زاویه از $-\frac{\pi}{3}$ به صفر می‌رسد، کسینوس آن از $\frac{1}{2}$ به ۱ می‌رسد، زیرا $\operatorname{Cos}0 = 1$ است و هنگامی که زاویه از ۰ تا $+\frac{\pi}{3}$ تغییر کند، کسینوس آن از ۱ تا $\frac{1}{2}$ تغییر می‌کند. بنابراین هنگامی که زاویه از $-\frac{\pi}{3}$ تا $+\frac{\pi}{3}$ تغییر کند، کسینوس آن حدّاقل مساوی $\frac{1}{2}$ و حدّاکثر مساوی ۱ است. که چون $-\frac{\pi}{3} < 3x < \frac{\pi}{3}$ است، پس $\frac{1}{2} < \operatorname{Cos}3x \le 1$ است.

آزمون۲. اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\cos 2x = \frac{1}{1-m}$، آن‌گاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $]-\infty, 2]$ ۲) $]1, +\infty[$
۳) $[2, +\infty[$ ۴) $]-\infty, 1[$

کنکور سراسری

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. داریم:

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos 2x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq \frac{1}{1-m} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-m} \geq -1 \\ \frac{1}{1-m} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-m} + 1 \geq 0 \\ \frac{1}{1-m} \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2-m}{1-m} \geq 0 \Rightarrow m \geq 2,\ m < 1 \\ \frac{1}{1-m} < 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \geq 2$$

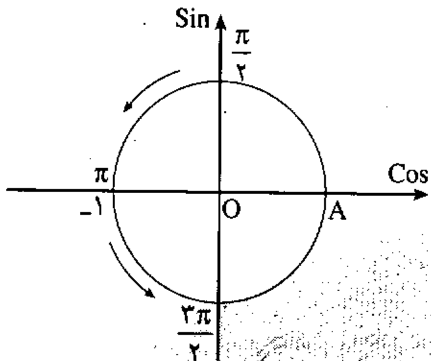
m	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
$2-m$		+		+	۰	−	
$1-m$		+	۰	−		−	
کسر اول		+	نامعین	−	۰	+	
نامعادلهٔ اول		ج			ج	ج	
کسر دوم		+	نامعین	−		−	
نامعادلهٔ دوم				ج		ج	
دستگاه نامعادله					ج	ج	

نکتهٔ ۱. برای تعیین جواب دستگاه نامعادله به دست آمده، باید از جدول تعیین علامت کنیم. امّا در این مسأله، کسر $\frac{2-m}{1-m}$، با $(2-m)(1-m)$ یا m^2-3m+2 هم‌علامت است (مگر در $m=1$ که ریشهٔ مخرج کسر است) و این سه جمله‌ای به ازای مقادیر m بین دو ریشه منفی و به ازای مقادیر m خارج دو ریشه مثبت است؛ پس جواب نامعادلهٔ اول $m \geq 2$ و $m < 1$ است.

جواب نامعادلهٔ دوم، یعنی $\frac{1}{1-m} < 0$ نیز $1-m < 0$ یا $m > 1$ است.

جواب دستگاه اشتراک جواب‌های دو نامعادله، یعنی $m \geq 2$ است.

نکتهٔ ۲. وقتی زاویه‌ای از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ تغییر می‌کند. کسینوس آن از ۰ تا ۱− تغییر می‌کند؛ زیرا $\cos\frac{\pi}{2} = 0$، $\cos\pi = -1$ و $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$ است، بنابراین وقتی $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$ است، داریم $-1 \leq \cos 2x < 0$.



آزمون۳. اگر $\cos x = \frac{2a-1}{a+2}$ و $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(0, \frac{4}{3})$ ۲) $(-2, \frac{4}{3})$
۳) $(-2, 0)$ ۴) $(\frac{4}{3}, +\infty)$

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است. داریم:

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{2a-1}{2a+2} < \frac{1}{2}$$

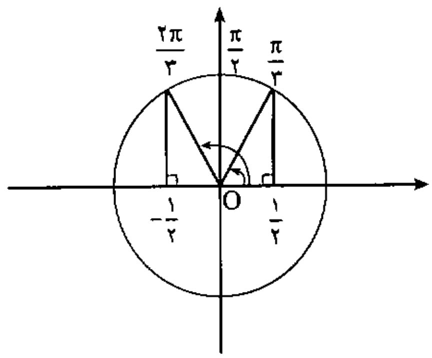
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a-1}{a+2} > -\frac{1}{2} \\ \frac{2a-1}{a+2} < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2a-1}{a+2} + \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{2a-1}{a+2} - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4a-2+a+2}{2(a+2)} > 0 \\ \frac{4a-2-a-2}{2(a+2)} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5a}{2(a+2)} > 0 \\ \frac{3a-4}{2(a+2)} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ و } a < -2 \\ -2 < a < \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

نکته: با توجه به این که $\cos\frac{\pi}{3}=+\frac{1}{2}$ و $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ است، وقتی x از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{2\pi}{3}$ تغییر کند، Cosx از $+\frac{1}{2}$ تا $-\frac{1}{2}$ تغییر خواهد کرد.



آزمون۴. اگر $-1<\cos x<\frac{1}{2}$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$ ۲) $0<x\le\pi$

۳) $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ ۴) $\frac{\pi}{3}\le x\le\pi$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. می‌دانیم که $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ و $\cos\pi=-1$ است.

نکته: برای گزینهٔ (۱) $\frac{1}{2}<\cos x\le 1$، برای گزینهٔ (۲) $-1\le\cos x<1$ و برای گزینهٔ (۴)، $-1\le\cos x\le\frac{1}{2}$ است.

آزمون۵. اگر $-1<\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<0$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}<x<\pi$ ۲) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

در معادلهٔ دومی

۳) $\frac{\pi}{2}\le x<\frac{3\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{2}<x\le\frac{3\pi}{2}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است. با استفاده از گزینه‌های داده شده، نخست حدود $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$ و سپس حدود $\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ را برای هر گزینه به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$(1)\ \frac{\pi}{3}<x<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}<\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow \text{(خلاف فرض است)}$$

$$(2)\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$$

$$\Rightarrow -1<\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<0 \quad \text{(جواب)}$$

توجه: برای گزینهٔ (۳)، $-1<\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\le 0$ و برای گزینهٔ (۴)، $-1\le\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<0$ است.

آزمون۶. معادلهٔ $\sin 3x+\cos 2x=0$ در فاصلهٔ $[0,\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) دو ریشه ۲) سه ریشه

۳) چهار ریشه ۴) شش ریشه

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است. معادلهٔ داده شده را می‌توان به معادله‌ای ساده بر حسب سینوس زاویه‌ها یا به معادله‌ای ساده بر حسب کسینوس زاویه‌ها تبدیل کرد، که در این جا آن را به معادله‌ای ساده بر حسب کسینوس زاویه‌ها تبدیل و حل می‌کنیم تا تعداد ریشه‌ها در فاصلهٔ خواسته شده را تعیین کنیم. داریم:

$$\sin 3x+\cos 2x=0$$

$$\Rightarrow \cos 2x=-\sin 3x=\cos(\frac{\pi}{2}+3x)$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}+3x) \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+3x \text{ و }$$

$$2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-3x \Rightarrow x=-2k\pi-\frac{\pi}{2} \text{ و }$$

$$x=\frac{2k\pi}{5}-\frac{\pi}{10}$$

k	x
-1	$\frac{3\pi}{2}>\pi\ ,\ \frac{-2\pi}{5}-\frac{\pi}{10}=-\frac{\pi}{2}<0$
0	$-\frac{\pi}{2}<0\ ,\ -\frac{\pi}{10}<0$
1	$-2\pi-\frac{\pi}{2}<0\ ,\ \frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{10}=\frac{3\pi}{10}$ ج
2	$-4\pi-\frac{\pi}{2}<0\ ,\ \frac{4\pi}{5}-\frac{\pi}{10}=\frac{7\pi}{10}$ ج
3	$-6\pi-\frac{\pi}{2}<0\ ,\ \frac{6\pi}{5}-\frac{\pi}{10}=\frac{13\pi}{10}>\pi$

بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[0,\pi]$ ، تنها دو ریشه دارد.

نکته : برای تعیین تعداد ریشه‌ها، می‌توان تعداد عددهای صحیح k را که به ازای آن‌ها، نامساوی‌های زیر:

$$0<-2k\pi-\frac{\pi}{2}<\pi \quad \text{و} \quad 0<\frac{2k\pi}{5}-\frac{\pi}{10}<\pi$$

برقرارند، تعیین کرد. نامعادلهٔ اول تنها به ازای k=1 و k=2 برقرار است و نامعادلهٔ دوم به ازای هیچ مقداری از k برقرار نیست؛ بنابراین معادلهٔ داده شده، تنها دو ریشه دارد.

آزمون ۷ . مجموع جواب‌های معادلهٔ زیر :

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{x}{4}+\pi)$$

که در شرط $0\le x\le\pi$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{8}$ ۲) $\frac{5\pi}{8}$

۳) $\frac{8\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{5}$

کنکور سراسری

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است. نخست باید جواب‌های کلی معادله و سپس جواب‌های خصوص موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ ، و آن‌گاه مجموع این جواب‌ها را به دست آوریم. داریم:

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{x}{4}+\pi)$$

$$\Rightarrow\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm(\frac{x}{4}+\pi)$$

$$\Rightarrow\ x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{x}{4}+\pi \quad \text{و} \quad x+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{x}{4}-\pi$$

$$\Rightarrow\ \frac{3x}{4}=2k\pi+\frac{3\pi}{4} \quad \text{و} \quad \frac{5x}{4}=2k\pi-\frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\ x=\frac{8k\pi}{3}+\pi \quad \text{و} \quad x=\frac{8k\pi}{5}-\pi$$

k	x
0	π ج $,\ -\pi<0$
1	$\frac{8\pi}{3}+\pi>\pi\ ,\ \frac{8\pi}{5}-\pi=\frac{3\pi}{5}$ ج
2	$\frac{16\pi}{3}+\pi>\pi\ ,\ \frac{16\pi}{5}-\pi=\frac{11\pi}{5}>\pi$

بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[0,\pi]$ ، دارای دو جواب π و $\frac{3\pi}{5}$ است، که مجموع آن‌ها برابر $\pi+\frac{3\pi}{5}=\frac{8\pi}{5}$ است.

آزمون ۸ . انتهای کمان‌های جواب معادلهٔ زیر :

$$\cos 2x+\sin(\frac{\pi}{2}+x)=0$$

روی دایرهٔ مثلثاتی رأس‌های کدام چهارضلعی است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع ۲) مثلث قائم‌الزاویه

۳) مستطیل ۴) مربع

کنکور سراسری

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است. جواب‌های خصوصی معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ را به دست می‌آوریم و شکل حاصل از انتهای کمان‌ها را بررسی می‌کنیم. داریم :

$$\cos 2x+\sin(\frac{\pi}{2}+x)=0\ \Rightarrow\ \cos 2x+\cos x=0$$

$$\Rightarrow\ \cos 2x=-\cos x=\cos(\pi-x)$$

$$\Rightarrow\ 2x=2k\pi\pm(\pi-x)$$

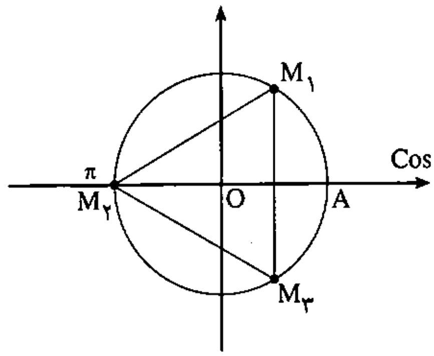
$$\Rightarrow \begin{cases}2x=2k\pi+\pi-x,\\ 2x=2k\pi-\pi+x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\\ x=2k\pi-\pi\end{cases}$$

k	x
0	$\frac{\pi}{3}$ ج $,\ -\pi<0$
1	$\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$ ج $,\ \pi$ ج
2	$\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$ ج $,\ 3\pi>2\pi$
2	$2\pi+\frac{\pi}{3}>2\pi\ ,\ 5\pi>2\pi$

بنابراین جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,2\pi]$ سه جواب دارد، که عبارتند از $\frac{\pi}{3}$ ، π و $\frac{5\pi}{3}$ ؛ بنابراین اگر $\widehat{AM_1}=\frac{\pi}{3}$ ، $\widehat{AM_2}=\pi$ و $\widehat{AM_3}=\frac{5\pi}{3}$ اختیار کنیم، دیده می‌شود که:

$$\widehat{M_1M_2}=\widehat{M_2M_3}=\widehat{M_3M_1}=\frac{2\pi}{3}$$

بنابراین $\widehat{M_1M_2}=\widehat{M_2M_3}=\widehat{M_3M_1}$ و در نتیجه مثلث $M_1M_2M_3$ متساوی‌الاضلاع است.



آزمون ۹ . یک جواب کلی معادلهٔ زیر کدام است؟

$$\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=0$$

۱) $\frac{4k\pi}{5}+\frac{5\pi}{3}$ ۲) $\frac{4k\pi}{5}-\frac{7\pi}{15}$

۳) $\frac{4k\pi}{5}+\frac{7\pi}{15}$ ۴) $\frac{4k\pi}{5}-\frac{5\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. داریم:

$$\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=0$$

$$\Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{6})=\cos(\pi-\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm(\pi-\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{x}{2}\\ 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\pi+\frac{x}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{5x}{2}=2k\pi+\frac{7\pi}{6}\\ \frac{3x}{2}=2k\pi-\frac{5\pi}{6}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=\frac{4k\pi}{5}+\frac{7\pi}{15}\\ x=\frac{4k\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\end{cases}$$

آزمون ۱۰ . یک جواب معادلهٔ $\cos 3x-\cos x=0$ کدام است؟

۱) $x=\frac{\pi}{3}$ ۲) $x=\pi$

۳) $x=\frac{7\pi}{6}$ ۴) $x=\frac{5\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است.

راه‌اول: برای آن‌که مقداری از x ریشهٔ معادله‌ای باشد، باید در آن معادله صدق کند. بنابراین عددهای داده شده در گزینه‌ها را، درمعادله قرار می‌دهیم تا ریشهٔ معادله مشخص شود. داریم:

$$x=\frac{\pi}{3} \xrightarrow{\text{در معادله}} \cos 3(\frac{\pi}{3})-\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$\Rightarrow \cos\pi-\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$\Rightarrow -1-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}=0$$

$$x=\pi \xrightarrow{\text{در معادله}} \cos 3\pi-\cos\pi=0$$

$$\Rightarrow \cos\pi-\cos\pi=0 \Rightarrow 0=0$$

بنابراین $x=\pi$ یک جواب معادلهٔ داده شده است.

توجه: $x=\frac{7\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ در معادله صدق نمی‌کنند.

آزمون۱۱ . به ازای کدام مقدار m ، یکی از جواب‌های معادلهٔ $(m-1)\cos 2x=2m+1$ ، برابر $\frac{2\pi}{3}$ است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{-2}{5}$

۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{-1}{5}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است. $x=\frac{2\pi}{3}$ باید در معادلهٔ داده شده صدق کند. بنابراین داریم:

$$x=\frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\text{در معادله}} (m-1)\cos\frac{4\pi}{3}=2m+1$$

$$\Rightarrow (m-1)(-\frac{1}{2})=2m+1 \Rightarrow -m+1=4m+2$$

$$\Rightarrow 5m=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{5}$$

نشریه برهان ۱۵
سال سیزدهم ۱۳۸۳ شماره مسلسل ۴۲

۳

اعداد فیبوناتچی

Febonacci Numbers
Necolai N. Vorobiev

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



اشاره
در شماره‌های قبل به معرفی اعداد فیبوناتچی پرداختیم، همچنین رابطه‌های بین اعداد فیبوناتچی را بررسی کردیم، در ادامه مطلب باز هم درباره‌ٔ رابطه‌های بین این اعداد بحث می‌کنیم.

۱۰. باز هم می‌توان به طریقی مشابه، ویژگی‌های دیگر اعداد فیبوناتچی، از قبیل موارد بعد را به اثبات رساند.

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2n-1}u_{2n} = u_{2n}^2$$

$$u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_4 + \dots + u_{2n}u_{2n+1} = u_{2n+1}^2 - 1$$

$$nu_1 + (n-1)u_2 + (n-2)u_3 + \dots + 2u_{n-1} + u_n = u_{n+4} - (n+3)$$

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n = nu_{n+2} - u_{n+3} + 2$$

اثبات این موارد را به عنوان تمرین، به خواننده واگذار می‌کنیم.

۱۱. مجموعهٔ دیگری از اعداد، موسوم به **ضریب‌های دوجمله‌ای**[1] موجودند، که اهمیتش کم‌تر از گردایهٔ اعداد فیبوناتچی نیست.

این اعداد، همان طور که از نامشان پیداست، به صورت ضرایب توان‌های x در بسط[2] $(1+x)^n$ رخ می‌دهند؛ یعنی،

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n \quad (11.1)$$

به طور واضح، اعداد $\binom{n}{k}$، به ازای هر عدد صحیح نامنفی n و به ازای هر عدد صحیح نامنفی k ای که از n تجاوز نکند، به‌گونه‌ای یکتا تعریف شده‌اند. به معادلهٔ (11.1) معمولاً به صورت فرمول دو جمله‌ای[3] ارجاع می‌شود.

آشکار می‌شود که کاربرد ضرایب دو جمله‌ای در بسیاری از استدلال‌های ریاضی مفید است. این ضرایب در بررسی ویژگی‌های اعداد فیبوناتچی نیز سودمندند.

گذشته از این، ضرایب دو جمله‌ای به طریقی مستقیم با اعداد فیبوناتچی مرتبط‌اند. در این مرحله، به ذکر بعضی از جنبه‌های اساسی این رابطه می‌پردازیم.

اما به عنوان مرحله‌ای مقدماتی، ابتدا چند ویژگی از ضرایب دو جمله‌ای را مشخص می‌کنیم.

با قرار دادن $n=1$ در (11.1) بلافاصله ملاحظه می‌کنیم که:

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

علاوه بر این، لم زیر نیز برقرار است.

لم: اگر $n \geq 1$ و $0 \leq k \leq n-1$، آن‌گاه

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

اثبات: اتحاد واضح زیر را داریم:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x)$$

که با استفاده از ضرایب دو جمله‌ای، به مورد زیر می‌انجامد:

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1}x + \dots + \binom{n+1}{k+1}x^{k+1} + \dots + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}$$

$$=\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\dots+\binom{n}{k}x^k+\binom{n}{k+1}x^{k+1}+\dots+\binom{n}{n}x^n\right)(1+x)$$

$$=\binom{n}{0}+\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)x+\dots+\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right)x^{k+1}+\dots$$

$$+\left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)x^n+\binom{n}{n}x^{n+1}$$

دو طرف راست و چپ این معادله به ازای یک چند جمله‌ای یکسان برقرار است . بنابراین ضرایب توان‌های مشابه x در چپ و راست آن، باید برابر باشند .

به ویژه نتیجه می‌شود که :

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

که همان فرمول مطلوب است .

لم اثبات شده ، برای این است که ضرایب دو جمله ای را می توان به کمک فرایندی بازگشتی مشابه فرایند به کار رفته در تولید اعداد فیبوناتچی ، منتهی با طبیعتی پیچیده‌تر ، محاسبه کرد .

۱۲ . ضرایب دو جمله‌ای را به صورت الگویی مثلثی قرار می‌دهیم و آرایهٔ زیر موسوم به مثلث پاسکال[۴] را به‌دست می‌آوریم :

$$\begin{array}{llll}
\binom{0}{0} & & & \\
\binom{0}{0} & \binom{1}{1} & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
\dots & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} \dots & \binom{n}{n} \\
\dots & & &
\end{array}$$

یعنی :

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۱ ۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶ ۱
...

توضیح مفصل بعضی از ویژگی‌های اساسی مثلث پاسکال و ضرایب دو جمله‌ای تشکیل دهندهٔ آن را می‌توان در کتاب زیر یافت :

"pascal's Triangle"by V.A.Uspenski (Popular Lectures on Mathematics Series , vol. 43, Moscow: Nauka,1979)

سطرهای مثلث پاسکال را طبق رسم، از بالا به پایین و چنان بر چسب می زنیم که به سطر بالایی شامل عدد منفرد ۱ به عنوان سطر صفر اشاره شود .

از توضیحات پیشین نتیجه می‌شود که اعداد اول و آخر واقع در هر سطر مثلث پاسکال، برابر ۱ هستند و هر عدد دیگر واقع در هر سطر ، با جمع دو عدد بلافاصله بالای آن به دست می‌آید .

۱۳ . فرمول (۱۱.۱) این توان را می‌دهد که بلافاصله دو فرمول مهمی را استنتاج کنیم که ضرایب دو جمله ای واقع در یک سطر مثلث پاسکال را به هم مرتبط می‌کنند .

با قرار دادن ۱ = x در (۱۱.۱) ، به‌دست می‌آوریم

$$2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}$$

گذشته از این، اگر قرار دهیم ۱− = x ، آن گاه به‌دست می‌آوریم :

$$0=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+(-1)^n\binom{n}{n}$$

۱۴ . اکنون با استفاده از استقرای بر n ثابت می‌کنیم که:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2.\dots.k} \qquad (12.1)$$

این فرمول، اغلب به عنوان تعریف ضرایب دو جمله‌ای به کار می‌رود. فرمول مورد بحث، ضریب دو جمله‌ای $\binom{n}{k}$ را به عنوان تعداد ترکیب‌های[5] n شیء، هر بار k شیء برگرفته، مشخص می‌کند.

در این‌جا رهیافت متفاوت صوری‌تری را اختیار کردیم؛ زیرا این رهیافت به اهداف جاری‌مان بهتر کمک می‌کند.

اگر به توافق فرض کنیم که حاصل‌ضرب شامل عوامل صفر همواره برابر ۱ است، آن‌گاه $k=0$، فرمول (۱۲.۱) نتیجهٔ قبلاً مشخص شده $\binom{n}{0}=1$ را به‌دست می‌دهد.

بنابراین، بدون از دست دادن عمومیّت کار، می‌توان در نتیجهٔ مزبور فرض کرد که $k\geq 1$.

به ازای $n=1$ داریم:

$$\binom{1}{1}=\frac{1}{1}=1$$

اکنون فرض می‌کنیم فرمول (۱۲.۱) به ازای n معلوم و هر $k=0,1,\dots,n$ برقرار است.

سپس توجه‌مان را به $\binom{n+1}{k}$ معطوف می‌کنیم. از آن‌جا که $k\geq 1$، می‌توان نوشت:

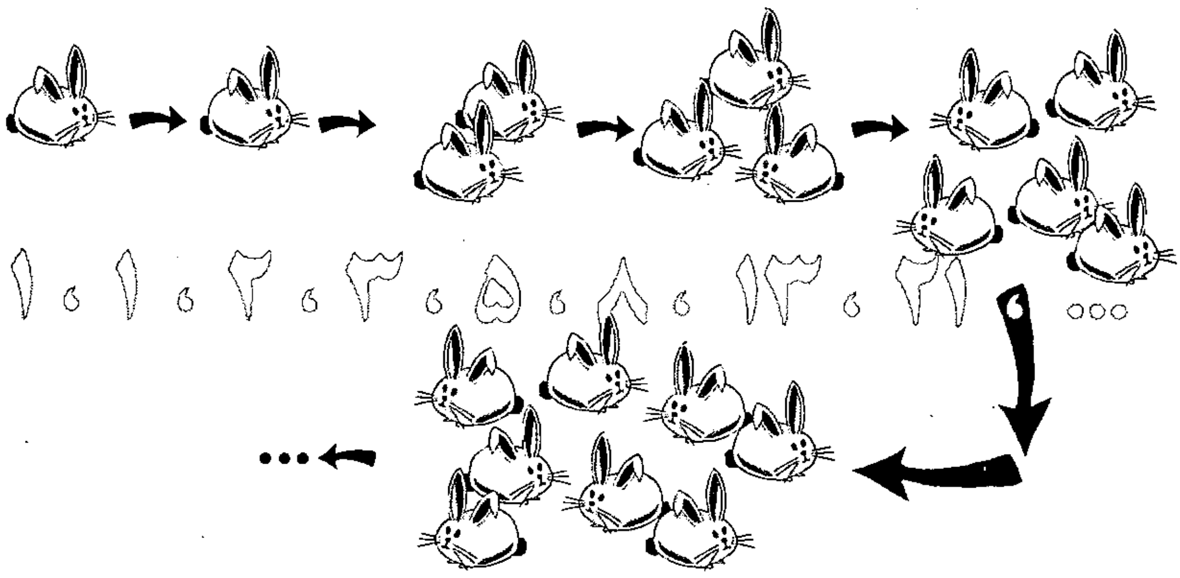
$$\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{k}{n}$$

فرض استقرایی (۱ . ۱۲) مستلزم این است که:

$$\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1.2.\dots.(k-1)}+$$

$$+\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{1.2.\dots.(k-1)k}$$

$$=\frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1.2.\dots.(k-1)}\left(1+\frac{n-k+1}{k}\right)$$



$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2.\ldots(k-1)} \cdot \frac{k+n-k+1}{k}$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)\ldots(n-k+2)}{1.2.\ldots(k-1)k} = \binom{n+1}{k}$$

آنچه باقی مانده، توجه به این مطلب است که معادلهٔ اخیر، به ازای هر ضریب دو جمله ای واقع در سطر بلافاصله بعدی مثلث پاسکال، یعنی، سطر $(n+1)$ ام، به فرمول (۱۲.۱) منجر می‌شود.

۱۵ . اکنون خطوط راستی از اعداد مثلث پاسکال به زاویهٔ ۴۵ درجه با سطرهای آن رسم می‌کنیم و آن‌ها را **قطرهای ناشی**[۶] از مثلث پاسکال می‌نامیم. قطرهای ناشی این چنین، به عنوان نمونه، دو خط مستقیم گذرنده از اعداد ۱ ، ۴ و ۳ یا ۱ ، ۵ ، ۶ و ۱ هستند.

می‌خواهیم نشان دهیم مجموع جمیع عددهای واقع در امتداد یک قطر ناشی، یک عدد فیبوناتچی است. در واقع، اولّین و بالاترین قطر ناشی، شامل عددی منفرد، یعنی ۱ ، است، بنابراین اولّین مجموع برابر ۱ است. قطر دوم نیز شامل یک فرد، ۱ ، است، بنابراین مجموع دوم نیز برابر است.

بنابراین، تمام کاری که اکنون باید برای اثبات مقصودمان انجام دهیم، نشان دادن این مطلب است که مجموع اعداد سازندهٔ قطرهای n ام و $(n+1)$ ام مثلث پاسکال، برابر مجموع جمیع اعداد واقع در امتداد قطر $(n+2)$ ام است.

برای این منظور، ملاحظه می‌کنیم که قطر n ام شامل اعداد:

$$\binom{n-1}{0}, \binom{n-2}{1}, \binom{n-3}{2}, \ldots$$

است؛ در حالی‌که قطر $(n+1)$ ام عددهای:

$$\binom{n}{0}, \binom{n-1}{1}, \binom{n-2}{2}, \ldots$$

را نمایش می‌دهد.

مجموع این اعداد را می‌توان به صورت:

$$\binom{n}{0} + \left(\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1}\right) + \left(\binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{2}\right) + \ldots,$$

یا با تکیه بر لم بخش ۱۱ ، به صورت:

$$\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots$$

نوشت.

باقی ملاحظهٔ این مطلب است که عبارت اخیر، دقیقاً مجموع جمیع اعداد واقع در قطر ناشی $(n+2)$ ام مثلث پاسکال است.

از دستاورد به اثبات رسیدهٔ فوق و بر مبنای فرمول (۱.۱) ، بلافاصله درمی‌یابیم که مجموع جمیع ضرایب دو جمله‌ای **واقع بر یا بالای** قطر ناشی n ام مثلث پاسکال، برابر $U_{n+2} - 1$ است.

خواننده با استفاده از (۱ . ۲)، (۱ . ۳)، (۱ . ۴) یا فرمول‌های مشابه، می‌تواند بدون زحمت زیاد، تعداد قابل توجهی اتحاد دیگری به دست آورد که اعداد فیبوناتچی را به ضرایب دو جمله‌ای مرتبط می‌کنند.

۱۶ . تاکنون اعداد فیبوناتچی را توسط اندیس‌هاشان با استفاده از فرایندی بازگشتی، یعنی، استقرایی، تعریف کرده‌ایم. اما آشکار می‌شود که هر عدد فیبوناتچی را می‌توان به طریقی مستقیم، به صورت تابعی صریح از اندیس‌هایش نیز تعریف کرد.

برای رسیدن به این هدف، مجموعهٔ جمیع دنباله‌های:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

صادق در رابطه بازگشتی

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-1} \quad (13.1)$$

را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

هریک چنین دنباله‌ای را جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) می‌نامیم.

در زنجیرهٔ مورد بحث، فرض می‌کنیم V ، V' و V'' ، به ترتیب، دنباله‌های زیر را نمایش دهند:

$$v_1, v_2, v_3, \ldots$$

$$v'_1, v'_2, v'_3, \ldots$$

$$v''_1, v''_2, v''_3, \ldots$$

در شروع کار، ابتدا به اثبات دو لم ساده می‌پردازیم:

لم ۱ . اگر V جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) و c عددی دلخواه باشد، آن‌گاه cV ، یعنی، دنبالهٔ:

$cv_1, cv_2, cv_3, \ldots$

جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) نیز هست.

اثبات: با ضرب هر جملهٔ معادلهٔ:

$v_n = v_{n-2} + v_{n-1}$

در c ، به دست می‌آوریم:

$cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1}$

که نتیجهٔ مطلوب را محقق می‌کند.

لم ۲ . اگر دنباله‌های V′ و V″ جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) باشند، آن‌گاه $v'+v''$ ، مجموعشان، یعنی، دنبالهٔ:

$v'_1 + v''_1, v'_2 + v''_2, v'_3 + v''_3, \ldots$

نیز جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) است.

اثبات: از شرط‌های بیان شده در لم‌مان ، داریم:

$v'_n = v'_{n-1} + v'_{n-2}$

و

$v''_n = v''_{n-1} + v''_{n-2}$

با جمع جمله به جملهٔ این معادلات، به دست می‌آوریم:

$v'_n + v''_n = \left(v'_{n-1} - v''_{n-1}\right) + \left(v'_{n-2} + v''_{n-2}\right)$

و به این ترتیب، لم مورد نظر اثبات می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم v′ و v″ دو جواب از معادلهٔ (۱ . ۱۳) را نمایش دهند که متناسب نیستند؛ یعنی بی‌توجه به مقدار انتخابی ثابت c، اندیس nی چنان موجود باشد که $v'_n / v''_n \neq c$. دراین صورت، نشان می‌دهیم که دنبالهٔ v که جوابی از معادلهٔ (۱ . ۱۳) است، می‌تواند به صورت:

$$c_1 v' + c_2 v'' \qquad (۱۴ . ۱)$$

بیان شود، که در آن c_1 و c_2 ثابت‌هایی هستند. در این رابطه، مرسوم است که به (۱ . ۱۴) به عنوان جواب عمومی «genral solution» معادلهٔ (۱ . ۱۳) اشاره شود.

ابتدا ثابت می‌کنیم هر گاه v′ و v″ ، دو جواب معادلهٔ (۱ . ۱۳) متناسب نباشند، آن‌گاه

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \qquad (۱۵ . ۱)$$

یعنی، دو جملهٔ اولیه دنباله‌های v′ و v″ ، متناسب بودن یا نبودن دنباله‌های مورد بحث را آشکار می‌کنند.

اثبات (۱ . ۱۵) را می‌توان با فرض نقیض مطلب انجام داد. فرض می‌کنیم دو جواب v′ و v″ معادله‌های (۱ . ۱۳) متناسب نباشند و با این‌حال، در

$$\frac{v'_1}{v''_1} \neq \frac{v'_2}{v''_2} \qquad (۱۶ . ۱)$$

صدق کنند.

از (۱ . ۱۶) تناسب مستخرج:

$$\frac{v'_1 + v'_2}{v''_1 + v''_2} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

یا با در نظر گرفتن این موضوع که v′ و v″ جواب‌های معادلهٔ (۱ . ۱۳) اند،

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_2}{v''_2}$$

را به دست می‌آوریم.

به طور مشابه وبا استدلالی استقرایی، به سادگی متقاعد می‌شویم که:

$$\frac{v'_3}{v''_3} = \frac{v'_4}{v''_4} = \ldots = \frac{v'_n}{v''_n} = \ldots$$

به این ترتیب، از (۱ . ۱۶) نتیجه می‌گیریم که دنباله‌های v′ و v″ متناسب‌اند، که این نتیجه، درستی فرض اولیه‌مان را نقض می‌کند. این موضوع راستی (۱ . ۱۵) را محقق می‌کند.

زیرنویس

1.binomial coefficients
2.expansion
3.binomial formula
4.pascal's Triangles
5.Combination
6. rising diagonals



تقریب ریشهٔ سوم یک عدد

محمد حسین پورسعید
گروه ریاضی دانشگاه لرستان

مقدمه

با بهره‌گیری از مبحث دیفرانسیل (خطی سازی) می‌توان ریشهٔ سوم یک عدد را به صورت تقریبی[1] یا به طور دقیق و با دقت دلخواه تعیین کرد[2]. ولی نظر به این‌که یکی از اساسی‌ترین روش‌های تولید دانش، افزایش سطح توانایی در مدل سازی پدیده‌های مورد مطالعه است، روشی ارائه می‌شود که شهودی بودن، دقت بیش‌تر و عدم نیاز به اطلاعاتی در سطح بالا، از مزایای آن هستند.

بحث و نتایج

برای به‌دست آوردن تقریب ریشهٔ سوم یک عدد، شبیه روند تعیین جذر تقریبی اعداد، مندرج در کتاب ریاضی سال دوم دورهٔ راهنمایی تحصیلی[3] می‌توان به صورت زیر اقدام کرد.

فرض کنید که می‌خواهیم ریشهٔ سوم عددی مانند a را محاسبه کنیم. بدون آن‌که خللی به کلیت مسأله وارد آید، فرض می‌شود که aعددی مثبت است. پس در واقع باید اندازهٔ ضلع مکعبی با حجم a را تعیین کنیم. اگر ضلع مکعب را با b نشان دهیم، داریم:

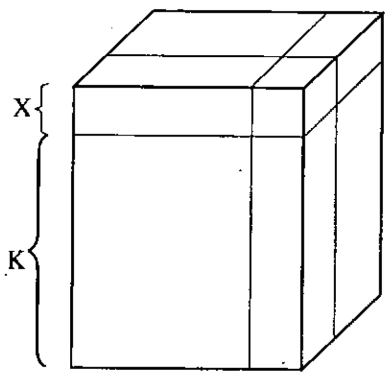
$$a = b^3 \Rightarrow b = \sqrt[3]{a}$$

$\sqrt[۳]{x}$

حال اگر عدد a مکعب کامل نباشد، می‌توان دو مکعب با اضلاع مشخص را به گونه‌ای یافت که یکی از آن‌ها محیط بر مکعب مورد نظر (با حجم a) و دیگری محاط در آن باشند. در نتیجه اندازهٔ ضلع مکعب با حجم a و در واقع ریشهٔ سوم a بین اندازه‌های اضلاع مکعب‌های محیطی و محاطی خواهد بود. به عنوان مثال، در تعیین ریشهٔ سوم ۲۸ می‌توان دو مکعب با اضلاع ۳ و ۴ را به عنوان مکعب‌های محاطی و محیطی در نظر گرفت. در این صورت، ریشهٔ سوم ۲۸ عددی بین ۳ و ۴ است. به طور دقیق‌تر می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

$$(۳/۰۱)^۳ = ۲۷/۲۷ < ۲۸ < ۲۹/۷۹۱ = (۳/۱)^۳$$

در این حالت ریشهٔ سوم ۲۸ بین ۳/۰۱ و ۳/۱ خواهد بود.



اگر k را اندازهٔ ضلع مکعبی بدانیم که حجم آن نزدیک‌ترین مقدار به a است و تفاضل بین ضلع این مکعب و ضلع مکعب مورد نظر را با x نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$x = k - b \Rightarrow b = k - x,$$
$$a = b^۳ = (k-x)^۳ = k^۳ - ۳k^۲x + ۳kx^۲ - x^۳ \qquad (۱)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تعیین ریشهٔ سوم a منوط به محاسبهٔ مقدار x و در واقع تعیین تنها ریشهٔ تابع درجه سوم $f(x) = -x^۳ + ۳kx^۲ - ۳k^۲x + k^۳ - a$ است. از طرفی اگر مکعب محیطی یا محاطی را خیلی نزدیک به مکعب مورد نظر انتخاب کنیم، آن‌گاه مقدار x خیلی کوچک و در نتیجه مقدار $x^۳$ به مراتب کوچک‌تر خواهد شد که در این صورت با حذف $x^۳$ از f(x) تابع درجه دوم $g(x) = ۳kx^۲ - ۳k^۲x + k^۳ - a$ را در نظر می‌گیریم. به همین صورت، همان‌طور در تعیین جذر تقریبی [۱] از مساحت یک عنصر مربعی کوچک صرف نظر می‌شود، در این جا نیز از حجم یک عنصر مکعبی چشم‌پوشی می‌کنیم).

حال با توجه به وضعیت نمودار f(x) و g(x) و تلاقی آن‌ها در $x=۰$ و فرض انتخاب مکعب‌های محیطی یا محاطی خیلی نزدیک به مکعب مورد نظر، در می‌یابیم که تنها ریشهٔ f(x) خیلی نزدیک به ریشهٔ کوچک‌تر g(x) (و نزدیک به صفر) خواهد شد. لذا می‌توان تنها ریشهٔ f(x) را توسط ریشهٔ کوچک‌تر g(x) تقریب زد. بنابراین، اگر $x_۰$ را ریشهٔ کوچک‌تر g(x) و x^* را تنها ریشهٔ f(x) بدانیم، آن‌گاه با توجه به رابطهٔ ۱ خواهیم داشت:

$$g(x_۰) = ۰ \ , \ f(x^*) = ۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{a} = k - x^* \approx k - x_۰$$
$$g(x) = ۳kx^۲ - ۳k^۲x + k^۳ - a = ۰ \Rightarrow x_۱, x_۲ = \frac{k}{۲} \pm \sqrt{\frac{۴a - k^۳}{۱۲k}}$$
$$\Rightarrow x_۰ = \frac{k}{۲} - \sqrt{\frac{۴a - k^۳}{۱۲k}}$$

جهت خوش تعریف بودن رابطهٔ ۲ باید نامنفی بودن $4a-k^3$ را ثابت کنیم:

الف) در حالتی که حجم مکعب محاطی نزدیک‌ترین مقدار به a باشد، داریم:

$$k^3<a \Rightarrow k^3<a<4a \Rightarrow 4a-k^3>0$$

ب) در حالتی که حجم مکعب محیطی نزدیک‌ترین مقدار به a باشد، $a<k^3$ خواهد بود. اگر فرض شود که $4a-k^3<0$ در دو حالت $a<\frac{k^3}{8}<\frac{k^3}{4}$ یا $\frac{k^3}{8}<a<\frac{k^3}{4}$ به‌آسانی می‌توان نشان داد:

$$\left|\frac{k^3}{8}-a\right|<\left|k^3-a\right|=k^3-a$$

در این صورت به‌جای مکعب محیطی با ضلع k، باید مکعب با ضلع $\frac{k}{2}$ به عنوان مکعب نزدیک‌تر در نظر گرفته شود و در واقع انتخاب مکعب با ضلع k با فرض کوچک بودن x در تعارض است.

پس به‌طور کلی، نمی‌توان منفی بودن $4a-k^3$ را پذیرفت. بنابراین با توجه به روابط (۱) و (۲) داریم:

(۳)

$$4a-k^3\geq 0 \Rightarrow a\geq \frac{k^3}{4}>\frac{k^3}{8}\Rightarrow \sqrt[3]{a}>\frac{k}{2}$$

(۴)

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a}\approx \frac{k}{2}+\sqrt{\frac{4a-k^3}{12k}}$$

مثال) در تعیین مقدار تقریبی ریشهٔ سوم ۲۸ داریم:

$$3^3=27<28<64=4^3$$

$$\Rightarrow k=3 \Rightarrow \sqrt[3]{28}\approx\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{4(28)-27}{12\times 3}}\cong 3/037$$

که اختلاف آن با مقدار دقیق $\sqrt[3]{28}$ کم‌تر از ۰/۰۰۰۰۲ است. در صورتی که اگر از مبحث دیفرانسیل (خطی سازی) استفاده شود، با محاسبهٔ عبارت $\sqrt[3]{28}\cong 3+\frac{28-27}{3\times 3^2}$ در می‌یابیم که به‌کارگیری دیفرانسیل در مقایسه با روش پیشنهادی از دقت کم‌تری برخوردار است. البته این امر اتفاقی نیست. نشان می‌دهیم که در حالت کلی، اگر k اندازهٔ ضلع مکعب محاطی باشد، روش پیشنهادی در مقایسه با روش به‌کارگیری دیفرانسیل دقیق‌تر است.

نظر به مقعر بودن تابع $h(x)=\sqrt[3]{x}$ (به ازای $x>0$)، مقدار تقریبی محاسبه شده بر اساس استفاده از مبحث دیفرانسیل همواره بیش‌تر از مقدار طبیعی واقعی است. یعنی:

$$\sqrt[3]{a}<k+\frac{a-k^3}{3k^2}\approx\sqrt[3]{a}$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ (۲) در می‌یابیم که x_0 عددی منفی است و

$$f(0)=k^3-a<0,\quad f(x_0)=g(x_0)-(x_0)^3=-(x_0)^3>a$$

بنابراین طبق قضیهٔ مقدار میانی، تنها ریشهٔ f(x) در فاصلهٔ $(x_0,0)$ قرار دارد[۴]. پس:

$$x_0<x^*<0\Rightarrow \sqrt[3]{a}=k-x^*<k-x_0\approx\sqrt[3]{a}$$

بنابراین بر اساس استفاده از روش پیشنهادی نیز مقدار تقریبی بیش‌تر از مقدار واقعی است. در این صورت به‌آسانی می‌توان صحت نامعادلهٔ زیر را که نشان دهندهٔ برتری روش پیشنهادی و دقت بیش‌تر آن است، نشان داد.

$$\left|k+\frac{a-k^3}{3k^2}-\sqrt[3]{a}\right|=k+\frac{a-k^3}{3k^2}-\sqrt[3]{a}>\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{4a-k^3}{12k}}-\sqrt[3]{a}$$
$$=\left|\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{4a-k^3}{12k}}-\sqrt[3]{a}\right|$$

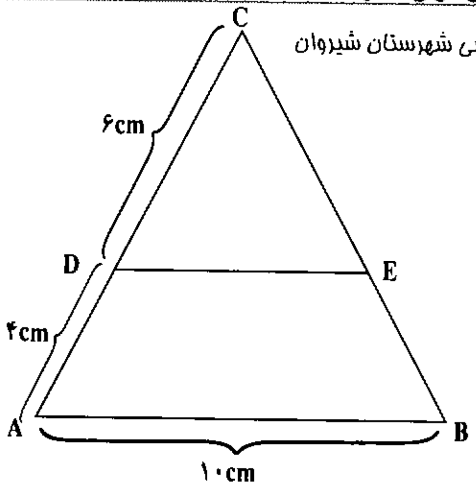
منابع

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). دورهٔ پیش‌دانشگاهی. رشتهٔ علوم ریاضی. چاپ پنجم. ۱۳۷۸. ص ۱۸۱-۱۷۶.
۲. مجلهٔ ریاضی برهان. برای دانش‌آموزان دبیرستان. شمارهٔ ۳۵. صفحات ۴۲ و ۴۳.
۳. ریاضی سال دوم دورهٔ راهنمایی تحصیلی. چاپ ۱۳۷۹. صفحهٔ ۵۰.
۴. حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲). دورهٔ پیش‌دانشگاهی. رشتهٔ علوم ریاضی. چاپ پنجم. ۱۳۷۸. ص۶۹.

حل یک مسألهٔ هندسه به کمک ترسیم

برای دانش‌آموزان سال اول متوسطه

علی باقری شادمان، دبیر ریاضی شهرستان شیروان



مسأله:

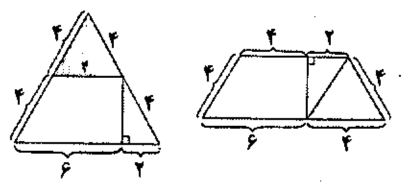
مثلث ABC، مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱۰ cm است و پاره‌خط DE را طوری رسم کرده‌ایم که: AD=۴cm و AB || DE. به چند طریق می‌توان، تنها با دو برش روی ذوزنقه ABED، یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۸cm ساخت؟

حل: چون مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و DE || AB است، پس مثلث CDE متساوی‌الاضلاع و ذوزنقهٔ ABED متساوی‌الساقین است. بنابراین: DE=۶cm و EB=۴cm.

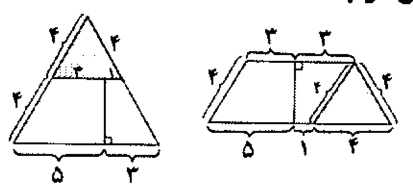
اکنون، برخی از روش‌های حل مسأله را در ادامه می‌آوریم.

برای هر روش، در سمت راست، ذوزنقهٔ ABCD و چگونگی برش آن و در سمت چپ، مثلث متساوی‌الاضلاع ساخته شده و به ضلع ۸cm، رسم شده است.

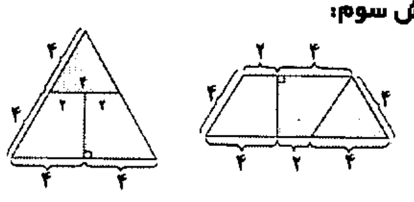
۱. روش اول:



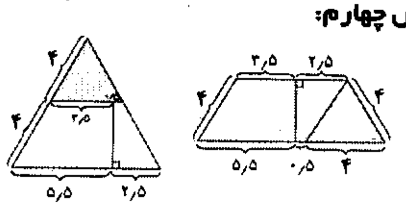
۲. روش دوم:



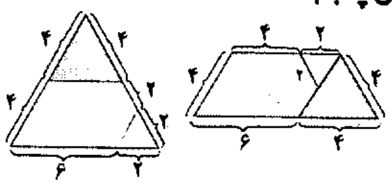
۳. روش سوم:



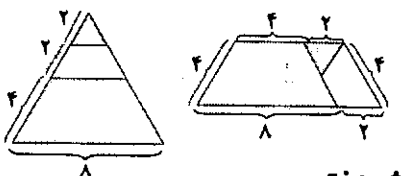
۴. روش چهارم:



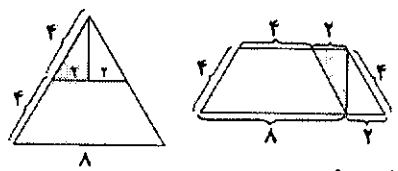
۵. روش پنجم:



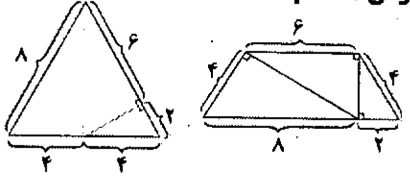
۶. روش ششم:



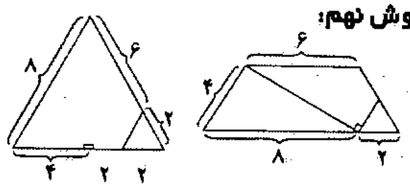
۷. روش هفتم:



۸. روش هشتم:



۹. روش نهم:



وارون ماتریس

تعریف، قضیه‌ها و مسأله‌ها

حمیدرضا امیری

وقتی صحبت از وارون می‌شود، بلافاصله وارون یک عدد حقیقی مانند a، یعنی $\frac{1}{a}$ در ذهن تصور می‌شود و این خاصیت که حاصل ضرب هر عدد در وارونش، عضو خنثی در عمل ضرب، یعنی ۱ را نتیجه می‌دهد. ($a \times \frac{1}{a} = 1$) البته شرط $a \neq 0$ برای وجود $\frac{1}{a}$، شرطی لازم و کافی است و می‌توان به جای $\frac{1}{a}$ از نماد a^{-1} استفاده کرد. در مجموعهٔ ماتریس‌ها نیز، شبیه تعریف فوق برای وارون هر ماتریس، یک ماتریس مربعی وجود دارد و می‌توان از آن الهام گرفت!

تعریف: اگر A ماتریسی $n \times n$ باشد و ماتریسی چون B وجود داشته باشد؛ به‌طوری که $AB = BA = I$ (I ماتریس واحد از مرتبهٔ n است) در این صورت، ماتریس B را وارون A می‌نامند و با A^{-1} نمایش می‌دهند. در این صورت، A را وارون‌پذیر یا نامنفرد می‌نامیم.

تذکر: اگر $AB = BA = I$، A وارون B است و B نیز وارون A است؛ یعنی $B = A^{-1}$ و $A = B^{-1}$.

مثال. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ مفروض است. نشان دهید که ماتریس $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$ وارون ماتریس A است.

حل: طبق تعریف، کافی است $AB = BA = I$ (در آینده، قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که براساس آن، برای این که B وارون A باشد، کافی است $AB = I$ یا $BA = I$).

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } B \times A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

قضیهٔ یکتایی وارون: وارون هر ماتریس، در صورت وجود، منحصربه‌فرد است.

اثبات: فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و دارای دو وارون باشد. ثابت می‌کنیم این دو وارون باهم برابرند. فرض کنیم B و C هر دو وارون A باشند، پس طبق تعریف $AB = BA = I$ و $AC = CA = I$،

$$B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$$

قضیهٔ یکتایی وارون در به‌دست‌آوردن وارون یک ماتریس، می‌تواند مؤثر باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال. اگر $(2I + A)A = A(2I + A) = I$ بلافاصله از قضیهٔ یکتایی وارون، نتیجه می‌شود $A^{-1} = (2I + A)$.

نکتهٔ مهم: اگر k یک عدد حقیقی و ناصفر باشد، در این صورت kI ماتریسی وارون‌پذیر و وارون آن $(\frac{1}{k}I)$ است؛ زیرا:

$$(\frac{1}{k}I)(kI) = (kI)(\frac{1}{k}I) = (k \times \frac{1}{k})(I \times I) = 1 \times I = I$$

درنتیجه بنا به قضیهٔ یکتایی وارون داریم:

$$(kI)^{-1} = (\frac{1}{k}I), (\frac{1}{k}I)^{-1} = (kI)$$

در قضیهٔ بعدی، شرط برقراری قانون حذف در ضرب ماتریس‌ها بیان می‌شود:

قضیه: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد (A^{-1} وجود داشته باشد) و B و C دو ماتریس دلخواه باشند، به‌طوری که AB و AC تعریف شود، در این صورت داریم:

$$AB = AC \Rightarrow B = C$$

اثبات: چون A وارون‌پذیر است، پس A^{-1} وجود دارد. حال، اگر طرفین فرض را از چپ در A^{-1} ضرب کنیم، حکم به‌دست می‌آید.

$$AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C$$
$$\Rightarrow IB = IC \Rightarrow B = C$$

نتیجهٔ ۱: در حالت خاص، اگر $A = [K]$ ماتریسی 1×1 باشد و $K \neq 0$، در این صورت داریم:

$$KB = KC \Rightarrow B = C$$

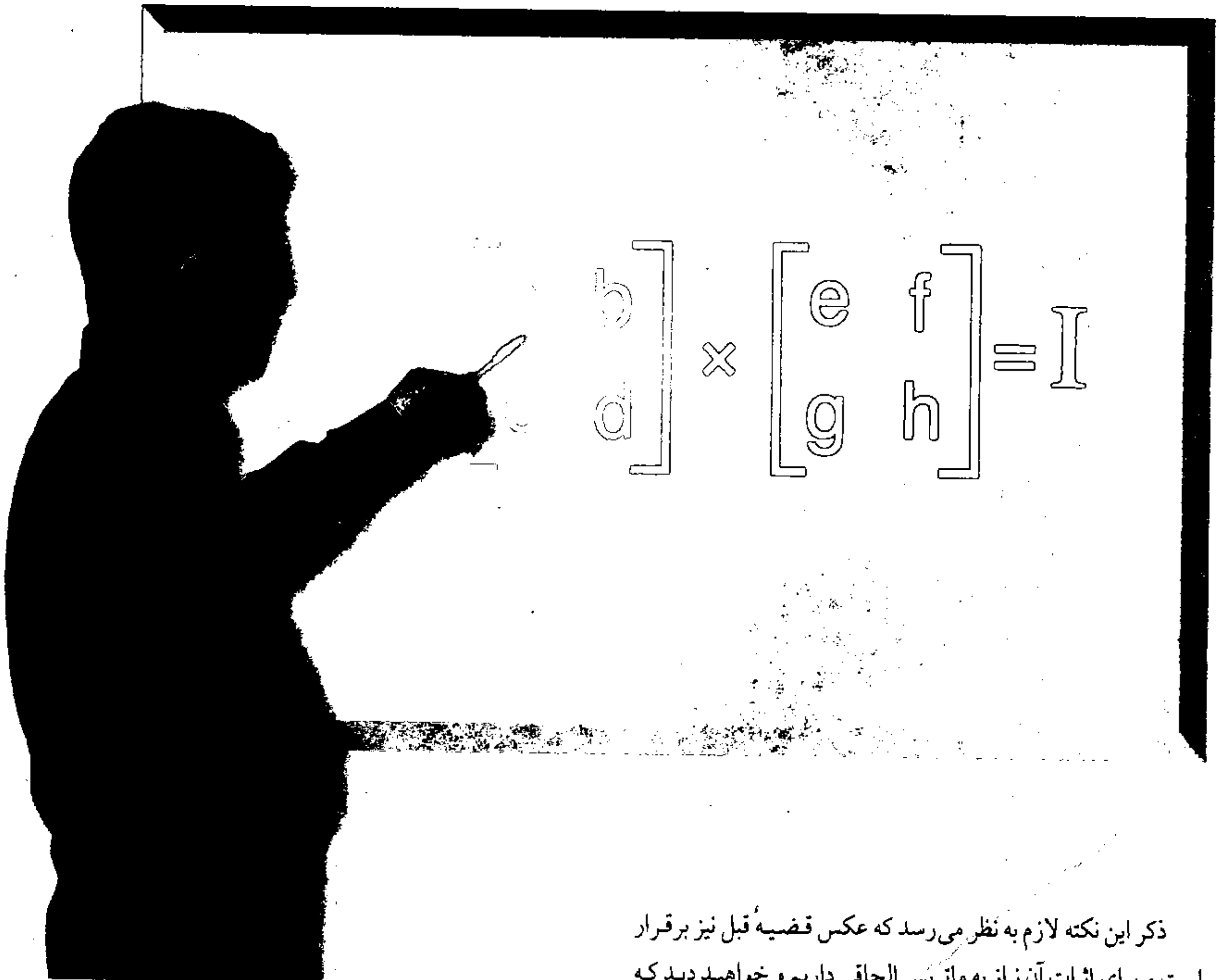
نتیجهٔ ۲: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد و داشته باشیم: $AB = \overline{O}$، در این صورت داریم: $B = \overline{O}$؛ زیرا:

$$AB = \overline{O} \Rightarrow AB = A\overline{O} \Rightarrow B = \overline{O}$$

قضیه: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $|A| \neq 0$ است.

اثبات: طبق تعریف وارون داریم:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow |AA^{-1}| = |I| \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1$$
$$\Rightarrow |A| \neq 0$$



ذکر این نکته لازم به نظر می‌رسد که عکس قضیهٔ قبل نیز برقرار است و برای اثبات آن نیاز به ماتریس الحاقی داریم و خواهید دید که هنگام اثبات قضیه، به دستوری برای محاسبهٔ A^{-1} در حالت کلّی دست می‌یابیم.

قضیه: اگر A ماتریسی مربعی و $|A| \neq 0$، آن‌گاه A وارون‌پذیر است و داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \times A^{*} \quad (\text{ماتریس الحاقی A است } A^{*})$$

اثبات: اگر A^{*} ماتریس الحاقی A باشد، ابتدا نشان می‌دهیم که:

$$AA^{*} = A^{*}A = |A|I \qquad (1)$$

کتاب درسی برقراری رابطهٔ (۱) را فقط برای ماتریس‌های ۳×۳ بررسی کرده است؛ ولی این رابطه در حالت کلّی نیز برقرار است. درواقع، قبلاً متذکّر شدیم که:

$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots a_{in}A_{in}$ بر حسب سطر iام

$|A| = a_{j1}A_{j1} + a_{j2}A_{j2} + \cdots a_{jn}A_{jn}$ بر حسب ستون jام

حال، اگر بخواهیم تساوی (۱) را اثبات کنیم، باید نشان دهیم درایهٔ عمومی AA^{*} با درایهٔ عمومی $|A|I$ برابر است.

درایهٔ روی سطر iام و ستون jام= درایهٔ عمومی AA^{*}

ستون jامِ A^{*} × سطر iامِ A=

ستون jام A^{*} درواقع همان سطر jام ماتریس همسازه است.

$$= \begin{bmatrix} a_{i1} a_{i2} \cdots a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{j1} \\ A_{j2} \\ \vdots \\ A_{jn} \end{bmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots a_{in}A_{jn} = k$$

حال اگر $i = j$، واضح است که: $k = |A|$

$$i = j \Rightarrow k = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = |A|$$

و اگر $i \neq j$، ثابت می‌شود $k = 0$؛ زیرا اگر فرض کنیم ماتریس B فقط در سطر jام با A تفاوت داشته باشد، به جای سطر jام A از سطر iام A استفاده کنیم؛ یعنی:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{سطر jام}$$

واضح است که دو سطر B با هم برابر و همواره $|B| = 0$ است و داریم:

$|B| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0$ بر حسب سطر jام

پس ثابت شد اگر $i \neq j$، همواره $k = 0$؛ یعنی:

$$\text{درایهٔ عمومی } AA^* = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ |A| & i = j \end{cases} = \text{درایهٔ عمومی } |A|I$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود که $A^*A = |A|I$. پس می‌توان نوشت:

$$AA^* = A^*A = |A|I$$

که طرفین رابطهٔ فوق را با توجه به فرض ($|A| \neq 0$) اگر بر $|A|$ تقسیم کنیم یا در $\frac{1}{|A|}$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$A(\frac{1}{|A|}A^*) = (\frac{1}{|A|}A^*)A = I$$

و با توجه به قضیهٔ یکتایی وارون، بلافاصله نتیجه می‌شود که:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

تذکر ۱: توجه داشته باشید که در حلّ مسأله‌ها یا پرسش‌های چهارگزینه‌ای، برای محاسبهٔ (AA^*) یا (A^*A) با فرض معلوم بودن A، نیازی به محاسبهٔ وقت‌گیر A^* نیست و حاصل هریک، همان $(|A|I)$ است.

تذکر ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی ۲×۲ و دلخواه باشد و $|A| \neq 0$، در این صورت، با توجه به تعریف A^*، واضح است که $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (جای درایه‌های روی قطر اصلی عوض و قطر فرعی در (۱-) ضرب شده است) و طبق قضیهٔ قبل داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

نتیجه: تمام ماتریس‌های دوران حول مبدأ به اندازهٔ α، یعنی R_α وارون‌پذیرند و $(R_\alpha)^{-1} = R_{-\alpha}$؛ زیرا:

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\alpha & -\mathrm{Sin}\alpha \\ \mathrm{Sin}\alpha & \mathrm{Cos}\alpha \end{bmatrix}, \quad |R_\alpha| = 1 \neq 0$$

$$\Rightarrow R_\alpha^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\alpha & \mathrm{Sin}\alpha \\ -\mathrm{Sin}\alpha & \mathrm{Cos}\alpha \end{bmatrix} = R$$

(جای درایه‌های قطر اصلی عوض و قطر منفی در (۱-) ضرب و همهٔ درایه‌ها بر $|R_\alpha| = 1$ تقسیم شده‌اند.)

قضیه: اگر A و B دو ماتریس مربع هم‌مرتبه و $\alpha \neq 0$ و $AB = \alpha I$، در این صورت A و B وارون‌پذیرند و $AB = BA$.

اثبات:

$$AB = \alpha I \Rightarrow |AB| = |\alpha I| \Rightarrow |A|\ |B| = \alpha^n |I| = \alpha^n$$

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0\ ,\ |B| \neq 0 \Rightarrow \text{ A و B وارون‌پذیرند}$$

حال، طرفین رابطهٔ فرض را از چپ در A^{-1} و از راست در A ضرب می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$AB = \alpha I \Rightarrow A^{-1}(AB)A = A^{-1}(\alpha I)A$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)(BA) = \alpha(A^{-1}I)A \Rightarrow I(BA) = \alpha A^{-1}A = \alpha I$$

$$\Rightarrow BA = \alpha I$$

پس ثابت شد $AB = BA = \alpha I$.

نتیجه: در حالت خاص، اگر $\alpha = 1$، در این صورت از تساوی $AB = I$ نتیجه می‌شود که A و B وارون‌پذیرند و $BA = I$ و طبق تعریف وارون، فقط از $AB = I$ می‌توان نتیجه گرفت که A وارون B و B وارون A است.

ویژگی‌های وارون در ماتریس‌ها

اگر A و B ماتریس‌هایی مربعی، هم‌مرتبه و وارون‌پذیر باشند و λ یک عدد حقیقی باشد، در این صورت، ویژگی‌های زیر همگی برقرارند.

تذکر: برای اثبات این که دو ماتریس وارون یکدیگر باشند، کافی است ضرب آن‌ها مساوی با I شود.

ویژگی ۱: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

اثبات

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

چون حاصل ضرب این دو ماتریس I است، پس طبق قضیهٔ یکتایی، باید وارون یکدیگر باشند، یعنی $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

ویژگی ۲: $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$

اثبات: $(\lambda A)(\frac{1}{\lambda}A^{-1}) = (\lambda \times \frac{1}{\lambda})(AA^{-1}) = 1 \times I = I$

$$\text{یکتایی وارون} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}A^{-1} = (\lambda A)^{-1}$$

ویژگی ۳: اگر A^t ترانهادهٔ A باشد، داریم:

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

اثبات:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow (AA^{-1})^t = I^t \Rightarrow (A^{-1})^t A^t = I$$

$$\text{یکتایی وارون} \Rightarrow (A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

تذکر ۱: ویژگی ۱ در حالت کلّی نیز برقرار و قابل تعمیم است؛ یعنی:

$$(A_1A_2\dots A_n)^{-1} = A_n^{-1}A_{n-1}^{-1}\dots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

(به کمک استقراء تساوی بالا را ثابت کنید.)

و اگر $A = A_1 = A_2 = \dots = A_n$ ، در این صورت داریم: $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$.

تذکر ۲: برای وارون حاصل جمع، رابطه و فرمولی وجود ندارد؛ یعنی برای محاسبهٔ $(A+B)^{-1}$ می‌باید A و B را با هم جمع کنیم و سپس وارون حاصل را به دست آوریم.

تذکر ۳: توان منفی در ماتریس‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n$$

تذکر ۴: وارون هر ماتریس بالا مثلثی (پایین مثلثی) ماتریسی بالا مثلثی (پایین مثلثی) است.

تذکر ۵: هر ماتریس بالا (پایین) مثلثی که تمام درایه‌های روی قطر در آن ناصفر باشند، وارون‌پذیر است.

تذکر ۶: در هر ماتریس قطری و وارون‌پذیر ($\forall i \; ; \; a_{ii} \neq ۰$) برای محاسبهٔ وارون، کافی است درایه‌های روی قطر را وارون کنیم. به مثال توجه کنید:

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۲}{۳} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۵} & ۰ & ۰ \\ ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

مسائل حل شده

*** مسألهٔ ۱**: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه داریم:

$$|A^{-1}| = |A^{-1}|$$

اثبات:

$$AA^{-1} = I \Rightarrow |A||A^{-1}| = |I| = ۱ \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{۱}{|A|} = |A|^{-1}$$

*** مسألهٔ ۲**: اگر A ماتریسی $n \times n$ و وارون‌پذیر و A^* ماتریس الحاقی A باشد، آن‌گاه داریم: $|A^*| = |A|^{n-1}$

اثبات:

$$AA^* = |A|I \Rightarrow |A||A^*| = ||A|I| = |A|^n|I| = |A|^n$$

$$\Rightarrow |A^*| = \frac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$$

نتیجه: اگر A ماتریسی ۲ × ۲ باشد، همواره داریم: $|A^*| = |A|$؛ و اگر A ماتریسی $n \times n$ و n فرد باشد، همواره $|A^*|$ عدد مربع کاملی است.

*** مسألهٔ ۳**: اگر A ماتریسی $n \times n$ ، وارون‌پذیر و $(A^*)^*$ ماتریس الحاقیِ الحاقی A باشد، آن‌گاه داریم:

$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$$

اثبات: می‌دانیم حاصل ضرب هر ماتریس در الحاقیِ خودش، مضربی از I خواهد بود که آن مضرب دترمینان خود آن است. پس می‌توان نوشت:

$$(A^*)(A^*)^* = |A^*|I \Rightarrow A\left[(A^*)(A^*)^*\right] = A\left(|A^*|I\right)$$

$$\Rightarrow (AA^*)(A^*)^* = |A^*|(AI) \Rightarrow (|A|I)(A^*)^* = |A^*|A$$

$$\Rightarrow |A|\left(I(A^*)^*\right) = |A|^{n-1}A \Rightarrow (A^*)^* = \frac{|A|^{n-1}}{|A|}A$$

$$\Rightarrow (A^*)^* = |A|^{n-2}A$$

نتیجه: اگر A ماتریسی ۲×۲ باشد، در این صورت الحاقیِ الحاقی A با خود A برابر است.

مسألهٔ ۴: اگر A ماتریسی پوچ توان از مرتبهٔ n باشد، در این صورت $(I-A)$ وارون‌پذیر و وارون آن، ماتریس $(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1})$ است.

اثبات: چون IA=AI، پس اتّحاد زیر برقرار است:

$$(I^n - A^n) = (I-A)(I + A + A^2 + \dots + A^{n-1})$$

$$\xrightarrow{A^n = \overline{O}} (I-A)(I + A + \dots + A^{n-1}) = I$$

$$\xrightarrow{\text{یکتایی وارون}} (I-A)^{-1} = (I + A + \dots + A^{n-1})$$

تمرین: در مسألهٔ قبل، اگر مرتبهٔ پوچ توانی ماتریس یعنی n فرد باشد، ثابت کنید (A+I) وارون‌پذیر و وارون آن $(I + \dots + A_{+}^{n-2} A_{-}^{n-1})$ است.

مسألهٔ ۵: اگر ماتریس A در چند جمله‌ای $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \dots + \alpha x + \beta = ۰$ صدق کند، در این صورت A وارون‌پذیر و وارون آن ماتریس زیر است.

$$\left(\frac{\alpha_n}{-\beta}x^{n-1} + \frac{\alpha_{n-1}}{-\beta}x^{n-2} + \dots + \frac{\alpha}{-\beta}I\right)$$

اثبات: طبق فرض، ماتریس A در چند جمله‌ای داده شده صدق می‌کند. پس:

$$\alpha_n A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha A + \beta I = \overline{O}$$

$$\Rightarrow \alpha_n A^n + \dots + \alpha A = -\beta I \Rightarrow A(\alpha_n A^{n-1} + \dots + \alpha I) = -\beta I$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\alpha_n}{-\beta}A^{n-1} + \dots + \frac{\alpha}{-\beta}I\right) = I$$

$$\xrightarrow{\text{یکتایی وارون}} A^{-1} = \left(\frac{\alpha_n}{-\beta}A^{n-1} + \dots + \frac{\alpha}{-\beta}I\right)$$

برای مثال، اگر A ماتریسی مربعی و در معادلهٔ $x^2 - 4x - 2 = 0$ صدق کند، در این صورت داریم:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{2}A - 2I\right)$$

مسألهٔ ۶: اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و B هم مرتبهٔ A و ماتریس‌های (A+B) و (A−B) نیز وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

الف) $(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$

ب) $(A-B)^{-1}A(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}A(A-B)$

اثبات: الف) ثابت می‌کنیم دو طرف تساوی با یک مقدار مساوی‌اند.

سمت چپ تساوی $= (A+B)(I - A^{-1}B)$

$= A - IB + B - BA^{-1}B = A - B$

سمت راست تساوی $= (I - BA^{-1})(A+B)$

$= A + B - BI - BA^{-1}B = A - BA^{-1}B$

ب) کافی است دو طرف رابطهٔ (الف) را وارون کنیم:

$$\left[(A+B)A^{-1}(A-B)\right]^{-1} = \left[(A-B)A^{-1}(A+B)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow (A-B)^{-1}(A^{-1})^{-1}(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}(A^{-1})^{-1}(A-B)^{-1}$$

$$\Rightarrow (A-B)^{-1}A(A+B)^{-1} = (A+B)^{-1}A(A-B)^{-1}$$

مسألهٔ ۷: اگر A و B ماتریس‌های وارون‌پذیر و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

الف) A و B^{-1} تعویض‌پذیرند.

ب) A^{-1} و B تعویض‌پذیرند.

ج) A^{-1} و B^{-1} تعویض‌پذیرند.

اثبات:

الف) $AB = BA \Rightarrow B^{-1}(AB)B^{-1} = B^{-1}(BA)B^{-1}$

$(B^{-1}A)\underbrace{(BB^{-1})}_{I} = \underbrace{(B^{-1}B)}_{I}(AB^{-1}) \Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1}$

ب) $AB = BA \Rightarrow A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$

$\underbrace{(A^{-1}A)}_{I}(BA^{-1}) = (A^{-1}B)\underbrace{(AA^{-1})}_{I} \Rightarrow BA^{-1} = A^{-1}B$

ج) $AB = BA \Rightarrow (AB)^{-1} = (BA)^{-1} \Rightarrow B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

مسألهٔ ۸: اگر A و B ماتریس‌هایی متقارن و وارون‌پذیر و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید ماتریس‌های A^{-1} و B^{-1} نیز متقارن‌اند و سپس، با توجه به مسألهٔ ۷ نتیجه بگیرید که ماتریس‌های $(A^{-1}B)$، (AB^{-1}) و $(A^{-1}B^{-1})$ نیز متقارن‌اند.

اثبات: باید ثابت کنیم ترانهاده‌های A^{-1} و B^{-1} با خودشان برابر است.

(چون A متقارن است، $A^t = A$)

$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1} = A$

$(B^{-1})^t = (B^t)^{-1} = B$

حال، چون A^{-1} و B^{-1} متقارن و با A و B تعویض‌پذیرند، یعنی: $(A^{-1}B = BA^{-1})$ و $(AB^{-1} = BA^{-1})$ و $(A^{-1}B^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})$ (مسألهٔ قبل ثابت شد.) و این نکته که ضرب دو ماتریس متقارن و تعویض‌پذیر، ماتریسی متقارن است؛ حکم به اثبات می‌رسد.

مسألهٔ ۹: اگر A ماتریسی n×n و هم مرتبه با ماتریس وارون‌پذیر B باشد، ثابت کنید: $(B^{-1}AB)^n = B^{-1}A^nB$

اثبات: به استقراء روی n داریم:

$n = 1 \Rightarrow (B^{-1}AB)^1 = B^{-1}A^1B$ تساوی برقرار است

$n = k \Rightarrow (B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB$ فرض استقراء

$n = k+1 \Rightarrow (B^{-1}AB)^{k+1} = B^{-1}A^{k+1}B$ حکم استقراء

$(B^{-1}AB)^{k+1} = (B^{-1}AB)^k(B^{-1}AB) \overset{\text{فرض}}{=} (B^{-1}A^kB)(B^{-1}AB)$

$= (B^{-1}A^k(BB^{-1})AB) = B^{-1}A^k(IA)B$

$= B^{-1}A^kAB = (B^{-1}A^{k+1}B)$

مسألهٔ ۱۰: اگر یکی از دو ماتریس A یا B وارون‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$|AB - \lambda I| = |BA - \lambda I|$$

اثبات: فرض کنیم A وارون‌پذیر باشد. پس داریم: $AA^{-1} = I$ ، $|A||A^{-1}| = 1$، لذا با توجه به ویژگی‌های دترمینان‌ها داریم:

$|AB - \lambda I| = |A^{-1}||A|\ |AB - \lambda I| = |A^{-1}|.|AB - \lambda I||A|$

$= |A^{-1}(AB - \lambda I)A| = |(A^{-1}AB - \lambda IA^{-1})A|$

$= |(IB - \lambda A^{-1})A| = |BA - \lambda A^{-1}A| = |BA - \lambda I|$

مسألهٔ ۱۱: اگر A و B ماتریس‌های مربعی و هم مرتبه و AB=A+B باشد، در این صورت ثابت کنید که اگر A وارون‌پذیر باشد، B نیز وارون‌پذیر خواهد بود و داریم: $A^{-1} + B^{-1} = I$.

اثبات: چون A وارون‌پذیر است، پس داریم:

$AB = A + B \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(A+B)$

$\Rightarrow \underbrace{(A^{-1}A)}_{I}B = \underbrace{(A^{-1}A)}_{I} + (A^{-1}B) \Rightarrow B = I + A^{-1}B$

$\Rightarrow B - A^{-1}B = I \Rightarrow B(I - A^{-1}) = I$

$\Rightarrow |B||I - A^{-1}| = 1 \Rightarrow |B| \neq 0$. (B وارون‌پذیر است)

$B(I - A^{-1}) = I \xrightarrow{\text{یکتایی وارون}} (I - A^{-1}) = B^{-1} \Rightarrow I = A^{-1} + B^{-1}$

مسألهٔ ۱۲: اگر A و B دو ماتریس وارون‌پذیر و هم مرتبه باشند، ثابت کنید:

$$(AB)^* = B^*A^*$$

اثبات: (توجه دارید که $|AB|=|BA|=|A||B|\neq 0$)

می‌دانیم: $\frac{1}{|A|}A^*=A^{-1}$ ، $\frac{1}{|B|}B^*=B^{-1}$ ، $\frac{1}{|AB|}(AB)^*=(AB)^{-1}$

از طرفی: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}=\left(\frac{1}{|B|}B^*\right)\left(\frac{1}{|A|}A^*\right)=\frac{1}{|BA|}B^*A^*$

$$\Rightarrow \frac{1}{|AB|}(AB)^*=\frac{1}{|BA|}B^*A^*\Rightarrow (AB)^*=B^*A^*$$

تذکر: این مسأله قابل تعمیم است؛ یعنی در حالت کلّی داریم:

$$(A_1A_2\dots A_n)^*=A_n^*\dots A_2^*A_1^*$$

*مسألهٔ ۱۳: ثابت کنید:

$$\left|(A^*)^*\right|=|A|^{(n-1)^2}$$

اثبات: اگر A ماتریسی $n\times n$ باشد، داریم:

ثابت کردیم: $\left|(A^*)^*\right|=|A^*|^{n-1}=\left(|A|^{(n-1)}\right)^{n-1}=|A|^{(n-1)^2}$

مسألهٔ ۱۴: اگر A ماتریسی متقارن $(A^t=A)$ و وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید (A^*) نیز متقارن است.

اثبات:

می‌دانیم $AA^*=A^*A=|A|I\Rightarrow (A^*A)^t=(|A|I)^t$

$$A^t(A^*)^t=(|A|I)^t\Rightarrow (AA^*)^t=|A|I$$

(ماتریس $|A|I$ قطری و در نتیجه متقارن است.)

$$\Rightarrow A(A^*)^t=|A|I\Rightarrow AA^*$$

$$\Rightarrow A(A^*)^t=AA^*\xrightarrow{\text{A وارون‌پذیر}}(A^*)^t=A^*\Rightarrow \text{متقارن است}$$

مسألهٔ۱۵: اگر A و B ماتریس‌های هم مرتبه و هر دو وارون‌پذیر باشند و داشته باشیم: $(AB)^2=A^2B^2$ ، ثابت کنید A و B تعویض‌پذیرند.

اثبات: $(AB)^2=(AB)(AB)=ABAB$

طبق فرض: $(AB)^2=A^2B^2=AABB$

$$\Rightarrow ABAB=AABB\xrightarrow{\text{A و B وارون‌پذیر}}A^{-1}(ABAB)B^{-1}=A^{-1}(AABB)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(A^{-1}A\right)}_{I}BA\underbrace{\left(BB^{-1}\right)}_{I}=\underbrace{\left(A^{-1}A\right)}_{I}AB\underbrace{\left(BB^{-1}\right)}_{I}\Rightarrow BA=AB$$

توجه: مسائلی را که با علامت ❁ مشخص شده است، می‌توانید به عنوان قضیه‌هایی در حالت کلی درنظر بگیرید.

تمرین

۱. ثابت کنید اگر A ماتریسی وارون‌پذیر باشد، A^n نیز وارون‌پذیر است و داریم: $\left(A^n\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^n$

۲. ثابت کنید اگر A ماتریسی وارون‌پذیر و متقارن (پاد متقارن) باشد، A^{-1} نیز متقارن (پاد متقارن) است.

۳. اگر ماتریس A در معادلهٔ $A^3+2A^2-3A-2I=\bar{0}$ صدق کند، وارون A را بیابید.

۴. اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و وارون‌پذیر باشند و $AB=BA$ و هر دو خود توان باشند، ثابت کنید که برای هر عدد حقیقی $\lambda\neq 1$ ، ماتریس $D=\lambda AB+I$ وارون‌پذیر است و داریم: $D^{-1}=I-\frac{\lambda}{1+\lambda}AB$.

(راهنمایی: $DD^{-1}=I$ را تحقیق کنید.)

۵. اگر V ماتریسی وارون‌پذیر و $V^{-1}=V^t$ و D ماتریسی قطری باشد و داشته باشیم: $AV=VD$ ، ثابت کنید که A ماتریسی متقارن است.

۶. اگر B ماتریسی وارون‌پذیر باشد، ثابت کنید که:

$$\left|B^{-1}AB-\lambda I\right|=\left|A-\lambda I\right|$$

(راهنمایی: از تساوی $\lambda I=B^{-1}(\lambda I)B$ استفاده کنید.)

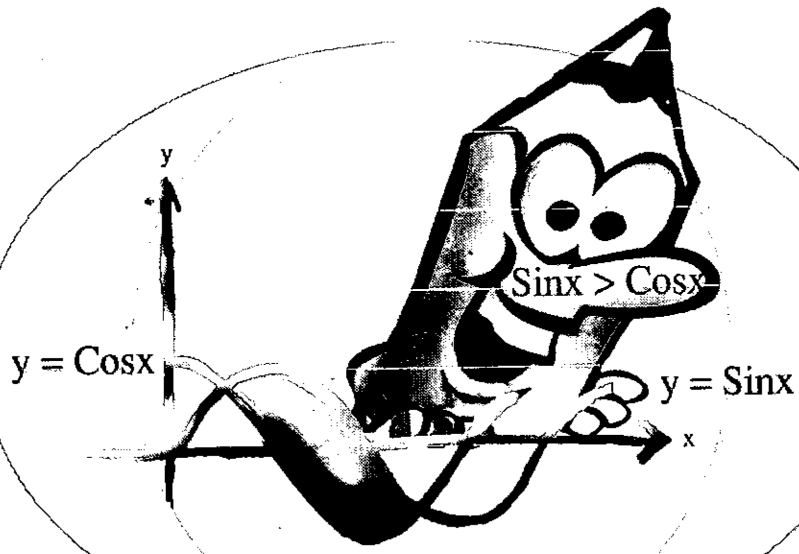
۷. ثابت کنید: $\left|\left((A^*)^*\right)^*\right|=|A|^{(n-1)^3}$

۸. ثابت کنید که اگر A ماتریسی پایین مثلثی باشد، در این صورت A^* (ماتریس الحاقی A) نیز پایین مثلثی است. (ماتریس همسازهٔ A، یعنی N چگونه است؟)

۹. دو ماتریس A و B را درصورتی هم‌نشست با هم می‌نامیم که ماتریسی وارون‌پذیر چون D باشد؛ به قسمتی که داشته باشیم: $B=D^tAD$. ثابت کنید رابطهٔ هم‌نشستی در ماتریس‌ها یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۱۰. اگر داشته باشیم: $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij}=\frac{(i+j)!}{i!j!}$ ، نشان دهید که A وارون‌پذیر است و وارون آن را بیابید.

۱۱. اگر A و B ماتریس‌هایی وارون‌پذیر باشند و داشته باشیم: $(AB)^2=A^2B^2$ ، ثابت کنید A و B تعویض‌پذیرند.



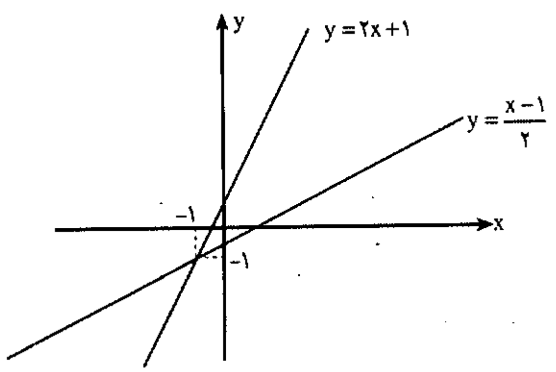
حلّ نامعادله های جبری به روش هندسی
(برای دانش آموزان سال دوم دبیرستان)

هوشنگ شرقی

حلّ نامعادله های مختلف و یافتن مجموعهٔ جواب آن ها، از بحث های اساسی در ریاضیات پایه است که در کتاب های درسی نیز دربارهٔ آن بحث شده است. آنچه در این جا مورد نظر است، ارائهٔ راه حلّی برای نامعادله هاست که کم‌تر دربارهٔ آن بحث شده و آن، استفاده از نمودار هندسی توابع برای حلّ نامعادله هاست. می دانیم که هر نامعادله، دارای صورت کلّی $f(x) > g(x)$ است که f و g عبارت هایی (تابع هایی) بر حسب x هستند. برای یافتن مجموعهٔ جواب این نامعادله، کافی است نمودارهای توابع با ضابطه های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را رسم کنیم و مجموعهٔ طول های نقاطی را در نظر بگیریم که در آن نقاط، نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g قرار داشته باشد. اکنون با چند مثال مختلف که از مثال های ساده‌تر شروع می شود، مطلب را روشن می کنیم.

مثال۱. مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x + 1 > \frac{x-1}{2}$ را به‌دست آورید.

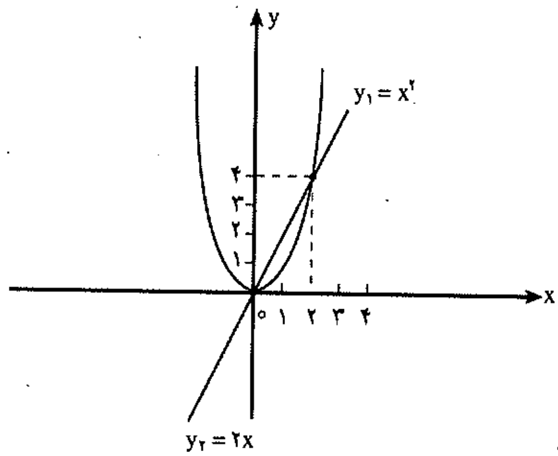
حل: نمودار تابع های f و g با ضابطه های $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \frac{x-1}{2}$ را رسم می کنیم:



همچنان که در شکل ملاحظه می کنیم، نقطهٔ برخورد دو نمودار نقطهٔ (۱- و ۱-) است که این نقطه را با حلّ معادلهٔ $f(x) = g(x)$ نیز می توان به دست آورد و برای کلیهٔ نقاط سمت راست این نقطه، خط $y = 2x + 1$ بالای خط $y = \frac{x-1}{2}$ قرار دارد، لذا مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ فوق، به صورت $\{x | x > 1\}$ است.

مثال۲. نامعادلهٔ $2x > x^2$ را حل کنید.

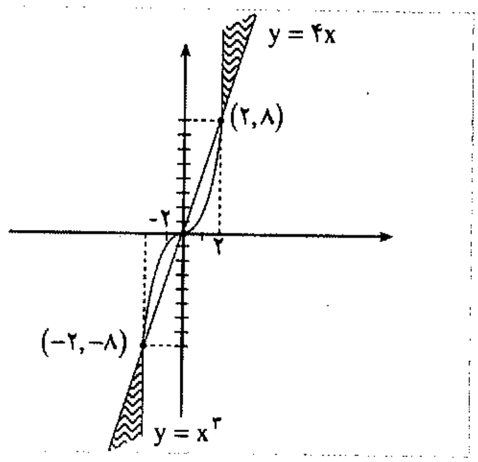
حل: در شکل صفحه بعد، نمودارهای توابع با ضابطه های $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x$ رسم شده‌اند:



چنان که ملاحظه می‌کنید، تنها برای $0 < x < 2$، نمودار خط $y = 2x$ بالای نمودار سهمی $y = x^2$ قرار دارد و جواب نامعادله نیز به صورت $0 < x < 2$ به‌دست می‌آید.

مثال۳. نامعادلهٔ $x^3 > 4x$ را حل کنید.

حل: نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y = x^3$ و $y = 4x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

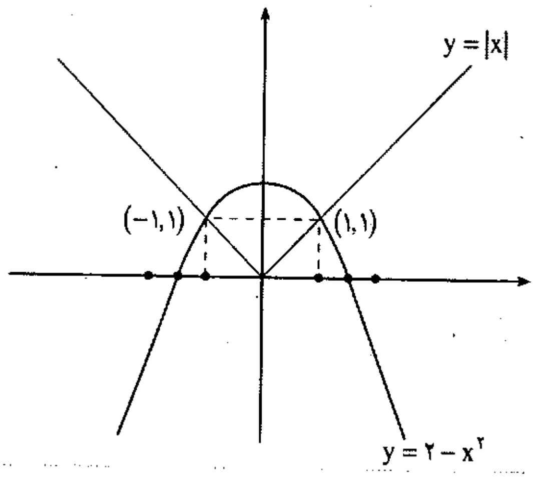


همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌کنید، در دو محدودهٔ هاشورخورده، یعنی برای $-2 < x < 0$ و $x > 2$، نمودار منحنی $y = x^3$ بالاتر از نمودار خط $y = 4x$ قرار دارد. بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مزبور به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\{x | -2 < x < 0 \text{ یا } x > 2\}$

مثال۴. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^2 + |x| < 2$ را به دست آورید.

حل: ابتدا نامعادلهٔ فوق را به صورت $|x| < 2 - x^2$ می‌نویسیم و سپس نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $y = 2 - x^2$ و $y = |x|$ را در یک شکل و به صورت زیر رسم می‌کنیم:



نقطه‌های (۱و۱) و (۱و۱−) نقاط برخورد منحنی‌های دو تابع هستند و به سادگی در شکل می‌بینید که به ازای $x > 1$ یا $x < -1$ نمودار $y = |x|$ بالای نمودار $y = 2 - x^2$ واقع می‌شود.

تمرین. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^2 + |x| \le 2$ چیست؟

آزمون. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\sqrt{1 - x^2} > 2x + 1$ کدام بازهٔ زیر است؟

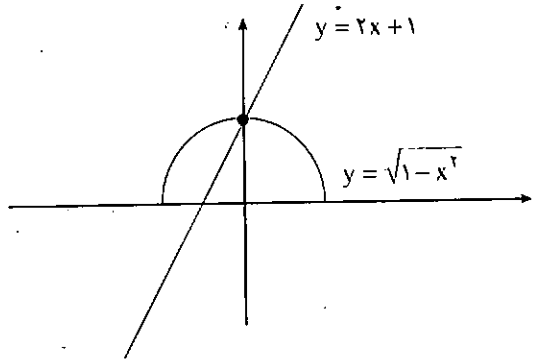
۱) $(0, 1)$ ۲) $(-1, 0)$

۳) $(-1, 1)$ ۴) $(-\frac{1}{2}, 0)$

حل: اهمیت روش هندسی در حل نامعادلات، از مثال‌هایی این چنین بهتر روشن می‌شود؛ چرا که اگر بخواهیم مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ فوق را به روش جبری تعیین کنیم، مدت زمان نسبتاً زیادی صرف می‌شود؛ زیرا باید دو حالت مختلف $2x + 1 \ge 0$ و $2x + 1 < 0$ را بررسی کنیم. در حالت دوم، نامعادله به یک نامساوی همیشه درست تبدیل شده و مجموعهٔ جواب آن، دامنهٔ تعریف عبارت $\sqrt{1 - x^2}$ است که باید با جواب نامعادلهٔ $2x + 1 < 0$، اشتراک گرفته شود. در حالت دوم، می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان دو برسانیم و...

چنان که می‌بینید، روش فوق مدت زمان زیادی را صرف

می‌کند. اما به روش هندسی و با رسم نمودارهای $y = \sqrt{1-x^2}$ و $y = 2x+1$، در زمان کوتاهی می‌توان پاسخ مسأله را به دست آورد و گزینهٔ صحیح را مشخص کرد. نمودار $y = \sqrt{1-x^2}$، همان نمودار $x^2 + y^2 = 1$ با شرط $y > 0$ است، لذا شکل آن نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۱ و در قسمت بالای محور xهاست. نمودار $y = 2x+1$ نیز یک خط راست است. در زیر، نمودارهای دو تابع رسم شده‌اند:

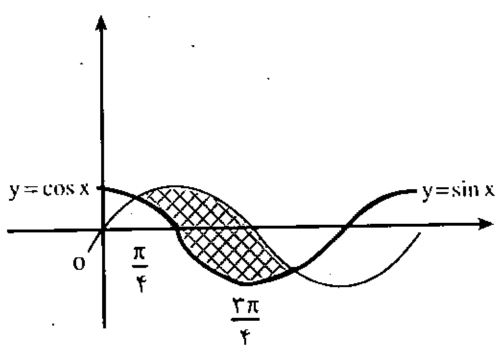


و چنان که در شکل ملاحظه می‌کنید، به سادگی روشن است که فقط وقتی $-1 < x < 0$ باشد، نمودار نیم‌دایره، بالای نمودار خط واقع می‌شود و پاسخ صحیح، گزینه (۲) است.

روشی که در مورد حلِ نامعادلات جبری ذکر شد، برای حلِ نامعادله‌های غیرجبری (مانند نامعادلات مثلثاتی، لگاریتمی و...) نیز قابل استفاده است. به یک مثال در این زمینه توجه کنید:

مثال. مجموعهٔ جواب نامعادله $\sin x > \cos x$ را با شرط $0 \le x \le 2\pi$ به دست آورید.

حل: نمودارهای $y = \sin x$ و $y = \cos x$ را در شکل زیر، در یک دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم:



نقطه‌های برخورد دو منحنی در بازهٔ $[0, 2\pi]$، دارای طول‌های $x_1 = \frac{\pi}{4}$ و $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ هستند (این نقاط را می‌توان از حلِ معادله $\sin x = \cos x$ یا $\text{tg}x = 1$ نیز به دست آورد) و به سادگی روشن است که در فاصلهٔ بین این دو مقدار، منحنی $y = \sin x$ بالای منحنی $y = \cos x$ واقع است، لذا جواب نامعادله به صورت $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ نوشته می‌شود.

تمرین. مجموعهٔ جواب هریک از نامعادلات زیر را به روش هندسی به دست آورید:

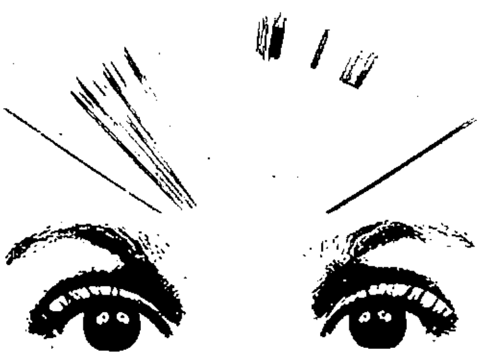
۱) $\frac{x+1}{2} < \frac{2x-1}{3}$ ۲) $x^2 + 1 > x$

۳) $x - 2 < \sqrt{x}$ ۴) $x^2 \ge \frac{1}{x}$

۵) $x^3 < x^2$ ۶) $x^2 > 4$

تمرین. به روش هندسی ثابت کنید:

$$x^2 < a^2 \Rightarrow -a < x < a \quad (a > 0)$$



تفریح اندیشه

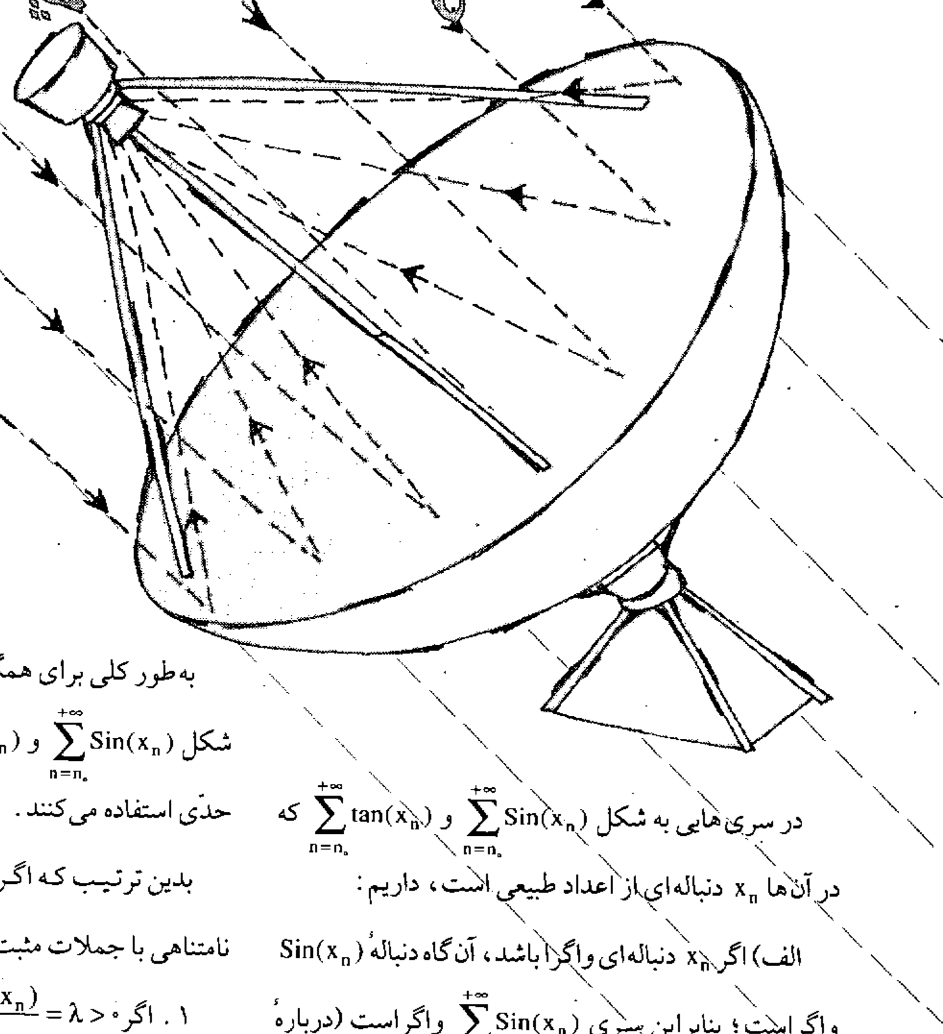
مجموع دو ریشه از سه ریشهٔ معادلهٔ زیر، صفر است:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

معادله‌ای بیابید که c را به طور صریح بر حسب a و b نمایش دهد.

بحثی در همگرایی چند سری خاص

○ احسان یارمحمدی



در سری‌هایی به شکل $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \text{Sin}(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ که در آن‌ها x_n دنباله‌ای از اعداد طبیعی است، داریم:

الف) اگر x_n دنباله‌ای واگرا باشد، آن‌گاه دنبالهٔ $\text{Sin}(x_n)$ واگراست؛ بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \text{Sin}(x_n)$ واگراست (دربارهٔ سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ این مطلب صادق است).

ب) اگر x_n دنباله‌ای همگرا باشد، آن‌گاه دنبالهٔ $\text{Sin}(x_n)$ همگراست؛ ولی نمی‌توان نتیجه گرفت که سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \text{Sin}(x_n)$ همگرا باشد (در مورد سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ این مطلب صادق است).

به‌طور کلی برای همگرایی یا واگرایی، سری‌هایی به شکل $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \text{Sin}(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \tan(x_n)$ معمولاً از آزمون مقایسهٔ حدّی استفاده می‌کنند.

بدین ترتیب که اگر $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \text{Sin}(x_n)$ دو سری نامتناهی با جملات مثبت باشند، آن‌گاه:

۱. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sin}(x_n)}{x_n} = \lambda > 0$ بنابراین یا هر دو سری همگرایند یا هر دو سری واگرایند.

۲. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sin}(x_n)}{x_n} = 0$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ همگرا باشند، بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \text{Sin}(x_n)$ همگراست.

۳. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{\text{Sin}(x_n)}{x_n} = +\infty$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ واگرا باشند، بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \text{Sin}(x_n)$ واگراست.

برهان:

چون داریم $\lim_{n\to\infty} \frac{Sin(x_n)}{x_n} = \lambda > 0$ ، بنابراین:

$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N}:$

$$n \geq M \Rightarrow \left|\frac{Sin(x_n)}{x_n} - \lambda\right| < \varepsilon, \varepsilon = \frac{\lambda}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left|\frac{Sin(x_n)}{x_n} - \lambda\right| < \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} < \frac{Sin(x_n)}{x_n} < \frac{3\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow Sin(x_n) < \frac{3\lambda}{2} x_n \text{ یا } x_n < \frac{2}{\lambda} Sin(x_n)$$

حالت اول:

۱) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ همگرا باشد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{3\lambda}{2} x_n$ همگرا است پس بنابر آزمون مقایسه، سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} Sin(x_n)$ همگرا می‌باشد.

۲) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} Sin(x_n)$ همگرا باشد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2}{\lambda} Sin(x_n)$ همگرا است پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ همگرا می‌باشد.

حالت دوم:

۱) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} Sin(x_n)$ واگرا باشد پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{3\lambda}{2} x_n$ واگرا است بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ واگرا می‌باشد.

۲) اگر سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ واگرا باشد پس بنابر آزمون مقایسه سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{2}{\lambda} Sin(x_n)$ واگرا است بنابراین سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$ واگرا می‌باشد.

برهان: قسمت‌های دیگر قضیه بالا نیز به همین روش قابل بیان است که به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

(در مورد سری $\sum_{n=n_0}^{\infty} tan(x_n)$ نیز این مطلب صادق است)

اکنون اگر فرض کنیم که x_n دنباله‌ای همگرا باشد که سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ تشکیل یک سری همگرای تلسکوپی یا همگرای هندسی را بدهد، می‌توانیم الگوریتمی را برای محاسبهٔ کران بالا و کران پایین حدّ مجموع جزئی سری‌های $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} tan(x_n)$ مطرح کنیم. به بیان دیگر، مشخص می‌کنیم که حدّ مجموع جزئی سری‌های $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ و $\sum_{n=n_0}^{+\infty} tan(x_n)$ بین کدام دو عدد حقیقی قرار دارد.

حالت اوّل ـ سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$

ابتدا مقدار سری همگرای تلسکوپی یا هندسی $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ را به‌دست می‌آوریم و سپس بنا بر نامساوی $SinX < X$ ، سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ را با سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x_n$ مقایسه می‌کنیم تا یک کران بالا را برای سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ به‌دست آوریم. سپس جملات سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty} Sin(x_n)$ را به‌ازای n_0 های متفاوت یادداشت می‌کنیم و با یکدیگر جمع می‌زنیم تا مجموع جملات این سری به‌دست آید. اگر مجموع جملات این سری عددی مثبت باشد، لذا صفر می‌تواند یک کران پایین در این نوع از سری‌ها باشد.

آزمون ۱ . کدام گزینه دربارهٔ سری $\sum_{n=1}^{+\infty} Sin(\frac{1}{n})$ صحیح است؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به ۱

۳) همگرا به ۱- ۴) واگرا

جواب: گزینهٔ (۴) صحیح است؛ چون بنابر آزمون مقایسهٔ حدّی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{n})}{(\frac{1}{n})}=1>0$$

از طرفی چون سری هارمونیک $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n})$ واگراست، لذا هردو سری واگرایند.

آزمون ۲. کدام گزینه در مورد سری $S=\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{1}{2^n})$ صحیح است؟

۱) $S=1$ ۲) $0<S<1$

۳) $-1<S<0$ ۴) واگرا

جواب: گزینهٔ (۲) صحیح است؛ چون بنابر آزمون مقایسهٔ حدّی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(\frac{1}{2^n})}{2^n}=1>0$$

از طرفی چون سری هندسی $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$ همگرا به یک است، لذا هر دو سری همگرایند.

درضمن، بنابر الگوریتمی که ارائه شده، داریم:

$$\sin(\frac{1}{2^n})<\frac{1}{2^n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\frac{1}{2^n})<1$$

بنابراین که:

$$S=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(\frac{1}{2^n})=\sin(\frac{1}{2})+\sin(\frac{1}{4})+\sin(\frac{1}{8})+\cdots>0$$

پس نتیجه می‌گیریم که $0<S<1$ است.

حالت دوم ـ سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$

ابتدا مقدار سری همگرای تلسکوپی یا هندسی $\sum_{n=n_0}^{+\infty}x_n$ را به‌دست می‌آوریم سپس بنابر نامساوی $x<\tan x$، سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty}x_n$ را با سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$ مقایسه می‌کنیم تا یک کران پایین را برای سری $\sum_{n=n_0}^{+\infty}\tan(x_n)$ به‌دست آوریم.

آزمون ۳. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})$ صحیح است؟

۱) همگرا به صفر ۲) همگرا به ۱

۳) همگرا به ۱- ۴) واگرا

جواب: گزینهٔ (۴) صحیح است؛ چون بنابر آزمون مقایسهٔ حدّی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan(\frac{1}{\sqrt{n}})}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1>0$$

از طرفی چون سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ واگراست، لذا هردو سری واگرایند.

آزمون ۴. کدام گزینه در مورد سری $S=\sum_{n=1}^{+\infty}\tan(\frac{1}{n(n+1)})$ صحیح است؟

۱) $S=1$ ۲) $S>1$

۳) $S<1$ ۴) واگرا

جواب: گزینهٔ (۲) صحیح است؛ چون بنابر آزمون مقایسهٔ حدّی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tan(\frac{1}{n(n+1)})}{\frac{1}{n(n+1)}}=1>0$$

از طرفی چون سری تلسکوپی $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ همگرا به یک است، لذا هر دو سری همگرایند. در ضمن، بنابر الگوریتمی که ارائه شد، داریم:

$$\frac{1}{n(n+1)}<\tan(\frac{1}{n(n+1)})\Rightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\tan(\frac{1}{n(n+1)})>1$$

پس نتیجه می‌گیریم که $S>1$ است.

منابع

[۱] آنالیز ریاضی تام. م. آپوستل، ترجمه: علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف.

[۲] حساب دیفرانسیل و انتگرال دورهٔ پیش‌دانشگاهی، دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی.

[۳] حساب دیفرانسیل و انتگرال تام. م. آپوستل، ترجمه: علی‌اکبر عالم‌زاده و همکاران انتشارات مرکز نشر دانشگاهی.

تابع حسابی فی اویلر

◎ میر شهرام صدر



لئونارد اویلر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳ م.) از پرکارترین ریاضیدانان مشهور است. می‌گویند که محاسبه‌ها را به سادگی نفس کشیدن انجام می‌داد. در حدود سال ۱۷۶۶، دچار مصیبت نابینایی کامل شد، ولی این مسأله کمترین خللی در کارهای او وارد نکرد و جالب این که به کمک حافظه شگفت‌انگیز و توانایی تمرکز حواس، حتی با وجود سروصدای زیاد به کار خلاق خود با دیکته کردن به یک منشی و با نوشتن فرمول‌ها روی تخته بزرگی که منشی‌اش از روی آن رونویسی کند، او ادامه داد و قسمت مهمی از آثار خود را پس از نابینایی انجام داده است. اویلر اگر از پربارترین ریاضیدانان همهٔ اعصار نباشد، پربارترین ریاضیدان قرن هجدهم است و در اغلب زمینه‌های ریاضی سهیم است. او دربارهٔ آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها، حساب دیفرانسیل، نظریه گراف‌ها، نظریه معادلات، نظریه اعداد، هندسه مقدماتی و بخش‌های دیگر ریاضی تحقیق و تألیف می‌کرد.

در مقدماتی‌ترین مطالب نظریه اعداد با قضیه اویلر و تابع φ (تابع فی‌اویلر) مواجه می‌شویم که به تفصیل به این قضیه خواهیم پرداخت.

شهرت اویلر بیشتر به خاطر نمادهایی است که معرفی یا همگانی کرده است، که عبارتند از:

۱. π برای نمایش نسبت محیط دایره به قطر آن.

۲. $f(x)$ به نشانه نماد تابع.

۳. e برای پایه لگاریتم طبیعی (عدد اویلر).

۴. a، b و c برای نمایش اضلاع مثلث ABC.

۵. r برای شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC.

۶. R برای شعاع دایره محیطی مثلث ABC.

۷. $\sum$ برای علامت مجموع‌یابی.

۸. i در اعداد مختلط که $i^2=-1$ یا $i=\sqrt{-1}$.

از میان حجم عظیم آثار اویلر، نتیجه‌ای معروف را مطرح می‌کنیم که به حق از به دست آوردن آن بسیار راضی بود:

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

اکنون تابع حسابی اویلر را مطرح می‌کنیم. برای مثال عدد طبیعی ۱۰ را در نظر بگیرید، چند تا عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰ وجود دارند که نسبت به ۱۰ اول می‌باشند؟ به بیان دیگر تعداد عضوهای مجموعهٔ زیر:

$$A=\{m\in\mathbb{N} \mid 1\le m<10,(m,10)=1\}$$

چند تا است؟ با اندکی تأمل ملاحظه می‌کنیم که $A=\{1,3,7,9\}$، در نتیجه ۴ عدد طبیعی کوچکتر از ۱۰ وجود دارند که نسبت به ۱۰ اول می‌باشند، در این حالت می‌نویسیم $\varphi(10)=4$.

تعریف. فرض می‌کنیم $n>1$ یک عدد طبیعی باشد، تعداد عددهای طبیعی که اولاً کوچکتر از n باشند، ثانیاً نسبت به n اول باشند، با نماد $\varphi(n)$ نمایش داده می‌شود و به آن تابع حسابی اویلر می‌گوییم. بنابراین اگر داشته باشیم:

$$A=\{m\in\mathbb{N} \mid 1\le m<n,(m,n)=1\}$$

آنگاه $\varphi(n)=|A|$.

قضیه زیر که با استفاده از اصل شمول و عدم شمول آن را ثابت می‌کنیم، به سادگی برای هر عدد طبیعی n، مقدار $\varphi(n)$ را مشخص می‌کند.

قضیه. فرض کنیم که n یک عدد طبیعی باشد و $n=P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\cdots\times P_k^{\alpha_k}$، تجزیه n به حاصل ضرب عامل‌های اول باشد که در آن P_1، P_2، ...، P_k عددهای اول و متمایز باشند و α_1، α_2، ...، α_k عددهای طبیعی باشند، در این صورت داریم:

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\cdots(1-\frac{1}{P_k})$$

اثبات. مجموعهٔ $S=\{1,2,3,\cdots,n\}$ را در نظر می‌گیریم، سپس برای هر $1\le i\le k$، مجموعهٔ A_i را برابر با عضوهایی از مجموعه S در نظر می‌گیریم که عدد اول P_i آن عضوها را عاد می‌کنند، یعنی داریم:

$$A_i=\{1\le m\le n : P_i \mid m\}$$

در واقع هدف یافتن $|\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k}|$ است. برای این منظور از اصل شمول و عدم شمول برای k مجموعهٔ متناهی استفاده می‌کنیم. می‌دانیم که:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k| \quad (1)$$

برای هر $1\le i\le k$ چون n بر P_i بخش‌پذیر است، بنابراین داریم:

$$|A_i|=\left[\frac{n}{P_i}\right]=\frac{n}{P_i} \quad (1\le i\le k)$$

همچنین داریم:

$$|A_i\cap A_j|=\left[\frac{n}{P_iP_j}\right]=\frac{n}{P_iP_j} \quad (1\le i<j\le k)$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_r|=\left[\frac{n}{P_iP_jP_r}\right]=\frac{n}{P_iP_jP_r} \quad (1\le i<j<r\le k)$$

و به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$|A_i\cap A_j\cap\cdots\cap A_k|=\left[\frac{n}{P_1P_2\cdots P_k}\right]=\frac{n}{P_1P_2\cdots P_k}$$

با جای‌گذاری رابطه‌های بالا در رابطه (۱)، خواهیم داشت:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k}|=n-\left(\sum_{i=1}^{k}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le k}|A_i\cap A_j|+\right.$$

$$\sum_{1\le i<j<r\le k}\left|A_i\cap A_j\cap A_r\right|\cdots+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|\Bigg)$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|=n-\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{P_i}-\sum_{1\le i<j\le k}\frac{n}{P_iP_j}+\sum_{1\le i<j<r\le k}\frac{n}{P_iP_jP_r}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{P_1P_۲\cdots P_k}\right)$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|=n\left(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{P_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{1}{P_iP_j}-\sum_{1\le i<j<r\le k}\frac{1}{P_iP_jP_r}+\cdots+(-1)^{n}\frac{1}{P_1P_۲\cdots P_k}\right)$$

طرف دوم برابری را در عبارت $\frac{P_1P_۲\cdots P_k}{P_1P_۲\cdots P_k}$ ضرب می‌کنیم:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|=\frac{n}{P_1P_۲\cdots P_k}\Big[P_1P_۲\cdots P_k-(P_۲P_۳\ldots P_k+P_1P_۳\cdots P_k+P_1P_۲P_۴\ldots P_k+\cdots+P_1P_۲\ldots P_{k-1})+(P_۳P_۴\ldots P_k+P_۲P_۴P_۵\ldots P_k+\cdots+P_1P_۲\ldots P_{k-۲})-\cdots+(-1)^{n-1}(P_k+P_{k-1}+\ldots+P_1)+(-1)^n\Big]$$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}A_i\right|=\frac{n}{P_1P_۲\cdots P_k}\left[(P_1-1)(P_۲-1)\ldots(P_k-1)\right]$$

$$=n\left[\frac{(P_1-1)}{P_1}\times\frac{(P_۲-1)}{P_۲}\times\cdots\times\frac{(P_k-1)}{P_k}\right]$$

$$=n(1-\frac{1}{P_1})\ (1-\frac{1}{P_۲})\ldots(1-\frac{1}{P_k})$$

مثال. ثابت کنید که $\varphi(۱۰۵)=۴۸$.

حل. ابتدا عدد ۱۰۵ را به حاصل ضرب عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم:

$$n=۱۰۵=۳\times۵\times۷=P_1\times P_۲\times P_۳$$

اکنون با توجه به قضیه قبل داریم:

$$\varphi(۱۰۵)=n(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_۲})(1-\frac{1}{P_۳})$$

$$=۳\times۵\times۷(1-\frac{1}{۳})(1-\frac{1}{۵})(1-\frac{1}{۷})=۲\times۴\times۶=۴۸$$

$$\Rightarrow\varphi(۱۰۵)=۴۸$$

مثال. تعداد عددهای صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۶۰ که در رابطهٔ $(a,۳۶۰)=۱۲$ صدق می‌کنند، چند تا است؟

حل. چون $(a,۳۶۰)=۱۲$ پس $۱۲|a$ در نتیجه $a=۱۲k$ که $k\in Z$ ، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}(a,۳۶۰)=۱۲\\ a=۱۲k\end{cases}\Rightarrow(۱۲k,۳۶۰)=۱۲\Rightarrow(k,۳۰)=1$$

در این مرحله باید تعداد عددهای صحیح و مثبتی را پیدا کنیم که نسبت به ۳۰ اول هستند و این برابر با $\varphi(۳۰)$ است.

$$n=۳۰=۲\times۳\times۵=P_1\times P_۲\times P_۳$$

$$\varphi(۳۰)=۲\times۳\times۵\,(1-\frac{1}{۲})(1-\frac{1}{۳})(1-\frac{1}{۵})=1\times۲\times۴=۸$$

در نتیجه ۸ عدد صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۶۰ وجود دارد که در رابطهٔ $(a,۳۶۰)=۱۲$ صدق می‌کنند.

مثال. اگر برای عددهای صحیح m و n داشته باشیم $۱۸۰n+am=1$ و $a\le۱۸۰$ ، آنگاه چند عدد طبیعی برای a یافت می‌شود؟

حل. چون برای عددهای صحیح m و n داریم $۱۸۰n+am=1$ آنگاه طبق قضیه بزو نتیجه می‌گیریم که $(۱۸۰,a)=1$. ملاحظه می‌کنیم که تعداد عددهای طبیعی $a\le۱۸۰$ را می‌خواهیم به طوری که $(۱۸۰,a)=1$ ، بنابراین کافی است $\varphi(۱۸۰)$ را به دست آوریم:

$$۱۸۰=۲^۲\times۳^۲\times۵$$

$$\varphi(۱۸۰)=۲^۲\times۳^۲\times۵(1-\frac{1}{۲})(1-\frac{1}{۳})(1-\frac{1}{۵})=۲\times۶\times۴=۴۸$$

قضیه بزو. فرض کنیم که $(a,b)=d$ در این صورت عددهای صحیح m و n یافت می‌شوند به گونه‌ای که $ma+nb=d$.

نتیجه. هرگاه a و b دو عدد نسبت به هم اول باشند ، در

این صورت عددهای صحیح m و n یافت می‌شوند به گونه‌ای که:

$$(a,b)=1 \Leftrightarrow ma+nb=1$$

چند خاصیت تابع حسابی اویلر

۱. اگر P یک عدد اول باشد، آنگاه $\varphi(P)=P-1$.

زیرا اگر P عددی اول باشد، آنگاه P با هریک از عضوهای مجموعه $\{1,2,3,\dots,P-1\}$ متباین است.

۲. اگر P یک عدد اول باشد و $\alpha \in \mathbb{N}$ آنگاه $\varphi(P^\alpha)=P^{(\alpha-1)}(P-1)$.

زیرا اگر P عددی اول باشد، آنگاه طبق قضیه تابع حسابی اویلر داریم:

$$\varphi(P^\alpha)=P^\alpha(1-\frac{1}{P})=P^\alpha-P^{\alpha-1}=P^{\alpha-1}(P-1)$$

۳. اگر n و m دو عدد طبیعی باشند، آنگاه $\varphi(n^m)=n^{(m-1)}\varphi(n)$.

فرض کنیم $n=P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\dots\times P_k^{\alpha_k}$ در این صورت $n^m=P_1^{m\alpha_1}\times P_2^{m\alpha_2}\times\dots\times P_k^{m\alpha_k}$ بنابراین طبق قضیه تابع حسابی اویلر داریم:

$$\varphi(n^m)=P_1^{m\alpha_1}\times P_2^{m\alpha_2}\times\dots\times P_k^{m\alpha_k}(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\dots(1-\frac{1}{P_k})$$

از طرفی $(1\le i\le k)P_i^{m\alpha_i}=P_i^{(m-1)\alpha_i}\times P_i^{\alpha_i}$ و می‌دانیم که:

$$\varphi(n^m)=P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\dots\times P_k^{\alpha_k}(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\dots(1-\frac{1}{P_k})$$

در نتیجه داریم:

$$\varphi(n^m)=P_1^{(m-1)\alpha_1}\times P_2^{(m-1)\alpha_2}\times\dots\times P_k^{(m-1)\alpha_k}$$

$$\times P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\dots\times P_k^{\alpha_k}(1-\frac{1}{P_1})(1-\frac{1}{P_2})\dots(1-\frac{1}{P_k})$$

$$\varphi(n^m)=(P_1^{\alpha_1}\times P_2^{\alpha_2}\times\dots\times P_k^{\alpha_k})^{(m-1)}\times\varphi(n)$$

$$\Rightarrow \varphi(n^m)=n^{(m-1)}\varphi(n)$$

۴. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند به طوری که $(a,b)=1$، آنگاه $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

معمای فکری و منطقی

معمای ۱: در بانکی سه شغل صندوقدار، رئیس و تحویلدار به B، J و S، گرچه نه لزوماً به این ترتیب، داده شده است.
تحویلدار که نوجوانی بیش نیست، از همه کم‌تر حقوق می‌گیرد.
حقوق S، که با خواهر B ازدواج کرده، از مدیر بیش‌تر است.
شغل هریک چیست؟

معمای ۲: C، D و F زندگی خود را به عنوان نجّار، نقّاش و لوله‌کش، گرچه نه لزوماً به این ترتیب، می‌گذرانند.
اخیراً نقّاش از نجّار تقاضا کرد که کاری برای او انجام دهد؛ اما به او گفته شد، نجّار در کار تهیهٔ ماکتی برای لوله‌کشی است.
لوله‌کش بیش از نقاش درآمد دارد.
درآمد D بیش از C است.
F هرگز با D آشنا نبوده است.
شغل هریک چیست؟

پاسخ



تفریح اندیشه

جواب: $c=ab$.

حل: اگر مجموع دو ریشه، صفر باشد، ریشه‌ها قرینهٔ یکدیگرند. ریشه‌های معادله را s، ‎-s و t فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$x^3+ax^2+bx+c=(x-s)(x+s)(x-t)$$
$$=x^3-tx^2-s^2x+s^2t$$

بنابراین داریم $a=-t$ و $b=-s^2$ و $c=s^2t$، پس:

$$c=s^2t=(-b)(-a)=ab$$



غیاث الدین جمشید کاشانی

اسفندیار معتمدی

غیاث‌الدین جمشید که در نوشته‌های عربی و غربی او را «الکاشی» خوانده‌اند، در حدود سال ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به دنیا آمد. پدربزرگش طبیب، پدرش عالم و خودش بزرگ‌ترین ریاضیدان و اخترشناس قرن نهم هجری بود. گرچه عمرش کوتاه بود، ولیکن توانست آثاری ماندنی به صورت تألیف و تصنیف در موضوع‌های ریاضی و نجومی از خود به جای گذارد. او روز چهارشنبه ۱۹ ماه رمضان ۸۳۲ هجری قمری دعوت حق را لبیک گفت.

غیاث‌الدین تا سال ۸۰۸ هجری قمری در کاشان می‌زیست و به کارهای ریاضی و نجومی مشغول بود. در این سال، قاضی‌زاده رومی، منجم و ریاضیدان ترک (حدود ۷۶۶ تا حدود ۸۴۰) که برای ملاقات میرزا الغ‌بیک، پسر شاهرخ و نوهٔ امیرتیمور گورکانی، از بغداد به سمرقند می‌رفت، مسیرش از کاشان می‌گذشت، روزی در کاشان به دیدن غیاث‌الدین رفت. او را مردی هوشمند، ریاضیدانی دقیق و منجمی کاردان یافت و هنگامی که به سمرقند رسید، وصفش را برای میرزا الغ‌بیک، حاکم سراسر فرارودان (ماوراءالنهر)، بیان کرد.

الغ‌بیک، پسر شاهرخ میرزا و گوهرشاد خاتون، مردی دانشمند و بافرهنگ بود. شاهرخ و گوهرشاد خاتون برعکس تیمور، در عمران و آبادی ایران کوشیدند و بناهایی باشکوه چون «مسجد گوهرشاد» در جوار مرقد حضرت رضا(ع) ساختند. الغ‌بیک و برادرش بایسنقر نیز در ترویج علم و هنر و در تشویق دانشمندان و هنرمندان، بسیار کوشیدند. الغ‌بیک به ساخت رصدخانه‌ای در نزدیکی سمرقند، و بر بالای تپه‌ای، به نام «کوهک» که امروز «چوپان‌آتا» یا «چوپان عطا» خوانده می‌شود، فرمان داد و برای ادارهٔ امور این رصدخانه، غیاث‌الدین جمشید را با احترام فراوان از کاشان به سمرقند دعوت کرد.

غیاث‌الدین دعوت این فرمانروای خردمند را پذیرفت و در سال ۱۳۲۴ ق. ر به همراه خواهرزادهٔ خود،



مولانا معین‌الدین کاشی رهسپار سمرقند شد و مدیریت رصدخانه را برعهده گرفت.

خواندمیر، در کتاب گرانقدر «حبیب‌السیر» می‌نویسد: «در سنه ۸۲۴، آن خسرو بی مانند [الغ بیک] در وسط بلده فاخرهٔ سمرقند، مدرسه رفیع و خانقاهی منیع بنا نموده و همچنین فرمان داد استادکاران در آن بلده فردوس‌نشان رصدی بنیان نهادند و **بطلمیوس ثانی**، **مولانا غیاث‌الدین جمشید** و جامع کمالات انسانی، **مولانا معین‌الدین کاشی** در ترتیب آن نیا سعی و اهتمام دادند.»

یک سال پس از ورود کاشانی به سمرقند، بنای رصدخانه پایان یافت و او با دستیاری جمعی از اخترشناسان کار رصد ستارگان را آغاز کرد. الغ بیک که خود نیز از زمان کودکی به مطالعه ستارگان علاقه‌مند بود و در ریاضیات نیز دستی داشت، در کار رصد ستارگان همکاری می‌کرد و همواره مراتب سپاس خود را از غیاث‌الدین جمشید، در حضور مردم اعلام می‌کرد. این رصدخانه به تنظیم جدول رصد ستارگان، معروف به «زیج الغ بیک» پرداخت.

نامه‌های غیاث‌الدین به پدرش

هنگامی که غیاث‌الدین در سمرقند بود، برای پدرش در کاشان نامه می‌نوشت. دو نامه از این مجموعه در دست است که از مهم‌ترین و کامل‌ترین سندهای علمی در زبان فارسی هستند. در این نامه‌ها محیط علمی سمرقند، مسائل ریاضی و نجومی مطرح در آن زمان، وضع و موقعیت خود و بزرگواری و آزادمنشی الغ بیک را شرح داده است.

نامه‌ها در پاسخ به نامه‌های پدر بوده‌اند و اصطلاحاتی که در آن‌ها به کار رفته است، مشخص می‌کند که پدر نیز اهل علم و آشنا به امور رصد و ریاضی بوده است. در این نامه‌ها از الغ بیک به عنوان عضوی از گروه علمی رصدخانه، با احترامی شایسته نام می‌برد؛ عضوی که در جلسه‌ها حضور می‌یابد و شخصاً اظهار نظرهای علمی می‌کند. در زمان نوشتن این نامه‌ها، الغ بیک ۲۶ ساله بود و شوق فراوانی به یاد گرفتن و یاد دادن دانش ریاضی و نجوم داشت.

غیاث‌الدین از حضور ۶۰ تا ۷۰ نفر ریاضیدان سخن می‌گوید که در آن زمان در مدرسه سمرقند به کار ریاضی اشتغال داشتند. این ریاضیدانان در جلسه‌های بحث علمی که در دربار الغ بیک تشکیل می‌شدند، شرکت می‌کردند. قاضی‌زادهٔ رومی که معلم الغ بیک بود، از احترام خاصی برخوردار بود و توانسته بود در رونق بخشیدن به این محفل علمی و رصدخانهٔ سمرقند مؤثر باشد.

بخش‌هایی از نامهٔ دوم کاشانی به پدرش که هفتم ذی‌قعدهٔ سال ۸۲۴ یا ۸۲۷ قمری نوشته شده، با حذف‌هایی چنین است:

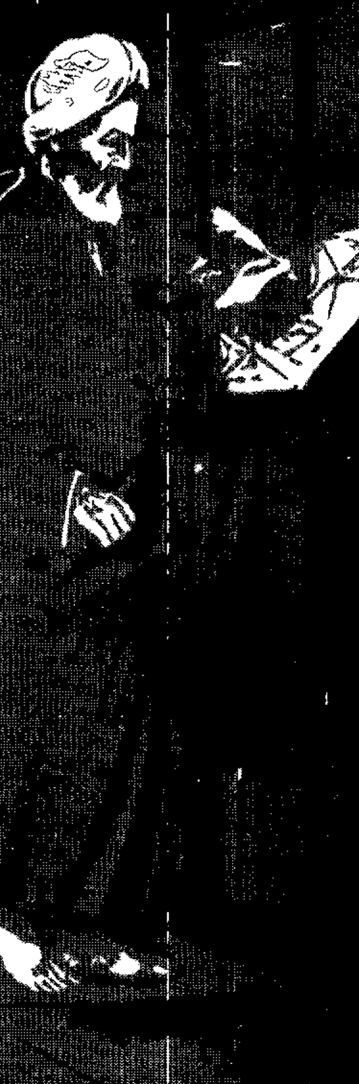
«... اکنون در خطهٔ سمرقند، حرسها الله عن الآفات، حضرت پادشاه اسلام، فرمانفرمای هفت اقلیم، دانشمند است...»

این معنی نه بر سبیل رسم ادب می‌گوید و می‌نویسد:

«... حقیقت آن که قرآن مجید اکثر یاد دارد و تفاسیر آن و سخن مفسران را در هر آیتی مستحضر است و هر دو روز، دو جزء به ورد می‌خواند به قرائت و حفاظ حاضر می‌باشند که هیچ غلط واقع نمی‌شود. نحو و صرف نیکو دانند و ترکیب عربی به غایت خوب می‌کنند و خوش نویسند و همچنین از فقه خیلی واقفند و از منطق و معانی بیان باخبر و از اصول به دستور و اقسام ریاضیات را خود تمام ورزیده‌اند.

و براهین بر اعمال نجومی نیکو بیرون می‌آرند و استنباط ضوابط می‌فرمایند که درس تذکره و تحفه چنان می‌گویند که هیچ مزیدی بر آن متصور نیست [تذکرهٔ نصیریه، کتاب خواجه **نصیرالدین توسی** و **تحفة‌الشاهیه**، کتاب **قطب‌الدین شیرازی**، هر دو در علم هیئت، کتاب‌های درسی زمان بودند و آن‌ها را الغ بیک، سلطان زمان درس می‌داده است].

و ثانیاً در سمرقند، اکنون اکثر علما جمعند و مدرسانی که در جمیع علوم درس می‌گویند، متعدد هستند و بیش‌تر به فن ریاضی مشغولند از آن جمله چهار نفر شرح **اشکال تأسیس** [کتابی است در هندسه از شمس‌الدین محمد بن اشرف حسینی سمرقندی] کرده‌اند و یکی شرح تجنیس حساب و یکی دیگر رساله نوشته در برهان



هندسی بر مسألهٔ خطائین و قاضی‌زادهٔ رومی که از آن‌ها همه اعلم است، شرح چغمینی و شرح اشکال تأسیس نوشته، و منجم و مستخرج، خود بسیارند [کتاب چغمینی تألیفی است به نام الملخص فی الهیه که محمودبن محمدبن عمر چغمینی خوارزمی، ریاضیدان و پزشک ایرانی در قرن هشتم هجری نوشته است].

و همچنین هر فن که هست، طلبه از ارباب آن بینهایت جمعند... هرچند روز بندگی حضرت سلطنت پناهی [الغ‌بیک]، در حلقهٔ درس حاضر می‌شوندو چون حاضر شدند، درس ریاضیات را مقدم می دارند. این بنده هم حاضر می‌شود.

چون آغاز بحث می‌شود، هر بار به عنایت الله تعالی و به یمن همت آن خداوند، این بنده دخلی کامل کرده، چنان که چند چیز که ایشان را از مطالعه معلوم نشده، گفته و اعتراضات وارد بر سخن ایشان کرده و نکته‌های لطیف بیرون آورده که همه حیران مانده‌اند.

و پیش از آمدن این بنده اشکالی چند ایشان را واقع شده بود و در میان یکدیگر انداختند و هیچ کس بیرون آوردن نتوانسته است. مثلاً خواسته بوده‌اند که اسطرلابی که یک گز قطر آن باشد، بسازند و هزار و بیست و دو ثوابت مرصوده را مجموع بر آن ثبت کنند. [۱۰۲۲ ستاره برابر تعداد ستارگانی است که در فهرست ستارگان محسطی، کتاب بطلمیوس موجود است.] به مطالع مهر آن‌ها احتیاج بوده و همه مستخرجات را فرموده‌اند که به اتفاق عمل کنند. قریب صدوپنجاه ثابته از آن بوده است که به طریقی که در زیج ایلخانی مذکور است و چنانچه ایشان فهم کرده‌اند، مطلوب حاصل نمی‌شد و درمانده بودند و چون این بنده رسید، در روز این مسأله در حضور حضرت سلطنت پناهی پیش آوردند و این بنده برخود هم در آن مجلس ... آن را تمام کرد.

دیگر خواسته بودند که بر سطح دیواری از سرای بندگی حضرت خلدالله ملکه و سلطانه مقیاسی [ساعت آفتابی] نصب کنند و خطوط ساعات مستویه بر آن رسم کنند. و چون سطح آن دیوار در سطح نصف‌النهار [شمالی ـ جنوبی] یا اول السموت [شرقی ـ غربی] نبود، مثل آن هرگز کسی نکرده بود، هیچ کس نتوانست کردن. بعضی گفته بودند در یکسال توان کرد... چون این بنده رسیده، فرمودند. بنده در یک روز تمام کرد. چنان که امتحان آن با اسطرلاب بزرگ کردند، موافق و مطابق بود.

و از تحسین‌های حضرت سلطنت پناهی که ذکر کرد، آن است که هیچ هفته نگذرد که بعضی دوستان به این بنده برسانند که بندگی حضرت سلطنت پناهی امشب یا امروز چنین و چنین نیکی‌ها فرمودند که فلانی بسیار مستحضر است و این مراتب را خوب می‌داند و از قاضی‌زاده بهتر می‌داند و از او مستحضرتر و پرماده‌تر است و در این فن تیزذهن‌تر؛ چیزی را که قاضی‌زاده به ده روز مشکل درمی‌یابد، مولانا غیاث‌الدین برخود در یک روز می‌یابد و جمیع اقسام این فن را می‌داند.

و نیز مرد نیک‌نفس و سلیم‌القلب است. هرکس از جنس موالی و غیره که پیش ما آمد، همین که ما او را اندک تربیتی کردیم، خود را نگاه نداشتند و با مردم جنگ می‌کردند و فضولی‌ها پیش می‌گرفتند. مولانا غیاث‌الدین با وجودی که انواع تربیت و عنایت در حق او فرمودیم و دایماً شرف مجاوره و مکالمه است و در این مدت هرگز با کسی نزاع نکرده. نه او از کسی و نه کسی از او گله کرد و سخن مردم را به عرض رسانیدن جهت طمع خود دخل نکرده و نیکو معاشی دارد و امثال این سخنان به کرات فرموده. الحمدلله علی ذلک و ذلک فضل الله یوتیه من یشاء.

مردم سال‌ها سعی نمایند تا معاش ایشان و هنر ایشان در پیش مردم هم‌جنس نیکو نماید. بلکه چنان کنند که پیش مردم بزرگ نیز نیکو نماید. بحمدالله و المنة که بعد از چندین مدت که در کنج خانه به سر برده بود، چون بیرون آمد، به چنان شهری معظم و چنین مردمی هنرمند وبه حضرت چنان پادشاهی هنرمند دانا و عالم ملتفت به حال مردم، مستنفر احوال خلایق رسید، به همین عنایت ازلی و سعادت لم‌یزلی و برکت همت آن خداوند چنان زیست که در آن حضرت مستحسن افتاد.

دیگر آنچه استنصار فرموده بودند که کار رصد به این بنده مفوض است یا شریکی دارد، عجب که آن خداوند بعد از چنین شهرت این استنصار فرموده بودند. حال آن که اگرچه آن جا مردم بسیار هستند که در ریاضیات دخلی دارند، اما هیچ کدام چنان نیستند که ایشان را از علمی و عملی رصد وقوفی باشد، چه هیچ کدام محیطی

نمی داند.

... حقا که لاف نمی زند و آن خداوند هم می داند که به عنایت الهی چنان در خود می بیند که به قوت استنصار علمی فن و عملی و قدرت در عملی مطلق که اگر بنده به دارالرصد درآید، از اول مدت تا آخر مدت تمامت اعمال بکند و زیج بیرون آرد که در هیچ مسأله رجوع به کتاب نکند، مگر حاصل او بساط روزی معین از رصد سابق که آن امر بقین است و تاریخ آن روز، و در رصد به آن احتیاج می باشد که تا تفاوت حاصل اوساط این رصد با این حاصل اوساط بگیرد و بر مدت مابین الرصدین قسمت کند تا مقدار حرکت معلوم شود و آن مجموع برابر دو ورق می توان نوشت.

زیاده اطناب نیارست نمود. ظلال عالی پاینده و مستدام باد. بندهٔ کم‌ترین، غیاث.»

تألیفات غیاث الدین جمشید

۱. رسالهٔ سُلم‌السماء (نردبان آسمان) یا رسالهٔ کمالیه، به زبان عربی، تألیف سال ۸۰۹ در کاشان. موضوع این رساله اندازهٔ زمین، ماه، خورشید، سیارات و ستارگان و فاصلهٔ آن‌ها از زمین است.

۲. **مختصر در علم هیئت**، اثری است به زبان فارسی که در سال ۸۱۳ یا پیش از آن در بیست باب نوشته شده و موضوع آن مسیرهای ماه و خورشید و ستارگان و سیارات و چگونگی حرکت آن‌هاست.

۳. **زیج خاقانی** اثری است به فارسی که آن را در سال ۸۱۶ کامل کرده و به میرزا الغ بیک، ملقب به «خاقان» تقدیم کرده است.

۴. رسالهٔ **شرح آلات رصد**، رساله‌ای است به فارسی، تألیف سال ۸۱۸ که در آن هشت ابزار نجومی شرح داده شده است.

۵. **نزهة‌الحدائق** که در سال ۸۱۸ به عربی نوشته و در آن دستگاهی به نام «طبق‌المناطق» را که خود اختراع کرده، شرح داده است. در سال ۸۲۹ در سمرقند پیوست‌هایی به آن اضافه کرد.

۶. **رسالهٔ محیطیه**، به زبان عربی که آن را در سال ۸۲۷ نوشته است. در این کتاب محاسبهٔ محیط دایره را به روش قدیم شرح داده است. نسخه‌ای از این اثر به خط خود کاشانی در کتابخانهٔ آستان قدس رضوی نگهداری می شود.

۷. **مفتاح‌الحساب**، به زبان عربی که آن را در سال ۸۳۰، دوسال پیش از فوتش نوشته است. این کتاب از تألیفات مهم دورهٔ اسلامی است و قرن‌ها در مدرسه‌ها و حوزه‌های علمیه تدریس می شود.

۸. رسالهٔ **وتر و جیب** به محاسبهٔ سینوس زاویهٔ یک درجه می پردازد. متن اصلی آن موجود نیست ولی از شرح‌هایی که بر آن نوشته شده‌اند، موضوع آن مشخص می‌شود.

۹. **زیج تسهیلات**، کتابی است که کاشانی در مقدمهٔ «مفتاح‌الحساب» از آن نام برده، ولی تاکنون از آن اثری به دست نیامده است.

همچنین، **رساله در ساخت اسطرلاب** (به فارسی)، **سمت قبله از دایرهٔ هندیه معروفه** (به عربی)، **تشریح پرگار** (به فارسی)، **مفتاح‌الارباب فی علم‌الزیج** و برخی آثار دیگر را نیز به کاشانی نسبت می دهند.

مهم‌ترین کار علمی غیاث‌الدین جمشید کاشانی محاسبهٔ عدد π، یعنی نسبت محیط دایره به قطر آن است. او مقدار 2π را در رسالهٔ محیطیه چنین محاسبه کرده است:

$$2\pi = ۶/۲۸۳۱۸۵۳۰۷۱۷۹۵۸۶۵$$

این مقدار تا حدود ۱۵۰ سال بعد از او دقیق‌ترین محاسبهٔ π بوده است.

کار مهم دیگر او محاسبهٔ جیب زاویهٔ یک درجه ($\sin 1^\circ$) است. مقداری که او به دست آورده، برابر است با:

$$\sin 1^\circ = ۰/۰۱۷۴۵۲۴۰۶۴۳۷۲۸۳۵۱۰۳۷۱۲$$

هفده رقم اعشاری از این عدد با آخرین محاسبات انجام شده، یکسان است.

منابع

۱. باقری، محمد. از سمرقند به کاشان. شرکت انتشارات علمی و فرهنگی. تهران. ۱۳۷۵.

۲. برگرن، جسی. ال. گوشه‌هایی از ریاضیات دوره اسلامی. ترجمه علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی. چاپ دوم. ۱۳۷۴.

۳. فرشاد، دکتر مهدی. تاریخ علم در ایران. امیرکبیر. ۱۳۶۶.

۴. قربانی، ابوالقاسم. زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی. مرکز نشر دانشگاهی. ۱۳۶۵.

۵. کاشانی نامه. مرکز نشر دانشگاهی. تهران. ۱۳۶۸.

۶. لواسانی نوابی، حمید. جمشید کاشانی. دفتر انتشارات کمک‌آموزشی. تهران. ۱۳۸۰.

۷. معتمدی، اسفندیار و دیگران. تاریخ علوم. وزارت آموزش و پرورش. تهران.

پرویز شهریاری



نمادهای ریاضی و اتحادها

در شماره‌ٔ قبل درباره‌ٔ تاریخچه اتحاد دو معادله و برخی اتحادها بحث کردیم. در ادامه مطلب چند نکته دیگر درباره اتحادها را مرور کرده‌ایم.

درباره‌ٔ اتحادها، باید به چند نکته اشاره کنیم. معمول است که در دبیرستان به چند اتحاد مهم، برای ساده کردن ضرب‌ها اشاره می‌شود. برخی عادت دارند اتحادها را به همان ردیفی که در کتاب درسی آمده‌اند، شماره گذاری کنند و برای نمونه، وقتی از اتحاد:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

گفت و گو می‌شود، بگویند «اتحاد سوم». در کتاب درسی ممکن است ردیف اتحادهایی که آورده‌اند، با هم فرق داشته باشند. «اتحاد سوم» هیچ معنایی ندارد، باید گفت، اتحادی است که حاصل ضرب دو عبارت مزدوج را به‌صورت تفاضل مربع‌های دو عبارت می‌دهد یا چیزی شبیه‌آن، که مضمون اتحاد را برساند. در واقع، تعداد اتحادها، بی‌نهایت است و به عنوان مثال، می‌توان از اتحاد عددی ۵=۵ یا کلی از آن $a = a$ صحبت کرد. یا فرض کنید، این اتحاد مورد نظر باشد:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$$

بسیاری می‌گویند: «اتحاد یک جمله مشترک» درست است دو عبارتی که در هم ضرب شده‌اند، یک جملهٔ مشترک (x) دارند؛ ولی توجه کنیم، این دو عبارتی که یک جملهٔ مشترک دارند، تشکیل اتحاد نمی‌دهند، اتحاد به معنای یک برابری است و در عبارت «اتحاد یک جملهٔ مشترک» نمی‌توان به این برابری پی برد. برای نمونه، خیلی وقت‌ها پیش می‌آید که از کسی پرسیده می‌شود: «$a^2 - b^2$ را تعریف کن» و او، بی‌هیچ تردیدی، پاسخ می‌دهد؛ این یک اتحاد مزدوج است. در دو جمله‌ای $a^2 - b^2$ هیچ برابری دیده نمی‌شود، در حالی که شرط نخست اتحاد، وجود یک برابری است. دوم، در کجای این عبارت، «مزدوج» را می‌بینید؟ برای «مزدوج» هم باید عبارت داشت که یک جملهٔ آن‌ها با هم برابر و جملهٔ

دیگر قرینهٔ هم باشند. پس این عبارت، نه اتحاد است و نه مزدوج. خیلی ساده می‌توان گفت: «$a^2 - b^2$ یک عبارت جبری است» یا دقیق‌تر از آن، «تفاضل دو مجذور کامل است». اگر بخواهیم واژهٔ اتحاد را به میان آوریم، می‌توان گفت: «این عبارت قابل تبدیل به صورت ضرب دو عبارت مزدوج هم است.» در ریاضیات، جمله‌ای را کامل می‌گوییم که از دید رضیات معنا داشته باشد و نتوان از جمله‌ای که به نام «تعریف» می‌آوریم، مفهوم دیگری استنباط کرد. برای مثال، «وقت طلاست»، ولی نه به آن اندازه که جملهٔ ما بی‌معنا باشد. تعریف باید «لازم و کافی» باشد؛ و آنچه منظورماست، از تعریف بیرون نیاید و در ضمن، به‌طور کامل، مفهوم مورد نظر ما را برساند.

این گونه رمزگونه صحبت کردن، کار ریاضیات نیست. برای نمونه، وقتی از معادله‌ای صحبت می‌کنید، نگویید «معلوم و مجهول می‌کنیم»، این جمله هیچ معنایی ندارد، بگویید: «جمله‌های معلوم را به یک طرف معادله و جمله‌های مجهول را به طرف دیگر معادله می‌بریم.»

وقتی از خارج قسمت دو کسر گفت‌وگو می‌کنید، از جملهٔ معنایی (یا دست کم غیر ریاضی) «دور در دور، نزدیک در نزدیک» استفاده نکنید، معنای ریاضی جملهٔ خود را بیان کنید: «برای تقسیم یک کسر بر کسر دیگر، بخشیاب را به‌طور وارون در بخشی ضرب می‌کنیم». اگر دو کسر با هم برابرند، نگویید: «طرفین، وسطین می‌کنیم»، بگویید «از ویژگی تناسب استفاده می‌کنیم» یا «دو طرف برابری را درحاصل ضرب مخرج‌ها، ضرب می‌کنیم».

راه اثبات اتحاد بودن: می‌خواهیم درستی این اتحاد را ثابت کنیم:

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) =$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

درستی این اتحاد را از راه‌های متفاوت می‌توان تحقیق کرد:

راه اول: اگر در سمت چپ برابری، عمل ضرب را انجام دهیم، به سمت راست می‌رسیم (خودتان ضرب را انجام دهید.)

راه دوم: اگر سمت راست برابری را بر $a+b+c$ تقسیم کنیم، پرانتز دوم سمت چپ برابری به دست می‌آید. این تقسیم را انجام می‌هیم؛ ابتدا باید بخشی (مقسوم) و بخشیاب (مقسوم‌علیه) را برحسب توان‌های نزولی یکی از حرف‌ها، و از جمله a منظم می‌کنیم:

بخشی $= a^3 + 0a^2 - 3bca + (b^3 + c^3)$,

بخشیاب $= a + (b+c)$

در بخشی جملهٔ $0a^2$ را برای مرتّب بودن توان‌های a و پیش‌گیری از اشتباه افزوده‌ایم. از تقسیم a^3 بر a، نخستین جملهٔ خارج قسمت، یعنی a^2 به‌دست می‌آید. از ضرب a^2 در دو جملهٔ بخشیاب ($b+c$ را یک جمله به حساب آورده‌ایم، به همین مناسبت آن‌را داخل پرانتز نوشته ایم)، نتیجه می‌شود:

$$a^3 + (b+c)a^2$$

که اگر آن‌را از بخشی کم کنیم، باقی‌ماندهٔ اول به دست می‌آید:

$$-(b+c)a^2 - 3bca + b^3 + c^3$$

از تقسیم $-(b+c)a^2$ بر a، دومین جملهٔ خارج قسمت، یعنی $-(b+c)a$ پیدا می‌شود، که از ضرب آن دربخشیاب پیدامی‌شود:

$$-(b+c)a^2 - (b+c)^2 a$$

آن را از ماندهٔ اول کم می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$(b^2 + c^2 - bc)a + b^3 + c^3$$

از تقسیم نخستین جملهٔ باقی‌ماندهٔ دوم بر a به‌دست می‌آید:

$$b^2 + c^2 - bc$$

که جملهٔ سوم خارج قسمت است. آن‌را در بخشیاب ضرب می‌کنیم:

$$(b^2+c^2-bc)a+(b^2+c^2-bc)(b+c)$$

یا اگر پرانتزهای آخر را درهم ضرب کنیم:

$$(b^2+c^2-bc)a+b^3+c^3$$

جملهٔ سوم خارج قسمت برابر (b^2+c^2-bc) می‌شود، که اگر حاصل ضرب آن‌را بر بخشیاب، از باقی‌ماندهٔ دوم کم کنیم، باقی‌مانده‌ای برابر صفر به‌دست می‌آید. بنابراین تقسیم بدون باقی‌مانده است:

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

و به این ترتیب، درستی اتحاد ثابت شد.

راه سوم: اگر a را در این برابری مجهول بگیریم، معادله‌ای از درجهٔ سوم به‌دست می‌آید. هر معادلهٔ درجهٔ n، حداکثر دارای n ریشهٔ حقیقی است و اگر معادله‌ای بیش‌تر از درجهٔ خود ریشه داشت، دیگر معادله نیست، بلکه اتحاد است. می‌توان آزمایش کرد که این برابری برای $a=0$، $a=-b$، $a=-c$ و $a=-b-c$ برقرار است. وقتی معادلهٔ درجهٔ سوم، دارای چهار ریشهٔ حقیقی باشد، اتحاد است.

استفاده از ویژگی‌های معادله در اثبات اتحادها

معادله، هستهٔ مرکزی و مضمون اصلی جبر مقدماتی را تشکیل می‌دهد. واژهٔ «جبر» با توجه به همین مضمون انتخاب شده است. در تاریخ ریاضیات، محمد فرزند موسا مشهور به خوارزمی، ریاضی‌دان ایرانی سدهٔ سوم هجری را به‌وجود آورندهٔ جبر می‌دانند. این ریاضی‌دان، در دورهٔ ریاضیات کاربردی به سر می‌برد و برای حلّ مسأله‌هایی که ناشی از تقسیم ارث و عمل کردن به وصیت‌ها بود، در «حساب» روش تازه‌ای آورد و آن را «جبر و مقابله» نامید. او «جبر» را به معنای «جبران کردن» و انتقال از یک سمت معادله به سمت دیگر می‌دانست (عملی که در واقع، موجب مثبت شدن عدد منفی می‌شود) و «مقابله» را به معنای «مقابل قراردادن» در سمت معادله می‌دانست. اروپائیان واژهٔ «جبر» را به صورت الجبر نگه داشتند و واژهٔ «مقابله» را حذف کردند.

دربارهٔ معادله و ویژگی آن، بعد از این صحبت خواهیم کرد و دراین جا تنها به کاربرد ویژگی‌های معادله در اثبات اتحادها می‌پردازیم.

نمونهٔ اول: درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$a^2\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2$$

حل: البته می‌توان درستی این اتحاد را، با تحمل اندکی محاسبه‌های طولانی، با جمع سه کسر سمت چپ و ساده کردن آن، ثابت کرد؛ ولی ساده‌ترین راه این است که از برهان خُلف استفاده کنیم. اگر این برابری یک معادله باشد (ونه اتحاد)، به دلیل درجهٔ دوم بودن آن نسبت به x، باید حداکثر دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد؛ در حالی که به سادگی می‌توان تحقیق کرد، اگر به جای x، مقدارهای a، b و c را قرار دهیم، در برابری صدق می‌کنند. یک معادلهٔ درجهٔ دوم، نمی‌تواند سه ریشهٔ حقیقی داشته باشد. البته در این میان، a، b و c را برابر نمی‌گیریم و مخالف صفر فرض می‌کنیم.

برای نمونه، برای $x=a$، در سمت چپ برابری، کسر اول برابر a^2 و دو کسر دیگر برابر صفر می‌شوند، سمت راست برابری برابر a^2 می‌شود؛ یعنی $x=a$ ریشه‌ای از این معادله است. به همین ترتیب، برای $x=b$ و $x=c$ هم می‌توان آزمایش کرد. اکنون معادلهٔ درجه دوم ما دارای سه جواب می‌شود، بنابراین معادله نیست، یک اتحاد است.

نمونهٔ دوم: می‌خواهیم دربارهٔ درستی این اتحاد تحقیق کنیم:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$$

حل: در این‌جا باید a، b و c طوری باشند که هیچ دو تایی از آن‌ها با هم برابر صفر نشوند. برابری برای $x=a$، $x=b$ و $x=c$ برقرار است، بنابراین نمی‌تواند معادله باشد؛ زیرا اگر معادله باشد، به دلیل درجهٔ دوم بودن آن، نباید بیش از دو ریشهٔ حقیقی داشته باشد.

نمونهٔ سوم: چرا این برابری، یک اتحاد است؟

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$$

به شرط این که از سه عدد a، b و c، هیچ دوتایی قرینهٔ هم نباشند.

حل: عبارت سمت چپ برابری را می‌توان این طور نوشت:

$$\frac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}\big[(a-b)(a+c)(b+c)+(a+c)(a+b)(b-c)+(a+b)(c-a)(b+c)+(a-b)(b-c)(c-a)\big]$$

عبارت داخل کروشه، نسبت به a، از درجهٔ دوم است؛ ولی برای $a=b$ و $a=c$ و $a=0$ برابر صفر می‌شود؛ در نتیجه عبارت مفروض، متحد با صفر است.

نمونهٔ چهارم: درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}=0$$

راهنمایی. شبیه تمرین قبل عمل کنید. بعد از مخرج مشترک گرفتن، عبارت صورت کسر نسبت به a، از درجهٔ دوم است و برای $a=-b$، $a=c$ و $a=0$ برابر صفر

می‌شود؛ یعنی این، یک اتحاد است.

یک نمونهٔ دیگر (اتحاد مثلثاتی). درستی این برابری را ثابت کنید.

$$\tan\sum_{k=1}^{4n+1}\arctan\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=4n+2$$

حل: به ترتیب داریم:

$$\sum_{k=1}^{4n+1}\arctan\frac{k^2+k+2}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{4n+1}\left(\arctan 1+\arctan\frac{1}{k^2+k+2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+\sum_{k=1}^{4n+1}\big(\arctan(k+1)+\arctan k\big)$$

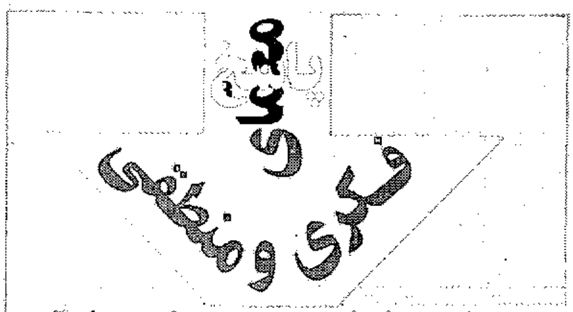
$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+\arctan(4n+2)-\arctan 1$$

$$=\frac{\pi}{4}(4n+1)+\arctan\frac{4n+1}{4n+3}$$

بنابراین:

$$\tan\sum_{k=1}^{4n+1}\arctan\frac{k^2+k+2}{k^2+k}$$

$$=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\arctan\frac{4n+1}{4n+3}\right)=\frac{1+\frac{4n+1}{4n+3}}{1-\frac{4n+1}{4n+3}}=4n+2$$



جواب معمای ۱:

B: رئیس

J: تحویلدار

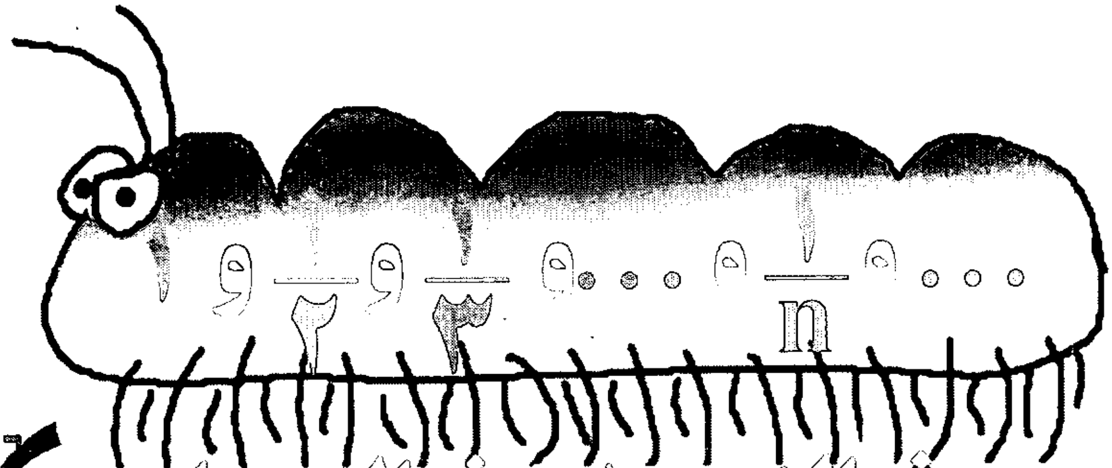
S: صندوقدار

جواب معمای ۲:

C: نجّار

D: نقّاش

F: لوله‌کش



دنباله، حد دنباله ها

سید محمدرضا هاشمی موسوی

اشاره

در شماره قبل به معرفی دنباله به عنوان یک تابع پرداختیم، همچنین تصور شهودی دربارهٔ حد دنبالهٔ عددی و تعریف حد دنباله را بیان کردیم، در ادامهٔ مطلب قضیه یکتایی حد دنباله‌دار و چند نکته دیگر بررسی شده است.

قضیهٔ یکتایی حدّ دنباله: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به سمت حدّی مثل a میل کند، دنبالهٔ $\{a_n\}$ به سمت عدد دیگری مثل b میل نخواهد کرد. بیان ریاضی این قضیه چنین است:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow a = b$$

نکته: نباید همیشه گمان کرد که هر دنباله‌ای، دارای حد است؛ زیرا دنباله هایی وجود دارند که با این که همهٔ جمله های آن‌ها محدود و معین هستند، ولی دارای حدی نیستند. به طور مثال، دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = (-1)^n$ را در نظر می گیریم. با وجود این که برای همهٔ جمله های آن داریم $|a_n| \le 1$، ولی بی‌نهایت جمله برابر ۱- و بی‌نهایت جمله برابر ۱ موجود است.

تعریف: اگر a_n و a_{n+1} دو جملهٔ متوالی یک دنباله باشند:

۱) دنباله را صعودی (یکنوا) گویند؛ هرگاه داشته باشیم:

$$a_{n+1} \ge a_n$$

۲) دنباله را صعودی اکید (یکنوای اکید) گویند؛ هرگاه داشته باشیم:

$$a_{n+1} > a_n$$

برای مثال، دنبالهٔ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$، صعودی اکید (یکنوای اکید) است؛ زیرا همیشه $a_{n+1} > a_n$ برقرار است.

تذکر: دنبالهٔ صعودی یا نزولی را دنبالهٔ یکنوا و دنبالهٔ صعودی اکید یا نزولی اکید را دنبالهٔ یکنوای اکید گویند.

مثال. دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{1}{n}\right\}$ یک دنبالهٔ نزولی اکید است؛ زیرا همیشه داریم:

$$a_{n+1} < a_n$$

نکته: دنبالهٔ یکنوا، تنها می تواند از یک سمت (راست یا چپ)، به حدّ خود نزدیک شود.

تعریف: اگر برای دنبالهٔ $\{a_n\}$، عددی حقیقی مثبت مثل k وجود داشته باشد، به طوری که برای هر n طبیعی داشته باشیم $|a_n| < k$، دنباله را کراندار، در غیر این صورت آن را **بی کران** می نامند.

قضیه: دنبالهٔ یکنوای صعودی $\{a_n\}$، وقتی کران بالایی حقیقی مثل a داشته باشد، دارای حدّی معین و محدود و برابر a است:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

نکته: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$، یکنوای صعودی باشد، ولی کران بالا نداشته باشد، خواهیم داشت:

$$\text{حد}_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

همچنین، اگر دنبالهٔ $\{t_n\}$، یکنوای نزولی باشد، ولی کران پایین نداشته باشد، خواهیم داشت:

$$\text{حد}_{n\to\infty} t_n = -\infty$$

مثال. دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{2^n}{n!}\right\}$، دارای جمله‌های زیر است:

$$2 \text{ و } 2 \text{ و } \frac{4}{3} \text{ و } \frac{2}{3} \text{ و } \dots \text{ و } \frac{2^n}{n!} \text{ و } \dots$$

عدد ۲ کران بالای این دنباله و یکی از کران پایین آن، عدد صفر است؛ درنتیجه دنباله کراندار است. این دنباله یکنوای نزولی است؛ زیرا داریم $a_1 = a_2 > a_3 > a_4 > \cdots$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ همیشه داریم: $a_{n+1} \le a_n$.

مسأله. آیا دنبالهٔ $\left\{a_n = (1+\frac{1}{n})^n\right\}$ دارای حدّی است؟

$(n \in \mathbb{N})$

حل: با توجه به بسط دوجمله‌ای $(1+\frac{1}{n})^n$:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\times 2}.\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}.\frac{1}{n^n}$$

و یا:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

واضح است که $a_{n+1} > a_n$؛ بنابراین، دنباله، صعودی اکید است.

حال در این جا، کراندار بودن دنباله را ثابت می‌کنیم. برای این منظور، نابرابری بدیهی زیر را می‌نویسیم:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

(جملهٔ اوّل دنباله، برابر ۲ است)

$$n = 1: a_1 = (1+\frac{1}{1})^1 = 2$$

همچنین:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

درنتیجه:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

پس:

$$n \in \mathbb{N}:\ 2 < a_n = (1+\frac{1}{n})^n < 3$$

بنابراین، دنباله دارای حدّی است و حدّ این دنباله را با نماد e (پایهٔ لگاریتم طبیعی) نشان می‌دهیم:

$$e = \text{حد}_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$$

عدد e به **عدد اویلر** مشهور است و عددی گنگ و غیر جبری است و در آنالیز کاربرد فراوانی دارد و مقدار آن چنین است:

$e \approx 2/718281828 4\cdots$

مثال. تابع t با ضابطهٔ $t(n) = \frac{n-1}{n}$ و فرض $n \in \mathbb{N}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$t_1 = 0,\ t_2 = \frac{1}{2},\ t_3 = \frac{2}{3},\ t_4 = \frac{3}{4},\ t_5 = \frac{4}{5}, \dots, t_n = \frac{n-1}{n}, \dots$$

حال اگر عددهای به‌دست آمده را به دنبال هم بنویسیم، دنبالهٔ زیر تشکیل می‌شود:

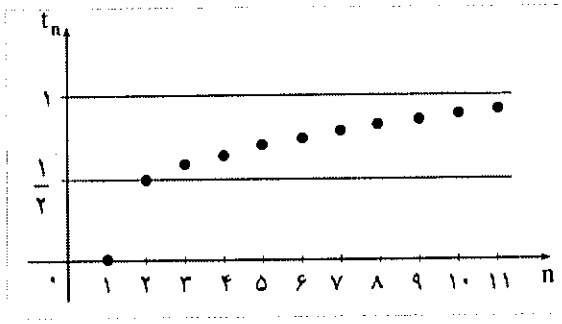
$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$$

نمایش دیگری از تابع t، به صورت مجموعه‌ای از

زوج‌های مرتّب است:

$$t=\left\{(۱,۰),\ (۲,\frac{۱}{۲}),\ (۳,\frac{۲}{۳}),\ (۴,\frac{۳}{۴}),\cdots,(n,\frac{n-۱}{n}),\cdots\right\}$$

در این جا، برای درک شهودی دنباله، نمودار قسمتی از آن را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، می‌بینیم که هر اندازه n بزرگ‌تر اختیار شود، جمله‌های دنباله به عدد ۱ نزدیک‌تر خواهد شد. بنابراین، می‌توان t_n را به عدد ۱ به اندازهٔ دلخواه نزدیک کرد؛ به شرطی که عدد n را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم.

به عنوان مثال، برای $n=۱۰۰$، به‌دست می‌آید:

$$t_{۱۰۰}=\frac{۹۹}{۱۰۰}=۰/۹۹ .$$

همچنین:

$$n=۱۰۰۰۰:\ t_{۱۰۰۰۰}=\frac{۹۹۹۹}{۱۰۰۰۰}=۰/۹۹۹۹$$

$$n=۱۰^۶:\ t_{۱۰^۶}=\frac{۹۹۹۹۹۹}{۱۰^۶}=۰/۹۹۹۹۹۹$$

.

.

.

$$n=۱۰^k:\ t_{۱۰^k}=\frac{\overbrace{۹۹۹\cdots۹}^{k\ \text{مرتبه}}}{۱۰^k}=\overbrace{۰/۹۹۹\cdots۹}^{k\ \text{مرتبه}}$$

واضح است که اگر $n>۱۰۰$، آن‌گاه هر یک از جمله‌های دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؛ به تعبیری دیگر، جمله‌های دنباله، نزدیک عدد ۱ تجمّع خواهند کرد و به بیان ریاضی: «جمله‌های دنباله، در همسایگی عدد ۱ واقع می‌شوند.»

با این شرایط، بدیهی است که این دنباله به عدد ۱، همگرا خواهد شد.

در این جا، می‌توان به این نتیجه رسید که حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{n-۱}{n}\right\}$، برابر عدد ۱ است یا به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

$$n\in\mathbb{N}:\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{n-۱}{n}\right)=۱$$

می‌بینیم که هر جملهٔ این دنباله، از عدد ۱ کوچک‌تر است. حال می‌خواهیم t_n را به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک کنیم تا اختلاف بین عدد ۱ و t_n از عددی مثل $\frac{۱}{۱۰۰}$ کم‌تر باشد، با نماد ریاضی، این مطلب را چنین می‌نویسند:

$$n\in\mathbb{N}: ۱-t_n<\frac{۱}{۱۰۰};\ ۱-\frac{n-۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰} \qquad (۱)$$

واضح است که حلّ این مسأله، به انتخاب n بستگی پیدا می‌کند؛ یعنی n را برابر چه عددی بگیریم تا نامعادلهٔ (۱) به یک نابرابری ثابت (همیشه درست) تبدیل شود. برای این منظور، کافی است نامعادلهٔ (۱) را حل کنیم:

$$۱-\frac{n-۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰};\ \frac{n-n+۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰};\ \frac{۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰};\ n>۱۰۰$$

بنابراین، اگر $n\geq۱۰۱$، آن‌گاه t_n به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک می‌شود که داشته باشیم:

$$۱-t_n<\frac{۱}{۱۰۰}$$

اکنون مسأله را برای عدد مثبت دلخواهی مثل ξ (اپسیلن) طرح می‌کنیم؛ یعنی می‌خواهیم t_n را به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک کنیم که داشته باشیم:

$$n\in\mathbb{N}:\ ۱-t_n<\xi;\ ۱-\frac{n-۱}{n}<\xi \qquad (۲)$$

در این جا نیز، حلّ مسأله، به انتخاب n بستگی دارد؛ یعنی n را بر حسب ξ چگونه در نظر بگیریم تا نامعادلهٔ (۲) به یک نابرابری ثابت (همیشه درست) تبدیل شود؟ برای این منظور، کافی است نامعادلهٔ (۲) را حل کنیم:

$$۱-\frac{n-۱}{n}<\xi;\ \frac{n-n+۱}{n}<\xi;\ \frac{۱}{n}<\xi;\ n>\frac{۱}{\xi}$$

با توجه به $0 < \xi$ و با در نظر گرفتن این‌که $\frac{1}{\xi}$ ممکن است یک عدد طبیعی نباشد، بهتر است از عبارت $\left[\frac{1}{\xi}\right]$ که حاصل آن همیشه یک عدد طبیعی است، استفاده کنیم. بنابراین با فرض $M \in \mathbb{N}$ و $M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1$ و برای هر $0 < \xi$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود دارد؛ به‌طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow 1 - t_n < \xi \qquad (3)$$

زیرا، با توجه به $M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1$، می‌توان نوشت:

$$n \ge M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1 > \frac{1}{\xi} \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{n} < \xi$$

$$\Rightarrow \frac{n-n+1}{n} < \xi \Rightarrow 1 - \frac{n-1}{n} = 1 - t_n < \xi$$

در این‌جا، ثابت می‌شود که رابطهٔ (۳) یک گزارهٔ شرطی همیشه درست (استلزام منطقی) است. اکنون می‌توان مفهوم مطالب اخیر را به طریق ریاضی بیان کرد:

$$n \in \mathbb{N}: \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(\frac{n-1}{n}\right) = 1 \qquad (4)$$

رابطه‌های (۳) و (۴)، درواقع مفهوم واحدی را می‌رسانند؛ زیرا هر دو بیان می‌کنند که «حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ برابر عدد ۱ است».

دنبالهٔ همگرا

اگر L یک عدد حقیقی ($L \in \mathbb{R}$) و حدّ دنبالهٔ $\{a_n\}$ برابر L باشد، در اصطلاح می‌گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ به عدد L همگراست. به بیان دیگر، اگر برای هر $0 < \xi$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود داشته باشد، به‌طوری که گزارهٔ شرطی زیر برقرار باشد:

$$n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \xi \qquad (1)$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$n \in \mathbb{N}: \underset{n\to\infty}{\text{حد}} (a_n) = L \qquad (2)$$

همچنین، اگر رابطهٔ (۲) برقرار باشد با استفاده از علائم ریاضی $\forall$ (هرچه باشد) و $\exists$ (وجود دارد) می‌توان آن را به صورت ریاضی تعبیر کرد:

$$\forall \xi > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}: \ n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \xi$$

مثال. ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{4n+3}{n}$، $n \in \mathbb{N}$، به عدد ۴ همگراست:

$$n \in \mathbb{N}: \underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n = 4$$

حل: بنا به تعریف همگرایی، کافی است ثابت کنیم که رابطهٔ شرطی زیر، همیشه درست است:

$$\forall \xi > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}: \ n \ge M \Rightarrow |a_n - 4| < \xi \qquad (1)$$

در این‌جا، برای تعیین رابطهٔ بین n و ξ، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$|a_n - 4| = \left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| = \left|\frac{4n+3-4n}{n}\right| = \left|\frac{3}{n}\right| \overset{n \in \mathbb{N}}{=\!=} \frac{3}{n} < \xi$$

بنابراین، رابطهٔ بین n و ξ، چنین است:

$$n > \frac{3}{\xi}$$

با توجه به $0 < \xi$ و با در نظر گرفتن این‌که $\frac{3}{\xi}$ ممکن است یک عدد طبیعی نباشد، بهتر است از عبارت $\left[\frac{3}{\xi}\right]$ که حاصل آن همیشه یک عدد طبیعی است، استفاده کنیم. بنابراین با فرض $M \in \mathbb{N}$ و $M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1$، برای هر $0 < \xi$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود دارد؛ به‌طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow |a_n - 4| < \xi$$

زیرا، با توجه به $M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1$، می‌توان نوشت:

$$n \ge M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1 > \frac{3}{\xi} \Rightarrow n > \frac{3}{\xi} \Rightarrow \frac{3}{n} < \xi \Rightarrow \frac{3}{n} \overset{n \in \mathbb{N}}{=\!=} \left|\frac{3}{n}\right| < \xi$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3}{n}\right| = \left|\frac{4n+3-4n}{n}\right| = \left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| = |a_n - 4| < \xi$$

در این‌جا، ثابت می‌شود که همیشه از فرض $n \ge M$،

می‌توان حکم $|a_n - 4| < \xi$ را نتیجه گرفت، پس رابطهٔ (۱) یک همیشه درست است.

توجه: دنبالهٔ $\{a_n\}$ را وقتی کراندار گوییم که کران پایین و کران بالای آن وجود داشته باشد.

مثال. دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{n+1}{2n-1}\right\}$ را در نظر می‌گیریم.

جمله‌های این دنباله چنین است:

$$2, 1, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \dots, \frac{n+1}{2n-1}, \dots$$

به سادگی ثابت می‌شود:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}$$

بنابراین، یکی از کران پایین این دنباله، عدد $\frac{1}{2}$ است و هر عدد کوچک‌تر یا معادل $\frac{1}{2}$ را نیز، می‌توان یک کران پایین این دنباله منظور کرد.

به همین ترتیب، عدد ۲، یکی از کران بالای این دنباله است و هر عدد بزرگ‌تر یا معادل ۲ را نیز، می‌توان یک کران بالای این دنباله منظور کرد.

در این دنباله، عدد $\frac{1}{2}$ را بزرگ‌ترین کران پایین و عدد ۲ را کوچک‌ترین کران بالای دنبالهٔ $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ می‌گوییم.

توجه: در این صورت، بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالای دنبالهٔ $\{a_n\}$، یکتاست.

دنبالهٔ واگرا: اگر دنباله‌ای همگرا نباشد، واگراست؛ یعنی اگر حدّ دنبالهٔ $\{a_n\}$، وقتی n به بی‌نهایت میل کند، برابر عددی حقیقی مانند L نباشد، دنبالهٔ $\{a_n\}$ را واگرا می‌نامیم.

مسأله. ثابت کنید حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$، برابر صفر است:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$$

حل: کافی است ثابت کنیم، برای هر $\xi > 0$، عددی طبیعی مثل M وجود دارد که رابطهٔ شرطی زیر همیشه درست باشد:

$$\forall \xi > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}: \ n \ge M \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi \qquad (1)$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \xi \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow M \ge \frac{1}{\xi}$$

پس، کافی است $M \ge \frac{1}{\xi}$ اختیار شود تا رابطهٔ شرطی (۱)، به یک رابطهٔ همیشه درست تبدیل شود؛ زیرا:

$$n \ge M \ge \frac{1}{\xi} \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{n} < \xi \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi$$

بنابراین همیشه از فرض $M \ge \frac{1}{\xi}$، می‌توان حکم $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi$ را نتیجه گرفت.

مسأله. ثابت کنید دنبالهٔ $\{n^2\}$ واگراست.

حل: از آن‌جا که جمله‌های دنبالهٔ $\{n^2\}$ به طور مرتّب افزایش می‌یابند، به همین دلیل نمی‌توانند در ξ همسایگی هیچ عدد حقیقی قرار گیرند؛ زیرا اگر فرض کنیم دنباله همگرا و حدّ آن L باشد، برای $\xi = 1$، باید بتوانیم عددی طبیعی مثل M بیابیم که رابطهٔ شرطی زیر همیشه برقرار باشد:

$$n \ge M \Rightarrow |n^2 - L| < 1$$

یا:

$$n \ge M \Rightarrow L - 1 < n^2 < L + 1$$

و این غیرممکن است؛ زیرا مجموعهٔ عددهای طبیعی، کراندار نیست.

قضیه: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه حدّ آن یکتاست.

اثبات: فرض کنیم دنباله دارای دو حدّ L_1 و L_2 باشد، چون $\lim_{n\to\infty} a_n = L_1$، بنابراین عدد طبیعی M_1 وجود دارد؛ به‌طوری که رابطهٔ شرطی زیر برقرار باشد:

و چون $\lim_{n\to\infty} a_n = L_2$، عدد طبیعی M_2 نیز وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \frac{\xi}{2}$$

پس، برای هر $n \ge M$ که $M = \max\{M_1, M_2\}$، خواهیم داشت:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2|$$
$$\le |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi$$

یعنی $0 \le |L_1 - L_2| < \xi$ ، پس داریم $|L_1 - L_2| = 0$ یا $L_1 = L_2$.

بنابراین، دنبالهٔ همگرا تنها یک حدّ دارد.

تمرین

۱ . نشان دهید که هر دنبالهٔ همگرا، کراندار است.

۲ . ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{1 + \frac{(-1)^n}{n}\right\}$ غیر یکنوا، کراندار و همگراست.

مسأله. نشان دهید دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ واگراست.

حل: برای اثبات واگرایی، کافی است نشان دهیم جمله‌های دنباله نمی‌توانند در ξ همسایگی هیچ عدد حقیقی قرار گیرند.

اگر فرض کنیم که دنبالهٔ همگرا و حدِّ آن برابر L باشد، برای $\xi = \frac{1}{2}$ باید عدد طبیعی M را بیابیم؛ به‌طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow |(-1)^n - L| < \frac{1}{2}$$

می‌دانیم که اگر $n \ge M$ زوج باشد:

$$|1 - L| < \frac{1}{2} \qquad (1)$$

واگر $n \ge M$ فرد باشد:

$$|-1 - L| < \frac{1}{2};\ |1 + L| < \frac{1}{2} \qquad (2)$$

ولی در این‌جا، با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و استفاده از نابرابری مثلث، به تناقض زیر می‌رسیم:

$$2 = |1 - L + 1 + L| < |1 - L| + |1 + L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;\ 2 < 1$$

این تناقض، نشان می‌دهد که هیچ عدد حقیقی مثل L، همزمان نمی‌تواند در دو رابطهٔ (۱) و (۲) صدق کند. بنابراین، دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ واگراست.

تمرین. نشان دهید دنباله‌های $\{2n\}$ ، $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ ، $\left\{\frac{n^2 + n}{2n + 1}\right\}$ ، $\{\sqrt{n}\}$ و $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}\right\}$ ، همگی واگرا هستند؛ یعنی حدِّ هیچ یک از این دنباله‌ها برابر عددی حقیقی مانند L نمی‌شود.

برخی از ویژگی‌های حدِّ دنباله‌ها

۱ . اگر $\{a_n\}$ را دنباله‌ای همگرا فرض کنیم (یعنی دارای حدّ باشد) و حدّ آن را برابر عدد حقیقی L در نظر بگیریم، در صورتی که c عدد ثابتی باشد، دنبالهٔ $\{c.a_n\}$ هم همگراست:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(c.a_n) = c(\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n) = c.L$$

۲ . اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ، دنباله‌هایی همگرا باشند و L_1 و $L_2 \in \mathbb{R}$ و داشته باشیم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n = L_1\ ,\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}} b_n = L_2$$

الف) آن‌گاه دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ هم همگرا هستند:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(a_n \pm b_n) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n \pm \underset{n\to\infty}{\text{حد}} b_n = L_1 \pm L_2$$

ب) آن‌گاه دنبالهٔ $\{a_n.b_n\}$ هم همگراست:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}(a_n.b_n) = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n . \underset{n\to\infty}{\text{حد}} b_n = L_1.L_2$$

ج) آن‌گاه با فرض $b_n \ne 0$ و ، دنبالهٔ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ هم همگراست:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\underset{n\to\infty}{\text{حد}} a_n}{\underset{n\to\infty}{\text{حد}} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$$

تمرین. اگر $a_n = (-1)^n$ و $b_n = (-1)^{n+1}$ ، تعیین کنید از دنباله‌های $\{a_n - b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ، کدام همگراست.



مجانب ها

احمد قندهاری

شاخهٔ بی‌نهایت منحنی

می گوییم منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است ؛ هرگاه نقطه یا نقاطی روی نمودار تابع f وجود داشته باشد که لااقل یکی از مختصات آن‌ها به سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال۱ . منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = x^2 + x$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است ؛ زیرا:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

مثال۲ . منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x-1}{x-4}$ دارای شاخه بی‌نهایت است ؛ زیرا:

$$x \to 4 \Rightarrow \lim \frac{x-1}{x-4} = \infty \text{ یا } y \to \infty$$

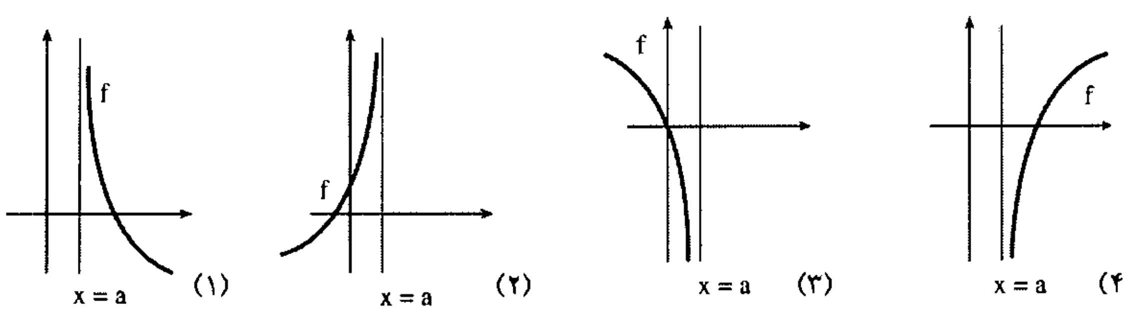
مثال۳ . منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $y = \frac{x^2+1}{x}$ دارای شاخه بی‌نهایت است ؛ زیرا: $x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$

تعریف خط مجانب

هرگاه نمودار (C) نمایش تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت باشد، خط (D) را مجانب آن شاخهٔ منحنی گوییم؛ هرگاه: فاصلهٔ نقطهٔ متغیر M روی آن شاخه تا خط D، وقتی نقطهٔ M روی آن شاخه بی‌نهایت دور شود، به سمت صفر میل کند.

۱. مجانب قائم

به چهار شکل زیر توجه کنید.



در شکل (۱) داریم: $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to +\infty$

در شکل (۲) داریم: $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to +\infty$

در شکل (۳) داریم: $x \to a^- \Rightarrow f(x) \to -\infty$

در شکل (۴) داریم: $x \to a^+ \Rightarrow f(x) \to -\infty$

در هر چهار شکل، خط به معادلهٔ $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوییم.

تعریف: اگر در تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ داشته باشیم: $x \to a^+$ یا $x \to a^-$، آن‌گاه $y \to +\infty$ یا $y \to -\infty$، در این صورت خط به معادلهٔ $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f گوییم.

تذکر۱. در چهار شکل بالا، تابع f در $x = a$ تعریف نشده است؛ یعنی اگر $x = a$، آن‌گاه y وجود ندارد؛ ولی اگر $x \to a$، آن‌گاه $y \to +\infty$ یا $y \to -\infty$.

مثال۴. تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ را در نظر می‌گیریم. در این تابع داریم: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

و اگر $x \to 2$، آن‌گاه $y \to \pm\infty$، پس بنا به تعریف، خط به معادلهٔ $x = 2$ مجانب قائم نمودار تابع f است و $x = 2$ در دامنهٔ تعریف تابع نیست.

حال تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$ را در نظر می‌گیریم.

در این تابع داریم: $D_f = [1, +\infty) - \{2\}$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$ یا $x = -2$

$x \to 2 \Rightarrow y \to \pm\infty$

پس خط به معادلهٔ $x = 2$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

در این تابع، x نمی‌تواند به سمت ۲- میل کند؛ زیرا هیچ یک از دو طرف ۲-، در دامنهٔ تعریف تابع واقع نیست.

تذکر۲. اگر خط به معادلهٔ $x = a$ مجانب قائم نمودار یک تابع مانند f باشد، آن‌گاه $x = a$ عضو دامنه نیست؛ ولی لااقل a^+ یا a^- باید عضو دامنهٔ f باشند.

مثال۵. تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ را درنظر می‌گیریم.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$ یا $x = -1$

$x \to 1 \Rightarrow y \to \frac{6}{0^{\pm}} \Rightarrow y \to \pm\infty$

پس خط به معادلهٔ $x = 1$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$x \to -1 \Rightarrow \lim \frac{x^2+3x+2}{x^2-1} = \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \to -1} \frac{x+2}{x-1} = -\frac{1}{2}$$

پس خط به معادلهٔ $x = -1$ معادلهٔ مجانب قائم تابع فوق نیست.

مثال۶. تابع با ضابطهٔ $y = f(x) = \frac{x^2-4}{(x-2)^2(x-3)}$ را در نظر می‌گیریم.

$(x-2)^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ یا $x = 3$

$x \to 3 \Rightarrow \lim y = \frac{5}{0^{\pm}} = \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$

پس خط به معادلهٔ $x = 3$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

$$x \to 2 \Rightarrow y \to \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)^2(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{(x-2)(x-3)} = \frac{4}{0^{\pm}} \to \pm\infty$$

$\Rightarrow y \to \pm\infty$

پس خط به معادلهٔ $x = 2$ هم مجانب قائم تابع فوق است.

تذکر۳. اگر در یک تابع، $x \to a$، آن‌گاه $\lim y = \frac{0}{0}$، چنانچه پس از رفع ابهام $\lim_{x \to a} y = \infty$، آن‌گاه خط به معادلهٔ $x = a$ مجانب قائم نمودار تابع است.

مسألهٔ۱. در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+(m-1)x+1}$، m را چنان بیابید تا منحنی تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: باید معادلهٔ $x^2 + (m-1)x + 1 = 0$ فقط یک ریشه داشته باشد، لذا باید $\Delta = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 4$

$\Rightarrow m - 1 = \pm 2 \Rightarrow m = 1 \pm 2 \Rightarrow m = 3$ یا $m = -1$

مسألهٔ۲. در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x-2}{x^2+(m-4)x-2}$، m را چنان بیابید تا نمودار تابع یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: مانند مسألهٔ قبل عمل می‌کنیم. می گوییم باید معادلهٔ $x^2+(m-4)x-2=0$ یک ریشه داشته باشد؛ یعنی باید $\Delta=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(m-4)^2+8$$

ملاحظه می‌کنیم که عبارت $(m-4)^2+8$ همواره مثبت است و نمی‌تواند برابر صفر باشد، پس چه باید کرد؟

باید m را چنان پیدا کرد تا نمودار تابع، یک مجانب قائم داشته باشد. (به مثال ۵ دقت کنید.)

m را چنان پیدا می‌کنیم تا یکی از دو ریشهٔ مخرج عدد ۲ باشد؛ یعنی $x=2$ را در معادلهٔ $x^2+(m-4)x-2=0$ قرار می‌دهیم، بنابراین:

$$4+(m-4)(2)-2=0 \Rightarrow 2m-6=0 \Rightarrow m=3$$

حال $m=3$ را بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2+(m-4)x-2}$$

$$f(x)=\frac{x-2}{x^2-x-2}$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1 \text{ یا } x=2$$

$$x\to -1 \Rightarrow f(x)\to \pm\infty$$

$$x\to 2 \Rightarrow f(x)=\frac{0}{0} \text{ و } \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4}$$

پس خط به معادلهٔ $x=2$ نمی‌تواند مجانب قائم تابع f باشد؛ زیرا g آن به سمت ∞ میل نکرده است. بنابراین نمودار تابع فقط یک مجانب قائم دارد.

مسألهٔ۳. در تابع با ضابطهٔ زیر:

$$y=f(x)=\frac{x^2-4}{(m-4)x^2-2x+1}$$

m را چنان بیابید تا منحنی تابع یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: به حلّ این مسأله بیشتر توجه کنید. باید m را چنان بیابیم تا نمودار تابع f یک مجانب قائم داشته باشد.

$$(m-4)x^2-2x+1=0$$

بنابراین سه حالت زیر را دارد:

۱) $\Delta'=b'^2-ac=0 \Rightarrow 1-(m-4)=0 \Rightarrow m=5$

۲) $a=0$ یا $m-4=0 \Rightarrow m=6$

۳) یکی از جواب‌های معادلهٔ «۰=مخرج»، برابر یکی از جواب‌های معادله «۰=صورت» باشد.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x=2 \text{ یا } x=-2$$

$$x=2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ ۰=مخرج}} (m-4)(4)-4+1=0 \Rightarrow 4m-19=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{19}{4}$$

$$x=-2 \xrightarrow{\text{در معادلهٔ ۰=مخرج}} (m-4)(4)+4+1=0 \Rightarrow 4m-11=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{11}{4}$$

مسألهٔ۴. در تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x^2+5}{x^2+(a+b)x+2a}$، a و b را چنان بیابید تا دو خط به معادله‌های $x=2\sqrt{3}-2$ و $x=2\sqrt{3}+2$ مجانب‌های قائم نمودار تابع باشد.

حل: در واقع ریشه‌های معادلهٔ $x^2+(a+b)x+2a=0$ $(2\sqrt{3}-2)$ و $(2\sqrt{3}+2)$ هستند. اگر x' و x'' ریشه‌های معادلهٔ فوق باشند، داریم:

$$x'.x''=\frac{c}{a}=2a$$

$$x'.x''=(2\sqrt{3}-2)(2\sqrt{3}+2)=12-4=8$$

$$2a=8 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

$$x'+x''=-\frac{b}{a}=-(a+b)$$

$$x'+x''=2\sqrt{3}-2+2\sqrt{3}+2=4\sqrt{3}$$

$$-(a+b)=4\sqrt{3} \Rightarrow a+b=-4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 4+b=-4\sqrt{3} \Rightarrow b=-4\sqrt{3}-4 \text{ یا } \boxed{b=-4(\sqrt{3}+1)}$$

مسألهٔ۵. معادلهٔ مجانب قائم تابع به معادلهٔ $\frac{x-2}{x}+\frac{y-1}{y+1}=4$ را بیابید.

حل: روش اول:

$$\frac{(x-2)(y+1)+x(y-1)}{x(y+1)}=4$$

$$\Rightarrow 4xy+4x=xy+x-2y-2+xy-x$$

$$\Rightarrow 2xy+2y=-4x \Rightarrow 2(x+1)y=-4x$$

$$\Rightarrow y=\frac{-2x}{x+1}$$

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

پس خط به معادلهٔ $x = -1$ ، مجانب قائم منحنی تابع است .

$$x \to -1 \Rightarrow y \to \pm\infty$$

روش دوم :

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{x-2}{x}+\frac{y-1}{y+1}\right)=4$$

$$\Rightarrow \lim_{y\to\infty}\frac{x-2}{x}+1=4 \Rightarrow \lim_{y\to\infty}\frac{x-2}{x}=3 \Rightarrow x\to -1$$

پس خط به معادلهٔ $x=-1$ مجانب قائم نمودار تابع فوق است .

مسألهٔ ۶ . معادله‌های مجانب‌های قائم منحنی مکان هندسی نقطهٔ $M\left(\frac{t}{t^2+1}, \frac{t^3}{t^2-4}\right)$ را وقتی t تغییر می‌کند، بیابید .

حل : برای تعیین معادله‌های مجانب قائم، y را به سمت ∞ میل می‌دهیم .

$$y\to\infty \Rightarrow \frac{t^3}{t^2-4}\to\infty \Rightarrow \begin{cases} t^2-4\to 0 \\ \text{یا} \\ t\to\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\to\pm 2 \\ \text{یا} \\ t\to\infty \end{cases}$$

حال وقتی $t\to 2$ ، $t\to -2$ و $t\to\infty$ ، حد x را محاسبه می‌کنیم :

$$t\to 2 \Rightarrow \lim x = \frac{2}{4+1}=\frac{2}{5}$$

$$t\to -2 \Rightarrow \lim x = \frac{-2}{4+1}=-\frac{2}{5}$$

$$t\to\infty \Rightarrow \lim x = 0$$

پس خط‌های به معادله‌های $x=\frac{2}{5}$ و $x=-\frac{2}{5}$ و $x=0$ مجانب‌های قائم منحنی مکان نقطهٔ M است .

مسألهٔ ۷ . معادله‌های مجانب‌های قائم تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\tan x}{2\cos x-1}$ را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ بیابید .

حل :

$$f(x)=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{2\cos x-1}=\frac{\sin x}{\cos x(2\cos x-1)}$$

الف) $\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi \xrightarrow{k=0,1} \boxed{x=0, 2\pi}$

ب) $2\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

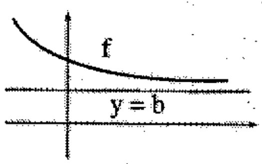
$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=0} \boxed{x=\frac{\pi}{3}}$$

$$x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \xrightarrow{k=1} \boxed{x=\frac{5\pi}{3}}$$

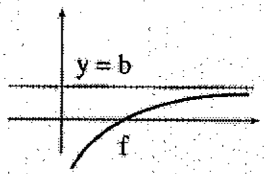
پس خط‌های به معادله‌های $x=0$ و $x=2\pi$ ، $x=\frac{\pi}{3}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ مجانب‌های قائم منحنی تابع فوق است .

۲. مجانب افقی

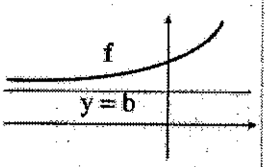
به نمودارهای زیر توجه کنید .



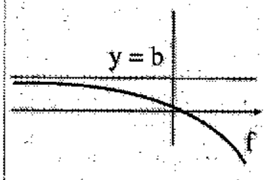
شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)



شکل (۴)

در شکل ۱ : $x\to+\infty \Rightarrow \lim f(x)=b$

در شکل ۲ : $x\to+\infty \Rightarrow \lim f(x)=b$

در شکل ۳ : $x\to-\infty \Rightarrow \lim f(x)=b$

در شکل ۴ : $x\to-\infty \Rightarrow \lim f(x)=b$

خط به معادلهٔ $y=b$ را در شکل‌های فوق، مجانب افقی تابع f گویند .

تعریف : اگر در تابع f فقط و فقط وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ یا $x\to\pm\infty$ ، آن‌گاه $\lim f(x)=b$ ، آن‌گاه خط به معادلهٔ $y=b$ را مجانب افقی نمودار تابع f گویند .

مثال ۷ . مجانب‌های افقی هریک از تابع‌های به معادله‌های زیر را بیابید .

۱) $f(x)=\frac{2x-1}{x-4}$

مجانب افقی : $x \to \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{2x-1}{x-4} = 2$

پس خط به معادلهٔ $y = 2$ مجانب افقی منحنی تابع f است .

۲) $f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{x^3 + x}$

مجانب افقی : $x \to \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{2x^2 - x + 5}{x^3 + x}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{x} = 0$$

پس خط به معادلهٔ $y = 0$ مجانب افقی منحنی تابع f است .

۳) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

مجانب افقی : $x \to \pm\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{x^3}{x^2 - 1}$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}(x) = \pm\infty$$

پس نمودار این تابع مجانب افقی ندارد .

تذکر۱ . یک تابع با ضابطهٔ کسری وقتی مجانب افقی دارد که درجهٔ صورت از درجهٔ مخرج بیشتر نباشد .

مثال۸ . معادله‌های مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1}$ را بیابید .

حل:

الف) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{2x-1}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

پس $y = \frac{1}{2}$ معادلهٔ مجانب افقی این تابع است .

ب) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{2x-1}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(2-\frac{1}{x})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}} = -\frac{1}{2}$$

پس خط به معادلهٔ $y = -\frac{1}{2}$ نیز مجانب افقی این تابع است .

مثال۹ . معادلهٔ مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x}$ را بیابید .

حل:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x} = (x + \sqrt{x^2 - 4x})(\frac{x - \sqrt{x^2 - 4x}}{x - \sqrt{x^2 - 4x}})$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - x^2 + 4x}{x - \sqrt{x^2(1-\frac{4}{x})}} = \frac{4x}{x - |x|\sqrt{1-\frac{4}{x}}}$$

الف) $x \to +\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{4x}{x - x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4x}{x(1-\sqrt{1-\frac{4}{x}})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = \frac{4}{0^+} \to +\infty$$

پس در این تابع ، وقتی $x \to +\infty$ ، منحنی تابع مجانب افقی ندارد .

ب) $x \to -\infty \Rightarrow \lim f(x) = \lim \frac{4x}{x + x\sqrt{1-\frac{4}{x}}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{4x}{x(1+\sqrt{1-\frac{4}{x}})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x}}} = \frac{4}{1+1} = 2$$

پس خط به معادلهٔ $y = 2$ ، معادلهٔ مجانب افقی این تابع است .

مثال۱۰ . معادلهٔ مجانب افقی تابع با ضابطه $f(x)=x-\sqrt[3]{x^3+4x^2}$ را بیابید.

حل :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt[3]{x^3+4x^2})$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}(x-\sqrt[3]{x^3+4x^2})\times\frac{x^2+\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+4x^2}}{x^2+\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+4x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-4x^2}{x^2+\sqrt[3]{(x^3+4x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+4x^2}}$$

$$\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2}{x^2+\sqrt[3]{x^6}+x\sqrt[3]{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2}{x^2+x^2+x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-4x^2}{3x^2}=-\frac{4}{3}$$

پس خط به معادلهٔ $y=-\frac{4}{3}$ مجانب افقی تابع f است.

مثال۱۱ . اگر خط به معادلهٔ $y=2$ مجانب افقی تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{(a-2)x^3+(ab-8)x^2+(ac-20)x+4}{x-10}$ باشد، a، b و c را بیابید.

حل : بنابه تذکر (۱) مجانب افقی، این تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که ضریب‌های x^3 و x^2 در صورت کسر صفر باشد؛ یعنی :

$$a-2=0\Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$ab-8=0\Rightarrow 2b-8=0\Rightarrow \boxed{b=4}$$

شکل جدید معادلهٔ تابع : $f(x)=\frac{(2c-20)x+4}{x-10}$

$$x\to\pm\infty\Rightarrow \lim f(x)=\frac{2c-20}{1}\Rightarrow y=2c-20$$

معادلهٔ مجانب افقی این تابع است . از طرفی $y=2$ معادلهٔ مجانب افقی است؛ پس :

$$2c-20=2\Rightarrow 2c=22\Rightarrow \boxed{c=11}$$

مثال۱۲ . اگر در تابع با ضابطهٔ زیر :

$$f(x)=ax+b-\sqrt{4x^2-24x}$$

وقتی $x\to+\infty$ منحنی تابع مجانب افقی به معادلهٔ $y=2$ داشته باشد، a و b را بیابید. $(a>0)$

حل :

$$\lim_{x\to+\infty}(ax+b-\sqrt{4x^2-24x})$$

$$A=\lim_{x\to+\infty}(ax+b-\sqrt{4x^2-24x})\times\frac{ax+b+\sqrt{4x^2-24x}}{ax+b+\sqrt{4x^2-24x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2x^2+2abx+b^2-4x^2+24x}{ax+b+\sqrt{x^2(4-\frac{24}{x})}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-4)x^2+(2ab+24)x+b^2}{ax+b+x\sqrt{4-\frac{24}{x}}}$$

باید $a^2-4=0$ ، پس $a=2$ یا $a=-2$ ، با توجه به شرط مسأله فقط $a=2$ قابل قبول است.

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2ab+24)x+b^2}{x(a+\frac{b}{x}+\sqrt{4-\frac{24}{x}})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(2ab+24+\frac{b^2}{x})}{x(a+\frac{b}{x}+\sqrt{4-\frac{24}{x}})}$$

$$=\frac{2ab+24}{a+2}$$

پس $y=\frac{2ab+24}{a+2}$ معادلهٔ مجانب افقی است.

$$\frac{2ab+24}{a+2}=2\Rightarrow 2ab+24=2a+4,\quad a=2$$

$$4b+24=8\Rightarrow 4b=-16\Rightarrow \boxed{b=-4}$$

مثال۱۳ . معادله‌های مجانب‌های افقی مکان هندسی نقطهٔ $M(\frac{t^3+4}{t^2-1},\ \frac{t+4}{t})$ را وقتی t تغییر می‌کند، بیابید.

حل :

$$x\to\pm\infty\Rightarrow\frac{t^3+4}{t^2-1}\to\infty$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t^2-1\to 0\\ \text{یا}\\ t\to\infty\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\to 1\ \text{یا}\ t\to -1\\ \text{یا}\\ t\to\infty\end{cases}$$

$$t\to 1\Rightarrow \lim y=\frac{1+4}{1}=5\Rightarrow y=5$$

$$t\to -1\Rightarrow \lim y=\frac{-1+4}{-1}=-3\Rightarrow y=-3$$

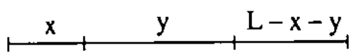
$$t\to\infty\Rightarrow \lim y=1\Rightarrow y=1$$

پس خط‌های به معادله‌های $y=5$ و $y=-3$ و $y=1$ مجانب‌های افقی است.



مسائل احتمال در فضاهای نمونهٔ پیوسته، به دلیل ساختار شهودی و هندسی که دارند، معمولاً مورد توجه خاص دانش‌آموزان قرار می‌گیرند. یکی از معروف‌ترین این مسائل که امروزه در میان دانش‌آموزان رشتهٔ ریاضی، مسأله‌ای کاملاً شناخته شده است، مسأله زیر است:

ـ یک میلهٔ فلزی به طول معلوم L را دو برش تصادفی می‌زنیم. احتمال آن که سه قطعهٔ تولید شده بتوانند طول‌های اضلاع مثلثی باشند، چه‌قدر است؟ این مسأله در کتاب جبر و احتمال سال سوم رشتهٔ ریاضی و در بسیاری از کتاب‌های کمک‌آموزشی، به صورت‌های مختلف طرح شده است. راه‌حلّ معمول این کتاب‌ها این است که مطابق شکل زیر،



یک مسأله از احتمال پیوسته و یک راه‌حلّ تمام هندسی برای آن

طول‌های سه قطعه تشکیل شده را x، y و $L-x-y$ می‌نامند. فضای نمونهٔ این پدیدهٔ تصادفی، تمام زوج‌های مرتّب (x,y) هستند که در شرایط $۰<x<L$، $۰<y<L$ و $۰<x+y<L$ صدق می‌کنند. پیشامد مطلوب نیز با توجه به نامساوی مثلثی، به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$x+y>L-x-y\ ,\ x+L-x-y>y\ ,\ y+L-x-y>x$$

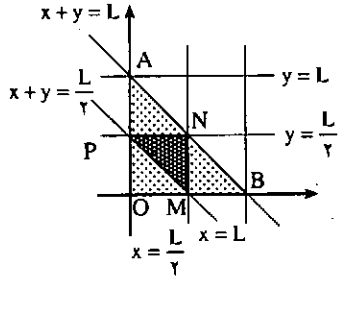
$$\Rightarrow x+y>\frac{L}{۲}\ ,\ y<\frac{L}{۲}\ ,\ x<\frac{L}{۲}$$

بنابراین فضای نمونه و پیشامد تصادفی عبارتند از:

$$S=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, ۰<x<L, ۰<y<L, ۰<x+y<L\}$$

$$A=\left\{(x,y)\mid(x,y)\in S\ ,\ x+y>\frac{L}{۲}\ ,\ y<\frac{L}{۲}\ ,\ x<\frac{L}{۲}\right\}$$

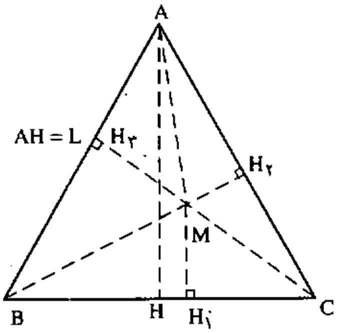
و با رسم محدودهٔ A و S در یک دستگاه مختصات دوبعدی، احتمال A را از تقسیم مساحت محدودهٔ A به مساحت محدودهٔ S به دست می‌آوریم:



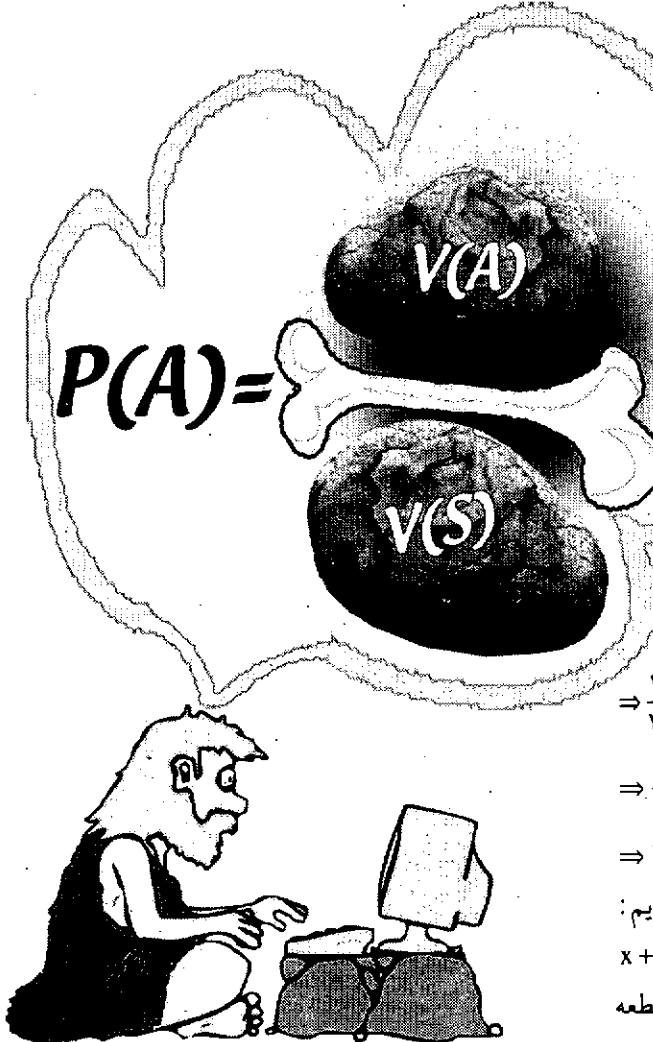
$$P(A)=\frac{S_{MNP}}{S_{OAB}}=\frac{۱}{۴}$$

درنتیجه، احتمال پیشامد فوق برابر $\frac{۱}{۴}$ است. امّا اکنون استدلالی دیگر برای محاسبهٔ این احتمال ارائه می‌دهیم که امتیاز آن، این است که جنبهٔ هندسی قوی‌تری دارد و بیش‌تر جالب توجه است. لازم به ذکر است که این روش استدلال، با کمی توضیح بیش‌تر، عیناً از مجلهٔ «دانش و مردم» شمارهٔ ۳۲ـ۳۱ (به سردبیری استاد پرویز شهریاری) و از مقاله‌ای تحت عنوان «احتمال و ابهام»، نوشتهٔ مارتین گاردنر (ترجمهٔ هرمز شهریاری) اقتباس شده است.

میله‌ای به طول L را ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع a فرض می‌کنیم. یک قضیهٔ معروف در هندسه می‌گوید:



مجموع فواصل هر نقطه در صفحهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن، مساوی طول ارتفاع مثلث است. اثبات این قضیه به کمک مساحت‌ها، آسان



است. مطابق شکل، نقطهٔ متغیر M در درون مثلث ABC را درنظر بگیرید. اگر فاصلهٔ M، یعنی طول‌های عمودهایی که از M بر سه ضلع مثلث رسم می‌شود، $MH_۱$ ، $MH_۲$ و $MH_۳$ باشد، می‌توان نوشت:

$$S_{ABC} = S_{MAB} + S_{MAC} + S_{MBC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} BC \times AH = \frac{۱}{۲} AB \times MH_۳ + \frac{۱}{۲} AC \times MH_۲ + \frac{۱}{۲} BC \times MH_۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} a.AH = \frac{۱}{۲} a.MH_۱ + \frac{۱}{۲} a.MH_۲ + \frac{۱}{۲} a.MH_۳$$

$$\Rightarrow MH_۱ + MH_۲ + MH_۳ = AH$$

و با فرض $MH_۱ = x$ و $MH_۲ = y$ و $MH_۳ = z$ داریم:

$$x + y + z = L$$

به این ترتیب، هر برش روی میله و تبدیل آن به سه قطعه به طول‌های x، y و z را می‌توان متناظر با انتخاب یک نقطه در درون مثلث متساوی‌الاضلاع فوق درنظر گرفت؛ یعنی فضای نمونهٔ پدیدهٔ تصادفی فوق، تمام نقاط درون مثلث است. اکنون می‌ماند تعیین نقاطی از این مجموعهٔ نقاط که واجد شرایط تشکیل مثلث باشند؛ یعنی مجموعهٔ نقاطی که به ازای آن‌ها $x + y > z$ ، $x + z > y$ و $y + z > x$ باشد. برای تعیین این مجموعهٔ نقاط، ابتدا فرض کنید برای یک نقطهٔ مفروض M، $z > x + y$ باشد؛ یعنی:

$MH_۳ > MH_۱ + MH_۲$ ، بنابراین:

$$\frac{۱}{۲} aMH_۳ > \frac{۱}{۲} aMH_۱ + \frac{۱}{۲} aMH_۲$$

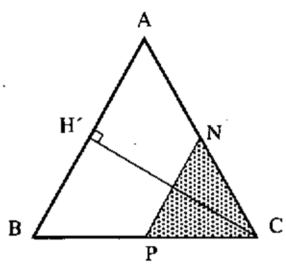
و از آن‌جا داریم: $S_{MAB} > S_{MAC} + S_{MBC}$ و در نتیجه:

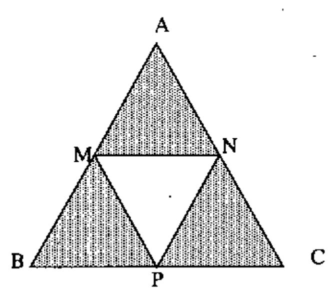
$$S_{MAB} > S_{ACBM} \Rightarrow ۲S_{MAB} > S_{ABC}$$

$$\Rightarrow S_{MAB} > \frac{۱}{۲} S_{ABC}$$

یعنی مجموعهٔ نقاط M که به ازای آن‌ها مساحت MAB از نصف مساحت مثلث ABC بیش‌تر باشد، نقاط نامطلوب هستند و بدیهی است که این نقاط، مجموعهٔ نقاطی هستند که فاصلهٔ آن‌ها از AB، بیش‌تر از نصف ارتفاع رأس C باشد.

در شکل مقابل، همهٔ نقاط درون مثلث NPC، نقاطی هستند که فاصلهٔ آن‌ها از AB بیش‌تر از نصف ارتفاع CH′ است. به همین ترتیب، اگر وسط‌های اضلاع دیگر مثلث را به یکدیگر وصل کنیم، مجموعهٔ نقاط بالای این پاره‌خط‌ها متناظر با برش‌هایی از میلهٔ L هستند که تشکیل مثلث نمی‌دهند. در شکل مقابل، این نقاط هاشور زده شده‌اند و نقاط پیشامد مطلوب نقاط درون مثلث MNP هستند و از آن‌جا خواهیم داشت:





$$P(A) = \frac{S_{MNP}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۴}$$



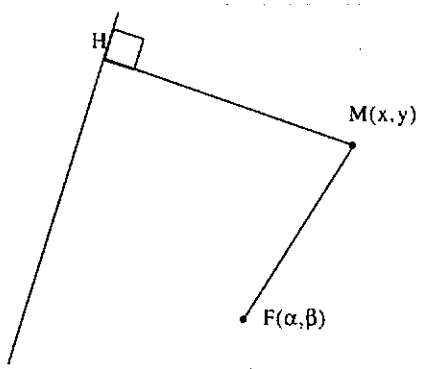
بحث پیرامون مقاطع مخروطی ۱

رحمان کیومرثی
دبیر ریاضی استان چهارمحال و بختیاری

ابتدا ثابت می‌کنیم که شکل کلی معادلهٔ یک مقطع مخروطی به صورت زیر است :

$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

برهان : فرض می‌کنیم $F(\alpha,\beta)$ کانون و خط (D) به معادلهٔ $ax+by+c=0$ خط هادی و نقطهٔ $M(x,y)$ نقطهٔ دلخواهی از یک مقطع مخروطی باشند.



طبق تعریف، در یک مقطع مخروطی می‌توان نوشت :

$$\frac{MF}{MH}=e \qquad (1)$$

e خروج از مرکز مقطع مخروطی است :

$$MH=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ,\ \ MF=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$$

اکنون به جای MH و MF در (۱) مقدارگذاری می‌کنیم.

درنتیجه داریم :

$$\frac{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}=e\Rightarrow$$

$$\frac{(a^2+b^2)[x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2]}{c^2+a^2x^2+b^2y^2+2abxy+2acx+2bcy}=e^2$$

$$(a^2+b^2)x^2-2(a^2+b^2)\alpha x+\alpha^2(a^2+b^2)+$$
$$(a^2+b^2)y^2-2\beta(a^2+b^2)y+\beta^2(a^2+b^2)=$$
$$a^2e^2x^2+b^2e^2y^2+2abe^2xy+2ace^2x+2bce^2y+e^2c^2$$
$$\Rightarrow \underbrace{(a^2e^2-a^2-b^2)}_{A}x^2+\underbrace{2abe^2}_{B}xy+\underbrace{(b^2e^2-a^2-b^2)}_{C}y^2+$$
$$2\underbrace{(ace^2-\alpha a^2-\alpha b^2)}_{D}x+2\underbrace{\left(bce^2-\beta a^2-\beta b^2\right)}_{E}y-$$
$$\underbrace{(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)}_{F}=0$$

در نتیجه خواهیم داشت :

$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

حال فرض می‌کنیم، مقطع مخروطی در حالت کلی مرکزدار و تجزیه نشده باشد. بنابراین برای پیدا کردن مختصات مرکز و با شرایطی که به پیدا کردن مختصات مرکز منجر می‌شود، معادلهٔ کلی مقطع مخروطی را همگن می‌کنیم، یعنی :

$$x\to\frac{x}{z},y\to\frac{y}{z}$$

در این صورت :

$$\frac{Ax^2}{z^2}+\frac{2Bxy}{z^2}+\frac{cy^2}{z^2}+\frac{2Dx}{z}+\frac{2Ey}{z}+F=0$$
$$Ax^2+2Bxy+cy^2+2Dxz+2Eyz+Fz^2=0$$

اینک به کمک مشتق، مختصات مرکز مقطع مخروطی را به دست می‌آوریم :

$$\omega \begin{cases} f'_x = 0 \Rightarrow 2Ax + 2By + 2Dz = 0 \Rightarrow Ax + By + Dz = 0 \\ f'_y = 0 \Rightarrow 2Bx + 2cy + 2Ez = 0 \Rightarrow Bx + cy + Ez = 0 \\ f'_z = 0 \Rightarrow 2Dx + 2Ey + 2Fz = 0 \Rightarrow Dx + Ey + Fz = 0 \end{cases}$$

دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی بالا، یک دستگاه همگن است. شرط وجود جواب در این دستگاه آن است که دترمینان ضرایب آن مخالف صفر باشد. یعنی:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \neq 0$$

حال فرض می‌کنیم، این مقطع مخروطی مرکزدار از نوع هذلولی باشد. بنابراین باید بتوانیم نقاط بینهایت دور این مقطع را به دست آوریم تا به کمک آن‌ها معادلات مجانب‌های مقطع را به دست آوریم. برای این کار اگر در فرم همگن شدهٔ معادله مقدار z را صفر کنیم، نقاط بینهایت دور به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 = 0 \\ z \to 0 \end{cases}$$

وقتی که $z \to 0$، آن‌گاه:

$$Ax^2 + 2Bxy + cy^2 = 0 \qquad (2)$$

در دیفرانسیل فرا گرفته‌ایم که شیب خط مجانب مایل از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$\text{شیب مجانب مایل } m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x}$$

بنابراین طرفین رابطهٔ (۲) را به x^2 تقسیم می‌کنیم و اگر $x \to \pm\infty$ میل دهیم، خواهیم داشت:

$$A + 2B \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} + C \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \Rightarrow A + 2Bm + cm^2 = 0$$

معادلهٔ درجه دوم بالا، یعنی: $cm^2 + 2Bm + A = 0$ (۳) را درنظر می‌گیریم و در تعداد جواب‌های آن بحث می‌کنیم:

$$\Delta = 4B^2 + 4AC = 4(B^2 - AC) = 4\delta$$

$$\delta = B^2 - AC$$

۱. اگر $\delta > 0$، یعنی معادلهٔ (۳) دو ریشه دارد، پس منحنی دارای ۲ مجانب است، درنتیجه مقطع هذلولی است. به‌خصوص اگر $A + C = 0$ باشد، هذلولی متساوی‌القطرین یا متساوی‌الساقین است.

۲. اگر $\delta < 0$ باشد، معادلهٔ (۳) ریشه ندارد و بنابراین مقداری برای m به دست نمی‌آید. یعنی مقطع مجانب ندارد. پس مقطع بیضی است و اگر A=C و $B = 0$ باشند، مقطع دایره است.

۳. اگر $\delta = 0$ باشد، منحنی یک امتداد مجانب دارد و درنتیجه مقطع سهمی است.

پس با توجه به نکات گفته شده، چکیدهٔ مطالب به صورت زیر است:

در مقطع مخروطی $Ax^2 + 2Bxy + cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$، که $\delta = B^2 - Ac$، داریم:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \neq 0$$

۱. اگر $\delta > 0$، آن‌گاه مقطع مرکزدار تجزیه‌نشده از نوع هذلولی اگر $A + C = 0$ باشد، هذلولی متساوی‌الساقین است.

۲. اگر $\delta < 0$، آن‌گاه مقطع مرکزدار تجزیه‌نشده از نوع بیضی اگر A=C و $B = 0$ باشد، هذلولی دایره است.

۳. اگر $\delta = 0$، آن‌گاه مقطع سهمی است.

حال اگر $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$ باشد، بحث را به صورت زیر پی می‌گیریم:

$$\Delta = 0 \begin{cases} \delta < 0 & \text{۱. منحنی در این حالت به دو خط موهولی یا یک نقطه تبدیل می‌شود.} \\ \delta > 0 & \text{۲. مقطع به دو خط متقاطع تبدیل می‌شود.} \\ \delta = 0 \Rightarrow B^2 - Ac = 0 \Rightarrow c = \dfrac{B^2}{A} & \text{.۳} \end{cases}$$

و اگر در این حالت به جای $c = \dfrac{B^2}{A}$ در Δ مقدارگذاری

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & \frac{B^2}{A} & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = D\begin{vmatrix} B & D \\ \frac{B^2}{A} & E \end{vmatrix} - E\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} + F\begin{vmatrix} A & B \\ B & \frac{B^2}{A} \end{vmatrix} = 0$$

وقتی حاصل جمع بالا را ساده کنیم، خواهیم داشت:

وقتی حاصل جمع بالا را ساده کنیم، خواهیم داشت:

$$-\frac{1}{A}(AE-BD)^2=0 \Rightarrow AE-BD=0 \Rightarrow E=\frac{BD}{A}$$

اگر این مقدار را در معادلهٔ کلی مقطع مخروطی جایگزین کنیم و $C=\frac{B^2}{A}$ قرار دهیم، معادله به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{A}(Ax-By)^2+2Dx+2Ey+F=0$$

با توجه به تساوی $E=\frac{BD}{A}$ در معادلهٔ مقطع مخروطی خواهیم داشت:

$$(Ax-By)^2+2D(Ax+By)+AF=0 \Rightarrow \delta'=D^2-AF$$

حال توجه داریم که اگر معادلهٔ بالا دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، این ریشه‌ها نمایش دو خط موازی هستند و اگر ریشهٔ مضاعف داشته باشد، نمایش دو خط منطبق بر هم است و اگر ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، ریشه‌های موهومی نمایش دو خط موازی موهومی هستند. بحث بالا را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

$$\begin{vmatrix}\delta=B^2-Ac\\ \delta=0\Rightarrow\\ \Delta=0\end{vmatrix}\quad\begin{cases}D^2-AF>0\\ D^2-AF=0\\ D^2-AF<0\end{cases}$$

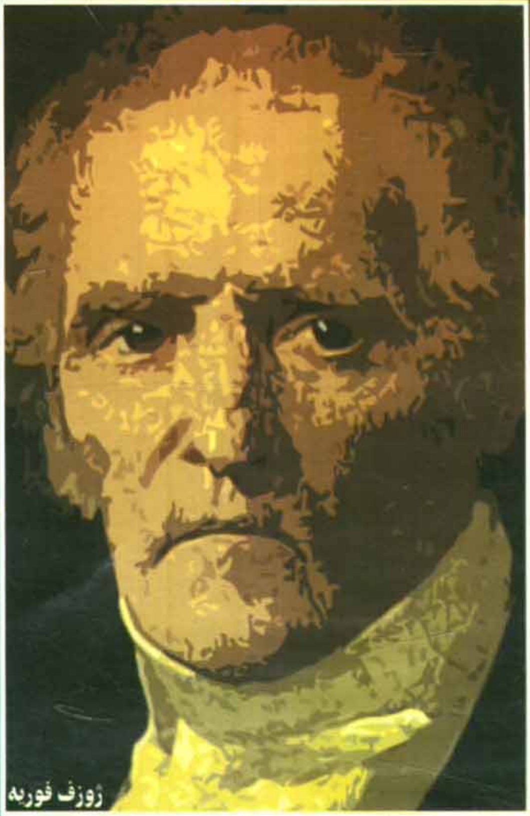
۱. مقطع به دو خط موازی حقیقی تبدیل می‌شود: $D^2-AF>0$
۲. مقطع به دو خط منطبق بر هم تبدیل می‌شود: $D^2-AF=0$
۳. مقطع به دو خط موازی موهومی تبدیل می‌شود: $D^2-AF<0$

$$\Delta\neq 0\Rightarrow\begin{cases}\Delta>0\Rightarrow\begin{cases}\delta>0\ (1)\\ \delta<0\Rightarrow\begin{cases}A\Delta<0\ (2)\\ A\Delta>0\ (3)\end{cases}\\ \delta=0\ (4)\end{cases}\\[2em] \Delta<0\Rightarrow\begin{cases}\delta>0\ (5)\\ \delta<0\Rightarrow\begin{vmatrix}A\Delta<0\ (6)\\ A\Delta>0\ (7)\end{vmatrix}\\ \delta=0\ (8)\end{cases}\end{cases}$$

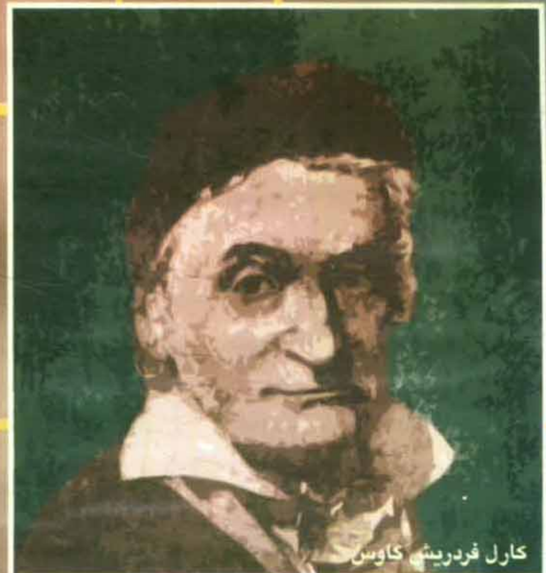
۱. مرکزدار تجزیه نشده هذلولی
۲. مرکزدار بیضی حقیقی
۳. مرکزدار بیضی موهومی
۴. مقطع سهمی است.
۵. مقطع مرکزدار هذلولی اگر $A+c=0$ هذلولی متساوی‌الساقین
۶. مرکزدار و بیضی حقیقی
۷. مرکزدار بیضی موهومی
۸. مقطع سهمی است

ادامه دارد

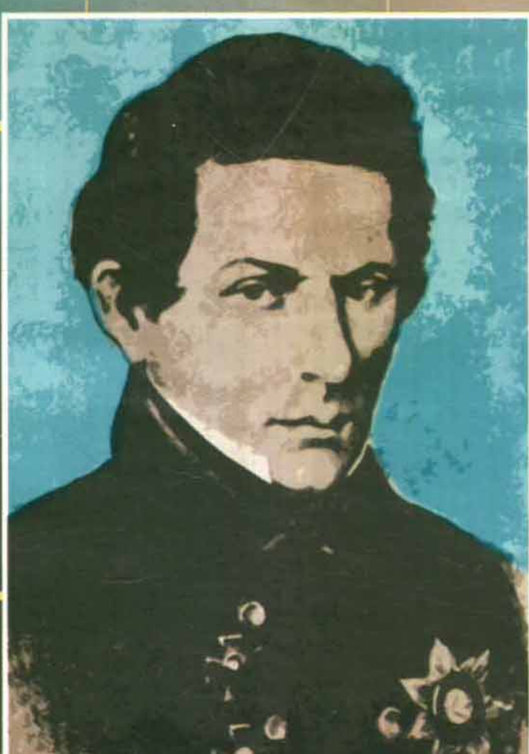
زبان حال ریاضی دان



ژوزف فوریه



کارل فردریش گاوس



نیکلای لباچفسکی

بررسی عمیق طبیعت پربارترین منبع کشفیات ریاضی است.

ژوزف فوریه (۱۸۳۰-۱۷۶۸)

هیچ شاخه ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به کار نرود.

نیکلای لباچفسکی(۱۸۵۶-۱۷۹۳)

ریاضیات مادر علوم و حساب مادر ریاضیات است و گاهی در خدمت ستاره شناسی و سایر علوم طبیعی درمی آید ولی در همه حال شأن مادری اش محفوظ است.

کارل فردریش گاوس(۱۸۵۵-۱۷۷۷)

برگرفته از کتاب زبان حال ریاضی دان

به روایت دکتر علی اکبر عالم‌زاده


دفتر انتشارات کمک آموزشی
آیا شما هم مجله های رشد را می شناسید
آموزش زبان و ادب فارسی
رشد آموزش شیمی ۶۹
شیمی و دنیای شگفت انگیز LC ها
شبیه سازی تعادل دینامیک
نمایش بزرگی عدد آووگادرو
سلاح های شیمیایی در یک نگاه
رشد آموزش ریاضی ۷۶
رشد آموزش فیزیک ۶۷
www.roshdmag.org
رشد آموزش زبان ۷۱
مجله علمی - ترویجی
سال هجدهم تابستان ۱۳۸۲، بها ۲۰۰ تومان
www.roshdmag.org